

# TB065 - SEÑALES Y SISTEMAS

## GUÍA 2: CARACTERIZACIÓN DE SISTEMAS, SISTEMAS LTI Y CONVOLUCIÓN

 = Python, Julia, MATLAB, OCTAVE, etc.

---

**1.** Para cada una de las siguientes relaciones entrada-salida, determinar si el sistema es lineal, invariante ante desplazamientos, causal, estable y sin memoria. Justificar brevemente cada respuesta mediante la definición, un contraejemplo o un argumento gráfico.

(a)  $y(t) = x(t/3)$ .

(b)  $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau + 2) d\tau$ .

(c)  $y[n] = n x[n]$ .

(d)  $y[n] = x[-n]$ .

(e)  $y(t) = 2x(t) + 1$ .

---

**2.** Considere los sistemas de tiempo continuo

$$(I) \quad y(t) = e^{-t}x(t), \quad (II) \quad y(t) = 2x(t) + \cos(2t).$$

(a) Determinar si cada sistema es lineal e invariante en el tiempo.

(b) Hallar la salida  $y(t)$  de cada sistema ante  $x(t) = \delta(t - t_0)$ , para un  $t_0$  arbitrario.

(c) Suponga que sólo se conocen esas respuestas para todo  $t_0$  y las propiedades determinadas en el inciso (a), pero no las ecuaciones (I) y (II) que los definen. Explicar para cuál de los sistemas esa información alcanza para obtener la salida  $y(t)$  ante una entrada arbitraria y cómo se obtendría.

---

**3.** De un único sistema invariante en el tiempo se conocen los siguientes pares entrada-salida:

$$\begin{array}{lll} x_1[n] = \delta[n] + 2\delta[n-2] & \longrightarrow & y_1[n] = \delta[n-1] + 2\delta[n-2], \\ x_2[n] = 3\delta[n-2] & \longrightarrow & y_2[n] = \delta[n-1] + 2\delta[n-3], \\ x_3[n] = \delta[n-3] & \longrightarrow & y_3[n] = \delta[n+1] + 2\delta[n] + \delta[n-1]. \end{array}$$

(a) ¿Se puede afirmar que el sistema es lineal? Justificar.

(b) Determinar, si es posible, la respuesta ante  $x_4[n] = \delta[n]$ .

(c) Determinar, si es posible, la respuesta ante  $x_5[n] = 5\delta[n-2]$ .

---

**4.** Para cada par de señales, obtener y graficar  $y = x * h$  usando las propiedades de la delta, sin calcular directamente la integral ni la sumatoria. Identificar las copias desplazadas y escaladas de la señal no impulsiva que forman la salida.

(a)  $x(t) = e^{-t}u(t)$ ,  $h(t) = \delta(t + 1) + \frac{1}{2}\delta(t - 2)$ .

(b)  $x[n] = \delta[n] - \delta[n - 1]$ ,  $h[n] = (1/2)^n u[n]$ .

---

**5.** Un sistema LTI de tiempo discreto tiene respuesta al impulso

$$h[n] = \delta[n + 2] + 2\delta[n + 1] + 3\delta[n] + 2\delta[n - 1] + \delta[n - 2].$$

La entrada es el tren de impulsos periódico

$$x[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta[n - kN].$$

(a) Antes de calcular, predecir la periodicidad de la salida y describir qué cambia cuando  $N$  se hace menor que la duración de  $h[n]$ .

(b) Para  $N = 6$  y  $N = 2$ , construir gráficamente un período de  $y[n]$  como suma de copias desplazadas de  $h[n]$ .

(c) Verificar las predicciones del primer inciso. En cada caso, indicar si  $N$  es necesariamente el período fundamental de la salida.

---

**6.** Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar las verdaderas y dar un contraejemplo para las falsas.

(a) La cascada de dos sistemas LTI es un sistema LTI.

(b) La cascada de dos sistemas no lineales es necesariamente no lineal.

(c) La cascada de dos sistemas variantes en el tiempo es necesariamente variante en el tiempo.

