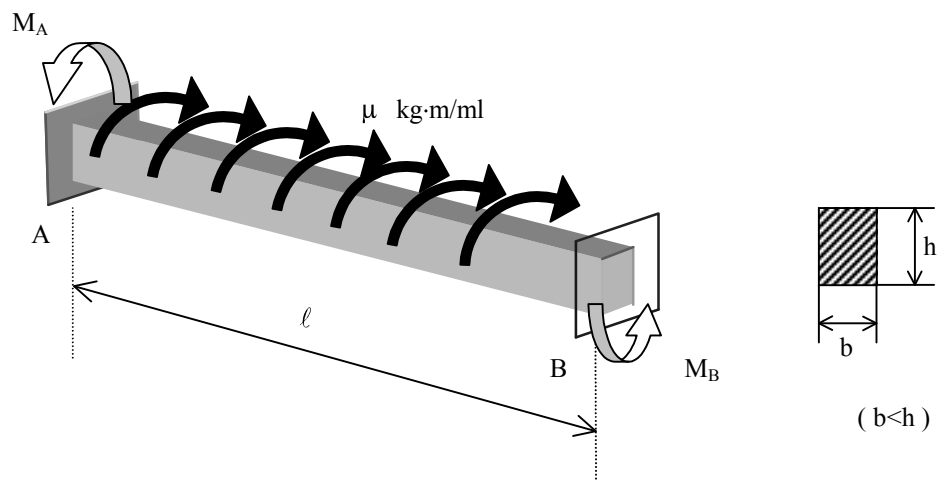


7 Torsión y esfuerzos combinados

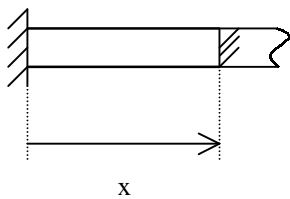
Problema 7.1

Una viga biempotrada está sometida a un momento torsor producido por una torsión uniformemente repartida. Hallar el $M_{T\text{ máx}}$ y el ángulo de torsión máximo.

**Resolución:**

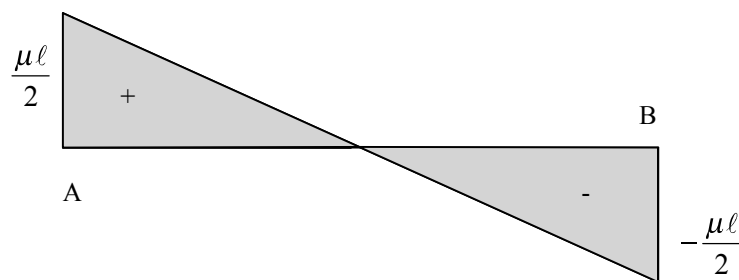
Por ser una viga simétrica $\Rightarrow$ los momentos de empotramiento han de ser iguales.

$$M_A = M_B = \frac{\mu \ell}{2}$$



$$M_T(x) = \frac{\mu \ell}{2} - \mu \cdot x, \quad \text{en } x = \frac{\ell}{2} \quad M_T\left(\frac{\ell}{2}\right) = 0$$

Diagrama de
momentos torsores:



El ángulo de torsión máximo se tiene para la sección central, $x = \frac{\ell}{2}$:

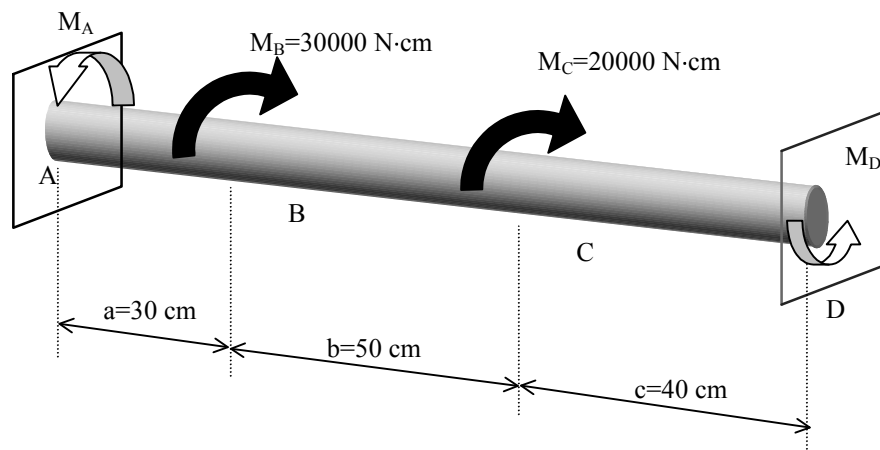
$$\begin{aligned}\theta_{\left(\frac{\ell}{2}\right)} &= \int_0^{\ell/2} \frac{M_T(x)}{GK_3 b^3 h} dx = \frac{1}{GK_3 b^3 h} \int_0^{\ell/2} \left(\frac{\mu \ell}{2} - \mu \cdot x \right) dx = \frac{1}{GK_3 b^3 h} \left[\frac{\mu \ell}{2} x - \mu \frac{x^2}{2} \right]_0^{\ell/2} \\ \theta_{\left(\frac{\ell}{2}\right)} &= \frac{1}{GK_3 b^3 h} \left[\frac{\mu \ell^2}{4} - \frac{\mu \ell^2}{8} \right] \\ \theta_{\left(\frac{\ell}{2}\right)} &= \frac{1}{GK_3 b^3 h} \frac{\mu \ell^2}{8}\end{aligned}$$

G: módulo de rigidez a torsión del material del eje $\left(G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \right)$

K_3 : coeficiente para secciones rectangulares, que depende de la relación $\frac{h}{b}$ (ver tabla 5.87 del capítulo 5. Torsión)

Problema 7.2

Hallar los momentos en los empotramientos M_A y M_D . Dibujar el diagrama de momentos torsores.

