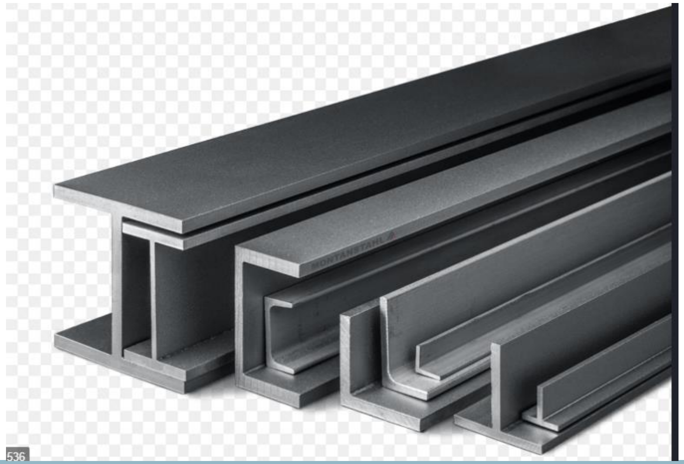
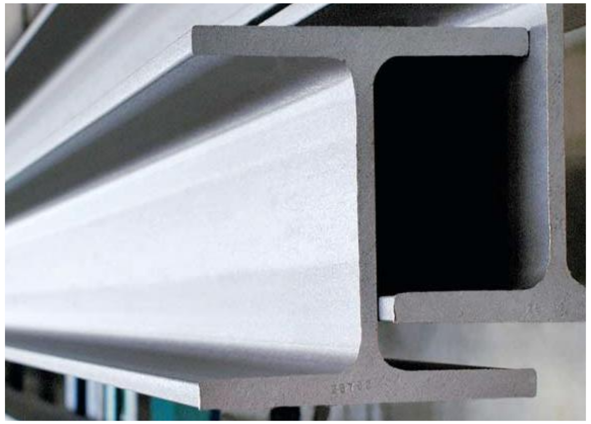
TB036 Estática

Geometría de las Superficies





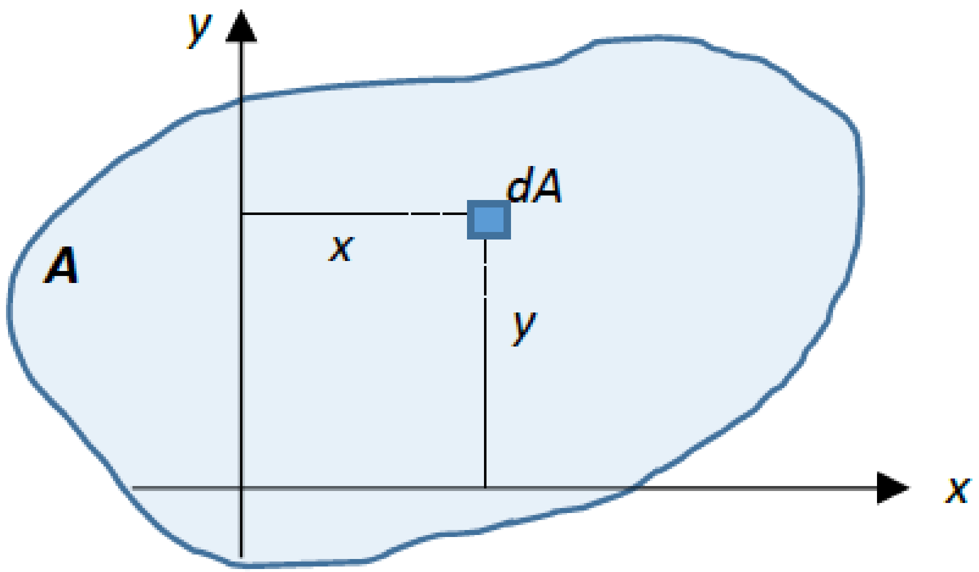
Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ingeniería
Departamento de Estabilidad

Características Geométricas de Secciones Transversales

¿Para qué sirven?

