



**FACULTAD
DE INGENIERIA**

Universidad de Buenos Aires

Series de Fourier

Dr. Ing. Pedro D. Arini
parini@fi.uba.ar

2do. cuatrimestre 2026

- 1 Repaso
- 2 Representación de señales de tiempo continuo
- 3 Propiedades de las series de Fourier de señales de tiempo continuo
- 4 Series de Fourier para señales de tiempo discreto
- 5 Sistemas LTI y exponenciales

Representación y Ortogonalidad en 3D (repaso 2)

Un vector $\mathbf{A}$ desde el origen hasta el punto (x_0, y_0, z_0) se expresa como:

$$\mathbf{A} = x_0 \mathbf{a}_x + y_0 \mathbf{a}_y + z_0 \mathbf{a}_z$$

Dado que los vectores unitarios son mutuamente perpendiculares:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_y &= \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_x = 0 \\ \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_x &= \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z = 1 \end{aligned} \quad (1.12)$$

Estas relaciones se expresan de forma compacta como:

$$\mathbf{a}_m \cdot \mathbf{a}_n = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases} \quad (1.13)$$

donde $m, n \in \{x, y, z\}$.

Recordar ! Un espacio completo de señales (o un conjunto completo o cerrado de funciones ortogonales) es un espacio funcional donde cualquier señal arbitraria del espacio puede ser representada de manera exacta como una combinación lineal de un conjunto de señales de base. Por ej. un vector que vive en 3D no puede representarse en un espacio de 2 dimensiones

El concepto tridimensional se extiende directamente a un espacio de n dimensiones utilizando coordenadas mutuamente perpendiculares:

- **Vectores unitarios:** $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ (ortogonales y completos).
- Cualquier vector $\mathbf{A}$ en este espacio se representa como:

$$\mathbf{A} = C_1\mathbf{x}_1 + C_2\mathbf{x}_2 + \dots + C_n\mathbf{x}_n = \sum_{r=1}^n C_r\mathbf{x}_r \quad (1.14)$$

- **Condición de ortonormalidad (magnitud unitaria):**

$$\mathbf{x}_m \cdot \mathbf{x}_n = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases} \quad (1.15)$$

Las constantes C_r representan la magnitud de las componentes de $\mathbf{A}$ sobre los ejes de proyección. Se deduce directamente que:

$$C_r = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_r \quad (1.16)$$

Demostración de (1.16): Aplicando el producto escalar por $\mathbf{x}_r$ a ambos lados de (1.14):

$$\mathbf{A} = C_1 \mathbf{x}_1 + C_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + C_n \mathbf{x}_n = \sum_{r=1}^n C_r \mathbf{x}_r \quad (1.14)$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_r = C_1 \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_r + C_2 \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_r + \cdots + C_r \mathbf{x}_r \cdot \mathbf{x}_r + \cdots + C_n \mathbf{x}_n \cdot \mathbf{x}_r \quad (1.17)$$

Debido a la ortogonalidad (Eq. 1.15), todos los términos con $i \neq r$ son nulos:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_r = C_r (\mathbf{x}_r \cdot \mathbf{x}_r) = C_r \quad (1.18)$$

donde el conjunto $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ se llama espacio ortogonal de vectores

Si el producto de un vector consigo mismo es una constante $k_m \neq 1$, el espacio es **ortogonal** pero no ortonormal:

$$\mathbf{x}_m \cdot \mathbf{x}_n = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ k_m & m = n \end{cases} \quad (1.19)$$

pero si k_m es igual a uno se llama conjunto ortogonal normalizado o espacio vectorial ortonormal.

Cualquier vector completo $\mathbf{F}$ se expresa como la combinación lineal:

$$\mathbf{F} = C_1 \mathbf{x}_1 + C_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + C_r \mathbf{x}_r + \cdots + C_n \mathbf{x}_n \quad (1.21)$$

en un espacio ortogonal será

$$C_r (\mathbf{x}_r \cdot \mathbf{x}_r) = C_r \cdot k_r \quad (1)$$

Donde los coeficientes óptimos de escala se calculan como:

$$C_r = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{x}_r}{k_r} = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{x}_r}{\mathbf{x}_r \cdot \mathbf{x}_r} \quad (1.22)$$

Definición

Se dice que dos señales $p(t)$ y $q(t)$, distintas de cero $p(t)$ y $q(t)$ son *ortogonales* sobre el intervalo $t = [t_1, t_2]$ si:

$$\int_{t_1}^{t_2} p(t)q^*(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} p^*(t)q(t)dt = 0$$

donde el superíndice $*$ denota el operador de conjugación complejo. Además, si ambas señales $p(t)$ y $q(t)$ también satisfacen la propiedad de magnitud unitaria:

$$\int_{t_1}^{t_2} p(t)p^*(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} q(t)q^*(t)dt = 1$$

se dice que son *ortonormales* entre sí en el intervalo $t = [t_1, t_2]$.