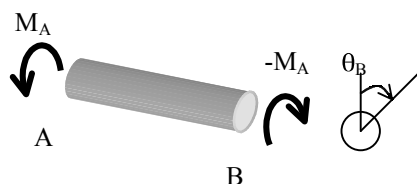
**Resolución:**

Es un problema hiperestático.

$$\sum M_T = 0 \Rightarrow M_A - M_B - M_C + M_D = 0$$

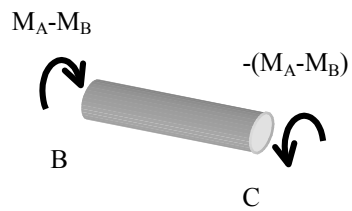
$$M_A + M_D = 30000 + 20000 = 50000 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

Considerando por tramos:



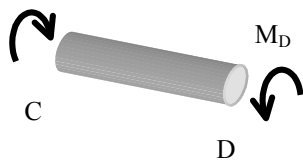
$$\theta_A = 0$$

$$\theta_{BA} = \theta_B - \theta_A = \frac{-M_A \cdot a}{G \cdot I_o} = \frac{-M_A \cdot 30}{G \cdot I_o}$$



$$\theta_{CB} = \theta_C - \theta_B = \frac{-(M_A - M_B)}{G \cdot I_o} \cdot 50$$

$$-M_D = M_A - M_B - M_C$$



$$\theta_{DC} = \theta_D - \theta_C = \frac{M_D \cdot 40}{G \cdot I_o}$$

$$\theta_D = 0$$

$$\theta_D = \theta_{BA} + \theta_{CB} + \theta_{DC} = 0$$

$$-\frac{M_A \cdot 30}{G \cdot I_o} + \frac{M_D \cdot 40}{G \cdot I_o} - \frac{M_A - M_B}{G \cdot I_o} \cdot 50 = 0$$

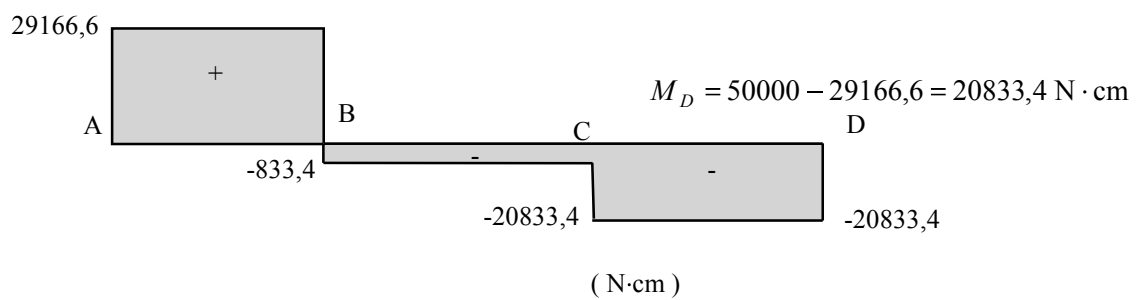
$$-M_A \cdot 30 - (M_A - 30000) \cdot 50 + M_D \cdot 40 = 0$$

$$-M_A \cdot 30 - M_A \cdot 50 + 1500000 + M_D \cdot 40 = 0$$

$$80 \cdot M_A - 40 \cdot M_D = 1500000$$

$$\begin{cases} M_A + M_D = 50000 \\ 80 \cdot M_A - 40 \cdot M_D = 1500000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 40 \cdot M_A + 40 \cdot M_D = 2000000 \\ 80 \cdot M_A - 40 \cdot M_D = 1500000 \end{cases} \Rightarrow M_A = \frac{3500000}{120} = 29166,6 \text{ N} \cdot \text{cm}$$

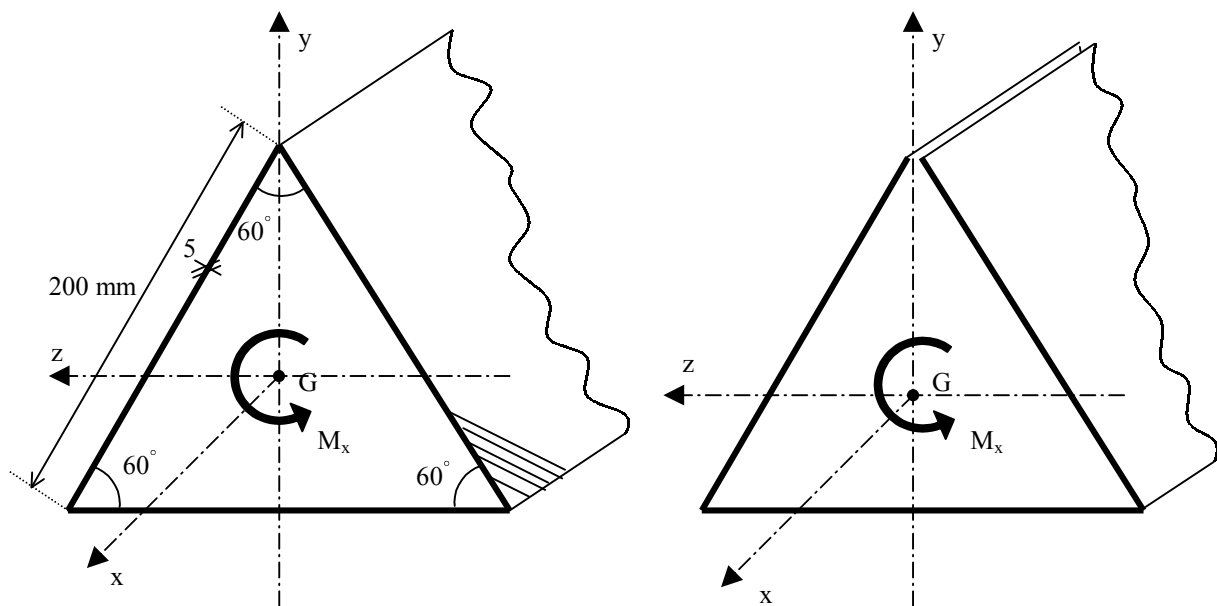
Diagrama de momentos torsores:



Problema 7.3

Calcular para cada una de las secciones abierta y cerrada de la figura adjunta, sometidas a un momento torsor $M_x = 1000 \text{ Nm}$:

- el valor y la posición de la tensión tangencial máxima, $\tau_{\max}$.
- el momento de inercia a torsión, I_t .