- Área — *Dimensionamiento/Verificación a Esfuerzo Normal*
- Momento Estático ó de Primer Orden — *Dimensionamiento/Verificación a Esfuerzo de Corte*
- Momentos de *Segundo Orden*
  - *Momento de Inercia* — *Dimensionamiento/Verificación a Esfuerzo de Flexión*
  - *Momento Polar* — *Dimensionamiento/Verificación a Esfuerzo de Torsión*
- Radio de giro — *Dimensionamiento/Verificación a Esfuerzo de Compresión*

MOMENTO ESTÁTICO:



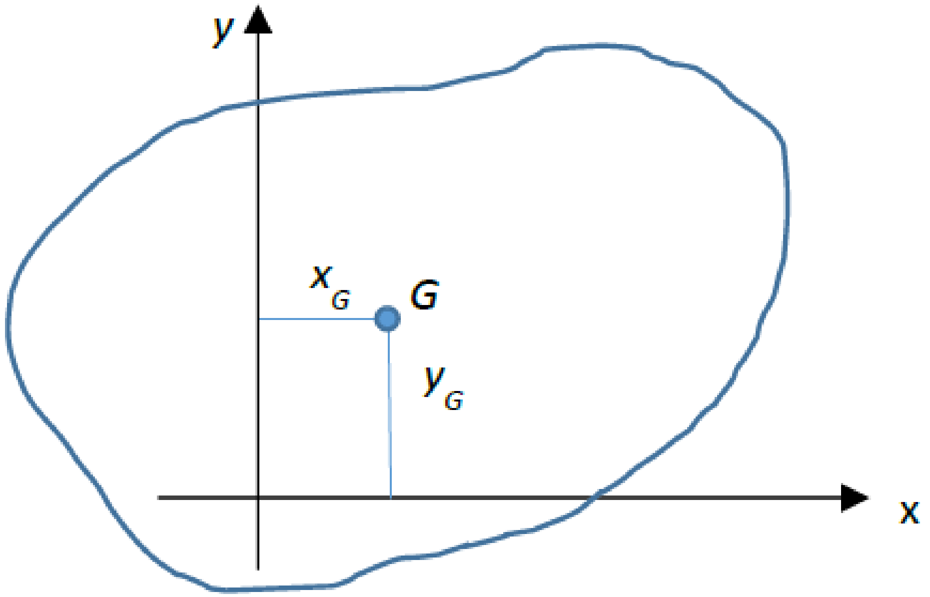
$$S_x = \int y\, dA$$

$$S_y = \int x\, dA$$

Unidades: $[S] = m^2 . m = m^3$

BARICENTRO:

- Es el punto donde el momento estático vale 0.
- Es independiente del sistema coordenado.
- Puede ubicarse dentro o fuera del contorno de la superficie.
- Si hay un eje de simetría, el mismo será baricéntrico.
- Si hay dos ejes de simetría, el baricentro estará en la intersección de los mismos.



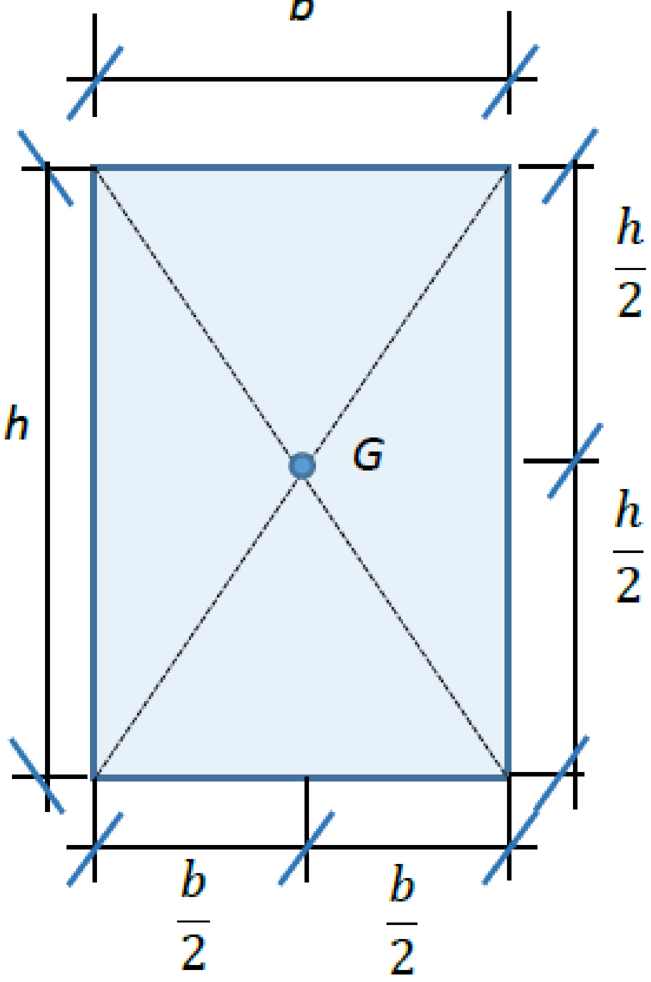
$$S_x = A \cdot y_G \qquad S_y = A \cdot x_G$$