Espacios de señales

¿Qué pasaría si no conjugáramos? Si definiéramos el producto interno complejo de forma simple como la integral del producto directo de las funciones sin conjugar

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_a^b x(t)y(t)dt$$

sería

$$E = \int (j)^2 dt = \int (-1) dt < 0$$

Además, de este modo, al evaluar la norma de la señal consigo misma, se asegura la obtención de un número real no negativo :

$$|x(t)|^2 = \langle x(t), x(t) \rangle = \int_a^b x(t)x^*(t)dt = \int_a^b |x(t)|^2 dt = E_x \geq 0$$

Conjugando:

$$\langle e^{jk\omega_0 t}, e^{jk\omega_0 t} \rangle = \int_0^{T_0} e^{jk\omega_0 t} (e^{jk\omega_0 t})^* dt = \int_0^{T_0} e^{jk\omega_0 t} e^{-jk\omega_0 t} dt = \int_0^{T_0} e^{j0} dt = T_0$$

Sin conjugar:

$$\int_0^{T_0} e^{jk\omega_0 t} \cdot e^{jk\omega_0 t} dt = \int_0^{T_0} e^{j2k\omega_0 t} dt = 0 \quad (\text{para } k \neq 0)$$

Definición

Un conjunto de N funciones $\{p_1(t), p_2(t), \dots, p_N(t)\}$ es *mutuamente ortogonal* sobre el intervalo $t = [t_1, t_2]$ si

$$\int_{t_1}^{t_2} p_m(t) q_n^*(t) dt = \begin{cases} E_n \neq 0 & \text{si } m = n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \text{para } 1 \leq m, n, \leq N$$

Además, si $E_n = 1, \forall n$, el conjunto se denomina *conjunto ortonormal*.

Definición

Un conjunto ortogonal $\{p_1(t), p_2(t), \dots, p_N(t)\}$ se conoce como *conjunto ortogonal completo* si no existe ninguna función $q(t)$ fuera del conjunto que satisfaga el condición de ortogonalidad con respecto a las señales $p_n(t)$, $1 \leq n \leq N$ del conjunto ortogonal.

Definición

Si un conjunto ortogonal es completo para cierta clase de funciones ortogonales dentro del intervalo $t = [t_1, t_2]$, entonces cualquier función arbitraria $x(t)$ puede ser expresado dentro del intervalo $t = [t_1, t_2]$ como:

$$x(t) = c_1 p_1(t) + c_2 p_2(t) + \dots + c_n p_n(t) + \dots + c_N p_N(t)$$

donde los coeficientes c_n , $n \in [1, \dots, N]$, se obtienen como:

$$c_n = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x(t) p_n^*(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} p_n(t) p_n^*(t) dt}$$

La ecuación integral es el equivalente en tiempo continuo del producto escalar en el espacio vectorial

Representación de señales periódicas I

Es de interés representar señales a través de bloques funcionales simples, cuya respuesta a un sistema sea relativamente simple

Esta fue la idea para el caso de la respuesta de un sistema LTI a una entrada arbitraria como una superposición lineal ponderada de respuestas al impulso desplazadas en el tiempo!!

Ahora haremos lo propio para un tipo particular de señales: las señales periódicas!!

Una señal periódica satisface:

$$x(t) = x(t + T)$$

donde T es el periodo fundamental, es decir el **mínimo valor** que satisface la igualdad. Se define la **frecuencia angular fundamental** como:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Ejemplos: $x(t) = \cos(\omega_0 t)$, $x(t) = e^{j\omega_0 t}$.

Representación de señales periódicas

Una intuición razonable que podemos desarrollar (y que varios matemáticos a lo largo de la historia tuvieron!!) es que *cualquier* función periódica $x(t)$ se puede representar como:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

La intuición es **casi correcta**, en el sentido que es necesario definir exactamente que entendemos por la igualdad de la ecuación anterior!! Además en función de dicha interpretación de la igualdad podríamos **acotar** el conjunto de señales periódicas a representar!!

Si

$$x(t) \in \Re \Leftrightarrow x(t) = x^*(t) \mapsto a_k = a_{-k}^*$$

De esta forma podemos escribir:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k e^{jk\omega_0 t} + a_k^* e^{-jk\omega_0 t} \right]$$

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\Re \left\{ a_k e^{jk\omega_0 t} \right\}$$

Con $a_k = A_k e^{j\theta_k} = B_k + jC_k$

$$x(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k)$$

$$x(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} [B_k \cos(k\omega_0 t) + C_k \sin(k\omega_0 t)]$$

Señales de energía finita I

Consideremos el espacio de señales de energía finita $L_2([0, T))$, donde solo consideramos un período de una señal periódica. Esto es las señales definidas en un intervalo $[0, T)$ que satisfacen:

$$\frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt < \infty$$

Como todo el estudio de una señal periódica lo podemos hacer en un intervalo de longitud T , es claro que podemos trabajar en este espacio considerando la extensión periódica de las señales fuera del intervalo $[0, T)$. De esta forma, estudiaremos señales periódicas, pero que en cada intervalo de longitud T tienen energía finita!!