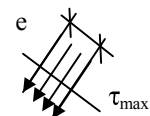
**Resolución:**

Sección cerrada :

A_m : área limitada por la curva media

a)

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{2 \cdot A_m \cdot e} = \frac{1000 \text{ Nmm} \cdot 10^3}{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 200 \text{ mm} \cdot 200 \text{ mm} \cdot \cos 30^\circ \cdot 5 \text{ mm}} = 5,77 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$



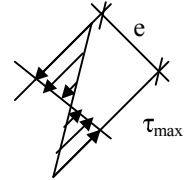
$$\text{c) } I_t = \frac{4 \cdot A_m^2}{\int_s \frac{ds}{e}} = \frac{4 \cdot A_m^2}{s} e = \frac{4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 200 \cdot \cos 30^\circ \right)^2}{3 \cdot 200} \cdot 5 \text{ mm} = 1000 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

d)

Sección abierta:

a)

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{\sum \frac{1}{3} \cdot b_i \cdot e_i^3} \cdot e = \frac{1000 \text{ Nmm} \cdot 10^3}{3 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 200 \text{ mm} \cdot (5 \text{ mm})^3 \right)} \cdot 5 \text{ mm} = 200 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$



b)

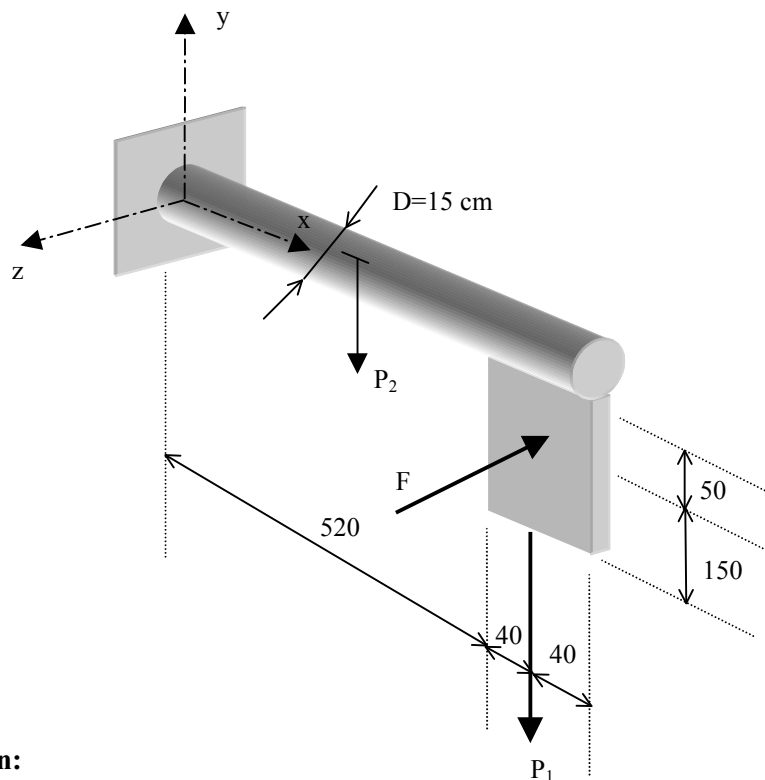
$$I_t = \sum \frac{1}{3} \cdot b_i \cdot e_i^3 = 2,5 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

Problema 7.4

Un panel está sujeto por un mástil horizontal, según el esquema de la figura. Teniendo en cuenta el peso propio del panel, el peso propio del mástil y la acción del viento, hallar las tensiones máximas en el empotramiento del mástil a la pared.

Datos: Peso propio del panel $P_1 = 90 \text{ kp}$
 Dimensiones $80 \cdot 200 \text{ cm}$
 Diámetro del mástil $D = 15 \text{ cm}$
 Empuje del viento $f = 80 \text{ kg/m}^2$

(Peso propio del mástil de acero: $P_2 = 7850 \text{ kp/m}^3 \cdot 6 \text{ m} \cdot \frac{\pi \cdot 0,15^2}{4} = 832 \text{ kp}$)

**Resolución:**

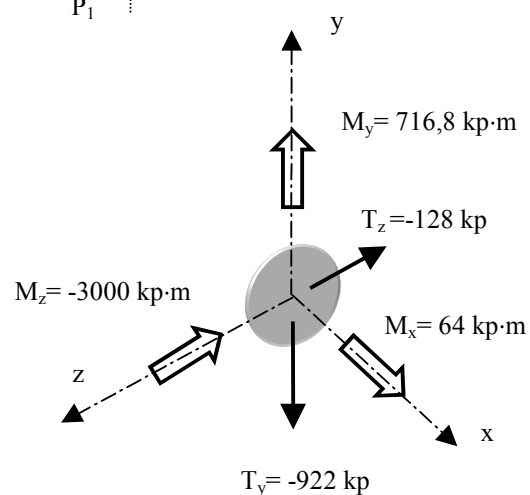
$$F = 80 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \cdot 0,8 \cdot 2 = 128 \text{ kp}$$

Sección en el empotramiento. Esfuerzos:

$$N_x = 0$$

$$T_y = -90 - 832 = -922 \text{ kp}$$

$$T_z = -128 \text{ kp}$$

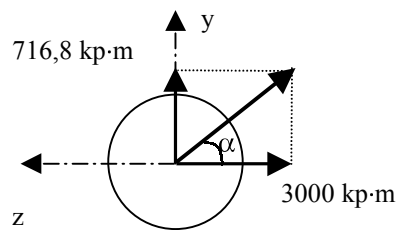


$$M_x = 128 \text{ kp} \cdot 0,5 \text{ m} = 64 \text{ kp} \cdot \text{m}$$

$$M_y = 128 \text{ kp} \cdot (0,4 + 5,2) \text{ m} = 716,8 \text{ kp} \cdot \text{m}$$

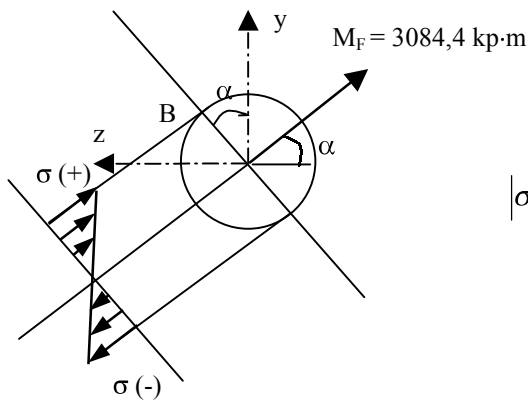
$$M_z = -90 \text{ kp} \cdot (5,2 + 0,4) \text{ m} - 832 \cdot 3 = -3000 \text{ kp} \cdot \text{m}$$

Tensiones normales debidas a los momentos flectores:



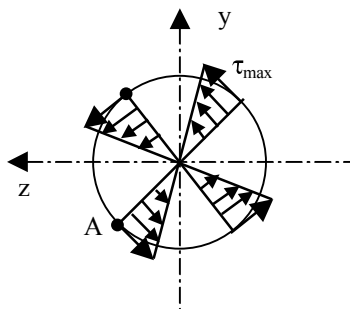
$$M_F = \sqrt{3000^2 + 716,8^2} = 3084,4 \text{ kp} \cdot \text{m}$$

$$\alpha = \arctan \frac{716,8}{3000} = 13,4^\circ$$



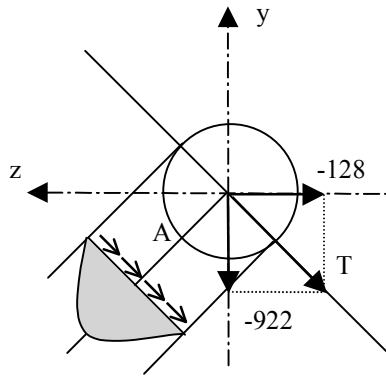
$$|\sigma_{x_{max}}| = \frac{M_F}{I_z} \frac{D}{2} = \frac{3084,4 \cdot 10^2}{\frac{\pi \cdot 15^4}{64}} \frac{15}{2} = 930,9 \text{ kp/cm}^2$$