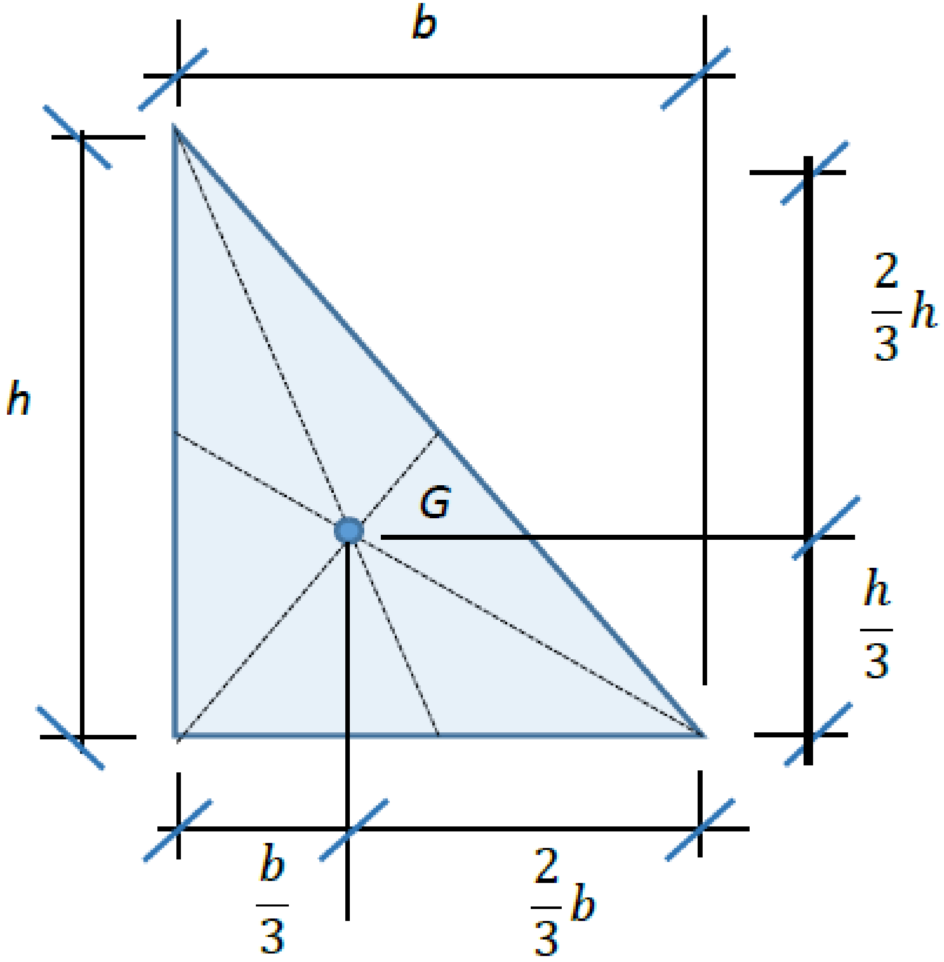
$$y_G = \frac{\int y\, dA}{A} = \frac{S_x}{A} \qquad x_G = \frac{\int x\, dA}{A} = \frac{S_y}{A}$$

Unidades: $[x_G] = \frac{[S_y]}{[A]} = \frac{m^3}{m^2} = m$

BARICENTRO:

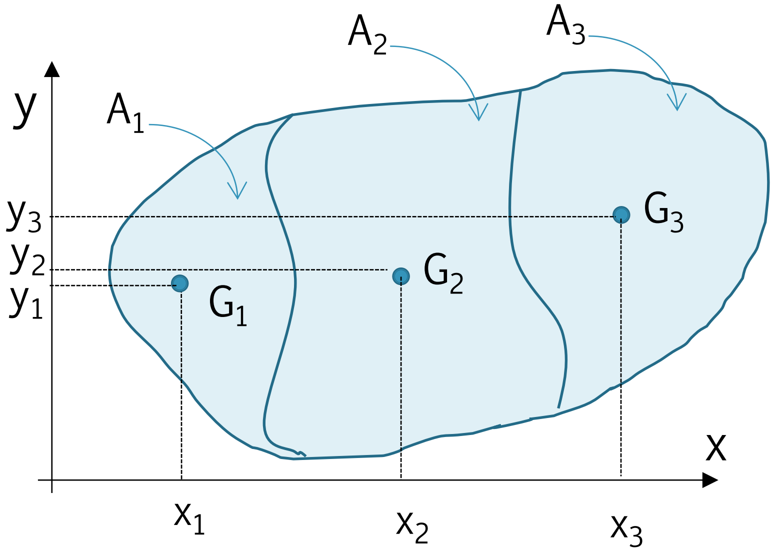
Método gráfico:





BARICENTRO FIGURAS COMPUESTAS:

Se la subdivide en superficies menores.
El momento estático de la figura total se puede calcular como la suma de los momentos estáticos de cada área más pequeña:



$$S_x = \int y\, dA = \sum \int y\, dA_i = \sum S_{xi}$$

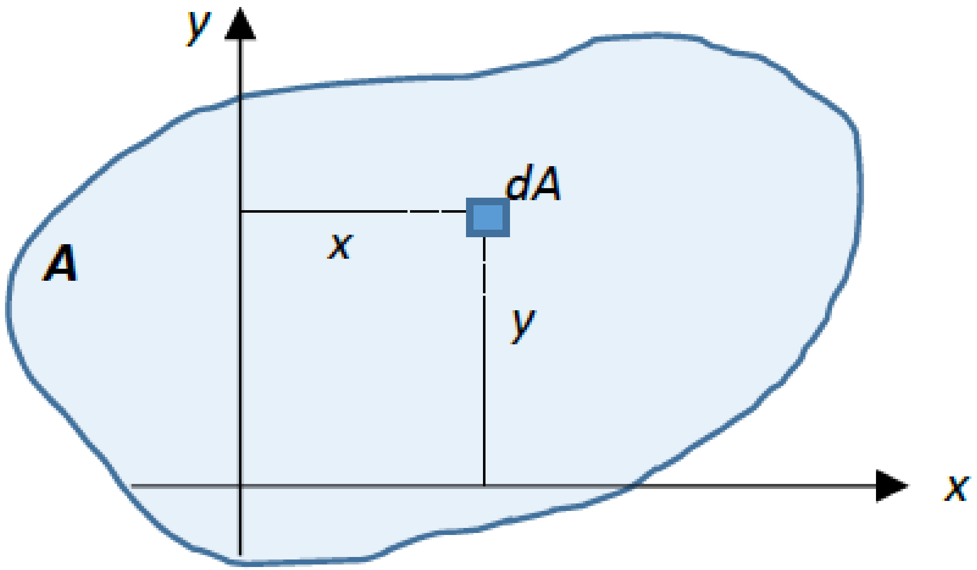
$$S_y = \int x\, dA = \sum \int x\, dA_i = \sum S_{yi}$$

$$\boxed{y_G = \frac{\sum y_{Gi} \cdot A_i}{\sum A_i} \qquad x_G = \frac{\sum x_{Gi} \cdot A_i}{\sum A_i}}$$

Si la superficie tiene huecos o entrantes la superficie se considera negativa.

MOMENTO DE INERCIA:

El momento de inercia representa la resistencia al giro que tiene la superficie respecto de un eje.