En la primera clase discutimos que el espacio $L_2([0, T))$ es un espacio vectorial con producto interno:

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) g^*(t) dt$$

y base ortonormal dada por

$$\{ \dots, e^{-2j\omega_0 t}, e^{-j\omega_0 t}, 1, e^{j\omega_0 t}, e^{2j\omega_0 t}, \dots \}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Señales de energía finita II

Vamos a considerar la siguiente **aproximación** (**serie de Fourier truncada!!**) de $x(t) \in L_2([0, T])$:

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-N}^N b_k e^{jk\omega_0 t}$$

Ahora vamos a considerar la distancia entre $x(t)$ y $\hat{x}(t)$ medida con el siguiente criterio:

$$\|x(t) - \hat{x}(t)\|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t) - \hat{x}(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left| x(t) - \sum_{k=-N}^N b_k e^{jk\omega_0 t} \right|^2 dt$$

Es claro que podemos escribir:

$$\|x(t) - \hat{x}(t)\|^2 = \langle x(t) - \hat{x}(t), x(t) - \hat{x}(t) \rangle = \|x(t)\|^2 - \langle x(t), \hat{x}(t) \rangle - \langle \hat{x}(t), x(t) \rangle + \|\hat{x}(t)\|^2$$

Analicemos cada uno de los términos:

$$\|x(t)\|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt$$

Señales de energía finita III

$$\begin{aligned}\|\hat{x}(t)\|^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T \left| \sum_{k=-N}^N b_k e^{jk\omega_0 t} \right|^2 dt \\&= \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{k=-N}^N \sum_{p=-N}^N b_k b_p^* e^{jk\omega_0 t} e^{-jp\omega_0 t} dt \\&= \sum_{k=-N}^N \sum_{p=-N}^N b_k b_p^* \frac{1}{T} \int_0^T e^{j\omega_0(k-p)t} dt\end{aligned}$$

Pero sabemos que:

$$\int_0^T e^{j\omega_0(k-p)t} dt = \begin{cases} T & p = k \\ 0 & p \neq k \end{cases}$$

Entonces:

$$\|\hat{x}(t)\|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |\hat{x}(t)|^2 dt = \sum_{k=-N}^N |b_k|^2$$

Señales de energía finita IV

$$\begin{aligned}\langle x(t), \hat{x}(t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \hat{x}^*(t) dt \\&= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \left[\sum_{k=-N}^N b_k^* e^{-jk\omega_0 t} \right] dt \\&= \sum_{k=-N}^N b_k^* \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \\&= \sum_{k=-N}^N b_k^* a_k\end{aligned}$$

De la misma forma:

$$\langle \hat{x}(t), x(t) \rangle = \sum_{k=-N}^N a_k^* b_k$$

Podemos escribir:

$$\|x(t) - \hat{x}(t)\|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt - \left(\sum_{k=-N}^N b_k a_k^* + b_k^* a_k - |b_k|^2 \right)$$

Sumando y restando $\sum_{k=-N}^N |a_k|^2$, completando cuadrados, obtenemos:

$$\|x(t) - \hat{x}(t)\|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt - \sum_{k=-N}^N |a_k|^2 + \sum_{k=-N}^N |a_k - b_k|^2$$

Señales de energía finita V

Podemos hacer las siguientes observaciones:

- La distancia *en media cuadrática* entre $x(t)$ y su aproximación $\hat{x}(t)$ de orden N se hace mínima cuando:

$$b_k = a_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \langle x(t), e^{jk\omega_0 t} \rangle, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Es decir la *mejor* representación en términos de la energía del error de $x(t)$ para N finito se puede escribir como:

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-N}^N \langle x(t), e^{jk\omega_0 t} \rangle e^{jk\omega_0 t}$$

$\hat{x}(t)$ es la **proyección ortogonal** de $x(t)$ en el subespacio generado por $\{e^{jk\omega_0 t}\}_{k=-N}^N$!!!.

- Podemos hacer $N \rightarrow \infty$ para obtener (dado $\|x(t) - \hat{x}(t)\|^2 \geq 0$):

$$\|x(t)\|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt \geq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$

Esto es lo que se denomina *desigualdad de Bessel*.

Señales de energía finita VI

Sin embargo el conjunto de las exponenciales complejas $\{e^{jk\omega_0 t}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ tiene la extraordinaria propiedad de que la desigualdad de Bessel es de hecho una igualdad:

$$\|x(t)\|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$

De esta forma tenemos lo que se conoce como teorema de Parseval

Teorema

Para cualquier señal $x(t) \in L_2([0, T])$ la serie de Fourier

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}, \quad a_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

converge en media cuadrática a $x(t)$ es decir:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| x(t) - \sum_{k=-N}^N a_k e^{jk\omega_0 t} \right\|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left| x(t) - \sum_{k=-N}^N a_k e^{jk\omega_0 t} \right|^2 dt = 0$$

Señales de energía finita VII

El teorema anterior es el teorema central de la expansión en series de Fourier de las señales periódicas con energía finita en cada periodo. Notar que también tenemos la [relación de Parseval](#):

$$\frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$

Algunas consideraciones:

- El espacio $L_2([0, T])$ es lo suficientemente grande para todos nuestros propósitos. Prácticamente todas las señales de interés práctico estarán en este espacio. Notar que este espacio contiene a todas las funciones continuas en $[0, T]$ y también muchas señales [discontinuas](#) de interés.
- Es importante entender la convergencia enunciada en el teorema: lo que converge a cero es la energía del error!. Las señal $x(t)$ y su serie de Fourier son [iguales](#) en el sentido de que distancia en media cuadrática entre ambas es cero. **De aquí no necesariamente se implica que para todo $t \in [0, T]$ la señal $x(t)$ y su serie de Fourier son iguales!!!**