Tensiones tangenciales debidas al momento torsor:



$$\tau_{max} = \frac{M_x \cdot r_{max}}{I_o} = \frac{6400 \cdot \frac{15}{2}}{\frac{\pi \cdot 15^4}{32}} = 9,66 \text{ kp/cm}^2$$

Tensiones tangenciales debidas a los esfuerzos cortantes:

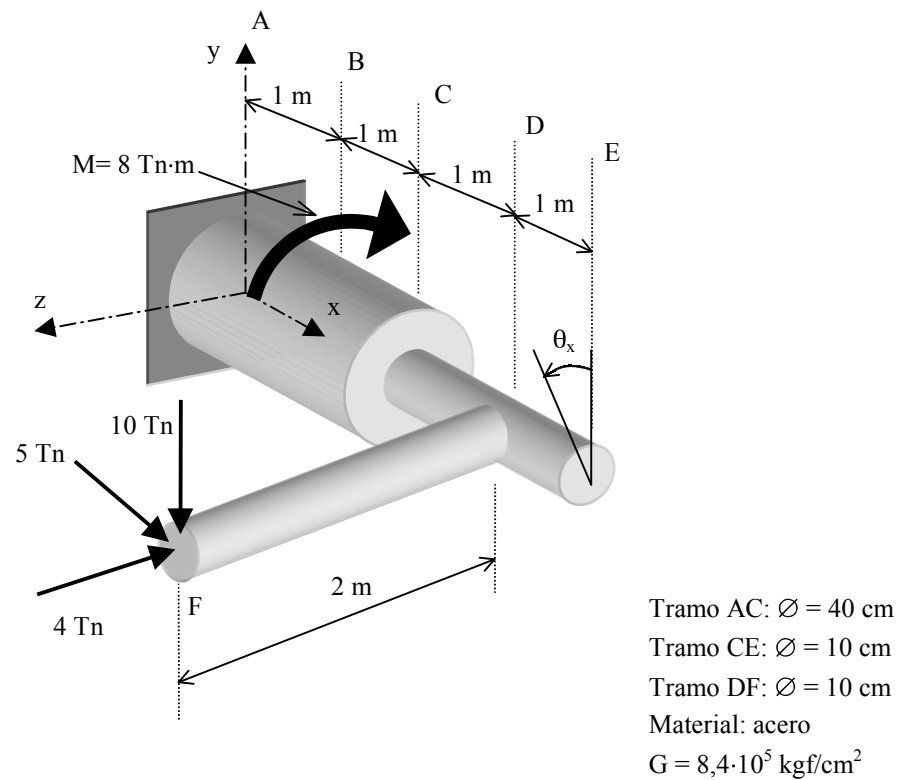


$$T = \sqrt{T_z^2 + T_y^2} = \sqrt{128^2 + 922^2} = 930,8 \text{ kp}$$

$$\tau_{max} = \frac{4}{3} \frac{T}{A} = \frac{4}{3} \frac{930,8}{\frac{\pi \cdot 15^2}{4}} = 7,0 \text{ kp/cm}^2$$

Problema 7.5

Hallar las tensiones máximas en el empotramiento A y el giro, alrededor del eje x, de la sección E. El momento torsor de 8 Tn·m está aplicado en la sección B.

**Resolución:**

a) Tensiones máximas en el empotramiento A

Sección A

$$N_x = +5 \text{ Tn}$$

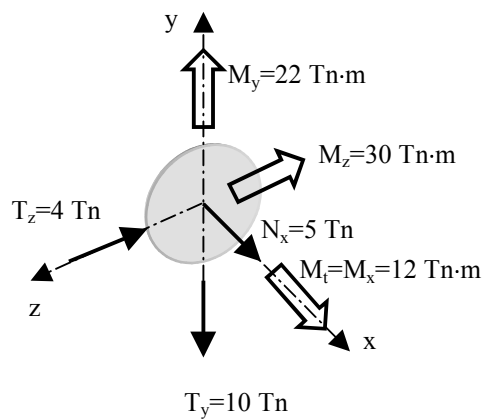
$$T_y = -10 \text{ Tn}$$

$$T_z = -4 \text{ Tn}$$

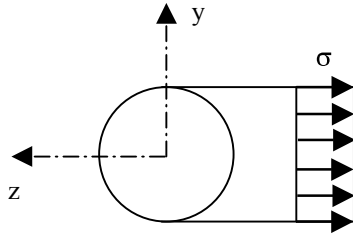
$$M_x = -8 + 10 \cdot 2 = 12 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

$$M_y = 4 \cdot 3 + 5 \cdot 2 = 22 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

$$M_z = -10 \cdot 3 = -30 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

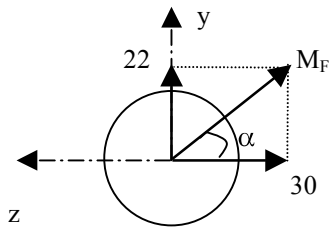


Tensión normal debida al esfuerzo axial:



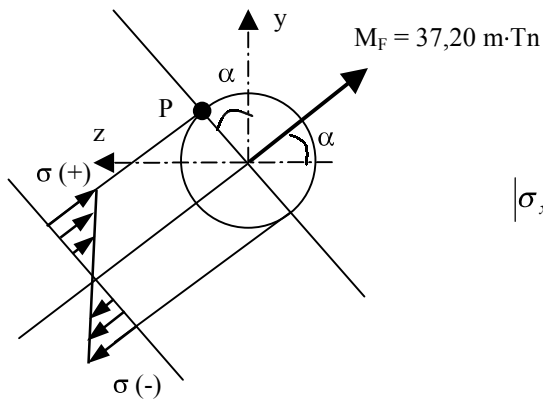
$$\sigma_x = \frac{5000}{\frac{\pi \cdot 40^2}{4}} = 3,97 \text{ kp/cm}^2$$

