



**FACULTAD
DE INGENIERIA**
Universidad de Buenos Aires

Introducción a las Señales y Sistemas

Dr. Ing. Pedro D. Arini
parini@fi.uba.ar

2do. cuatrimestre 2026

- 1 Introducción a la materia
- 2 Señales en tiempo continuo y discreto
- 3 Sistemas en tiempo continuo y discreto

Introducir conceptos y técnicas de análisis y diseño para señales y sistemas en tiempo continuo y discreto, con especial énfasis en sistemas lineales!

El análisis y síntesis de señales y sistemas tiene importancia fundamental en la ciencia y la tecnología:

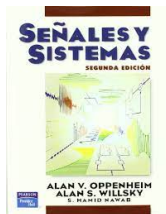
- **Ing. Electrónica:** comunicaciones, teoría de circuitos, control, etc.
- **Bioingeniería:** procesamiento y análisis de señales e imágenes en biomedicina, modelización sistemas biológicos, etc.
- Ing. Eléctrica: generación y distribución de energía eléctrica, detección de fallas, etc.
- Sistemas aeroespaciales, radares, etc.

En la materia estudiaremos conceptos básicos y cuando sea posible presentaremos ejemplos simples de aplicación.

- Conceptos básicos de señales y sistemas.
- Convolución y propiedades de sistemas lineales.
- Series y transformadas de Fourier.
- Muestreo e interpolación.
- Transformada Discreta de Fourier
- Transformada de Laplace y transformada Z.
- Diseño de filtros digitales.
- Aplicaciones.

En el campus puede encontrarse: bibliografía, guías de ejercicios, videos de las clases teóricas, cronograma y reglamento de la materia

Básica:



Oppenheim, A.
Willsky, S.
Nawab, *Señales
y Sistemas*,
Prentice-Hall,
2da. edición,
1998.



A. Oppenheim,
R. Schafer,
*Tratamiento de
Señales en
Tiempo
Discreto*,
Person, 3da.
edición, 2011.

Suplementaria:

- J. Proakis and D. Manolakis, *Tratamiento digital de señales, Principios, algoritmos y aplicaciones*, Prentice-Hall, 3ra. edición, 1998.

- 1 Parcial (+2 recuperatorios).
- Presentación y defensa trabajo práctico especial.
- Nota de cursada $NCur = 0.6 * Nparcial + 0.4 * Ntpe$.
- Coloquio integrador. Nota final: $Nf = 0.4 * NCur + 0.6 * NCol$.

Importante: La materia introduce muchos conceptos abstractos que requieren tiempo de estudio y dedicación para ser incorporados. Se recomienda:

- 1 Asistir a las teóricas con el material a ser presentado previamente leído.
- 2 Luego de cada clase teórica estudiar la bibliografía de los temas presentados. Las presentaciones no reemplazan a la bibliografía sugerida.
- 3 En las clases prácticas resolver ejercicios y consultar a los docentes. Mantener una rutina de resolución de problemas.
- 4 Ejercitarse durante la semana utilizando las guías de ejercicios y los ejercicios sugeridos en la teórica y en las prácticas.

¿qué es una señal?

Básicamente es un objeto/elemento que lleva información total o parcial vinculada al comportamiento de un sistema físico.

Existe una gran diversidad de sistemas físicos y por ende una inmensidad de señales de naturaleza diversa!

Sin embargo en general pueden ser modelizadas de una forma universal y ser analizadas con herramientas matemáticas independientes de la naturaleza física de dichas señales!!

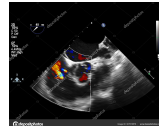
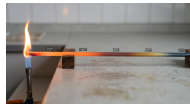
Esto es importante ya que nos permite analizar señales y sistemas sin hacer ninguna consideración sobre su naturaleza física concreta pudiendo generar conceptos y análisis verdaderamente universales!

Ruido: fenómeno que perturba la percepción o interpretación de una señal.

$$x(\mathbf{t}) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$$

Ejemplos:

- la tensión $v(t)$ como función del tiempo en un capacitor, $N = 1$.
- la señal cardíaca en función del tiempo obtenida a través de un ECG, $N = 1$.
- la temperatura en una varilla de metal en función de la posición sobre la misma, $N = 1$.
- una imagen médica, donde $f(x, y)$ es la intensidad del brillo, siendo x e y las coordenadas espaciales, $N = 2$.

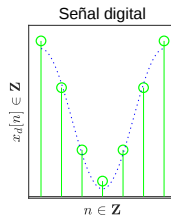
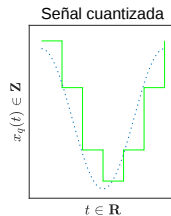
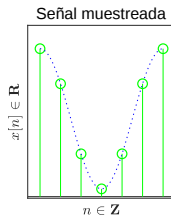
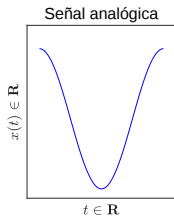


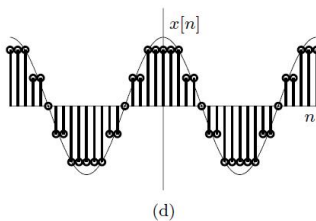
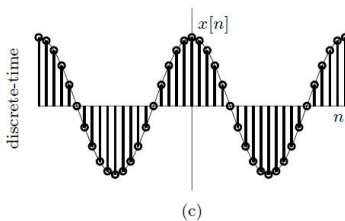
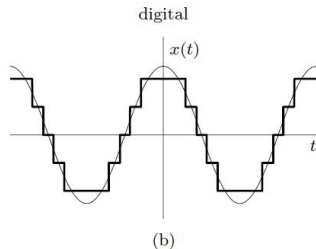
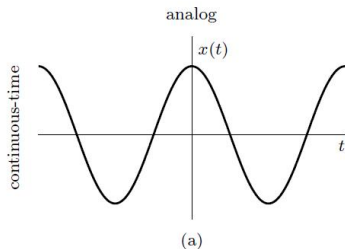
- Eje Horizontal (Tiempo):
 - Tiempo Continuo: Definida para todo instante t .
 - Tiempo Discreto: Definida únicamente en instantes específicos $t = nT_s$.
- Eje Vertical (Amplitud):
 - Analógica: La amplitud puede tomar infinitos valores continuos.
 - Digital: La amplitud solo toma un número finito de valores (L -aria).

	Tiempo Continuo	Tiempo Discreto
Analógica	Señales físicas del mundo real (ej. tensión de micrófono).	Señales muestreadas sin cuantificar (ej. Sample-and-Hold).
Digital	Transiciones entre niveles finitos continuas en tiempo (poco común).	Muestreada y cuantificada; estándar en computadoras y DSP.

Ejemplos:

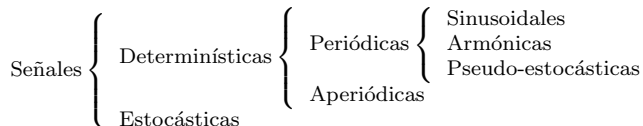
- Muestras de una señal de tiempo continuo.
- Datos del nivel de precipitaciones en Buenos Aires para cada mes del año.
- Datos para cada día del nivel de operaciones en la Bolsa de Buenos Aires.
- Una imagen fotográfica digital.





