

86.05 - SEÑALES Y SISTEMAS

GUÍA 3: SERIES DE FOURIER

☞ = Python, Julia, MATLAB, OCTAVE, etc.

1. Obtener la representación en serie de Fourier de tiempo continuo de las siguientes señales de tiempo continuo y determinar su período fundamental:

$$\text{(a)} \quad 1 + e^{j\frac{\pi}{4}t} + 4e^{-j\frac{2\pi}{5}t} + e^{j\frac{4\pi}{5}t} \qquad \text{(b)} \quad 2 + \cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right) + 3\sin\left(\frac{5\pi}{3}t\right)$$

2. Sea $x(t)$ un tren de pulsos de período T definido en el intervalo $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ como

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in (-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}) \\ 0 & \text{si } t \in [-\frac{T}{2}, -\frac{T_0}{2}) \cup (\frac{T_0}{2}, \frac{T}{2}) \end{cases}$$

con $T > T_0 > 0$.

(a) Calcular utilizando la ecuación de síntesis los coeficientes $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ de la Serie de Fourier de tiempo continuo de $x(t)$ y escriba los 6 primeros términos de la serie.

(b) Graficar el espectro de amplitudes y de fase.

(c) Obtener los coeficientes $\{b_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ de la Serie de Fourier de tiempo continuo de $x_1(t) = x(t - \frac{\pi}{6})$.

(d) Obtener los coeficientes $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ de la Serie de Fourier de tiempo continuo de $x_2(t) = x(t) + 1$.

(e) Calcular utilizando la ecuación de síntesis la representación en serie de Fourier de un tren de impulsos de período T y obtener los coeficientes $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ de la Serie de Fourier de tiempo continuo de $x(t)$ a partir de la combinación de dos trenes de impulsos de período T desplazados.

3. Una señal periódica $x(t)$ real de tiempo continuo tiene período $T = 8$ y sus coeficientes de la serie de Fourier no nulos son:

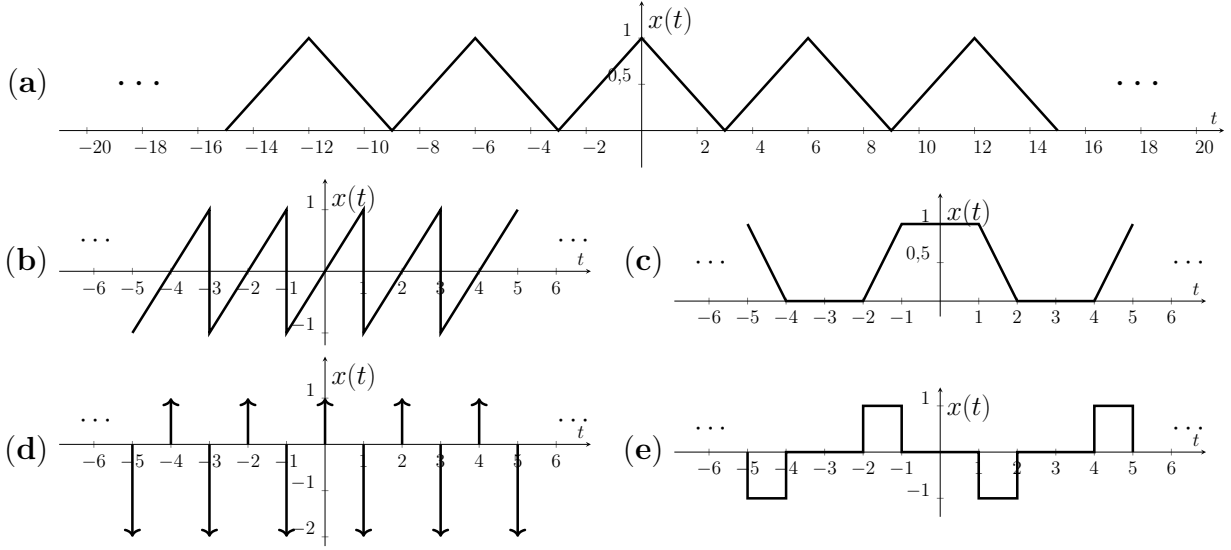
$$a_1 = a_{-1} = 2, a_3 = a_{-3}^* = 4j$$

Hallar A_k, ϕ_k con $k \in \mathbb{Z}$ de manera que el desarrollo en serie de Fourier de $x(t)$ puede ser expresado como

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t + \phi_k\right)$$

4. Utilizando las propiedades de la serie de Fourier de tiempo continuo, calcular los coeficientes $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ de la señal periódica $x(t)$. Para todos los casos, con la excepción del (d), grafique en

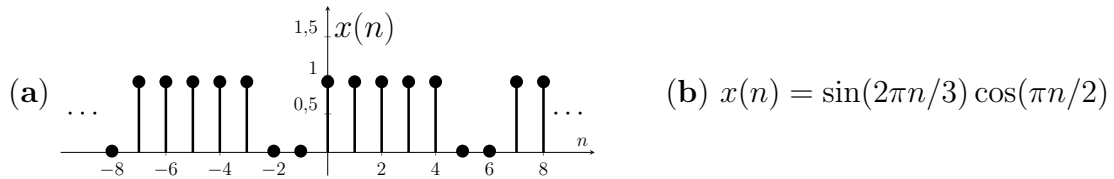
▣ las señales que resultan de usar $N = 5, 10$ y 50 para las series de Fourier truncadas.



5. Obtener dos señales de tiempo continuo que satisfagan simultáneamente las siguientes condiciones:

1. $x(t)$ es real e impar.
2. $x(t)$ es periódica con período $T = 2$.
3. Los coeficientes de Fourier de $x(t)$ son $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ con $a_k = 0, |k| > 1$.
4. $\frac{1}{2} \int_0^2 |x(t)|^2 dt = 1$.