Definición

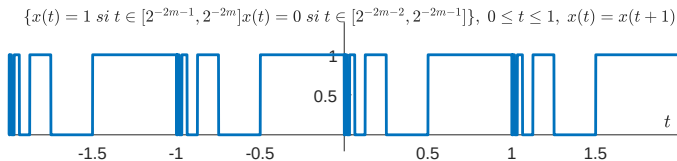
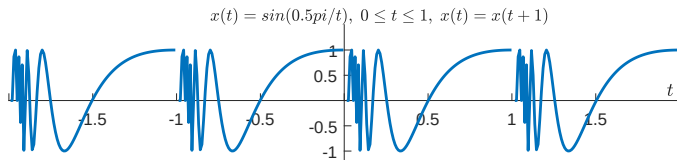
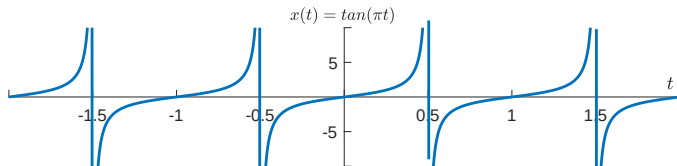
La serie de Fourier de una función periódica $x(t)$ existe si todos los coeficientes de la serie son finitos y la serie converge para todo n . En otras palabras, no hay un valor infinito en el espectro de magnitud de la representación de la serie.

Para que exista su representación en serie de Fourier, la señal periódica $x(t)$ debe satisfacer las siguientes condiciones:

- *Absolutamente integrable.* Es decir $\int_T |x(t)| dt < \infty$.
- *Variación acotada.* La señal periódica $x(t)$ tiene un número finito de máximos o mínimos en un período.
- *Discontinuidades finitas.* El período $x(t)$ tiene un número finito de discontinuidades en un período. Además, cada una de las discontinuidades tiene un valor finito.

Las condiciones anteriores se conocen como condiciones de Dirichlet.

Ejemplos



Convergencia puntual de las series de Fourier

Ni siquiera se puede asegurar que la serie de Fourier de una función continua general **converja puntualmente** en todo punto $t \in [0, T)$. Existen muchos resultados extremadamente técnicos en este sentido. El más simple y el primero obtenido por Dirichlet en el siglo XIX es el siguiente:

Teorema

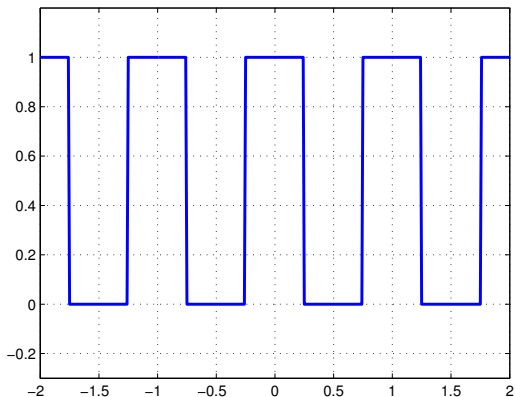
Sea $x(t) \in L_1([0, T))$ tal que es de variación acotada. Entonces:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N a_k e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{2} [x(t + 0^+) + x(t - 0^-)]$$

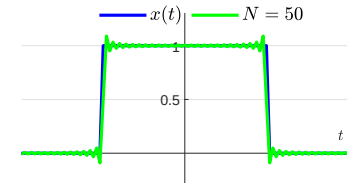
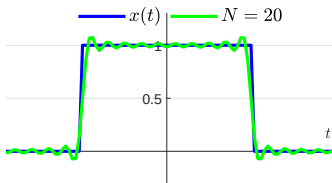
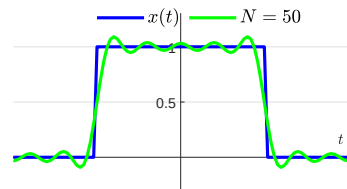
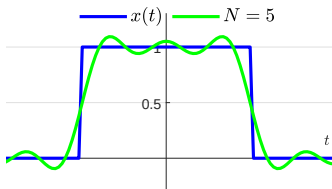
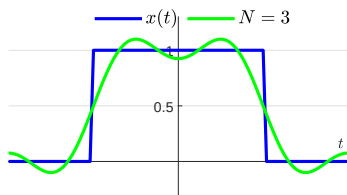
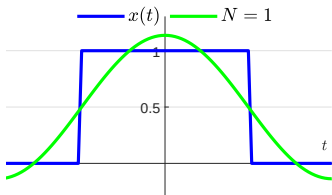
Lo importante de este resultado es que para una gran familia de señales (que para los fines prácticos es lo suficientemente grande) la serie de Fourier converge puntualmente en cada punto $t \in [0, T)$ donde la señal es continua y al promedio de los valores presentes en una discontinuidad!! La condición de **variación acotada** es técnica. Pero básicamente se puede decir en términos coloquiales que significa que la señal **no tenga infinitos máximos y mínimos ni infinitas discontinuidades en $[0, T)$!!**

Fenomeno de *Gibbs-Wilbraham*

Un fenómeno particular que se da con las series de Fourier de señales que satisfacen las condiciones del teorema anterior y tienen al menos un punto de discontinuidad es lo que se conoce como fenómeno de *Gibb-Wilbraham*. Vamos a ejemplificarlo considerando una onda cuadrada con periodo $T = 1$ como se muestra en la figura.