Tensión normal debida a los momentos flectores:



$$M_F = \sqrt{22^2 + 30^2} = 37,20 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

$$\alpha = \arctan \frac{22}{30} = 36,25^\circ$$

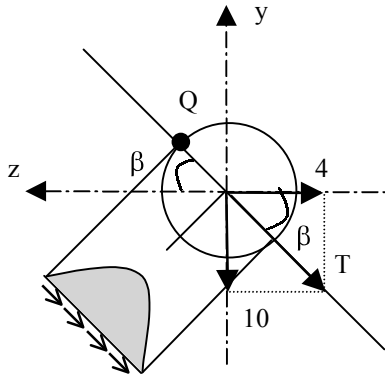


$$|\sigma_{x \max}| = \frac{M}{I} y_{\max} = \frac{3720000}{\frac{\pi \cdot 40^4}{64}} \cdot 20 = 592 \text{ kp/cm}^2$$

Tensión normal máxima total:

$$\sigma_{\max} = 592 + 3,97 = 596 \text{ kp/cm}^2$$

Tensión tangencial debida a los esfuerzos cortantes:



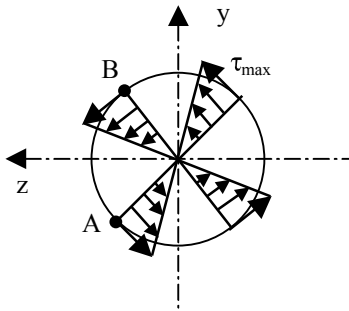
$$T = \sqrt{4^2 + 10^2} = 10,77 \text{ Tn}$$

$$\beta = \arctan \frac{10}{4} = 68,2^\circ$$

Distribución parabólica de τ con una $\tau_{\max}$

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{T}{A} = \frac{4}{3} \frac{10770}{\pi \cdot 40^2} = 11,43 \text{ kp/cm}^2$$

Tensión tangencial debida al momento torsor



$$\tau_{\max} = \frac{M_x \cdot r_{\max}}{I_o} = \frac{1200000 \cdot 20}{\frac{\pi \cdot 40^4}{32}} = 95,49 \text{ kp/cm}^2$$

La tensión tangencial máxima total

$$\tau_{\max} = \tau_A = 11,43 + 95,49 = 106,92 \text{ kp/cm}^2$$

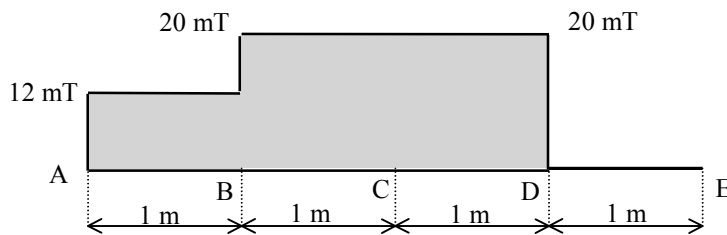
Aplicación del criterio de Von Mises en el punto P

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{\max}(N, M) = 596 \text{ kp/cm}^2 \\ \tau(M_x, T) = 95,49 \text{ kp/cm}^2 \text{ (1)} \end{array} \right\} \sigma_{\text{equiv}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = 618,5 \text{ kp/cm}^2$$

(1) En el punto P la tensión cortante debida al esfuerzo cortante T no es exactamente 0, pues es 0 en el punto Q, pero Q y P no coinciden, ya que los ángulos α y β no son complementarios. Pero como están muy próximos, y por tanto τ debido a T será muy pequeño, puede despreciarse frente a la τ debida a M_x .

b) Giro de la sección C (alrededor del eje x)

Dibujamos el diagrama de momentos torsores



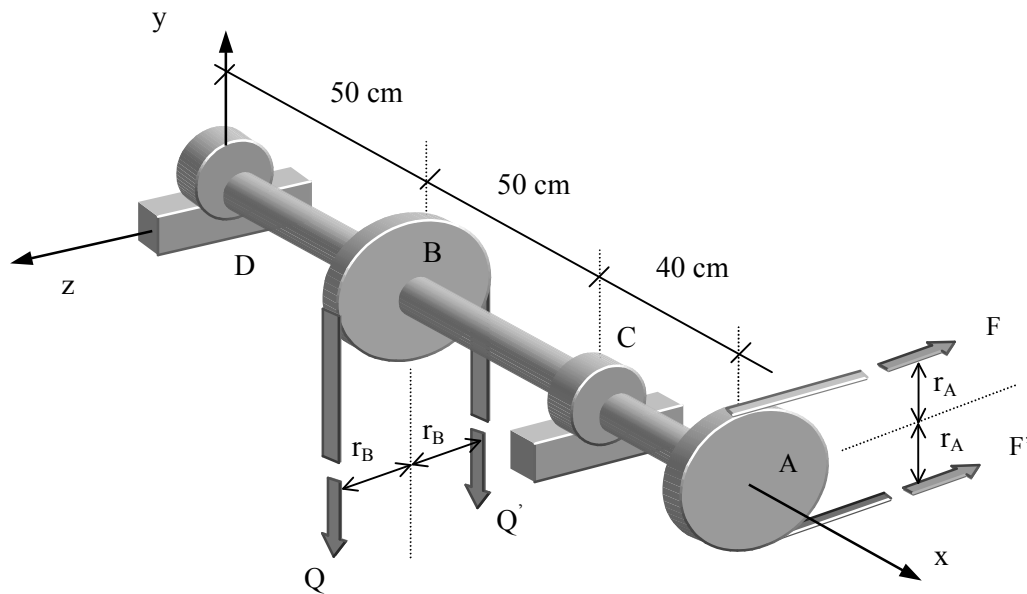
El giro alrededor del eje x en la sección E será el mismo que el de la sección D.

$$\theta_x = \int_0^L \frac{M_x}{GI_o} dx = \frac{12 \text{ mT} \cdot 1 \text{ m}}{GI_{\varnothing 40}} + \frac{20 \text{ mT} \cdot 1 \text{ m}}{GI_{\varnothing 40}} + \frac{20 \text{ mT} \cdot 1 \text{ m}}{GI_{\varnothing 10}}$$

$$\theta_x = \frac{1200000 \cdot 100}{840000 \frac{\pi \cdot 40^4}{32}} + \frac{2000000 \cdot 100}{840000 \frac{\pi \cdot 40^4}{32}} + \frac{2000000 \cdot 100}{840000 \frac{\pi \cdot 10^4}{32}} = 0,244 \text{ rad} = 13,98^\circ$$

Problema 7.6

Un árbol, de acero, debe de transmitir 120 CV a 600rpm desde la polea A a la B. La tensión cortante admisible para el material del árbol es $\tau_{adm} = 420 \text{ Kg/cm}^2$ y la tensión normal admisible es $\sigma_{adm} = 728 \text{ kp/cm}^2$. Calcular el diámetro del árbol. Datos: $F=2 \cdot F'$, $Q=2 \cdot Q'$, $r_A=15 \text{ cm}$, $r_B=22 \text{ cm}$. (radios de las poleas).

