



**FACULTAD
DE INGENIERIA**

Universidad de Buenos Aires

Sistemas Lineales e Invariantes en el Tiempo (LTI)

Dr. Ing. Pedro D. Arini

Señales y Sistemas (TB065)

Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires

2do. cuatrimestre 2026

- Convolución para sistemas LTI en tiempo continuo y en tiempo discreto
- Propiedades de los sistemas LTI
- Sistemas LTI para ecuaciones diferenciales y ecuaciones en diferencias

Un sistema lineal se define por el principio de superposición. Si $y_1[n]$ e $y_2[n]$ son las respuestas de un sistema cuando $x_1[n]$ y $x_2[n]$ son las respectivas entradas, el sistema es lineal si cumple dos propiedades:

1. Aditividad

La respuesta a la suma de entradas es igual a la suma de las rtas individuales:

$$T\{x_1[n] + x_2[n]\} = T\{x_1[n]\} + T\{x_2[n]\} = y_1[n] + y_2[n]$$

2. Homogeneidad o escalado

El escalado de la entrada por una cte. produce un escalado idéntico en la salida:

$$T\{ax[n]\} = aT\{x[n]\} = ay[n]$$

Las 2 prop. se combinan en el principio de superposición, (a y b ctes arbitrarias):

$$T\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = aT\{x_1[n]\} + bT\{x_2[n]\}$$

Generalización: Si la entrada es una suma ponderada de múltiples señales $x[n] = \sum_k a_k x_k[n]$, entonces la salida de un sistema lineal será $y[n] = \sum_k a_k y_k[n]$, siendo $y_k[n]$ la respuesta del sistema a la entrada $x_k[n]$.

Un sistema invariante con el tiempo (o invariante al desplazamiento) se define por la persistencia de su comportamiento ante retardos.

- Un desplazamiento temporal en la secuencia de entrada debe provocar el **mismo desplazamiento** en la secuencia de salida.
- Es una de las restricciones fundamentales que se pueden imponer a la transformación $T\{\cdot\}$ para obtener representaciones matemáticas generales.

Condición de Invarianza

Supongamos que un sistema transforma una secuencia de entrada $x[n]$ en una secuencia de salida $y[n]$. El sistema es invariante con el tiempo si, para todo retardo n_0 , se cumple que:

$$x_1[n] = x[n - n_0] \implies y_1[n] = y[n - n_0] \quad (1)$$

Donde $y_1[n]$ es la respuesta del sistema ante la entrada desplazada $x_1[n]$.

El análisis de los sistemas de tiempo discreto (y también de tiempo continuo) depende fuertemente de la estructura intrínseca de los mismos, siendo el mismo en general complejo desde el punto de vista matemático y operacional.

Sin embargo, el caso de los sistemas LTI es particularmente importante, ya que ambas propiedades, linealidad e invarianza en el tiempo, permiten un análisis en extremo simple (en comparación con sistemas que no cumplen estas propiedades)!!

La clave en la “simpleza” de descripción en el análisis de estos sistemas radica fundamentalmente en

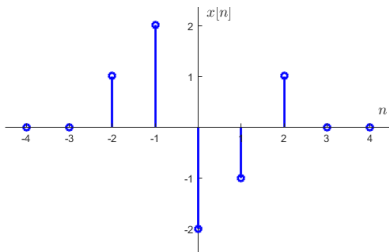
- El principio de superposición (por ser sistema lineal)
- Que el retardo temporal de las señales de entradas no altera la forma de las señales de salida (por ser invariante en el tiempo sólo se introduce un retardo).

Representación de una señal mediante impulsos

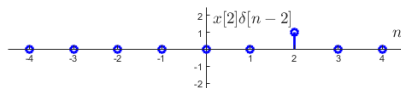
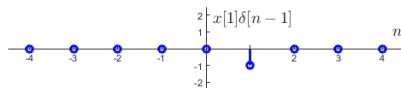
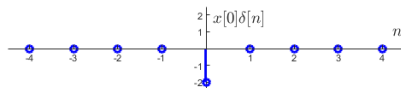
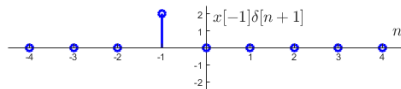
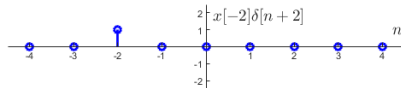
$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

$$n = n_0 \rightarrow x[n_0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n_0 - k]$$

$$\delta[n_0 - k] = \begin{cases} 1 & \text{si } k = n_0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$



$$x[n] = x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2]$$



Interpretación de la Representación: Punto a Punto

Evalúamos la ecuación de descomposición en instantes específicos de la señal:

$$x[n] = \delta[n+2] + 2\delta[n+1] - 2\delta[n] - \delta[n-1] + \delta[n-2]$$

La ecuación general para evaluar un punto en el instante $n = n_0$ es:

$$x[n_0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n_0 - k]$$

Evaluación en $n_0 = -1$ (donde sabemos que $x[-1] = 2$), expandimos la sumatoria en nuestra señal ($k \in [-2, 2]$):

$$x[-1] = x[-2]\delta[-1-(-2)] + x[-1]\delta[-1-(-1)] + x[0]\delta[-1-0] + x[1]\delta[-1-1] + x[2]\delta[-1-2]$$

Sustituyendo las amplitudes correspondientes:

$$x[-1] = 1 \cdot \delta[1] + 2 \cdot \delta[0] - 2 \cdot \delta[-1] - 1 \cdot \delta[-2] + 1 \cdot \delta[-3]$$

La $\delta[m]$ vale 1 únicamente cuando su argumento es cero ($m = 0$):

La sumatoria anula todos los términos excepto el de $k = -1$:

$$x[-1] = 1 \cdot (0) + 2 \cdot (1) - 2 \cdot (0) - 1 \cdot (0) + 1 \cdot (0) = 2$$

Evaluación en $n_0 = 0$ (donde sabemos que $x[0] = -2$):

$$x[0] = 1 \cdot \delta[2] + 2 \cdot \delta[1] - 2 \cdot \delta[0] - 1 \cdot \delta[-1] + 1 \cdot \delta[-2] = -2$$

La δ es un **selector** que extrae la amplitud de la función en el instante deseado.

Podemos también, analizar la señal completa $x[n]$ en todo el eje temporal.