Extraído de: *B. P. Lathi and R. Green. Essentials of Digital Signal Processing, Cambridge University Press, 2014*

- Señales determinísticas: Cada valor de la señal para cada t o n , según corresponda, está perfectamente determinado a través de una función matemática o una tabla de valores.
- Señales estocásticas: El valor de la señal para cada t o n , según corresponda, no está perfectamente determinado y obedece a una ley de probabilidad. Se puede decir, que una señal estocástica es un conjunto de señales, todas perfectamente realizables, por un esquema subyacente de probabilidades.



Las señales estocásticas son muy útiles para analizar la dinámica de sistemas muy complejos, que no pueden ser modelados analíticamente. Por ej. la señal del electroencefalograma (EEG), la señal de voz, etc. Nosotros nos ocuparemos de las señales determinísticas.

Números complejos I: origen

Los complejos surgen de resolver ecuaciones de 2do. grado:

$$x^2 + 4 = 0$$

Resultando en:

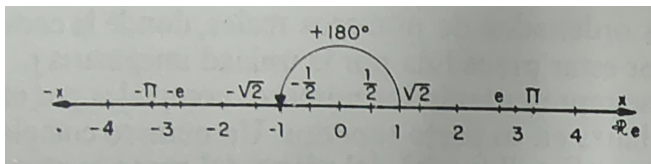
$$x = \pm\sqrt{-4} = \pm 2\sqrt{-1}$$

Como esa raíz no tiene solución, se define la unidad imaginaria j tal que:

$$j^2 = -1 \implies j = \sqrt{-1}$$

La solución final es:

$$x = \pm 2j$$



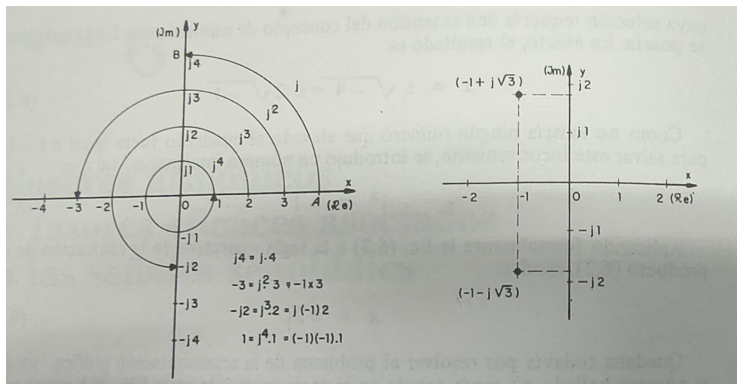
Recta de números reales

Números complejos II: el plano complejo

Multiplicar por j^2 equivalente giro de $+180^\circ$, multiplicar por j equivale a un giro de $+90^\circ$. Nace el eje imaginario "y", permitiendo representar números con parte real e imaginaria.

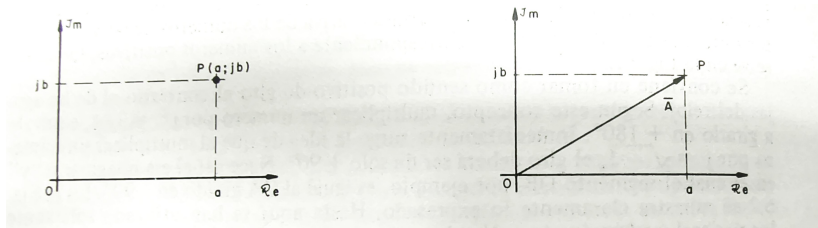
Por ejemplo: para $x^2 + 2x + 4 = 0$, la solución es:

$$x = -1 \pm j\sqrt{3}$$



(IZQ.): Giro de $+90^\circ$ por j . (DER.): Representación de $-1 \pm j\sqrt{3}$

Un número complejo puede ser un punto $P(a; jb)$ o un vector $\vec{OP}$ llamado **fasor**.



(IZQ.): pto, fijo en plano. (DER.): vector o fasor

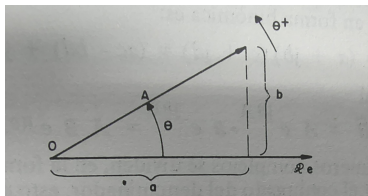
Forma Binómica:

$$\bar{A} = a + jb$$

Donde $a = \text{Re}[\bar{A}]$ y $b = \text{Im}[\bar{A}]$

Nros. complejos IV: formas polar y exponencial

De la relación trigonométrica del fasor se deduce:



$$\begin{cases} a = A \cos \theta \\ b = A \sin \theta \end{cases}$$

Sustituyendo en $\bar{A} = a + jb$, se tiene que $\bar{A} = A(\cos \theta + j \sin \theta)$.

Usando la **Fórmula de Euler**:

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

Se obtiene la **Forma exponencial** $\bar{A} = Ae^{j\theta}$ y la **Forma polar** $\bar{A} = A\angle\theta$

Donde:

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} \quad ; \quad \theta = \arctg(b/a)$$

El conjugado $\bar{A}^*$ cambia el signo de la parte imaginaria:

$$\bar{A}^* = a - jb = Ae^{-j\theta}$$

Identidades útiles:

$$\bar{A} + \bar{A}^* = 2a$$

$$\bar{A} - \bar{A}^* = j2b$$

$$\bar{A} \cdot \bar{A}^* = a^2 + b^2$$

Adición y Sustracción: Siendo $\bar{A} = a + jb$ y $\bar{B} = c + jd$

$$\bar{C} = \bar{A} \pm \bar{B} = (a \pm c) + j(b \pm d)$$

Gráficamente se usa la regla del paralelogramo.

Siendo $\bar{A} = a + jb = Ae^{j\theta_A}$ y $\bar{B} = c + jd = Be^{j\theta_B}$

Multiplicación:

- Binómica: $\bar{C} = (ac - bd) + j(ad + bc)$
- Exponencial: $\bar{C} = (A \cdot B)e^{j(\theta_A + \theta_B)}$

División:

- Binómica (racionalizando): $\bar{C} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + j\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$
- Exponencial: $\bar{C} = (A/B)e^{j(\theta_A - \theta_B)}$

Fórmula de Moivre (Potenciación):

$$\bar{A}^n = A^n e^{jn\theta} = A^n (\cos n\theta + j \sin n\theta)$$

Radicación:

$$\sqrt[n]{\bar{A}} = \sqrt[n]{A} e^{j(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

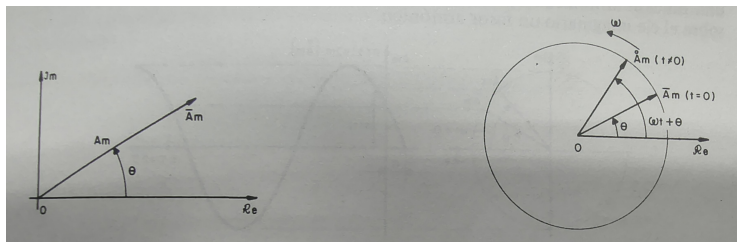
Nros. complejos VII: Fasores armónicos

Sea la amplitud compleja $\bar{A}_m = A_m e^{j\theta}$.