**Resolución:**

$$P = M_x \cdot \omega \rightarrow M_x = \frac{P}{\omega} \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ CV} = 736 \text{ W} \\ 1 \text{ rpm} = \frac{2\pi}{60} \text{ rad/s} \end{array} \right\} M_x = \frac{(120 \cdot 736)}{\left(600 \cdot \frac{2\pi}{60}\right)} = 1405 \text{ Nm}$$

$$M_x = 1405 \text{ Nm} = 14324 \text{ cmKg}$$

$$M_x = F \cdot r_A - F' \cdot r_A = (2F' - F') \cdot r_A = F' \cdot r_A$$

$$F' \cdot 15 = 14324 \text{ cmKg} \rightarrow F' = \frac{14324}{15} \approx 955 \text{ Kg}$$

$$F = 2F' = 1910 \text{ Kg}$$

también

$$M_x = Q \cdot r_B - Q' \cdot r_B$$

$$Q' \cdot 22 = 14324 \text{ cmKg} \quad Q' = \frac{14324}{22} = 651,1 \text{ Kg}$$

$$Q = 2 \cdot 651,1 = 1302,2 \text{ Kg}$$

Diagrama de momentos en el plano xy :

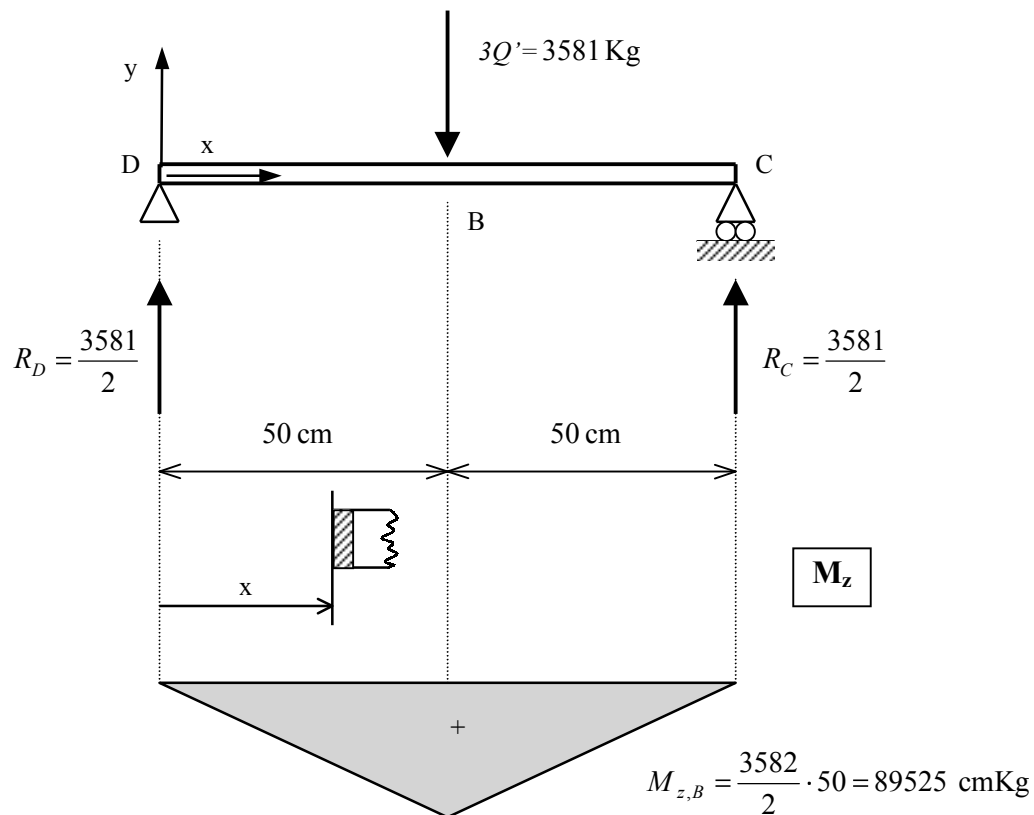
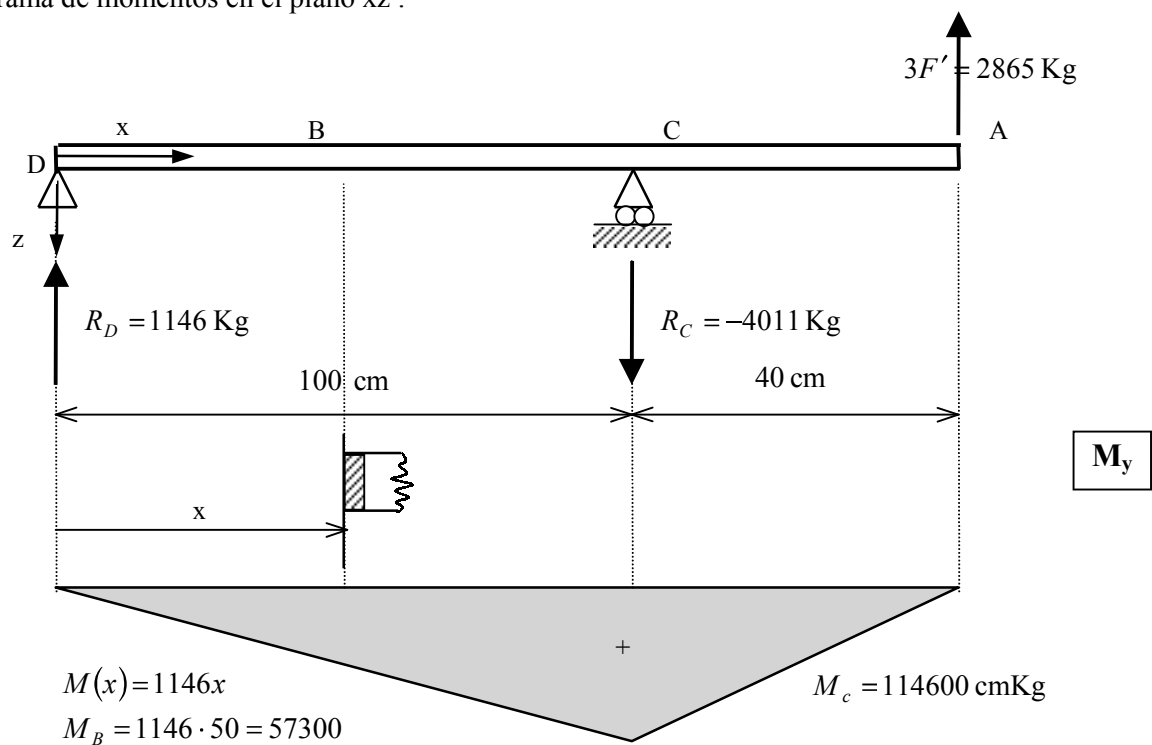