La sumatoria como una superposición de señales independientes:

$$x[n] = x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2]$$

Sustituyendo los valores numéricos de las amplitudes de nuestro ejemplo:

$$x[n] = 1 \cdot \delta[n+2] + 2 \cdot \delta[n+1] - 2 \cdot \delta[n] - 1 \cdot \delta[n-1] + 1 \cdot \delta[n-2]$$

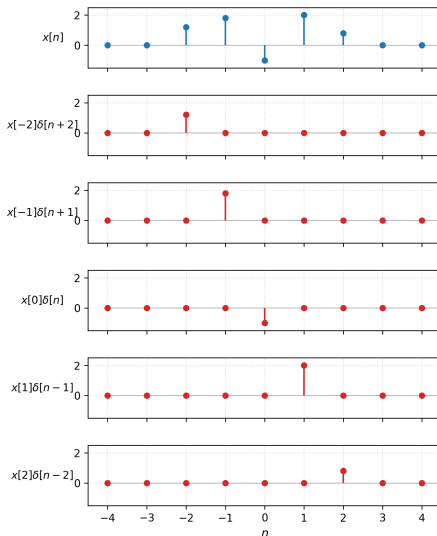
Cada término en esta expresión no es un valor escalar, sino una **secuencia discreta completa** definida en el tiempo:

- $1 \cdot \delta[n+2]$ señal con un único impulso de altura 1 ubicado en $n = -2$.
- $2 \cdot \delta[n+1]$ señal con un único impulso de altura 2 ubicado en $n = -1$.
- $-2 \cdot \delta[n]$ señal con un único impulso de altura -2 ubicado en el origen $n = 0$.
- $-1 \cdot \delta[n-1]$ señal con un único impulso de altura -1 ubicado en $n = 1$.
- $1 \cdot \delta[n-2]$ señal con un único impulso de altura 1 ubicado en $n = 2$.

Superpongo las 5 señales en el tiempo y sus amplitudes se suman de forma directa en cada instante n , quedando la $x[n]$ original. Decimos **“el impulso se desplaza en k ”** porque en lugar de evaluar un solo punto, se analiza la señal completa $x[n]$ a lo largo del eje del tiempo

Visualización de la Descomposición

Gráficamente, esto equivale a tomar cada muestra de la señal, modelarla como un impulso independiente localizado y sumarlos secuencialmente en el tiempo:

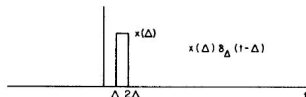
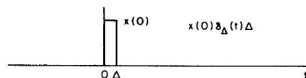
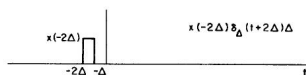
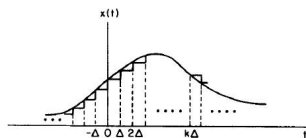


Ambas interpretaciones son correctas y complementarias:

Punto a Punto: Es la evaluación analítica que demuestra cómo la delta selecciona únicamente el valor correspondiente de la función.

Síntesis: Es la conceptualización gráfica que muestra cómo descomponer o reconstruir cualquier señal arbitraria mediante una base de impulsos desplazados.

Representación Continua: Aproximación por Pulsos



La señal continua $x(t)$, la aproximamos con una combinación lineal de pulsos rectangulares de ancho finito Δ .

Pulso unitario aproximado $\delta_\Delta(t)$:

Definimos un pulso rectangular elemental centrado en el origen con ancho Δ y área unitaria (altura $1/\Delta$):

$$\delta_\Delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & 0 \leq t < \Delta \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La señal aproximada en escalera $\hat{x}(t)$:

Reconstruimos $x(t)$ como suma infinita de pulsos, cada uno ubicado en el instante $t = k\Delta$, escalado por el valor de la señal en ese punto $x(k\Delta)$ y multiplicado por el ancho del intervalo Δ :

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \delta_\Delta(t - k\Delta) \Delta$$

Si Δ se hace más pequeño, la aproximación en escalera se vuelve cada vez más fiel a $x(t)$.

El límite hacia la integral de la delta de Dirac

Para obtener la representación exacta de la señal, analizamos cuando el ancho del pulso tiende de forma infinitesimal a cero ($\Delta \rightarrow 0$).

Paso de la sumatoria discreta al límite continuo:

Al tomar el límite cuando $\Delta \rightarrow 0$ en la ecuación de la diapositiva anterior:

$$x(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \delta_{\Delta}(t - k\Delta) \Delta$$

Al reducir la discretización temporal al extremo infinitesimal:

- El ancho del intervalo Δ se convierte en el diferencial de tiempo $d\tau$.
- El tiempo de muestreo discreto $k\Delta$ se transforma en la variable continua de integración τ .
- La sumatoria infinita $\sum$ se convierte en la integral $\int_{-\infty}^{\infty}$.
- El pulso rectangular $\delta_{\Delta}(t - \tau)$ converge a la delta de Dirac ideal $\delta(t - \tau)$.

Ecuación de Representación Integral:

$$x(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \delta_{\Delta}(t - k\Delta) \Delta = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

La ecuación obtenida en el límite representa la **propiedad de selección o muestreo** de la delta de Dirac en el dominio continuo.

Interpretación analítica:

La integral con un impulso desfasado es un operador que evalúa y extrae únicamente la información de la señal en un instante puntual:

- El integrando $x(\tau)\delta(t - \tau)$ vale estrictamente cero en todo el eje de integración τ , excepto en el punto donde el argumento de la delta se anula, es decir, cuando $\tau = t$.
- Al realizar la integración a lo largo de todo el eje τ , la delta “captura” toda su energía en un solo instante, devolviendo exactamente el valor escalar de la señal en ese punto $x(t)$.

Paralelismo entre dominios temporales:

El análisis continuo preserva la misma estructura, sustituye sumas por integrales:

$$\text{Tiempo Discreto (Sumatoria): } x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n - k]$$

$$\text{Tiempo Continuo (Integral): } x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau) d\tau$$

Sistemas LTI en tiempo discreto I: Convolución

Supongamos que tenemos un sistema lineal $\mathcal{T}$. Definimos las respuestas de este sistema a los impulsos unitarios desplazados de la siguiente forma:

$$\mathcal{T}[\delta[n-k]] \equiv h[n, k], \quad k \in \mathbb{Z}$$

Debemos interpretar a $h[n, k]$ como una familia de señales de n indexadas en k . Para cada retardo k cada respuesta $h(n, k)$ en el tiempo n es en principio diferente!

Mediante el conocimiento de las señales $h[n, k]$ podemos aplicar superposición para calcular la salida del sistema $\mathcal{T}$ cuando la entrada es $x[n]$

$$y[n] = \mathcal{T}[x[n]] = \mathcal{T}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\mathcal{T}[\delta[n-k]] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n, k]$$

Conociendo la respuesta del sistema lineal a los impulsos desplazados podemos calcular, por medio de una suma ponderada adecuada, la respuesta del mismo a cualquier entrada $x[n]$. Notar que hasta el momento sólo hemos usado la propiedad de linealidad de $\mathcal{T}$, con lo cual esto es válido aún cuando el sistema es variante en el tiempo!!