El **fasor giratorio** se define como:

$$\dot{\bar{A}}_m = \bar{A}_m e^{j\omega t} = A_m e^{j(\omega t + \theta)}$$

El **operador** $e^{j\omega t}$ **arrastra** a $\bar{A}_m$ con velocidad angular constante ω . $\bar{A}_m$ es la imagen para $t = 0$. Ahora, el ángulo aumenta linealmente con el tiempo, entonces el fasor gira con una velocidad ω radianes por segundo, en sentido anti-horario.



(IZQ): Vector plano $\bar{A}_m$. (DER.): Rotación del fasor

El operador unitario $e^{j\omega t}$ cumple la función de arrastrar el fasor $\bar{A}_m$, haciéndolo girar con una velocidad angular ω .

Para el tiempo T tal que $\omega T = 2\pi$, el fasor giratorio $\dot{A}_m$ vuelve a ocupar su posición inicial, por lo que resulta periódico con un período de $2\pi/\omega$ denominado **fasor armónico**.

Los fasores armónicos cumplen una relación de periodicidad análoga a la de las funciones trigonométricas:

$$\begin{aligned}A_m e^{j(\omega t + \theta + 2K\pi)} &= A_m e^{j(\omega t + \theta)} \\ \cos(\omega t + \theta + 2K\pi) &= \cos(\omega t + \theta) \\ \sin(\omega t + \theta + 2K\pi) &= \sin(\omega t + \theta)\end{aligned}$$

para valores de $K = 0, 1, 2, \dots$ etc.

Esta semejanza entre la función exponencial de argumento imaginario y las funciones trigonométricas no es accidental. En efecto, estas funciones están relacionadas por la fórmula de Euler, de la cual se deduce que ...

A partir de la fórmula de Euler, se deducen las relaciones de correspondencia directa

$$\cos \omega t = \mathcal{R}e[e^{j\omega t}]$$

$$\text{sen } \omega t = \mathcal{I}m[e^{j\omega t}]$$

La proyección del fasor giratorio $\dot{A}_m$ sobre el eje imaginario define la función armónica $a(t) = A_m \text{sen}(\omega t + \theta)$:

$$\dot{A}_m = \bar{A}_m e^{j\omega t} = A_m e^{j(\omega t + \theta)}$$

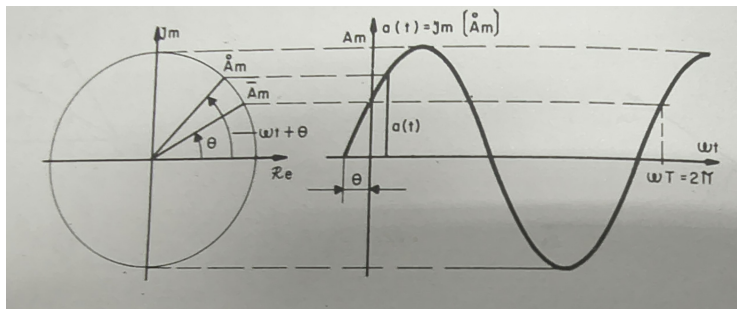
Nros. complejos X: relación con funciones trigonométricas

Dada la periodicidad y la fórmula de Euler, se deduce:

$$\cos \omega t = \mathcal{R}e[e^{j\omega t}]$$

$$\sen \omega t = \mathcal{I}m[e^{j\omega t}]$$

Una señal $a(t) = A_m \sen(\omega t + \theta)$ se obtiene proyectando el fasor giratorio $\dot{A}_m$ sobre el eje imaginario.

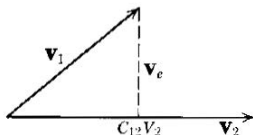


Proyección del fasor para obtener la onda senoidal

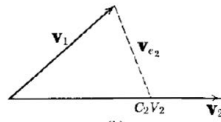
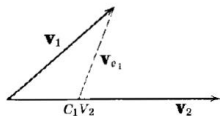
Analogía entre señales y vectores I

Un vector se especifica mediante su magnitud y su dirección. Consideremos la aproximación de un vector $\mathbf{V}_1$ en términos de otro vector $\mathbf{V}_2$ (componente $\mathbf{V}_1$ a lo largo de $\mathbf{V}_2$):

$$\mathbf{V}_1 = C_{12}\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_e$$



donde $\mathbf{V}_e$ es el vector error. Existen infinitas formas de expresar $\mathbf{V}_1$ variando C_{12} . Sin embargo, el error mínimo ocurre cuando el vector error $\mathbf{V}_e$ es perpendicular (ortogonal) a $\mathbf{V}_2$.



$$\mathbf{V}_1 = C_1\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_{e1}$$

Definimos el **producto escalar** de los vectores $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$ como:

$$\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2 = V_1 V_2 \cos \theta$$

donde:

- V_1 y V_2 son las magnitudes de los vectores $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$.
- θ es el ángulo que forman ambos vectores.

De esta definición se deduce la simetría conmutativa $\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{V}_1$ y las relaciones para obtener las componentes proyectadas:

- **Componente de $\mathbf{V}_1$ a lo largo de $\mathbf{V}_2$:**

$$V_1 \cos \theta = \frac{\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2}{V_2}$$

- **Componente de $\mathbf{V}_2$ a lo largo de $\mathbf{V}_1$:**

$$V_2 \cos \theta = \frac{\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2}{V_1}$$

El problema: Aproximar un vector $\mathbf{V}_1$ en la dirección de $\mathbf{V}_2$ usando un coeficiente de escala C_{12} :

$$\mathbf{V}_1 = C_{12}\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_e \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{V}_e = \mathbf{V}_1 - C_{12}\mathbf{V}_2$$

Principio de ortogonalidad (mínimo error)

La longitud del vector de error $\mathbf{V}_e$ es **mínima** si y solo si es perpendicular (ortogonal) a la dirección de proyección $\mathbf{V}_2$. Esto exige que su producto escalar sea nulo:

$$\mathbf{V}_e \cdot \mathbf{V}_2 = 0$$

Desarrollo directo (sin cálculo diferencial):

$$\begin{aligned} (\mathbf{V}_1 - C_{12}\mathbf{V}_2) \cdot \mathbf{V}_2 &= 0 \\ (\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2) - C_{12}(\mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{V}_2) &= 0 \quad (\text{propiedad distributiva}) \\ \Longrightarrow C_{12} &= \frac{\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{V}_2} \end{aligned}$$

La componente de $\mathbf{V}_1$ a lo largo de $\mathbf{V}_2$ se obtiene mediante el producto escalar:

$$C_{12} = \frac{\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2}{|\mathbf{V}_2|^2} = \frac{\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{V}_2}$$

Si los vectores son ortogonales, entonces el coeficiente C_{12} es cero:

$$\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2 = 0 \quad \text{y} \quad C_{12} = 0$$