Fénomeno de *Gibbs-Wilbraham*



Propiedades de la serie Fourier

Vamos a asumir que las señales $x(t)$ son periódicas con periodo T y que cumplen todas las propiedades que discutimos arriba para que exista su representación en serie de Fourier. Denotaremos los coeficientes de Fourier como a_k y al proceso de mapeo de $x(t)$ en sus coeficientes y viceversa lo escribiremos como:

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} a_k$$

- **Linealidad:** Sean $x(t)$ e $y(t)$ funciones periódicas de periodo T tales que $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} a_k$ $y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} b_k$. Entonces:

$$\alpha x(t) + \beta y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} \alpha a_k + \beta b_k$$

- **Desplazamiento temporal:** Sea $x(t)$ periódica con periodo T tal que $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} a_k$. Consideremos $y(t) = x(t - \tau)$ con $\tau \in \mathbb{R}$. Entonces

$$y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} a_k e^{-jk\omega_0\tau}$$

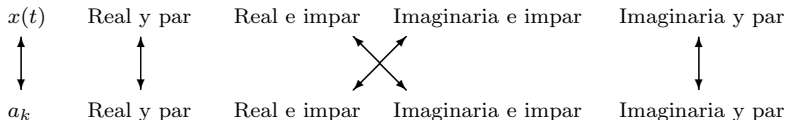
Propiedades de la serie Fourier

- **Inversión temporal:** Sea $x(t)$ periódica con periodo T tal que $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} a_k$. Consideremos $y(t) = x(-t)$. Entonces

$$y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} a_{-k}$$

- **Conjugación y simetría conjugada:** Sea $x(t)$ periódica con periodo T tal que $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} a_k$. Consideremos $y(t) = x^*(t)$. Entonces

$$y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} a_{-k}^*$$



Propiedades de la serie Fourier

- **Multiplicación:** Sean $x(t)$ e $y(t)$ señales periódicas de periodo T tales que $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} a_k$ $y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} b_k$. Entonces:

$$x(t)y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} \sum_{p=-\infty}^{\infty} a_p b_{k-p} = a_k * b_k$$

Demostración:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t)e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) \left(\sum_{p=-\infty}^{\infty} a_p e^{jp\omega_0 t} \right) e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} a_p \frac{1}{T} \int_0^T y(t) e^{-j(k-p)\omega_0 t} dt \\ &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} a_p b_{k-p} \end{aligned}$$

Propiedades de la serie Fourier

- **Diferenciación:** Sea $x(t)$ señal periódica de periodo T tal que $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} a_k$.
Entonces:

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} jk\omega_0 a_k$$

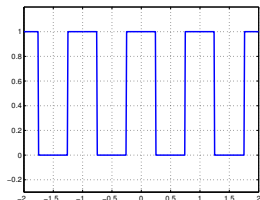
Demostración: Sea $y(t) = x'(t)$. Entonces:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{T} \int_0^T x'(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= -\frac{1}{T} x(t) e^{-jk\omega_0 t} \Big|_0^T + jk\omega_0 \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= jk\omega_0 a_k \end{aligned}$$

- **Integración:** Sea $x(t)$ señal periódica de periodo T tal que $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} a_k$.
Entonces:

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} \frac{a_k}{jk\omega_0}$$

Ejemplo: onda cuadrada



$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T_1 \\ 0 & T_1 < |t| < T/2 \end{cases}$$

$$T = 1, T_1 = 0.25$$

Es claro que

$$a_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \left[\int_0^{T_1} e^{-jk\omega_0 t} dt + \int_{T-T_1}^T e^{-jk\omega_0 t} dt \right]$$

O lo que es equivalente para $k \neq 0$:

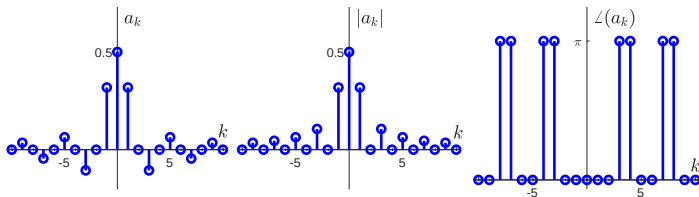
$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk\omega_0 t} dt = -\frac{1}{jk\omega_0 T} e^{-jk\omega_0 t} \Big|_{T_1}$$

Ejemplo: onda cuadrada

$$a_k = \frac{2}{k\omega_0 T} \left[\frac{e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 T_1}}{2j} \right] = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}$$

Es fácil ver que $a_0 = \frac{2T_1}{T}$. El caso en que $T_1 = T/4$ corresponde a una onda cuadrada con ciclo de trabajo del 50 %. Para ese caso $a_0 = 0.5$ y