Diagrama de momentos en el plano xz :



$$R_C + R_D + 2865 = 0$$

$$R_D \cdot 100 = 40 \cdot 2865$$

$$R_D = \frac{40 \cdot 2865}{100} = 1146 \text{ Kg}$$

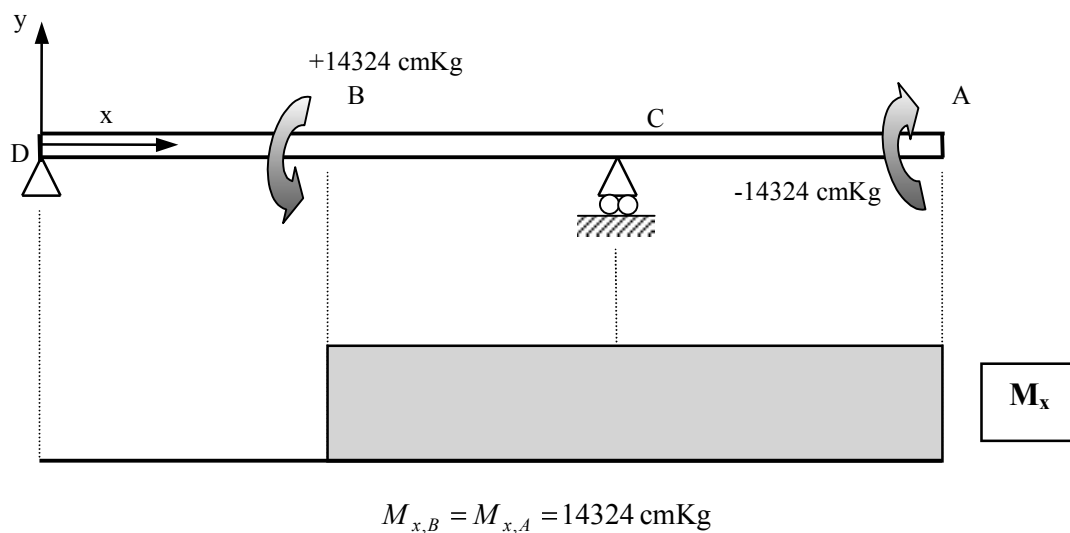
$$R_C = -2865 - 1146 = -4011 \text{ Kg}$$

Determinación del momento flector en B (combinando M_z y M_y):

$$M_B = \sqrt{(89525)^2 + (57300)^2} = 106292,12 \text{ cmKg}$$

El máximo está en C: $M_f = 114600 \text{ cmKg}$

Diagrama de momentos torsores:



Determinación del diámetro mínimo del eje.

Aplicando el criterio de Von Mises:

$$d_{min}^3 = \frac{16}{\pi \cdot \sigma_{adm}} \sqrt{4M_f^2 + 3M_x^2}$$

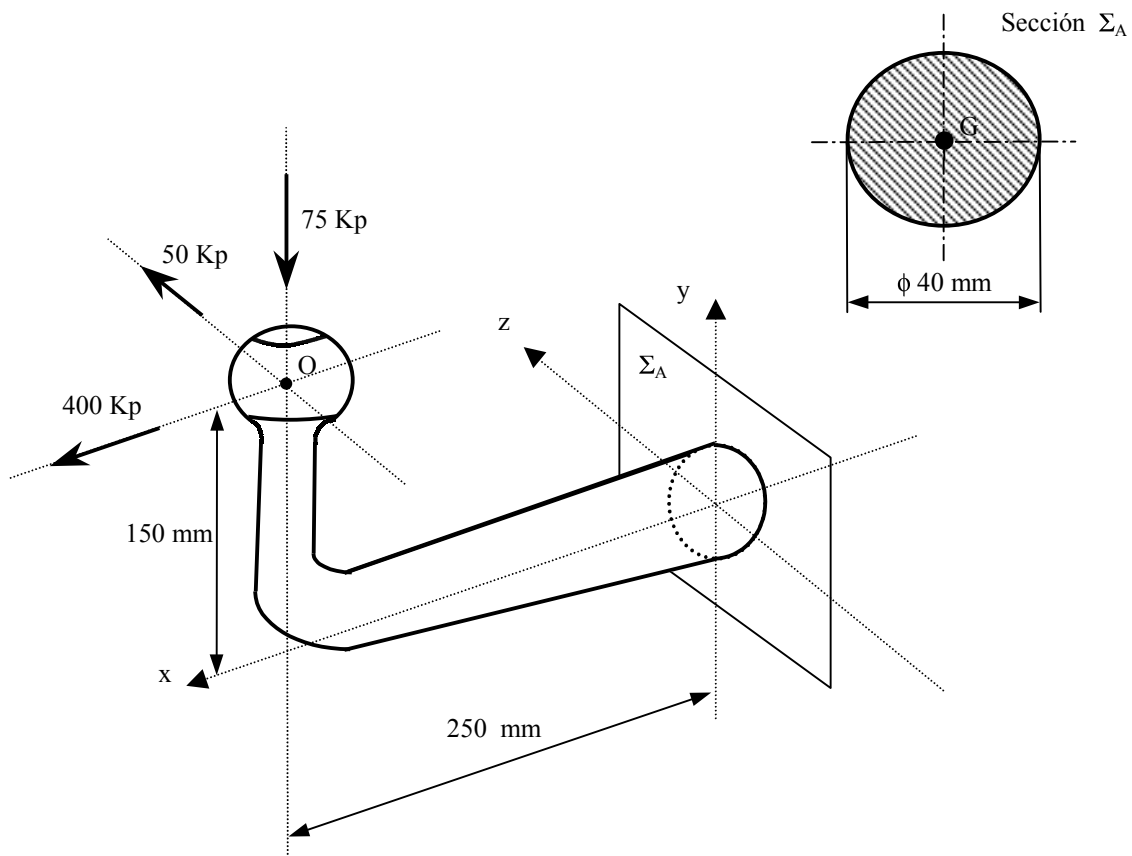
$$d_{min}^3 = \frac{16}{\pi \cdot 728} \sqrt{4 \cdot 114600^2 + 3 \cdot 14324^2}$$