El concepto de comparación vectorial se extiende a las señales. Se busca aproximar $f_1(t)$ mediante $f_2(t)$ en un intervalo (t_1, t_2) :

$$f_1(t) \approx c_{12}f_2(t)$$

Se define la función de error $f_e(t)$ como:

$$f_e(t) = f_1(t) - c_{12}f_2(t) \tag{1}$$

Para hallar la mejor aproximación, se minimiza el error cuadrático medio (ϵ) en el intervalo dado:

$$\epsilon = \frac{1}{(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} [f_1(t) - c_{12}f_2(t)]^2 dt$$

Para encontrar el valor de c_{12} que reduce al mínimo el error, derivamos respecto a la variable e igualamos a cero: $\frac{d\epsilon}{dc_{12}} = 0$

Resolviendo la minimización, el valor óptimo del coeficiente es:

$$c_{12} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f_1(t)f_2(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} f_2^2(t)dt}$$

Decimos que dos funciones son ortogonales en el intervalo (t_1, t_2) si se cumple que:

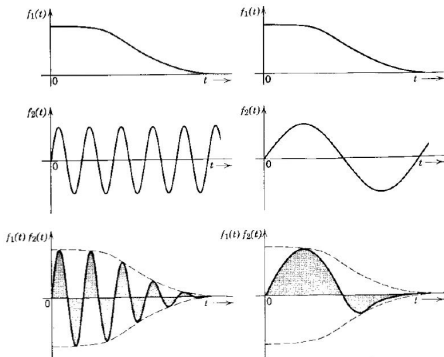
$$\int_{t_1}^{t_2} f_1(t)f_2(t)dt = 0$$

Analogía entre señales y vectores V

Para determinar gráficamente la componente de $f_2(t)$ en $f_1(t)$ en un periodo $(0, T)$, evaluamos la magnitud C_{12} :

$$C_{12} = \frac{\int_0^T f_1(t)f_2(t)dt}{\int_0^T f_2^2(t)dt}$$

- El numerador representa el área bajo la curva producto $f_1(t)f_2(t)$.
- Si las señales se parecen, la componente será grande; si varían de forma opuesta o muy distinta, las áreas se cancelan.



Analogía señales/vectores VI: aproximación con funciones ortogonales

Consideremos un conjunto de n funciones $\{g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t)\}$ mutuamente ortogonales en el intervalo (t_1, t_2) :

$$\int_{t_1}^{t_2} g_j(t)g_k(t)dt = 0 \quad j \neq k$$

Se aproxima una función $f(t)$ mediante una combinación lineal:

$$f(t) \approx \sum_{r=1}^n C_r g_r(t)$$

Para minimizar el error cuadrático medio (ϵ), los coeficientes óptimos C_r se calculan como:

$$C_r = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)g_r(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} g_r^2(t)dt} = \frac{1}{K_r} \int_{t_1}^{t_2} f(t)g_r(t)dt$$

El valor del error mínimo para n funciones es:

$$\epsilon = \frac{1}{(t_2 - t_1)} \left[\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)dt - \sum_{r=1}^n C_r^2 K_r \right]$$

Si al aumentar $n \rightarrow \infty$, el error cuadrático medio se anula ($\epsilon = 0$), el grupo de funciones es completo o cerrado.

En este caso, la representación es exacta:

$$f(t) = \sum_{r=1}^{\infty} C_r g_r(t)$$

Esta expresión se conoce como la representación generalizada de $f(t)$ en serie de Fourier.

En un conjunto completo, se cumple el Teorema de Parseval, estableciendo que la energía de la señal es igual a la suma de las energías de sus componentes:

$$\int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt = \sum_{r=1}^{\infty} C_r^2 K_r$$

Esto cierra la analogía total: el cuadrado de la magnitud de una señal es análogo al cuadrado de la magnitud de un vector.

Desde el formalismo matemático nos servirá estructurar las señales en espacios vectoriales adecuados (para nosotros estructurados sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). En forma precisa

Sea $\mathcal{H}$ un conjunto de funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que además satisfacen lo siguiente:

- Si $f(t) \in \mathcal{H}$ entonces $\alpha f(t) \in \mathcal{H}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
- Si $f(t)$ y $g(t)$ pertenecen a $\mathcal{H}$ entonces $f(t) + g(t)$ pertenecen a $\mathcal{H}$.

Se dice que $\mathcal{H}$ es un espacio vectorial estructurado sobre $\mathbb{R}$.

Observaciones:

- Notar que necesariamente la función nula (es decir la que vale 0 para todo t) debe pertenecer a $\mathcal{H}$.
- La extensión para el caso de señales de tiempo discreto es inmediata.
- Los espacios vectoriales con los que trabajaremos no serán en general de dimensión finita!.
- La noción de independencia lineal entre N elementos del espacio es siempre la misma independientemente de que el espacio tenga dimensión finita o infinita.
- Es inmediato ver que podemos estructurar un espacio en lugar de sobre $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{C}$ (de hecho lo haremos más adelante!!)

Ejemplos:

- Sea $L_2(\mathbb{R})$ el espacio de las señales $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty,$$

es decir las señales con energía finita en toda la recta. Es claro que $L_2(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial.

- El resultado es el mismo para $L_2(B)$ con $B \subseteq \mathbb{R}$ el espacio de las señales $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ tales que :

$$\int_B |f(t)|^2 dt < \infty$$

- Sea $l^2(\mathbb{Z})$ el espacio de las señales de tiempo discreto tales que:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty$$

Es claro que $l^2(\mathbb{Z})$ es un espacio vectorial.

En algunos espacios vectoriales podremos contar con algunas estructuras más completas. Por ejemplo, con un producto interno.

Decimos que $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ es un producto interno sobre el espacio vectorial $\mathcal{H}$ compuesto por funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si satisface:

- $\langle f(t), g(t) \rangle = \langle g(t), f(t) \rangle$ para $f(t), g(t)$ pertenecientes a $\mathcal{H}$.
- $\langle \alpha f(t), g(t) \rangle = \alpha \langle f(t), g(t) \rangle$ para $f(t), g(t)$ pertenecientes a $\mathcal{H}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.
- $\langle f(t), f(t) \rangle \geq 0$ con la igualdad sí y sólo sí $f(t) \equiv 0$. Notar que $\langle f(t), f(t) \rangle \equiv \|f(t)\|^2$, es decir la norma al cuadrado de la señal $f(t)$.

Ejemplo: Sea $L_2([0, T])$ el espacio vectorial de las funciones de energía finita $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$. Se define:

$$\langle f(t), g(t) \rangle \equiv \int_0^T f(t)g(t)dt$$

La presencia de producto interno permite definir la noción de *ortogonalidad* entre elementos de un espacio vectorial.

Se dice que $f(t)$ y $g(t)$ pertenecientes a $\mathcal{H}$ con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ son ortogonales si:

$$\langle f(t), g(t) \rangle = 0$$

Ejemplo: Sea $f(t), g(t) \in L_2([0, T])$ con el producto interno usual. Entonces, si $f(t)$ y $g(t)$ son ortogonales:

$$\int_0^T f(t)g(t)dt = 0$$

En espacio vectoriales con producto interno cobra importancia el concepto de *base ortonormal*. Una base ortonormal conocida por todos (y que después utilizaremos) para el espacio de funciones complejas $f : [0, T) \rightarrow \mathbb{C}$ en $L_2([0, T))$ es¹:

$$\left\{ \dots, \frac{1}{\sqrt{T}} e^{-2j\omega_0 t}, \frac{1}{\sqrt{T}} e^{-j\omega_0 t}, \frac{1}{\sqrt{T}}, \frac{1}{\sqrt{T}} e^{j\omega_0 t}, \frac{1}{\sqrt{T}} e^{2j\omega_0 t}, \dots \right\}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

¹ $L_2([0, T))$ es un espacio de dimensión infinita y existen algunas cuestiones técnicas para estar seguros que el conjunto de las exponenciales complejas permite “generar” cualquier elemento del espacio. No nos detendremos en dichos detalles en el curso.