Supongamos ahora que el sistema es invariante en el tiempo y que

$$\mathcal{T}[\delta[n]] = h[n, 0] \equiv h[n]$$

Es claro que:

$$\mathcal{T}[\delta[n - k]] = h[n - k]$$

Tenemos el siguiente resultado:

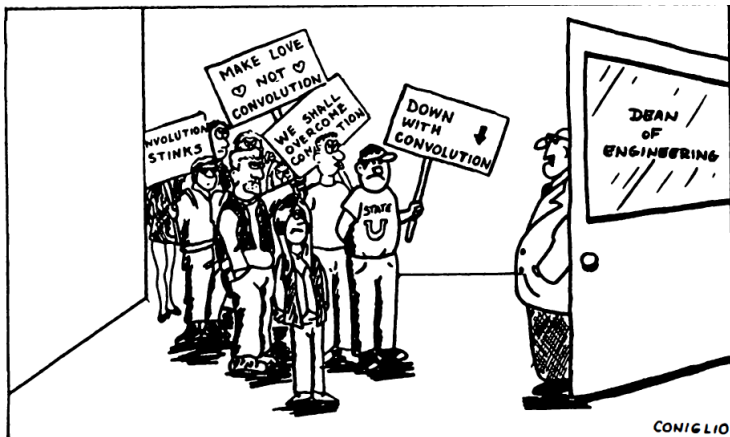
Teorema

*Sea $\mathcal{T}$ un sistema LTI de tiempo discreto tal que $\mathcal{T}[\delta[n]] = h[n]$. La respuesta $y[n]$ del sistema $\mathcal{T}$ a cualquier entrada $x[n]$ de tiempo discreto (denotada como $y[n] = h[n] * x[n]$) se escribe como:*

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n - k]$$

y se conoce como suma de convolución. De esta forma la acción de un sistema LTI en tiempo discreto queda totalmente caracterizada por una única señal: la respuesta al impulso del mismo $h[n]$!!!

Sistemas LTI en tiempo discreto III



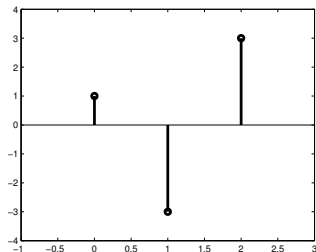
Convolution: its bark is worse than its bite!

Sistemas LTI en tiempo discreto IV

Ejemplos:

1) Sea un sistema LTI con respuesta al impulso $h[n]$ y sea la señal de entrada

$$x[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ -3 & n = 1 \\ 2 & n = 2 \end{cases}$$

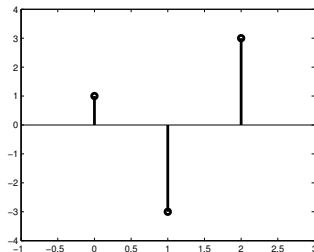


Sistemas LTI en tiempo discreto IV

Ejemplos:

1) Sea un sistema LTI con respuesta al impulso $h[n]$ y sea la señal de entrada

$$x[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ -3 & n = 1 \\ 2 & n = 2 \end{cases}$$



La salida al sistema se puede escribir como

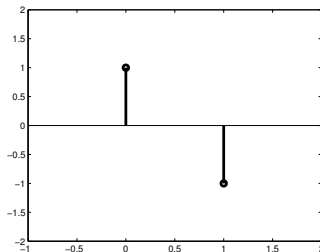
$$y[n] = h[n] - 3h[n-1] + 2h[n-2]$$

La salida del sistema se puede pensar como la superposición de “ecos” de la respuesta al impulso ponderada por los valores de la señal de entrada en cada retardo!!

Sistemas LTI en tiempo discreto V

2) Consideremos el mismo ejemplo anterior pero particularizando al caso en el que

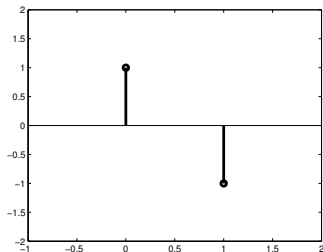
$$h[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ -1 & n = 1 \end{cases}$$



Sistemas LTI en tiempo discreto V

2) Consideremos el mismo ejemplo anterior pero particularizando al caso en el que

$$h[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ -1 & n = 1 \end{cases}$$

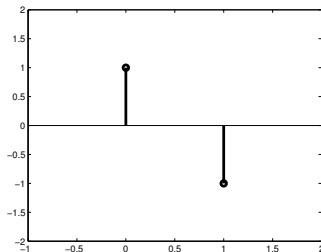


Suponiendo que queremos calcular la salida $y[n]$ para un valor fijo de n podemos considerar la suma de convolución $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$ pensando que estamos sumando el producto de dos señales indexadas con k donde n es ahora un parámetro.

Sistemas LTI en tiempo discreto V

2) Consideremos el mismo ejemplo anterior pero particularizando al caso en el que

$$h[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ -1 & n = 1 \end{cases}$$



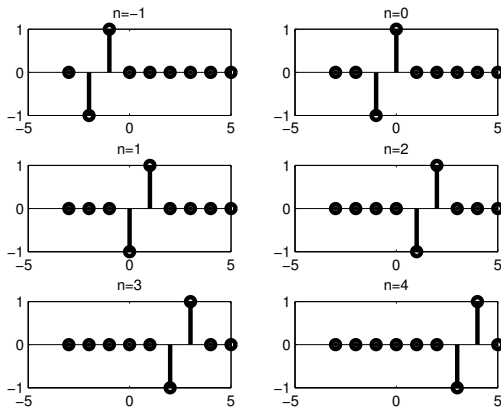
Suponiendo que queremos calcular la salida $y[n]$ para un valor fijo de n podemos considerar la suma de convolución $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$ pensando que estamos sumando el producto de dos señales indexadas con k donde n es ahora un parámetro.

Notar que para la salida $y[n]$ al tiempo n debemos considerar la respuesta al impulso reflejada con respecto al origen y desplazada en una cantidad n !!