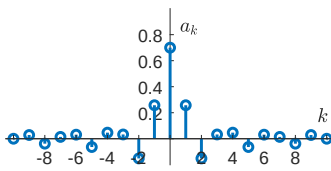
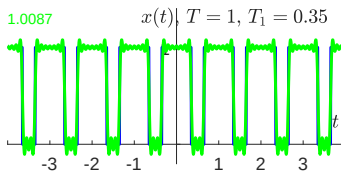
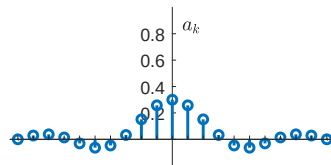
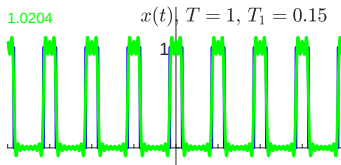
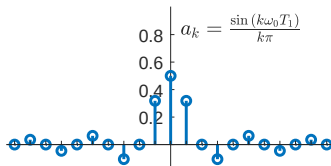
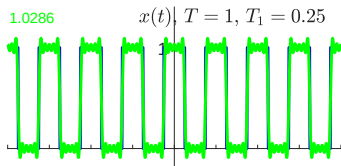
$$a_k = \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi}$$



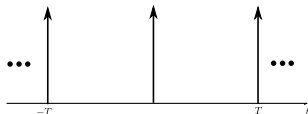
Usando Parseval obtenemos que:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi} \right|^2 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2}$$

Ejemplo: onda cuadrada



Ejemplo: tren de impulsos



$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - KT)$$

Es claro que el tren de impulsos no es una señal de cuadrado integrable. De hecho ni siquiera es una señal en el sentido tradicional!! Sin embargo podemos igual calcular los coeficientes de Fourier del mismo en un sentido distribucional! El tren de impulsos será de una importancia fundamental para nosotros cuando analicemos el tema de muestreo de señales de tiempo continuo!.

Evitando poner los límites de integración justo donde hay impulsos elegimos el intervalo $[-T/2, T/2]$:

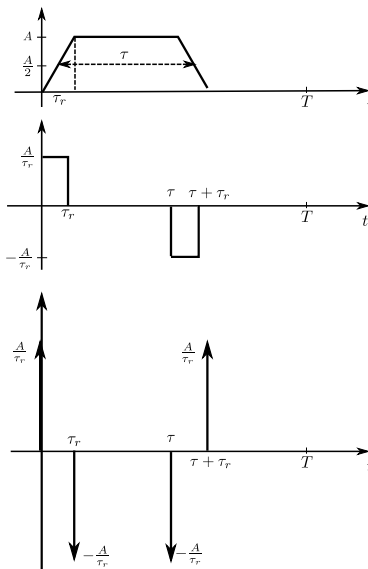
$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}, \quad \forall k$$

Ejemplo: pulso trapezoidal

El pulso trapezoidal es de importancia fundamental en el análisis de circuitos digitales ya que **modeliza una onda cuadrada real**.

En lugar de calcular los coeficientes por la definición usual vamos a calcularlos aplicando las propiedades de la serie de Fourier.

Sea $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} a_k$. Consideremos la derivada de $x(t)$, $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ con $y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} b_k$ y la derivada segunda de $x(t)$, $z(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$ con $z(t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} c_k$



Ejemplo: pulso trapezoidal

Vemos que $z(t)$ está compuesta por la superposición de 4 trenes de impulsos. Usando la propiedad de desplazamiento temporal y la linealidad de los coeficientes de Fourier podemos escribir:

$$c_k = \frac{A}{T\tau_r} - \frac{A}{T\tau_r} e^{-jk\omega_0\tau_r} - \frac{A}{T\tau_r} e^{-jk\omega_0\tau} + \frac{A}{T\tau_r} e^{-jk\omega_0(\tau+\tau_r)}, \quad \forall k$$

En forma más compacta:

$$c_k = -\frac{4A}{T\tau_r} e^{-j\frac{1}{2}k\omega_0(\tau_r+\tau)} \sin\left(\frac{1}{2}k\omega_0\tau_r\right) \sin\left(\frac{1}{2}k\omega_0\tau\right), \quad \forall k$$

Por la propiedad de integración tenemos que:

$$b_k = \frac{c_k}{jk\omega_0}, \quad a_k = \frac{b_k}{jk\omega_0} = \frac{c_k}{-(k\omega_0)^2}, \quad k \neq 0$$

Podemos entonces escribir:

$$a_k = \frac{A\tau}{T} e^{-j\frac{1}{2}k\omega_0(\tau_r+\tau)} \frac{\sin\left(\frac{1}{2}k\omega_0\tau_r\right)}{\frac{1}{2}k\omega_0\tau_r} \frac{\sin\left(\frac{1}{2}k\omega_0\tau\right)}{\frac{1}{2}k\omega_0\tau}, \quad k \neq 0$$

Serie de Fourier en tiempo discreto

Una señal periódica en tiempo discreto satisface:

$$x[n] = x[n + N], \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

donde N es el periodo. Consideremos las exponenciales discretas con frecuencias fundamentales $k\Omega_0$:

$$f_k[n] = e^{jk\Omega_0 n}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Se prueba que las exponenciales discretas tienen la propiedad de que:

$$f_k[n] = f_{k+pN}[n], \quad \forall p \in \mathbb{Z}$$

Sólo existen N exponenciales discretas distintas con frecuencia fundamental $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$!! Esto es sustancialmente diferente al caso continuo!!