Una función muy útil para nosotros será la función escalón unitario $u(t)$:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



El valor en $t = 0$ no es importante y se puede definir con total libertad. Una elección popular es $u(0) = 0.5$.

Esta función es muy útil en teoría de control y procesamiento de señales. Una de sus atractivos es que permite restringir señales para los valores de t positivos por medio de una simple multiplicación con esta función.

Otra función de mucho interés para nosotros será la *delta de Dirac* $\delta(t)$ o función impulso unitario²:

La definición rigurosa de este objeto es matemáticamente compleja. Incluso desde el punto de vista formal, lo que llamamos como delta de Dirac no es una función. Nosotros, como usaremos este objeto de forma puramente operativa no nos preocuparemos por estos detalles.

Una posible definición es la siguiente

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$



Integrando la función delta de Dirac obtenemos la función escalón definida arriba !

²La definición precisa requiere teoría de distribuciones y teoría de la medida, temas que están fuera del alcance de este curso. Para los interesados (y valientes!!) consultar W. Rudin, *Functional Analysis*, Mc-Graw-Hill, 1991.

Sin ser rigurosos podemos definir también:

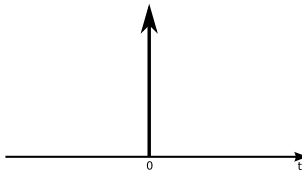
$$\delta(t) = u'(t)$$



La falta de rigurosidad nos lleva a un problema en $t = 0$ donde la función escalón unitario es discontinua y su derivada en el sentido clásico no existe!! Sin embargo con el formalismo de la teoría de las distribuciones dicha derivada se puede justificar y por ello la seguiremos utilizando!

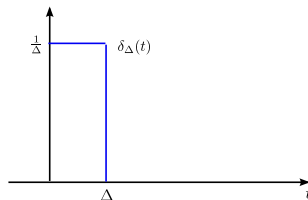
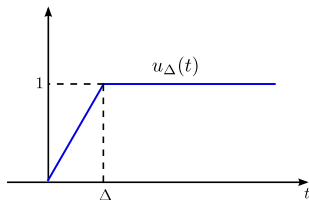
En forma equivalente la delta de Dirac es un objeto que cumple con las siguientes propiedades

- $\delta(t) = 0 \quad \forall t \neq 0.$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$



Podemos interpretar la expresión $\delta(t) = u'(t)$ como un límite (aunque no rigurosamente):

$$\delta_{\Delta}(t) = u'_{\Delta}(t), \quad \Delta \rightarrow 0$$



Notamos como $\delta_{\Delta}(t)$ tiene siempre área unitaria y para $t < 0$ y $t > \Delta$ vale 0. Sin preocuparnos por la rigurosidad matemática podemos decir que :

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_{\Delta}(t) = \delta(t)$$

Funciones como $\delta_{\Delta}(t)$ arriba, que convergen a $\delta(t)$ cuando $\Delta \rightarrow 0$ se denominan *nascent delta functions*.

Notar que para una señal $x(t)$ continua podemos escribir (con el límite interpretado en el mismo sentido que las expresiones de arriba):

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} x(t)\delta_{\Delta}(t) = x(0)\delta(t)$$

Esto nos lleva a una de las principales propiedades de la delta de Dirac:

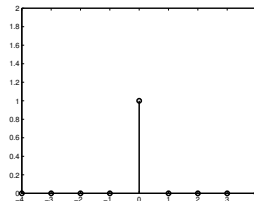
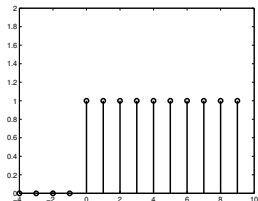
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)x(t)dt = x(t_0)$$



Para funciones continuas en un $t_0 \in \mathbb{R}$ arbitrario, la delta de Dirac nos permite de alguna forma obtener o "evaluar" el valor de dichas funciones en dicho punto!! Esto será muy útil cuando veamos el tema de muestreo!!

Cuando veamos el concepto de convolución para sistemas lineales veremos otra interpretación interesante de la delta de Dirac!!

Para el caso de tiempo discreto podemos también definir las funciones escalón unitario $u[n]$ y la función impulso unitario $\delta[n]$:



En este caso no hay problemas matemáticos y los resultados e intuición son más naturales. Notar que en este caso el valor en $n = 0$ de la función escalón se fija en 1. Es fácil verificar:

- $u[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k]$.
- $\delta[n] = u[n] - u[n-1]$.
- $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k] = x[n]$ para cualquier señal de tiempo discreto $x[n]$.

Impulso Discreto $\delta[n]$

Delta de Kronecker (Función ordinaria)

- Valor en el origen:

$$\delta[0] = 1$$

- Naturaleza matemática: Es una secuencia simple, ordinaria y físicamente realizable sin complicaciones teóricas.
- Relación con el escalón $u[n]$:

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^n \delta[m]$$

El acumulador suma directamente el valor discreto 1 al pasar por el origen, fijando $u = 1$

Impulso Continuo $\delta(t)$

Delta de Dirac (Distribución)

- Valor en el origen:

$$\delta(0) \rightarrow \infty \quad (\text{Indefinido})$$

- Naturaleza matemática: función distribución. No tiene duración física; igual a 1 es su área total integrada:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

- Relación con el escalón $u(t)$:

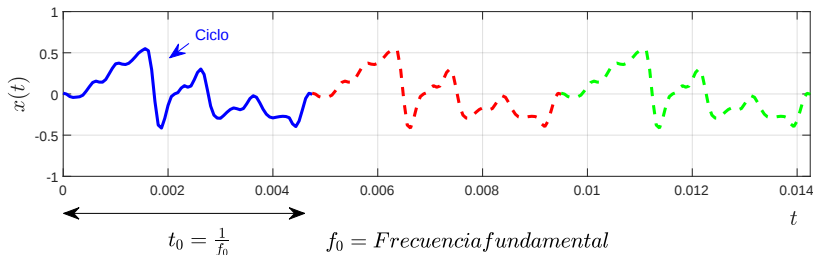
$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$

Es 1 para $t > 0$ porque la integral encierra la totalidad del área del impulso. Se define $u(0) = 1/2$.

Se dice que una señal continua $x(t)$ es periódica, con periodo $T \in \mathbb{R}$, si:

$$x(t + T) = x(t), \forall t$$

Si $x(t)$ es periódica con periodo T también es periódica con periodo qT , $q \in \mathbb{N}$. El periodo fundamental t_0 es el número positivo más pequeño de T .