6. Utilizando las propiedades de la serie de Fourier de tiempo discreto, calcular los coeficientes $\{a_k\}_{k=0}^N$ de la señal periódica $x(n)$:



(c) $x(n)$ periódica con período 4, siendo $x(n) = 1 - \sin(\pi n/4)$ para $0 \leq n \leq 3$

7. Sea $x(n)$ una señal periódica de período N , con sus coeficientes de serie de Fourier $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Hallar los coeficientes de las siguientes señales periódicas de período N :

- (a) $x(n - n_0), n_0 \in \mathbb{Z}$ (b) $x(n) - x(n - 1)$ (c) $x(n) - x\left(n - \frac{N}{2}\right), N \text{ par}$

(d) $x(n) + x\left(n - \frac{N}{2}\right)$, N par (e) $(-1)^n x(n)$, N par (f) $(-1)^n x(n)$, N impar

(g) $y(n) = \begin{cases} x(n) & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

8. Sea un sistema LTI de tiempo continuo con respuesta al impulso $h(t) = e^{-4t}u(t)$. Hallar la salida $y(t)$ del sistema para las siguientes entradas:

(a) $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ con $\omega_0 \in \mathbb{R}$ ¿Es $x(t)$ una autofunción del sistema?

(b) $x(t) = e^{j\omega_0 t}u(t)$ con $\omega_0 \in \mathbb{R}$. ¿Es $x(t)$ una autofunción del sistema?

(c) $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \delta(t - k)$

(d) $x(t)$ de período 1 tal que $x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1/4 \leq t < 1/4 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$ para $-1/2 \leq t < 1/2$.

9. Considere la señal periódica $x(t)$ con $T = 2$ y tal que cuando $t \in [0, 2)$ es igual $1 - t$. Se pide:

(a) Los coeficientes de Fourier de $x(t)$.

(b) Usando los coeficientes de Fourier del punto anterior muestre que es posible escribir:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} 2 \frac{\sin(k\pi t)}{k\pi}$$

.

10. Para cada uno de los siguientes pares de señales $x(n)$ e $y(n)$, determinar si existe un sistema LTI discreto cuya salida $y(n)$ pueda corresponder efectivamente a la entrada $x(n)$. En el caso de que exista, determinar si es único y qué condiciones debe cumplir la respuesta al impulso.

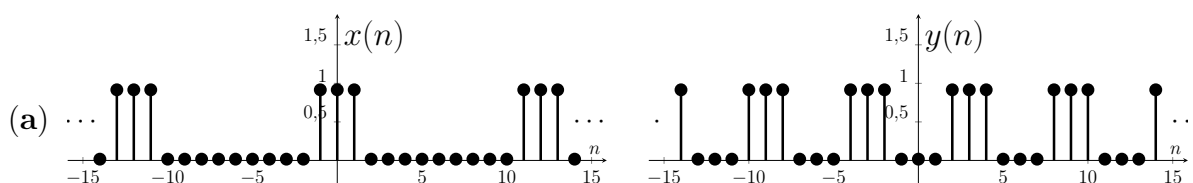
(a) $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ e $y(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n$

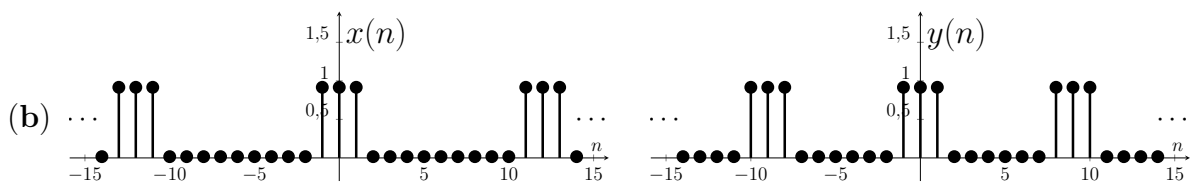
(b) $x(n) = e^{jn/8}$ e $y(n) = e^{j2n/8}$

(c) $x(n) = e^{j\pi n/3}$ e $y(n) = \cos(\pi n/3)$

(d) $x(n) = \cos(\pi n/3)$ e $y(n) = \cos(\pi n/3) + \sqrt{3} \sin(\pi n/3)$

11. Decidir si existe un sistema LTI discreto que cumpla con que si $x(n)$ es la entrada, entonces $y(n)$ es una salida posible.





En caso de que se cumpla, decidir si es posible asegurar que todos los sistemas que cumplan con esta condición son realmente LTI.

EJERCICIOS ADICIONALES

12. Calcular los coeficientes de la serie de Fourier de tiempo continuo de la señal $x(t)$ de período $T = 3$ sabiendo que en el intervalo $[-1, 5]$ se define como

(a) $x(t) = \cos(20\pi t)w_1(t)$ con

$$w_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in (-1, 1) \\ 0 & \text{si } t \in [-1, 5, -1) \cup (1, 5) \end{cases}$$

(b) $x(t) = \cos(20\pi t)w_2(t)$ con

$$w_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in (-1, 5, -1) \\ 0 & \text{si } t \in [-1, 0) \\ 2 & \text{si } t \in (0, 1) \\ 1 & \text{si } t \in (1, 5) \end{cases}$$

(c) $x(t) = \cos(20\pi t)w_3(t)$ con

$$w_3(t) = \begin{cases} e^{-|t|} & \text{si } t \in (-1, 1) \\ 0 & \text{si } t \in [-1, 5, -1) \cup (1, 5) \end{cases}$$