Sistemas LTI en tiempo discreto VI

Notar que

$$h[n-k] = \begin{cases} -1 & k = n-1 \\ 1 & k = n \end{cases}$$



Sistemas LTI en tiempo discreto VII

Cuando $n < 0$ es claro que $x[k]$ y $h[n - k]$ como funciones de k no tienen superposición. Con lo cual:

$$y[n] = 0 \text{ si } n < 0$$

Lo mismo ocurre cuando $n > 3$, con lo cual

$$y[n] = 0 \text{ si } n > 3$$

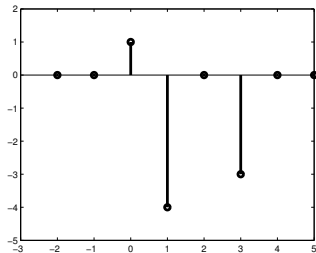
Los demás casos se pueden calcular fácilmente:

$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[-k] = 1$$

$$y[1] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[1-k] = -4$$

$$y[2] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[2-k] = 5$$

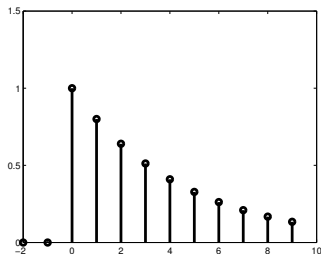
$$y[3] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[3-k] = -2$$



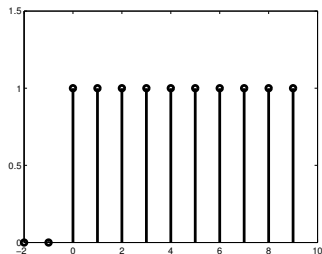
Sean

$$x[n] = \alpha^n u[n], \quad 0 < \alpha < 1$$

$$h[n] = u[n]$$



$$x[n] = \alpha^n u[n] \text{ con } \alpha = 0.8$$



$$h[n] = u[n]$$

Ejemplos V

Es claro que cuando $n < 0$ $h[n - k]$ y $x[k]$ no tienen intersección. De esta forma

$$y[n] = 0 \text{ si } n < 0$$

Además cuando $n \geq 0$ es claro que:

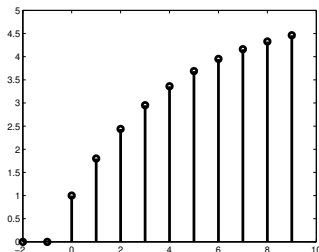
$$x[k]h[n - k] = \begin{cases} \alpha^k & 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

De esta forma:

$$y[n] = \sum_{k=0}^n \alpha^k = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}, \quad n \geq 0$$

Finalmente

$$y[n] = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} u[n]$$





Como se ve podemos interpretar la suma de convolución mediante un deslizamiento de la secuencia $h[n - k]$ sobre la señal de entrada $x[k]$.

Habiendo calculado la salida para un instante $y[n]$ podemos calcular $y[n + 1]$ desplazando en 1 la secuencia $h[n - k]$, multiplicando por $x[k]$ y sumar.

Es muy importante ayudarse “gráficamente” para realizar la suma de convolución, tal y como hemos hecho en los ejemplos! Es muy fácil cometer errores si no se hace esto (al menos al principio)!! Algunas convoluciones pueden ser un poquito más complicadas donde haya que analizar varias regiones de valores de n en donde la superposición entre la entrada $x[k]$ y la respuesta al impulso $h[n - k]$ tenga características diferentes!!

La intuición dice que el siguiente teorema debería ser cierto para sistemas de tiempo continuo:

Teorema

*Sea $\mathcal{T}$ un sistema LTI de tiempo continuo tal que $\mathcal{T}[\delta(t)] = h(t)$. La respuesta $y(t)$ del sistema $\mathcal{T}$ a cualquier entrada $x(t)$ de tiempo continuo (denotada como $y(t) = h(t) * x(t)$) se escribe como:*

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

y se conoce como integral de convolución. De esta forma la acción de un sistema LTI en tiempo continuo queda totalmente caracterizada por una única señal: la respuesta al impulso del mismo $h(t)$!!!

La intuición dice que el siguiente teorema debería ser cierto para sistemas de tiempo continuo:

Teorema

Sea $\mathcal{T}$ un sistema LTI de tiempo continuo tal que $\mathcal{T}[\delta(t)] = h(t)$. La respuesta $y(t)$ del sistema $\mathcal{T}$ a cualquier entrada $x(t)$ de tiempo continuo (denotada como $y(t) = h(t) * x(t)$) se escribe como:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

y se conoce como *integral de convolución*. De esta forma la acción de un sistema LTI en tiempo continuo queda totalmente caracterizada por una única señal: la respuesta al impulso del mismo $h(t)$!!!

Nuevamente la clave para este resultado es el hecho de que la delta de Dirac nos permite escribir:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau$$

para cualquier función que sea continua en t .

Supongamos ahora que tenemos un sistema lineal $\mathcal{T}$ y que disponemos de las respuestas del mismo a las señales $\delta_{\Delta}(t - k\Delta)$:

$$\mathcal{T}[\delta_{\Delta}(t - k\Delta)] \equiv h(t, k\Delta), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Debemos interpretar a $h(t, k\Delta)$ como una familia de señales de t indexadas en k . Para cada retardo k cada respuesta $h(t, k\Delta)$ en el tiempo t es en principio diferente!

De esta forma podemos escribir

$$\begin{aligned}\hat{y}(t) &= \mathcal{T}[\hat{x}(t)] = \mathcal{T}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_{\Delta}(t - k\Delta)\Delta\right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\mathcal{T}[\delta_{\Delta}(t - k\Delta)]\Delta \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)h(t, k\Delta)\Delta\end{aligned}$$

Es razonable pensar que a medida que Δ tiende a 0 $\hat{y}(t)$ tienda a $y(t) = \mathcal{T}[x(t)]$.

Usando el mismo argumento que antes podemos escribir:

$$y(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)h(t, k\Delta)\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t, \tau)d\tau \quad (2)$$

donde $h(t, \tau) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} h(t, k\Delta)$, o sea la respuesta del sistema lineal $\mathcal{T}$ a un impulso unitario desplazado en τ .

Claramente (2) muestra que la salida al sistema lineal $\mathcal{T}$ es la superposición de las respuestas del sistema a $\delta(t - \tau)$ ponderadas por $x(\tau)d\tau$. Esto es análogo al caso de tiempo discreto. Es claro que el argumento que nos llevó a dicho resultado no es riguroso desde el punto de vista matemático, sino más bien un argumento intuitivo!