Se dice que una señal discreta $x[n]$ es periódica, con periodo $N \in \mathbb{Z}$, si:

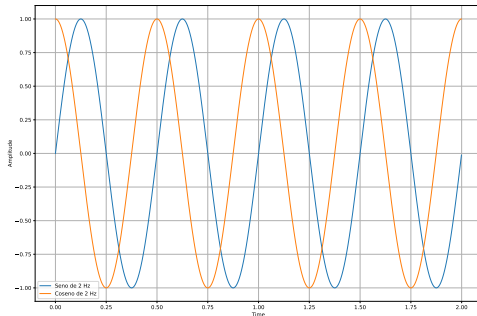
$$x[n + N] = x[n], \forall n$$

Señales periódicas II

El arquetipo de funciones periódicas son las funciones senoidales:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi), \quad y(t) = A \cos(\omega t + \phi) = x(t + \pi/2)$$

donde $\omega = 2\pi f$ siendo f la frecuencia (en Hz) y con período $T = \frac{1}{f}$ (en seg.).



Las señales periódicas más importantes para nosotros serán las exponenciales complejas. Usando que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

Puedo hacer lo siguiente:

$$e^{jx} = 1 + jx + \frac{(jx)^2}{2!} + \frac{(jx)^3}{3!} + \cdots = 1 + jx - \frac{x^2}{2!} - j\frac{x^3}{3!} + \cdots = \cos(x) + j\sin(x)$$

Esto se conoce como notación de Euler y es una representación muy útil ya que hereda todas las propiedades de las exponenciales. Entonces:

$$x(t) = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t) \equiv e^{j\omega t}$$

$$z(t) \in \mathbb{C}$$

$$z(t) = \mathcal{R}e\{z(t)\} + j\mathcal{I}m\{z(t)\}$$

$$j = \sqrt{-1}$$

$$\mathcal{R}e\{z(t)\} = \frac{z(t) + z^*(t)}{2}$$

$$\mathcal{I}m\{z(t)\} = \frac{z(t) - z^*(t)}{2}$$

$$z(t) = \|z(t)\| e^{j\angle z(t)}$$

$$z(t) = \|z(t)\| \cos(\angle z(t)) + j\|z(t)\| \sin(\angle z(t))$$

$$\begin{aligned} \|z(t)\| &= \sqrt{z(t)z^*(t)} \\ &= \sqrt{\mathcal{R}e^2\{z(t)\} + \mathcal{I}m^2\{z(t)\}} \end{aligned}$$

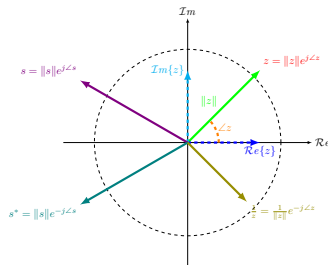
$$\angle z(t) = \arctan\left(\frac{\mathcal{I}m\{z(t)\}}{\mathcal{R}e\{z(t)\}}\right)$$

$$z^* = \mathcal{R}e\{z(t)\} - j\mathcal{I}m\{z(t)\}$$

$$z^* = \|z(t)\| e^{-j\angle z(t)}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\mathcal{R}e\{z(t)\} - j\mathcal{I}m\{z(t)\}}{\mathcal{R}e^2\{z(t)\} + \mathcal{I}m^2\{z(t)\}}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\|z\|} e^{-j\angle z}$$



Valor medio de una señal no periódica	$\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt \right\}$	$\bar{x} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x[n] \right\}$
Valor medio de una señal periódica	$\bar{x} = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt$	$\bar{x} = \frac{1}{N_0} \sum_{n \in \{N_0\}} x[n]$
Valor pico	$x_p = \max_t x(t) $	$x_p = \max_n x[n] $
Energía	$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) ^2 dt$	$E_x = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n] ^2$
Potencia de un señal no periódica	$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) ^2 dt \right\}$	$P_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x[n] ^2 \right\}$
Potencia de un señal periódica	$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) ^2 dt$	$P_x = \frac{1}{N_0} \sum_{n \in \{N_0\}} x[n] ^2$

¿qué es un sistema?

Objeto que acepta señales, las transforma de acuerdo a una determinada ley y proporciona a su salida dichas señales transformadas

Un sistema es el modelo matemático de un proceso físico que relaciona la señal de entrada (o de excitación) con la señal de salida (o de respuesta). Sean x e y las señales de entrada y de salida respectivas de un sistema; entonces este sistema puede verse como una transformación (o mapeo) de x en y , la cual se representa mediante la notación matemática

$$y(t) = \mathcal{T}[x(t)]$$

donde $\mathcal{T}$ es el operador que representa alguna regla bien definida mediante la cual x se transforma en y .

- Un capacitor que dado una tensión entre sus bornes $v(t)$ genera una corriente $i(t)$.
- El sistema motriz de control del brazo: Funciona como un sistema biológico retroalimentado donde la entrada es la distancia visual medida hacia un objeto y la salida es la velocidad de la mano, la cual se reduce continuamente para disminuir el error.
- Una cámara fotográfica digital que dada una escena del mundo real (modelizada con una señal bidimensional de intensidades lumínicas analógica), proporciona una señal bidimensional de intensidades lumínicas digitales.
- Un instrumento musical de viento, que dada la señal de entrada dada por el soplo del músico, proporciona una señal acústica.
- El electrocardiógrafo (ECG): Se considera un sistema de registro que toma los potenciales electricos en el tórax como entrada y las transforma en un registro gráfico (digital) de la señal cardíaca como salida.

Existe una amplia variedad de sistemas según su naturaleza !

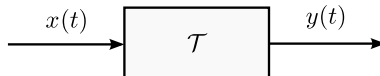
Sin embargo, en general los sistemas pueden ser modelizados y analizados de manera universal con herramientas matemáticas independientes de su naturaleza física !

Desde el punto vista matemático formal podemos definir a un sistema como a un *operador* que opera entre dos espacios de señales. En particular nos interesaran aquellos operadores que operen entre dos espacios vectoriales de señales:

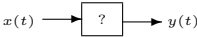
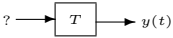
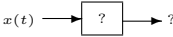
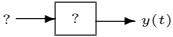
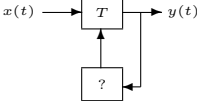
Un sistema cuyas entradas son señales en el espacio vectorial $\mathcal{H}_1$ y sus salidas son señales en el espacio vectorial $\mathcal{H}_2$ se puede representar en forma matemática por un operador $\mathcal{T} : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$. En forma compacta la acción del sistema representado por $\mathcal{T}$ se puede escribir como:

$$y(t) = \mathcal{T}[x(t)]$$

donde $x(t) \in \mathcal{H}_1$ es la señal de entrada y $y(t) \in \mathcal{H}_2$ es la señal de salida.