De esta forma la serie Fourier en tiempo discreto no es una serie sino una suma finita:

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k f_k[n] = a_p f_p[n] + a_{p+1} f_{p+1}[n] + \cdots + a_{p+N-1} f_{p+N-1}[n],$$

donde la notación $k = \langle N \rangle$ significa que la suma se extiende por N valores consecutivos de k (sin importar en que valor comienza. Por qué??). Por ejemplo, es usual considerar $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$.

Serie de Fourier en tiempo discreto

Nuevamente la expansión en serie de Fourier se puede interpretar como una [proyección ortogonal](#) en el espacio generado por $\{f_k[n]\}_{k=0}^{N-1}$. Definimos el siguiente [producto interno](#) para señales acotadas al intervalo $[0, N-1]$ (o lo que es lo mismo vectores en $\mathbb{C}^N$):

$$\langle x[n], y[n] \rangle \equiv \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[n] y^*[n]$$

Podemos seguir los mismos razonamientos que hicimos para el caso de tiempo continuo y probar que los coeficientes de Fourier se calculan como:

$$a_k = \langle x[n], f_k[n] \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\Omega_0 n}.$$

Por supuesto sigue valiendo la [relación de Parseval](#):

$$\frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} |x[n]|^2 = \sum_{k=\langle N \rangle} |a_k|^2$$

Serie de Fourier en tiempo discreto

Algunas consideraciones:

- Es claro que $\{f_k[n]\}_{k=0}^{N-1}$ es una **base ortonormal** de $\mathbb{C}^N$, con lo cual podemos representar cualquier vector en dicho espacio (o cualquier señal de tiempo discreto de longitud N) por medio de una combinación lineal de dichos vectores.
- Es claro que los coeficientes de Fourier satisfacen $a_k = a_{k+rN}$, $\forall r \in \mathbb{Z}$ como era de esperarse por las propiedades de las exponenciales discretas.
- A diferencia del caso continuo no hay consideraciones sobre la convergencia puntual de la serie de Fourier. Esto es porque con la superposición de un número finito de exponenciales discreta representamos en **forma exacta** la señal original!.
- Todas las propiedades que probamos para el caso continuo siguen valiendo para el caso de tiempo discreto. Ver tabla 3.2 de Oppenheim and Willsky.
- Podemos interpretar el proceso de obtener los coeficientes de Fourier de una señal discreta $x[n]$ de periodo N como una **transformación lineal** $\mathcal{T} : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$, definida a través de una matriz $\mathbf{W} \in \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N$:

$$\mathbf{a} = \mathbf{W}\mathbf{x}, \mathbf{a} = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_{N-1}]^T, \mathbf{x} = [x[0] \ x[1] \ \dots \ x[N-1]]^T$$

Sistemas LTI y señales exponenciales

Los sistemas LTI reaccionan de una forma muy satisfactoria a señales exponenciales. Consideremos el caso de un sistema de tiempo continuo cuya respuesta al impulso es $h(t)$. Supongamos que la entrada al mismo es e^{st} donde $s \in \mathbb{C}$. La salida del sistema se puede escribir como:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau = e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau = e^{st}H(s)$$

La acción de un sistema LTI sobre una exponencial se puede escribir entonces como:

$$y(t) = e^{st}H(s)$$

donde $H(s)$ es lo que se denomina la **transferencia del sistema**. O sea el sistema entrega a la salida la misma señal de entrada pesada por un escalar que depende sólo del sistema y del valor de s !!

Se dice que e^{st} es un **autovector** para los sistemas LTI y que $H(s)$ corresponde al **autovalor** asociado con e^{st} y el sistema con respuesta al impulso $h(t)$. Desde el punto de vista matemático riguroso es necesario tener cuidado con esta interpretación! Pero nosotros usaremos igual esta nomenclatura sin otras consideraciones! Es claro además que todo esto tiene sentido si $H(s)$ está bien definida!

Sistemas LTI y señales exponenciales

El caso para tiempo discreto es análogo con señales $x[n] = z^n$, $z \in \mathbb{C}$. Podemos escribir:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{n-k} = z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k} = z^n H(z)$$

Las interpretaciones para el caso de tiempo continuo son equivalentes para este caso!

Volviendo al caso de tiempo continuo, sabemos que por la propiedad de linealidad podemos escribir para un sistema LTI:

$$\mathcal{T} \left[\sum_k \alpha_k e^{s_k t} \right] = \sum_k \alpha_k \mathcal{T} [e^{s_k t}] = \sum_k \alpha_k H(s_k) e^{s_k t}$$

Vemos que si una señal $x(t)$ que constituye la entrada un sistema LTI, se puede expresar como una superposición de exponenciales, la salida al sistema es también una superposición de exponenciales. Esto muestra que para este tipo de señales la respuesta se puede calcular en forma muy simple!!