En forma análoga al caso discreto podríamos haber usado directamente la linealidad de $\mathcal{T}$ (con algunos cuidados especiales por la presencia de la delta de Dirac!):

$$y(t) = \mathcal{T} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau \right] = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\mathcal{T} [\delta(t - \tau)] d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t, \tau)d\tau$$

Con la hipótesis de que $\mathcal{T}$ es también invariante en el tiempo tenemos que:

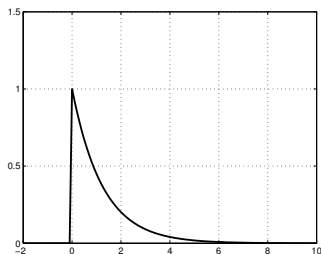
$$\mathcal{T}[\delta(t - \tau)] = h(t - \tau, 0) \equiv h(t - \tau)$$

con lo que obtenemos que:

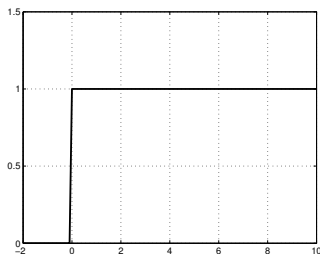
$$y(t) = \mathcal{T}[x(t)] = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

El procedimiento para evaluar la convolución en tiempo continuo es análogo al caso discreto mediante un reflejo de $h(t)$ (o $x(t)$ según convenga) y desplazamientos temporales en t antes de realizar la integración. Las propiedades enunciadas antes pueden ser también muy útiles para evaluar una determinada integral de convolución. Un ejemplo a continuación:

1) Considere $h(t) = u(t)$ e $x(t) = e^{-\alpha t}u(t)$ con $0 < \alpha$.



$$x(t) = e^{-\alpha t}u(t) \text{ con } \alpha = 0.8$$



$$h(t) = u(t)$$

Sistemas LTI en tiempo continuo VIII

Es fácil ver que para $t < 0$ el producto de $x(\tau)$ y $h(t - \tau)$ es cero. Para $t > 0$ tenemos que:

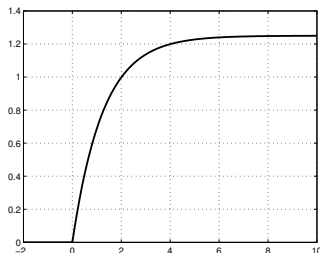
$$x(\tau)h(t - \tau) = \begin{cases} e^{-\alpha\tau} & 0 \leq \tau \leq t \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces:

$$y(t) = \int_0^t e^{-\alpha\tau} d\tau = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha\tau} \Big|_0^t = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t})$$

En forma compacta

$$y(t) = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) u(t)$$



Es fácil ver que para $t < 0$ el producto de $x(\tau)$ y $h(t - \tau)$ es cero. Para $t > 0$ tenemos que:

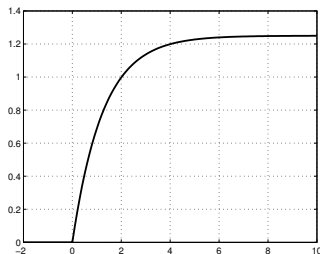
$$x(\tau)h(t - \tau) = \begin{cases} e^{-\alpha\tau} & 0 \leq \tau \leq t \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces:

$$y(t) = \int_0^t e^{-\alpha\tau} d\tau = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha\tau} \Big|_0^t = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t})$$

En forma compacta

$$y(t) = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) u(t)$$

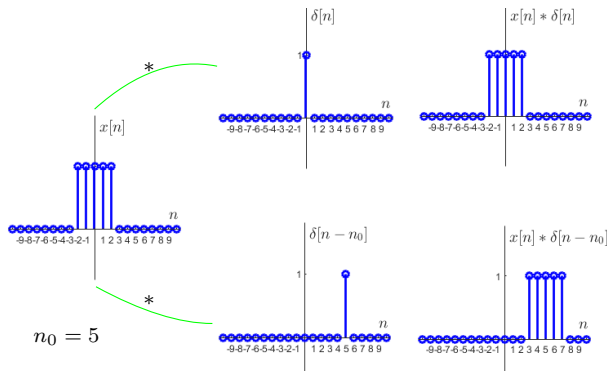


Recuerden realizar muchos ejercicios de convolución!! Es la única forma de entender en forma completa el tema!

Propiedades de la convolución I: Elemento neutro $\delta(t)$

$$x[n] * \delta[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] * \delta[n - k] = x[n]$$

$$x[n] * \delta[n - n_0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] * \delta[n - n_0 - k] = x[n - n_0]$$



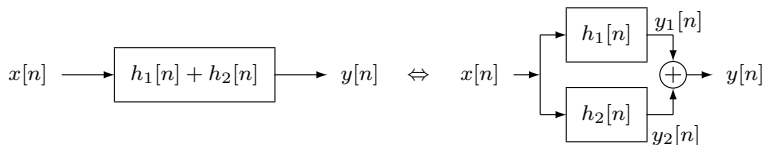
$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$

$$\begin{aligned} x[n] * h[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n - k] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n - m]h[m] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[n - m] \end{aligned}$$



$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$

$$\begin{aligned} x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] (h_1[n-k] + h_2[n-k]) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (x[k]h_1[n-k]) + (x[k]h_2[n-k]) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_1[n-k] + \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_2[n-k] \\ &= x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n] \end{aligned}$$



Propiedades de la convolución V: Asociatividad

$$x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n] = (x[n] * h_2[n]) * h_1[n] = x[n] * h_1[n] * h_2[n]$$

$$\begin{aligned} (x[n] * h_1[n]) * h_2[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (x[r] * h_1[r])[k] h_2[n - k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{p=-\infty}^{\infty} x[p] h_1[k - p] \right) h_2[n - k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} x[p] h_1[k - p] h_2[n - k] \end{aligned}$$

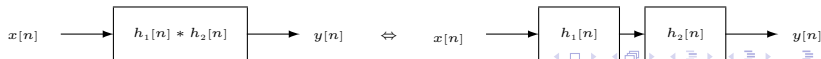
$$\begin{aligned} x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] (h_1[r] * h_2[r])[n - m] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \left(\sum_{q=-\infty}^{\infty} h_1[q] h_2[(n - m) - q] \right) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} x[m] h_1[q] h_2[n - m - q] \end{aligned}$$

$$k = q + m \quad m = k - q$$

$$= \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k - q] h_1[q] h_2[n - k]$$

$$p = k - q \quad q = k - p$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} x[p] h_1[k - p] h_2[n - k]$$



Para sistemas en tiempo discreto y continuo las relaciones entrada-salida de los mismos están dadas por:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k]$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

Un sistema en tiempo discreto o tiempo continuo no tendrá memoria cuando

$$h[n] = 0, \forall n \neq 0, \quad h(t) = 0, \forall t \neq 0$$

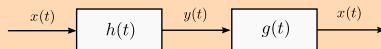
O en forma equivalente:

$$y[n] = Kx[n], \quad h[n] = K\delta[n]$$

$$y(t) = Kx(t), \quad h(t) = K\delta(t)$$

Cuando $K = 1$ tenemos los sistemas **identidad** en tiempo discreto y continuo!!