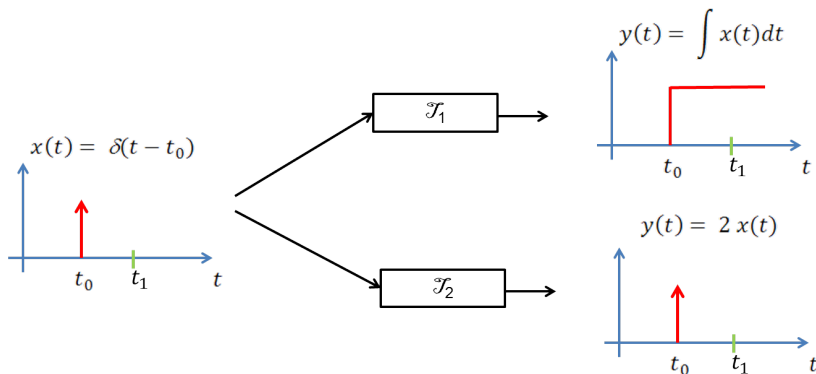
Estas mismas definiciones valen para sistemas que toman señales en tiempo discreto y entregan señales en tiempo discreto o incluso para sistemas mixtos!!

Análisis	Estudiar la respuesta de un sistema específico a diversas entradas	Análisis de circuitos	
Diseño o identificación	Diseñar sistemas para procesar señales de determinada forma	Restauración de audio	
Invertir	Obtener entrada para un sistema dado a partir de su salida	Eliminar distorsiones	
Filtrado	Obtener el sistema y la señal de salida que permite modificar una señal de entrada de determinada forma	Filtro notch	
Modelado	Diseñar un sistema y la señal de entrada que nos permite obtener una salida determinada	Síntesis de habla	
Control:	Diseñar un sistema que controle a otro a partir de su salida	Piloto automático	

- Propiedades/Herramientas
 - Continuo/Discreto
 - Entrada/Todas las entradas posibles.
-
- Si queremos demostrar que un sistema posee una cierta propiedad, debemos hacerlo a partir de la definición y debe cumplirse para todos los elementos que aparezcan en la definición: señales, instantes de tiempo, desplazamiento, constantes, ...
 - Si queremos demostrar que un sistema no posee una cierta propiedad, es suficiente con que no se cumpla la definición para una determinada señal de entrada, o en un determinado instante de tiempo, o valor de las constantes involucradas, Por tanto, en este caso la demostración se puede realizar de dos formas alternativas:
 - 1) A partir de la definición como en el caso afirmativo, pero llegando a la conclusión de que en general no se cumple la definición.
 - 2) Mediante un contraejemplo concreto que demuestre que se incumple la definición.

Propiedades de los sistemas I: memoria

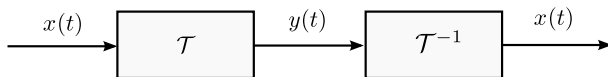
Se dice que un sistema es *con memoria* cuando su salida en el tiempo t depende de su entrada en otros tiempos distintos de t .



$$\text{Voltage}(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t \text{Corriente}(\tau) d\tau$$

$$\text{Voltage}(t) = R * \text{Corriente}(t)$$

En forma coloquial un sistema es *invertible* cuando observando la salida del mismo podemos recuperar la entrada. En términos matemáticos concretos, un sistema es invertible cuando el operador $\mathcal{T}$ que lo define es biyectivo o lo que es lo mismo existe $\mathcal{T}^{-1}$.

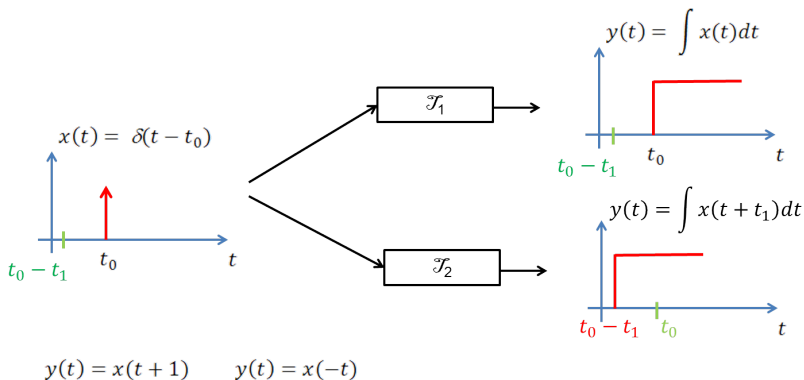


Ejemplos:

- $y(t) = \alpha x(t)$ es invertible si $\alpha \neq 0$.
- $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$ es invertible.
- $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$ es invertible.
- $y(t) = \sin(x(t))$ no es invertible.
- $y[n] = \begin{cases} x[n] & 0 \leq n \leq N \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$ no es invertible.

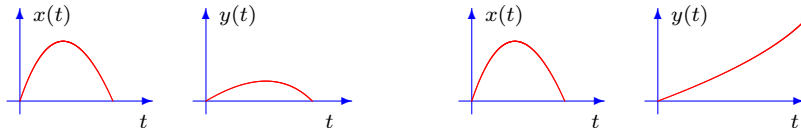
Propiedades de los sistemas III: causalidad

Se dice que un sistema es *causal* cuando su salida depende únicamente del presente y del pasado de la entrada (no del futuro). Un sistema se dice que es *no causal* cuando su salida puede depender de valores del pasado, del presente y también futuro. Un sistema se dice que es *anti-causal* cuando su salida depende únicamente del presente y del futuro.



Existen varios criterios de estabilidad. Nosotros vamos a trabajar con un criterio conocido como BIBO (Bounded Input-Bounded Output), el que dice que un sistema es *estable* si para entradas acotadas la salida permanece acotada:

$$\exists B_1 \in \mathbb{R}_+ : |x(t)| \leq B_1, \forall t \in \mathbb{R} \implies \exists B_2 \in \mathbb{R}_+ : |y(t)| \leq B_2, \forall t \in \mathbb{R}$$



Ejemplos:

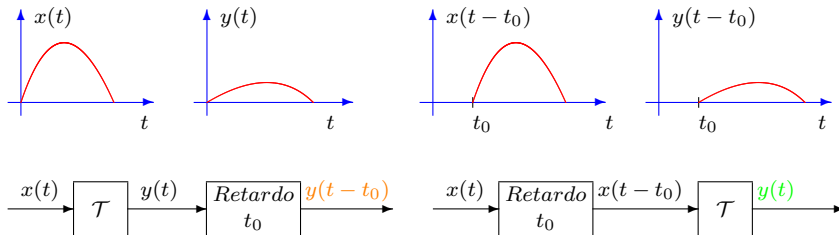
- El sistema $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$ es inestable.
- El sistema $y[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=n-N+1}^n x[k]$ es estable.

Propiedades de los sistemas V: invariancia en el tiempo

Se dice que un sistema es *invariante en el tiempo* si un desplazamiento temporal en la entrada provoca un desplazamiento temporal en la salida:

$$\mathcal{T}[x(t - t_0)] = y(t - t_0)$$

donde $x(t) \in \mathcal{H}_1$ es la señal de entrada y $y(t) \in \mathcal{H}_2$ es la señal de salida.



Ejemplos:

- El sistema $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$ es invariante en el tiempo.
- El sistema $y[n] = \alpha^{-n} x[n]$ con $\alpha \in \mathbb{C}$ es variante en el tiempo.