$$d_{min} = 11.7 \text{ cm}$$

Problema 7.7

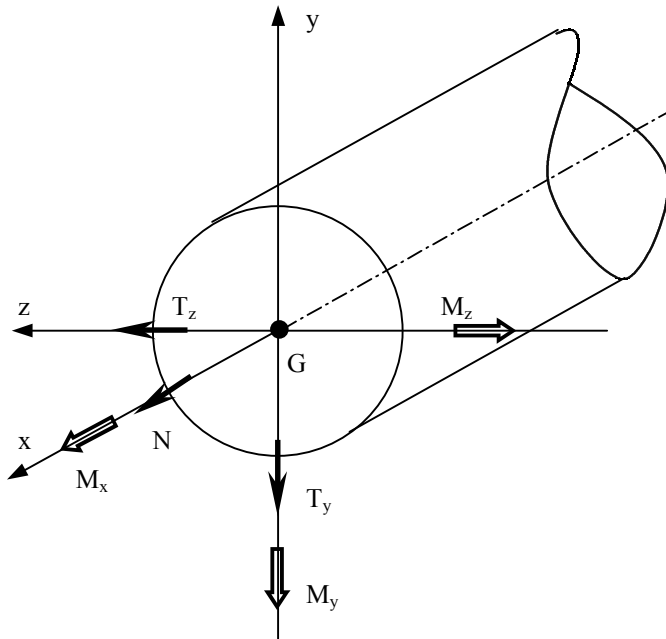
En la figura se ha esquematizado la pieza desmontable de un enganche tipo cuello de cisne para el arrastre de caravanas de camping por parte de vehículos de turismo convencionales. La sollicitación sobre la bola corresponde a una hipótesis de carga de arrastre con fuerte pendiente.

- Determinar para la sección circular Σ_A los esfuerzos de sección: normal, cortante, flector y torsor.
- Dibujar para la misma sección Σ_A la distribución de tensiones normal y tangencial que provoca independientemente cada esfuerzo de sección. Indicar sobre el dibujo la posición de la tensiones máximas para cada una de dichas distribuciones y calcular numéricamente sus valores.
- Como resumen del estudio, indicar la tensión normal máxima total y la tensión tangencial máxima total.



Resolución:

a) Esfuerzos de sección



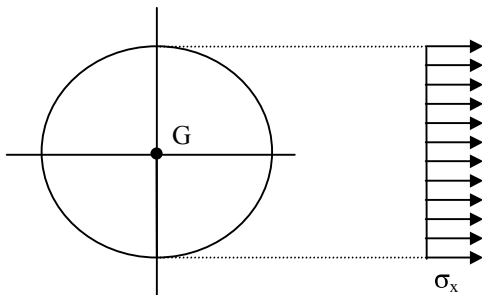
$$\begin{cases} N = 400 \text{ Kp} \\ T_y = -75 \text{ Kp} \\ T_z = 50 \text{ Kp} \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_x = 50 \cdot 150 = 7500 \text{ mmKp} \\ M_y = -50 \cdot 250 = -12500 \text{ mmKp} \\ M_z = -400 \cdot 150 - 75 \cdot 250 \\ = -78750 \text{ mmKp} \end{cases}$$

Nota: El signo del valor numérico y el sentido del vector en el dibujo son redundantes.

b) Determinación de las tensiones

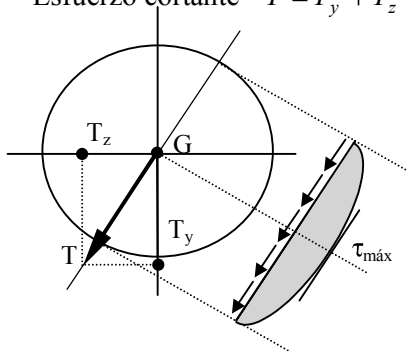
- Esfuerzo normal $N = 400 \text{ Kp}$



Distribución uniforme de tensiones σ_x :

$$\sigma_{x,\text{máx}} = \frac{N}{A} = \frac{400 \text{ Kp}}{\pi \frac{40^2}{4}} = 0,32 \text{ Kp/mm}^2$$

- Esfuerzo cortante $\vec{T} = \vec{T}_y + \vec{T}_z$

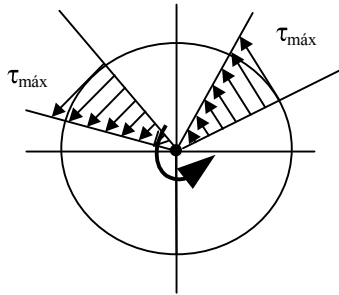


$$T = \sqrt{T_y^2 + T_z^2} = \sqrt{75^2 + 50^2} = 90 \text{ Kp}$$

Distribución parabólica de τ :

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{4}{3} \frac{T}{A} = \frac{4}{3} \frac{90}{\pi \frac{40^2}{4}} = 0,1 \text{ Kp/mm}^2$$

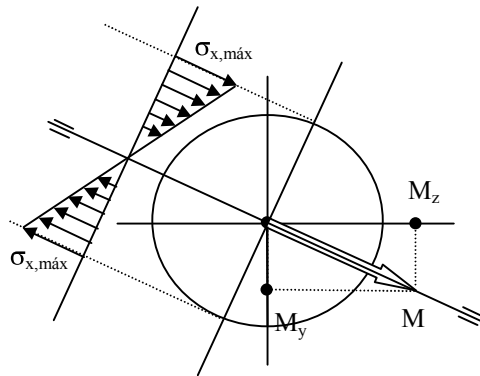
- Momento torsor $M_x = 7500 \text{ mmKp}$



Distribución de tensión τ con una ley lineal radial:

$$\tau_{\max} = \frac{M_x \cdot r_{\max}}{I_0} = \frac{7500 \cdot 20}{\pi \frac{40^4}{32}} = 0,6 \text{ Kp/mm}^2$$

- Momento flector $\vec{M} = \vec{M}_y + \vec{M}_z$



$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{12500^2 + 78750^2} = 79737 \text{ mmKp}$$

Distribución lineal de tensión σ_x respecto al eje de giro:

$$\sigma_{x,\max} = \frac{M \cdot y'_{\max}}{I} = \frac{79737 \cdot \frac{40}{2}}{\pi \frac{40^4}{64}} = 12,69 \text{ Kp/mm}^2$$

c) La tensión normal máxima total vale:

$$\sigma_{x,\max} = 0,32 + 12,69 = 13,01 \text{ Kp/mm}^2$$

La tensión tangencial máxima total vale:

$$\tau_{\max} = 0,6 + 0,1 = 0,7 \text{ Kp/mm}^2$$