Consideremos un sistema LTI en tiempo continuo (el caso de tiempo discreto es similar) con respuesta al impulso $h(t)$. El sistema inverso $g(t)$ (si existe!) debe cumplir con:



Usando la propiedad de asociatividad de la convolución tenemos que:

$$x(t) = g(t) * [h(t) * x(t)] = [g(t) * h(t)] * x(t)$$

o lo que es lo mismo que:

$$\delta(t) = g(t) * h(t)$$

Notar que hemos asumido que el inverso de un sistema LTI es LTI. Esto es cierto, pero no es obvio y debe ser probado!! La pregunta es como lo hacemos??

Ejemplo: Sea $h[n] = u[n]$. Es claro que $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$. El sistema inverso sabemos que es $y[n] = x[n] - x[n-1]$, cuya respuesta al impulso es $g[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$. **Probar que $h[n] * g[n] = \delta[n]$!**

Propiedades de sistemas LTI III: Causalidad

Sabemos que para que un sistema sea causal su salida al tiempo t no puede depender de la entrada $x(\tau)$ con $\tau > t$. Observando que podemos escribir:

$$\begin{aligned}y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau)h(\tau)d\tau \\&= \int_{-\infty}^{-0} x(t - \tau)h(\tau)d\tau \\&\quad + \int_0^{\infty} x(t - \tau)h(\tau)d\tau\end{aligned}$$

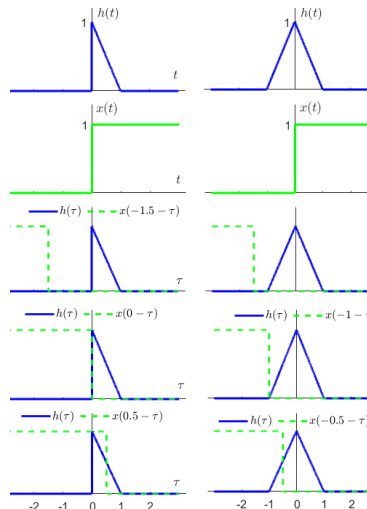
por lo cual debemos tener que

$$h(\tau) = 0, \tau < 0$$

y la salida del sistema se puede escribir como:

$$\begin{aligned}y(t) &= \int_0^{\infty} x(t - \tau)h(\tau)d\tau \\&= \int_{-\infty}^t x(\tau)h(t - \tau)d\tau\end{aligned}$$

El caso para tiempo discreto es análogo!!



Teorema

Sea $\mathcal{T}$ un sistema LTI de tiempo continuo tal que $\mathcal{T}[\delta(t)] = h(t)$. Dicho sistema será estable en el sentido BIBO sí y sólo si:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

o lo que es lo mismo $h(t) \in L_1(\mathbb{R})$.

Demostración:

Supongamos primero que se satisface la condición $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$ y que la entrada $x(t)$ cumple con $|x(t)| \leq B_1$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$|y(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)| |h(t - \tau)| d\tau \leq B_1 \int_{-\infty}^{\infty} |h(t - \tau)| d\tau < \infty$$

Continúa...

Continua...

Lo contrario los demostraremos por *reductio ad absurdum*. Supongamos ahora que el sistema es BIBO estable, pero que $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt = \infty$. Consideremos la siguiente entrada:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{h(-t)}{|h(-t)|} & \text{si } h(-t) \neq 0 \\ 0 & \text{si } h(-t) = 0 \end{cases}$$

Es claro que esta entrada es acotada $|x(t)| \leq 1$. Consideremos la salida a esta entrada para $t = 0$:

$$y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|h(\tau)|^2}{|h(\tau)|} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau = \infty,$$

lo cual es una contradicción ya que habíamos supuesto que el sistema era BIBO estable. Entonces debe ser:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

El caso para tiempo discreto se prueba en forma similar!!

Ejemplo: Consideremos $h(t) = u(t)$. La salida de este sistema es:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

Es claro que $\int_{-\infty}^{\infty} u(t) dt = \infty$ con lo cual el sistema es inestable.

Como conclusión general:

- Para determinar la salida de un sistema LTI a una entrada determinada es necesario realizar una suma o integral de convolución entre la respuesta al impulso del sistema y la mencionada entrada.
- Los sistemas LTI, tanto de tiempo continuo como discreto, están caracterizados completamente por su respuesta al impulso $h(t)$ o $h[n]$. Esto es privativo de dichos sistemas. Otros sistemas no lineales y/o variantes en el tiempo no pueden ser caracterizados por una respuesta al impulso!!
- Muchas propiedades de interés de los sistemas LTI pueden determinarse mediante un análisis de la respuesta al impulso!

Un concepto fundamental en el análisis de sistemas LTI es el de **autofunción**.

Una señal de entrada $x(t)$ es una **autofunción** de un sistema si la salida $y(t)$ es una copia exacta de dicha entrada, modificada por un factor de escala multiplicativo complejo denominado **autovalor**, denotado como $H(s)$:

$$x(t) \longrightarrow \text{Sistema LTI} \longrightarrow y(t) = H(s)x(t)$$

¿Por qué las exponenciales complejas e^{st} son las autofunciones por excelencia?

Consideremos una entrada exponencial compleja de la forma $x(t) = e^{st}$, donde $s = \sigma + j\omega$ es una variable compleja en el dominio de Laplace.

- Como la derivada de una exponencial es proporcional a sí misma ($\frac{d}{dt}e^{st} = se^{st}$), cualquier combinación lineal de derivadas (que gobierna a las ecuaciones diferenciales de los sistemas físicos) preservará intacta la forma de onda original.
- Esto implica que la señal exponencial compleja atraviesa el sistema LTI sin sufrir distorsión armónica o cambio estructural en su forma de onda; solo experimenta un cambio de amplitud y un desfase temporal, ambos contenidos en el número complejo $H(s)$.

Demostración analítica mediante convolución

Podemos demostrar $x(t) = e^{st}$ es una autofunción para cualquier sistema LTI utilizando la integral de convolución y su respuesta al impulso $h(t)$:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau) d\tau$$

Desarrollo Analítico: Sustituyendo la entrada $x(t - \tau) = e^{s(t-\tau)}$ en la integral

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)} d\tau$$

Utilizando las propiedades de los exponentes para separar la variable de integración τ del tiempo de observación actual t

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{st}e^{-s\tau} d\tau$$

Como e^{st} no depende del índice de integración τ , podemos extraerlo de la integral

$$y(t) = e^{st} \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau} d\tau \right]$$

Con e^{st} extraído de la integral

$$y(t) = e^{st} \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau \right]$$

El **autovalor** $H(s)$ **como Transformada de Laplace**: La expresión entre corchetes es una constante compleja que depende únicamente de la variable s y de la respuesta al impulso del sistema $h(t)$. Definimos a este autovalor como $H(s)$:

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau \implies y(t) = H(s) e^{st}$$

Esto demuestra por qué la convolución (muy compleja en el dominio temporal) se reduce a una simple **multiplicación algebraica** en el dominio transformado.