Se dice que un sistema es *lineal*, si el mismo satisface las siguientes propiedades:

- ➊ Aditividad: para dos señales de entrada $x_1(t)$ y $x_2(t)$ cuyas salidas por el sistema $\mathcal{T}$ valen $y_1(t)$ e $y_2(t)$ respectivamente tenemos que:

$$\mathcal{T}[x_1(t) + x_2(t)] = \mathcal{T}[x_1(t)] + \mathcal{T}[x_2(t)] = y_1(t) + y_2(t)$$

- ➋ Homogeneidad: para una señal de entrada $x(t)$ cuya salida al sistema $\mathcal{T}$ es $y(t)$ y cualquier escalar $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$\mathcal{T}[\alpha x(t)] = \alpha \mathcal{T}[x(t)] = \alpha y(t)$$

En forma general podemos escribir para señales de entrada $x_k(t)$ con $k = 1, 2, \dots, N$ cuyas salidas por el sistema $\mathcal{T}$ son $y_k(t)$ con $k = 1, 2, \dots, N$ y escalares complejos α_k con $k = 1, 2, \dots, N$:

$$\mathcal{T} \left[\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k(t) \right] = \sum_{k=1}^N \mathcal{T} [\alpha_k x_k(t)] = \sum_{k=1}^N \alpha_k y_k(t) \quad \text{Principio de superposición!}$$

Sistema 1: $y[n] = 2x[n]$

Sistema 1: $y[n] = 2x[n]$

- ✓ Lineal
- ✓ Invariante en el tiempo
- ✓ Causal
- ✗ Con Memoria (es sin memoria)
- ✓ Estable (BIBO)

Sistema 2: $y[n] = x[n] + 1$

Sistema 1: $y[n] = 2x[n]$

- ✓ Lineal
- ✓ Invariante en el tiempo
- ✓ Causal
- ✗ Con Memoria (es sin memoria)
- ✓ Estable (BIBO)

Sistema 2: $y[n] = x[n] + 1$

- ✗ Lineal
- ✓ Invariante en el tiempo
- ✓ Causal
- ✗ Con Memoria (es sin memoria)
- ✓ Estable (BIBO)

Sistema 3: $y[n] = x^2[n]$

Sistema 3: $y[n] = x^2[n]$

- ✗ Lineal
- ✓ Invariante en el tiempo
- ✓ Causal
- ✗ Con Memoria (es sin memoria)
- ✓ Estable (BIBO)

Sistema 4: $y[n] = x[n - n_0]$

Sistema 3: $y[n] = x^2[n]$

- ✗ Lineal
- ✓ Invariante en el tiempo
- ✓ Causal
- ✗ Con Memoria (es sin memoria)
- ✓ Estable (BIBO)

Sistema 4: $y[n] = x[n - n_0]$

- ✓ Lineal
- ✓ Invariante en el tiempo
- ✓ Causal (si $n_0 \geq 0$)
- ✓ Con Memoria
- ✓ Estable (BIBO)

Sistema 5: $y[n] = \frac{x[n-1] + x[n] + x[n+1]}{3}$ (Promedio Móvil)

Sistema 5: $y[n] = \frac{x[n-1] + x[n] + x[n+1]}{3}$ (Promedio Móvil)

- ✓ Lineal
- ✓ Invariante en el tiempo
- ✗ Causal
- ✓ Con Memoria
- ✓ Estable (BIBO)

Sistema 6: $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$ (Acumulador)

Sistema 5: $y[n] = \frac{x[n-1] + x[n] + x[n+1]}{3}$ (Promedio Móvil)

- ✓ Lineal
- ✓ Invariante en el tiempo
- ✗ Causal
- ✓ Con Memoria
- ✓ Estable (BIBO)

Sistema 6: $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$ (Acumulador)

- ✓ Lineal
- ✓ Invariante en el tiempo
- ✓ Causal
- ✓ Con Memoria
- ✗ Estable (BIBO)

Sistema 7: $\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$

Sistema 7: $\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$

- ✓ Lineal
- ✓ Invariante en el tiempo
- ✓ Causal
- ✓ Con Memoria
- ? Estabilidad (depende de las raíces de su ecuación característica)

Sistema 8: $y[n] = x[n]u[n]$ (Ventaneo)

Sistema 7: $\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$

- ✓ Lineal
- ✓ Invariante en el tiempo
- ✓ Causal
- ✓ Con Memoria
- ? Estabilidad (depende de las raíces de su ecuación característica)

Sistema 8: $y[n] = x[n]u[n]$ (Ventaneo)

- ✓ Lineal
- ✗ Invariante en el tiempo
- ✓ Causal
- ✗ Con Memoria (es sin memoria)
- ✓ Estable (BIBO)

Resumen de ejemplos de propiedades

Ecuación	Lineal	Invariante	Causal	Memoria	Estable
$y[n] = 2x[n]$	✓	✓	✓	✗	✓
$y[n] = x[n] + 1$	✗	✓	✓	✗	✓
$y[n] = x^2[n]$	✗	✓	✓	✗	✓
$y[n] = x[n - n_0]$	✓	✓	$n_0 \geq 0$	✓	✓
$y[n] = \frac{x[n-1] + x[n] + x[n+1]}{3}$	✓	✓	✗	✓	✓
$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$	✓	✓	✓	✓	✗
$\sum_{k=0}^N a_k y[n - k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n - k]$	✓	✓	✓	✓	?
$y[n] = x[n]u[n]$	✓	✗	✓	✗	✓

Ejemplos de sistemas lineales

- El sistema dado por $y(t) = \alpha x(t)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ es lineal.
- El sistema dado por $y(t) = \alpha x(t) + \beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ no es lineal.
- El sistema dado por $y(t) = f(x(t))$ será lineal sí y sólo sí $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es lineal. Por ejemplo $y(t) = e^{x(t)}$ no es lineal!!.
- El sistema $y(t) = \sin[\alpha x(t)]$ no es lineal. Sin embargo si $|\alpha x(t)| \ll 1$ entonces podemos *linealizar* el sistema ya que $y(t) \approx \alpha x(t)$. **Esto es muy común en la ingeniería electrónica!!**
- El sistema dado por $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[n]$ es lineal.
- El sistema dado por $y[n] = \sum_{k=0}^n \alpha^{-k} x[n]$. con $\alpha \in \mathbb{C}$ es lineal.

Los *sistemas lineales e invariantes en el tiempo (LTI, linear time invariant)* serán los que estudiaremos con más detalle en este curso. Dichas propiedades permiten estudiarlos y conocerlos con mucha precisión. Notar que hay sistemas que pueden ser lineales y no invariantes en el tiempo (ver el último ejemplo) y viceversa.

Lectura obligatoria

- Secciones 2.0, 2.1 y 2.2 del libro de A. Oppenheim, R. Schafer, *Tratamiento de Señales en Tiempo Discreto*, Person, 3era. edición, 2011.
- Capítulo 1 del libro de Oppenheim, A. Willsky, S. Nawab, *Señales y Sistemas*, Prentice-Hall, 2da. edición, 1998.

Lectura recomendada

- B.P.Lathi & R. Green, *Essentials of Digital Signal Processing*, Cambridge University Press, 2014.

¿consultas y preguntas?