Sistemas LTI y señales exponenciales

Supongamos que $s = j\omega$, o lo que es lo mismo $\Re\{s\} = 0$, de forma tal que $x(t) = e^{j\omega t}$. La función transferencia se denomina en este caso [respuesta en frecuencia del sistema](#) y vale:

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt$$

El caso discreto se corresponde con $|z| = 1$, lo que implica que $x[n] = e^{j\Omega n}$ con $\omega \in [-\pi, \pi)$. En este caso la respuesta en frecuencia vale:

$$H(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\Omega n}$$

Con estos conceptos podemos calcular fácilmente la respuesta de sistemas LTI a señales periódicas. Sea $x(t)$ una señal periódica con periodo T . Sabemos que dicha señal se puede representar como:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

De esta forma la respuesta a esta señal por un sistema LTI con respuesta al impulso $h(t)$ se puede escribir como:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

Sistemas LTI y señales exponenciales

Vemos que la salida $y(t)$ es periódica con periodo T y que sus coeficientes de Fourier valen $a_k H(jk\omega_0)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

La acción de un sistema LTI sobre una señal periódica es modificar los coeficientes de Fourier de la señal original mediante una multiplicación por la respuesta en frecuencia evaluada en cada uno de los múltiplos de la armónica fundamental!!

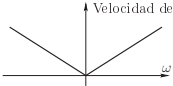
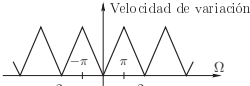
Un sistema LTI no puede agregar armónicos que no existían en la señal de entrada al sistema. A lo sumo podrá anular algunos de ellos si $H(jk\omega_0) = 0$, pero nunca crear armónicos nuevos!!

Si $x(t)$ es real, sabemos que $a_k = a_{-k}^*$. De la misma forma con $h(t)$ real tenemos que $H(j\omega) = H^*(-j\omega)$. En este caso la respuesta del sistema LTI a una señal periódica se puede escribir como:

$$y(t) = a_0 H(0) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k |H(jk\omega_0)| \cos(k\omega_0 t + \theta_k + \arg H(jk\omega_0))$$

donde hemos usado que $a_k = A_k e^{j\theta_k}$. Vemos que la armónica k a la salida del sistema tiene su amplitud modificada por $|H(jk\omega_0)|$ y un desfase extra introducido por $\arg H(jk\omega_0)$.

Propiedades de las exponenciales

	Continua $t \in \mathbb{R}, \omega_0 \text{ (rad/s)}$	Discreta $n \in \mathbb{Z}, \Omega_0 \text{ (rad/muestra)}$
Periodicidad	Siempre son periódicas. $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}.$	No todas las exponenciales complejas son periódicas. Debe cumplirse: $\Omega_0 N = 2\pi m, m \in \mathbb{Z}.$ $N_0 = \min \left\{ \frac{2\pi}{\Omega_0} m \right\}, m \in \mathbb{Z}.$
Ambigüedad	Son todas distintas. $e^{j(\omega_0 + 2\pi k)t} = e^{j\omega_0 t} \underbrace{e^{j2\pi kt}}_{\neq 1} \neq e^{j\omega_0 t}$	Dos exponenciales son iguales si Ω_0 varía en un múltiplo entero de 2π. $e^{j\Omega_0 n} \rightarrow e^{j(\Omega_0 + 2\pi k)n} = e^{j\Omega_0 n} \underbrace{e^{j2\pi kn}}_1 = e^{j\Omega_0 n}.$
Combinación lineal de señales periódicas	No siempre periódica. Por ejemplo: $T_1 = 1, T_2 = \sqrt{2},$ No existe ningún $T_0, n_1 T_1 \neq n_2 T_2.$	Siempre periódica. $N_1, N_2 \rightarrow N_0 = \text{mcm}\{N_1, N_2\},$ $N_0 = n_1 N_1 = n_2 N_2.$
Complejitud	Hay infinitas exponenciales complejas relacionadas armónicamente de periodo T_0. $\phi_k(t) = e^{j\omega_k t} = e^{jk\omega_0 t} = e^{jk\frac{2\pi}{T_0} t}.$	Sólo hay N exponenciales complejas relacionadas armónicamente de periodo N. $\phi_k[n] = e^{j\Omega_k n} = e^{jk\Omega_0 n} = e^{jk\frac{2\pi}{N} n},$ $\phi_{k+N}[n] = e^{j(k+N)\frac{2\pi}{N} n} = e^{jk\frac{2\pi}{N} n} \underbrace{e^{jN\frac{2\pi}{N} n}}_1 = \phi_k[n].$
Velocidad de variación	La velocidad de variación aumenta linealmente con la frecuencia. 	Frecuencias bajas: Cercanas a $2\pi k,$ Frecuencias altas: Cercanas a $\pi(2k+1).$ 

- Tabla de propiedades de la serie continua de Fourier (Oppenheim and Willsky, Tabla 3.1).
- Propiedades de la serie discreta de Fourier (Oppenheim and Willsky, Sección 3.7).
- Filtrado (Oppenheim and Willsky, Sección 3.9).
- Filtros de tiempo continuo mediante ecuaciones diferenciales (Oppenheim and Willsky, Sección 3.10).
- Filtros de tiempo discreto mediante ecuaciones en diferencias (Oppenheim and Willsky, Sección 3.11).

¿Preguntas?