Sistemas descriptos por ecuaciones diferenciales I

La descripción de sistemas a través de ecuaciones diferenciales es muy común en la práctica. Aunque en general podemos considerar sistemas descriptos por ecuaciones en derivadas parciales, en este curso nos restringiremos a sistemas descriptos por ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes constantes.

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

En un sistema descrito por ecuaciones diferenciales, la salida está expresada en forma implícita y para obtener la misma es necesario resolver la ecuación diferencial!

Ejemplos

- Circuitos eléctricos.
- Sistemas físicos simples (resortes con masas, etc)
- Reacciones químicas simples.
- Etc.

Resolución de la Ecuación Diferencial: Solución Homogénea

Consideramos la ec. diferencial de primer orden lineal a coeficientes constantes

$$\frac{dy(t)}{dt} + \alpha y(t) = e^{-2\alpha t} u(t) \quad \text{con la condición inicial: } y(0) = y_0$$

La solución completa se compone de la suma de la respuesta homogénea y la respuesta particular:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

1. Cálculo de la Solución Homogénea $y_h(t)$ (Respuesta Natural):

Para $t \geq 0$, resolvemos la ec. diferencial homogénea (igualando la entrada a cero):

$$\frac{dy_h(t)}{dt} + \alpha y_h(t) = 0$$

Proponemos una solución de tipo exponencial debido a la propiedad de proporcionalidad de su derivada:

$$y_h(t) = Ae^{st} \implies Ase^{st} + \alpha Ae^{st} = 0 \implies Ae^{st}(s + \alpha) = 0$$

Para evitar la solución trivial ($A = 0$) y sabiendo que la exponencial nunca se anula, resolvemos algebraicamente:

$$s + \alpha = 0 \implies s = -\alpha$$

Por lo tanto, la solución homogénea es:

$$y_h(t) = Ae^{-\alpha t} \quad (\text{para } t \geq 0)$$

Nota: La cte. A sin definir, ya que se calcula al final usando la solución total.

2. Cálculo de la Solución Particular $y_p(t)$ (Respuesta Forzada):

Para el intervalo $t \geq 0$, la señal de entrada activa es la exponencial causal $x(t) = e^{-2\alpha t}$. Proponemos una solución particular que posea la misma forma matemática que la excitación:

$$y_p(t) = Y e^{-2\alpha t}$$

Sustituimos esta propuesta directamente en la ecuación diferencial original para determinar el coeficiente Y :

$$\frac{d}{dt} (Y e^{-2\alpha t}) + \alpha (Y e^{-2\alpha t}) = e^{-2\alpha t}$$

Derivando el primer término por regla de la cadena:

$$-2\alpha Y e^{-2\alpha t} + \alpha Y e^{-2\alpha t} = e^{-2\alpha t}$$

Factorizamos la exponencial común $e^{-2\alpha t}$ en ambos miembros de la ecuación:

$$(-2\alpha Y + \alpha Y) e^{-2\alpha t} = 1 \cdot e^{-2\alpha t}$$

Simplificando la expresión algebraica:

$$-\alpha Y = 1 \implies Y = -\frac{1}{\alpha}$$

la solución particular que equilibra la ecuación diferencial ante la entrada es:

$$y_p(t) = -\frac{1}{\alpha} e^{-2\alpha t} \quad (\text{para } t \geq 0)$$

3. Combinación de Soluciones y Aplicación de la Condición Inicial:

Sumamos la solución homogénea y la solución particular obtenidas para estructurar la solución completa temporal:

$$y(t) = Ae^{-\alpha t} - \frac{1}{\alpha}e^{-2\alpha t} \quad (\text{para } t \geq 0)$$

Evalúamos la ecuación en el instante inicial $t = 0$ para despejar la constante A mediante la condición dada $y(0) = y_0$:

$$y(0) = Ae^0 - \frac{1}{\alpha}e^0 = y_0 \implies A - \frac{1}{\alpha} = y_0 \implies A = y_0 + \frac{1}{\alpha}$$

Sustituimos el valor de la constante A en la expresión de la solución completa:

$$y(t) = \left(y_0 + \frac{1}{\alpha}\right)e^{-\alpha t} - \frac{1}{\alpha}e^{-2\alpha t} \quad (\text{para } t \geq 0)$$

Distribuyendo algebraicamente el término exponencial $e^{-\alpha t}$ y agrupando de forma conveniente:

$$y(t) = y_0e^{-\alpha t} + \frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t} - \frac{1}{\alpha}e^{-2\alpha t}$$
$$y(t) = y_0e^{-\alpha t} + \frac{1}{\alpha}(e^{-\alpha t} - e^{-2\alpha t}) \quad (\text{para } t \geq 0)$$

Para $t < 0$, la entrada $x(t) = e^{-2\alpha t}u(t)$ es nula. Por lo tanto, el sistema responde únicamente con su dinámica natural: $y(t) = y_0 e^{-\alpha t}$. Unificando ambos intervalos de tiempo mediante la función escalón $u(t)$:

$$y(t) = y_0 e^{-\alpha t} + \frac{1}{\alpha} (e^{-\alpha t} - e^{-2\alpha t}) u(t)$$

Interpretación física :

La rta. del sistema se divide en dos componentes fundamentales:

- **Respuesta a entrada Cero** ($y_{zi}(t)$): $y_{zi}(t) = y_0 e^{-\alpha t}$. Es la salida debida puramente a la energía interna acumulada en el sistema (condición inicial y_0), asumiendo que no hay excitación externa.
- **Respuesta a Estado Cero** ($y_{zs}(t)$): $y_{zs}(t) = \frac{1}{\alpha} (e^{-\alpha t} - e^{-2\alpha t}) u(t)$. Es la respuesta forzada debida únicamente a la señal de entrada, asumiendo que el sistema parte del reposo absoluto ($y_0 = 0$).

Condición de Linealidad LTI:

Si la condición inicial es distinta de cero ($y_0 \neq 0$), el sistema **no es lineal** (viola la homogeneidad ya que a entrada cero produce una salida no nula). Para que el sistema representado por esta ecuación diferencial se comporte como un sistema LTI, se debe cumplir obligatoriamente la condición de reposo inicial ($y_0 = 0$).

Sistemas descriptos por ecuaciones diferenciales I

La descripción de sistemas a través de ecuaciones diferenciales es muy común en la práctica. Aunque en general podemos considerar sistemas descriptos por ecuaciones en derivadas parciales, en este curso nos restringiremos a sistemas descriptos por ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes constantes.