(d) La cascada de dos sistemas causales es causal.

(e) El orden de conexión de dos sistemas LTI no altera la salida, siempre que las convoluciones involucradas existan.

(f) Si la entrada de un sistema LTI es periódica, la salida, cuando existe, también es periódica con ese período, aunque éste no sea necesariamente fundamental.

---

**7.** Considere las señales

$$x(t) = u(t) - u(t - 2), \quad h(t) = e^{-t}u(t).$$

- (a) Antes de integrar, predecir el soporte, la continuidad y el comportamiento de  $y(t) = (x * h)(t)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .
- (b) Dibujar  $x(\tau)$  y  $h(t - \tau)$ . A partir del solapamiento, separar los casos  $t < 0$ ,  $0 \leq t < 2$  y  $t \geq 2$ , e indicar los límites de integración en cada uno.
- (c) Calcular la expresión de  $y(t)$  en cada intervalo. Las integrales necesarias son elementales; el objetivo es traducir correctamente el solapamiento gráfico a una fórmula.
- (d) Graficar el resultado y compararlo con las predicciones del primer inciso.

---

**8.** Un sistema LTI discreto tiene respuesta al impulso  $h[n] = u[n]$ . Se consideran las entradas

$$x_1[n] = 2^n u[-n - 1], \quad x_2[n] = 2^{-n} u[-n - 1].$$

- (a) Para cada entrada, representar el procedimiento gráfico de convolución y decidir si, para un  $n$  dado, intervienen finitas o infinitas muestras no nulas.
- (b) Decidir si la convolución existe para cada  $n$ . Justificar la diferencia entre ambos casos.
- (c) Calcular y graficar la salida correspondiente a  $x_1[n]$ . Para  $x_2[n]$ , explicar por qué no corresponde asignar una salida finita mediante la suma de convolución.

---

**9.** Ante la entrada  $x[n] = u[n]$ , un sistema LTI discreto produce la salida

$$y[n] = u[n] - u[n - 5].$$

- (a) En general, si la respuesta de un sistema LTI a  $u[n]$  es nula fuera del intervalo  $n_0 \leq n \leq n_1$ , ¿fuera de qué intervalo puede asegurarse que  $h[n]$  es nula? Responder usando sólo la información sobre el soporte.
- (b) Para la respuesta al escalón dada, obtener y graficar  $h[n]$ .
- (c) A partir de  $h[n]$ , decidir si el sistema es causal, estable y sin memoria. Justificar.

---

**10.** Considere el sistema discreto

$$y[n] = \frac{3}{4}x[n] + \frac{1}{4}x[n - 1].$$

- (a) A partir de las muestras de la entrada que intervienen en  $y[n]$  y de sus pesos, predecir si el sistema es causal y estable. Luego hallar y graficar  $h[n]$ , y verificar ambas predicciones a partir de  $h[n]$ .
- (b) Para la entrada  $x[n] = u[n + 2]$ , calcular y graficar la salida. Compararla con la entrada y describir qué hace el sistema alrededor de la discontinuidad del escalón.

- (c) El sistema se conecta en cascada con un retardo de dos muestras. Hallar la respuesta al impulso total y la salida para la entrada del inciso anterior.
- (d) Decidir si invertir el orden de los dos bloques cambia la salida. Justificar la respuesta usando propiedades de los sistemas LTI.

## EJERCICIOS ADICIONALES

---

**11.** Implementar las convoluciones de los ejercicios 5 y 10 con una herramienta numérica. Comparar los gráficos con las predicciones y los resultados analíticos.

---

**12.** Clasificar los siguientes sistemas respecto de linealidad, invariancia temporal, causalidad, estabilidad y memoria. Justificar brevemente.

(a)

$$y[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ \pi x[n], & n \neq 0. \end{cases}$$

(b)  $y[n] = \operatorname{Re}\{x[n]\}$ .

(c)  $y[n] = x[n]x[n-1]$ .

(d)  $y(t) = \int_{t-1}^{t+1} x(\tau) d\tau$ .