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

En un sistema descrito por ecuaciones diferenciales, la salida está expresada en forma implícita y para obtener la misma es necesario resolver la ecuación diferencial!

Ejemplos

- Circuitos eléctricos.
- Sistemas físicos simples (resortes con masas, etc)
- Reacciones químicas simples.
- Etc.

Sistemas descriptos por ecuaciones diferenciales II

Se sabe que para obtener la solución a una ecuación diferencial ordinaria a coeficientes constantes es necesario especificar las condiciones iniciales de la misma.

Si bien la intuición diría que un sistema descrito por una ecuación diferencial ordinaria es lineal, lo cierto es que ello dependerá de las condiciones iniciales!!

Ejemplo: Consideremos la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dy(t)}{dt} + \alpha y(t) = e^{-2\alpha t} u[t], \quad y(0) = y_0, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Sabemos que la solución la podemos expresar de la siguiente forma:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

Consideremos la solución para $t \geq 0$. Es fácil probar que:

$$y_h(t) = Ae^{-\alpha t} u(t)$$

$$y_p(t) = -\frac{1}{\alpha} e^{-2\alpha t} u(t)$$

Con lo cual

$$y(t) = \left(Ae^{-\alpha t} - \frac{1}{\alpha} e^{-2\alpha t} \right), \quad t \geq 0$$

El valor de A es determinado por la condición inicial:

$$A = y_0 + \frac{1}{\alpha}$$

Entonces obtenemos:

$$y(t) = y_0 e^{-\alpha t} + \frac{1}{\alpha} (e^{-\alpha t} - e^{-2\alpha t}), \quad t \geq 0$$

La solución para $t < 0$ es directamente la solución homogénea que obtuvimos antes con la condición inicial dada por y_0 :

$$y(t) = y_0 e^{-\alpha t}, \quad t < 0$$

La solución para todo t se puede expresar como:

$$y(t) = y_0 e^{-\alpha t} + \frac{1}{\alpha} (e^{-\alpha t} - e^{-2\alpha t}) u(t)$$

$$y(t) = y_0 e^{-\alpha t} + \frac{1}{\alpha} (e^{-\alpha t} - e^{-2\alpha t}) u(t)$$

Algunas consideraciones:

- Si la señal de entrada es igual a la señal nula la solución total sería $y(t) = y_0 e^{-\alpha t}$. Es claro que entonces el sistema no es lineal ya que a entrada nula la salida es no nula. (para un sistema lineal debe ser $\mathcal{T}[0] = 0!$).
- Si la condición inicial es nula el sistema es lineal. **Probarlo!!!**
- Notar que la solución de arriba implica que el sistema es no causal, ya que para una entrada que es nula para $t < 0$ la salida es no nula para $t < 0$.

Como nosotros vamos a estar interesados en **sistemas LTI** vamos asumir la condición de **reposo inicial**: si la entrada es cero para $t \leq t_0$ entonces la salida del sistema es cero para $t \leq t_0$. De esta forma podemos asegurar que las condiciones iniciales son nulas lo cual nos asegura la **linealidad** del sistema. Además de la condición de reposo inicial, también obtenemos la **causalidad** del sistema (que sale como una consecuencia de que el sistema es lineal!). Se puede verificar que un sistema descrito por ecuaciones diferenciales a coeficientes constantes con esta condición es también **invariante** en el tiempo. Es fácil extender esto a sistemas descriptos por ecuaciones diferenciales de orden arbitrario con el fin de considerarlos como **sistemas LTI causales**!

Sistemas descriptos por ecuaciones en diferencias I

Una ecuación en diferencias es el análogo en tiempo discreto a una ecuación diferencial:

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

Para sistemas descriptos por ecuaciones en diferencias vale la conclusión que obtuvimos para los sistemas en tiempo continuo descriptos por ecuaciones diferenciales: un sistema de este tipo será LTI y causal si consideramos la condición de *reposo inicial*: si la entrada $x[n]$ es cero para $n < n_0$ entonces la salida del sistema $y[n]$ es cero para $n < n_0$. Probarlo!!

Es interesante escribir la ecuación en diferencias de la siguiente forma:

$$y[n] = \frac{1}{a_0} \left[\sum_{k=0}^M b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] \right]$$

Notar que la ecuación anterior es *recursiva*, ya que el valor de la salida al instante n depende (además de la entrada) de los N valores anteriores de la salida.

Cuando $M = 0$ obtenemos:

$$y[n] = x[n] - \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{a_0} y[n-k]$$

Cuando $N = 0$ obtenemos

$$y[n] = \sum_{k=0}^M \frac{b_k}{a_0} x[n-k]$$

Para el segundo caso podemos ver fácilmente que no tenemos recursividad y que la respuesta al impulso vale:

$$h[n] = \begin{cases} \frac{b_k}{a_0} & 0 \leq k \leq M \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se ve claramente que la respuesta al impulso es limitada en el tiempo, es decir es de longitud finita. Los sistemas descriptos por ecuaciones en diferencias con $N = 0$ se denominan sistemas FIR (finite impulse response).

El primer caso es una ecuación puramente recursiva y se puede probar que para sistemas descriptos por ecuaciones en diferencias en los cuales $N \neq 0$ la respuesta al impulso es de duración infinita.

Los sistemas de este tipo se denominan sistemas IIR (infinite impulse response)

Ejemplo: Consideremos $y[n] = x[n] - ay[n-1]$. Sea $x[n] = \delta[n]$ con la condición de reposo inicial, la cual implica que $y[-1] = 0$. Entonces tenemos:

$$y[0] = x[0] = 1$$

$$y[1] = -ay[0] = -a$$

$$y[2] = -ay[1] = a^2$$

$$y[3] = -ay[2] = -a^3$$

En general $y[n] = (-a)^n u[n]$. Se ve claramente que la respuesta es de duración infinita.

Cuando estudiemos el tema de transformada Z volveremos al tema de las ecuaciones en diferencias y los sistemas en tiempo discreto con mayor profundidad!

Lectura obligatoria

- Representación de sistemas mediante diagramas en bloques (Oppenheim and Willsky, Sección 2.4.3).
- Respuesta de los sistemas LTI al escalón unitario (Oppenheim and Willsky, Sección 2.3.8)
- Interpretación de funciones singulares por su acción sobre señales (Oppenheim and Willsky, Sección 2.5).

Lectura optativa

- Sistemas LTI en tiempo discreto (Oppenheim and Schaffer, Sección 2.3).
- Propiedades de los sistemas LTI en tiempo discreto (Oppenheim and Schaffer, Sección 2.4).
- Ecuaciones en diferencias lineales con coeficientes constantes (Oppenheim and Schaffer, Sección 2.5).

¿Preguntas?