---

**13.** Sea  $h(t) = u(t) - u(t-1)$  la respuesta al impulso de un sistema LTI y sea  $x(t) = h(t/\alpha)$ , con  $\alpha > 0$ .

(a) Calcular y graficar la salida.

(b) Si la derivada de la salida presenta sólo tres puntos de discontinuidad distintos, determinar  $\alpha$ .

---

**14.** Graficar los resultados de las siguientes convoluciones.

(a)  $h(t) = e^{-t}u(t)$ ,  $x(t) = e^{-3t}u(t)$ .

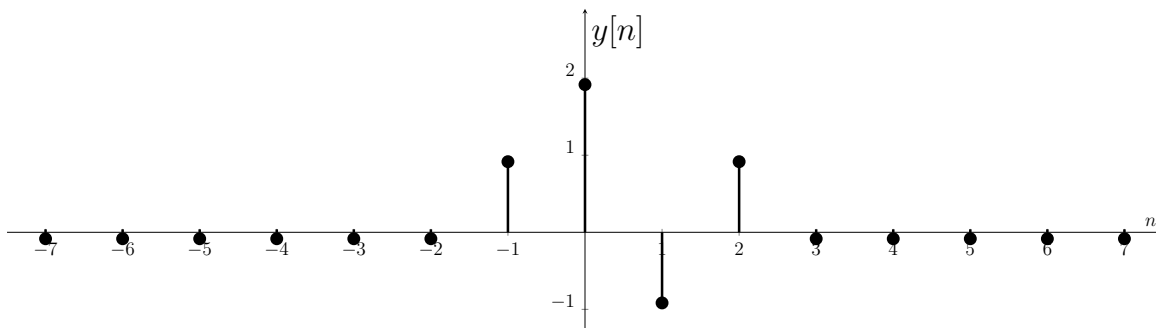
(b)  $h(t) = u(t)$ ,  $x(t) = e^{-t}u(-t)$ .

(c)  $h[n] = (1/2)^n u[n]$ ,  $x[n] = (1/3)^n u[n]$ .

(d)  $h[n] = \alpha^n u[n]$ , con  $|\alpha| < 1$ , y  $x[n] = u[n] - u[n-5]$ .

---

**15.** Dos sistemas LTI discretos, causales, con respuestas al impulso  $h_1[n]$  y  $h_2[n]$ , se conectan en cascada. Para una entrada desconocida se observa la salida de la figura.



(a) ¿Qué se puede afirmar sobre el instante en que pudo comenzar la entrada? ¿Puede determinarse ese instante en forma exacta?

(b) La misma entrada se aplica a una nueva cascada con  $h_a[n] = h_1[n + 1]$  y  $h_b[n] = 2h_2[n]$ . Graficar la nueva salida.

---

**16.** Sea un sistema LTI causal cuya salida satisface

$$y(t) = \int_{-\infty}^t e^{-\alpha(t-\tau)} \left( x(\tau) - \frac{1}{2}x(\tau-1) \right) d\tau, \quad \alpha > 0.$$

(a) Obtener la respuesta al impulso y decidir si el sistema es estable.

(b) Determinar  $\alpha$  sabiendo que la entrada constante  $x(t) = 1$  produce la salida constante  $y(t) = 1$ .

---

**17.** Un sistema LTI continuo tiene respuesta al impulso

$$h(t) = u(t + T/2) - u(t - T/2), \quad T > 0.$$

(a) Demostrar que, para toda entrada periódica de período  $T$ , la salida es constante.

(b) Determinar esa constante cuando la entrada es impar.

(c) Investigar para qué otros períodos  $T' \neq T$  puede ocurrir el mismo fenómeno. Enunciar con precisión si la condición hallada vale para toda señal de período  $T'$  o sólo para algunas.

---

**18.** Considere un sistema LTI continuo con respuesta al impulso

$$h(t) = \frac{1}{t}u(t-1).$$

(a) Hallar la respuesta al escalón cuando exista.

(b) Analizar la estabilidad. Si el sistema no es estable, construir una entrada acotada cuya salida no sea acotada.