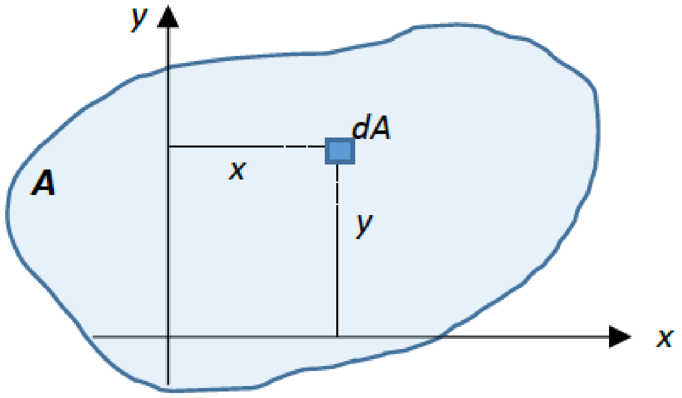


$$I_x = \int y^2 \, dA$$

$$I_y = \int x^2 \, dA$$

Unidades: $[I] = m^2 . m^2 = m^4$

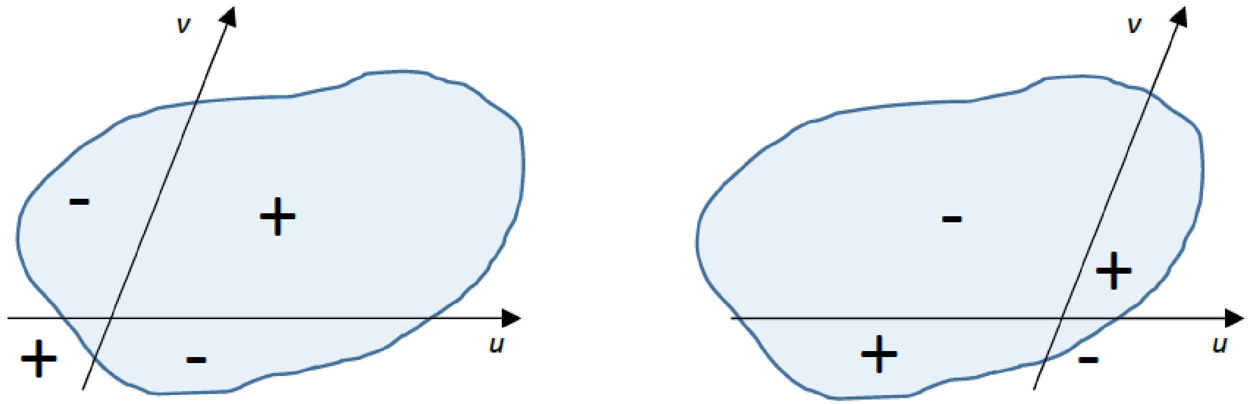
MOMENTO CENTRÍFUGO:



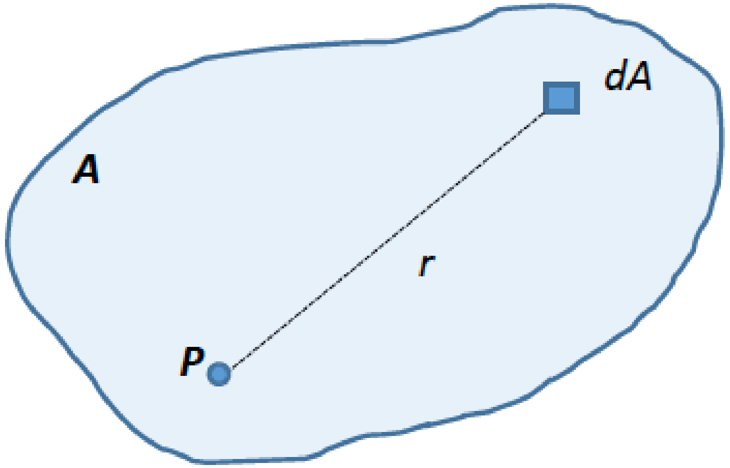
$$I_{xy} = \int x\, y\, dA$$

Unidades: $[I] = m^2 . m^2 = m^4$

El signo del momento depende del cuadrante donde exista mayor área.

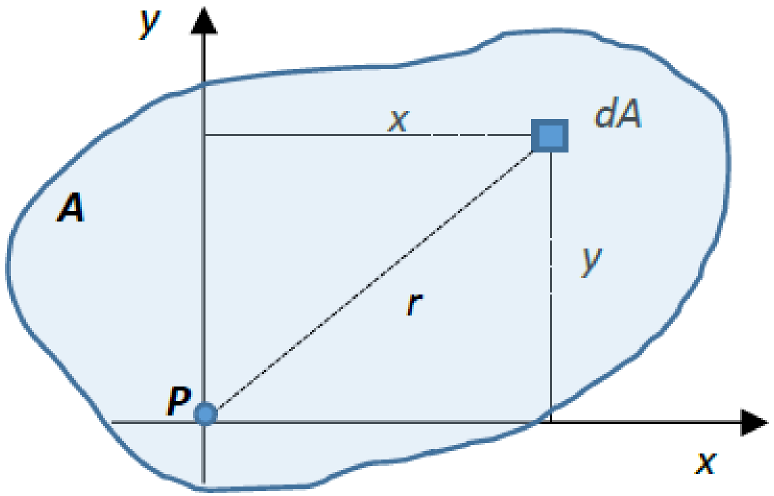


MOMENTO POLAR:



$$I_P = \int r^2 \, dA$$

Unidades: $[I] = m^2 . m^2 = m^4$



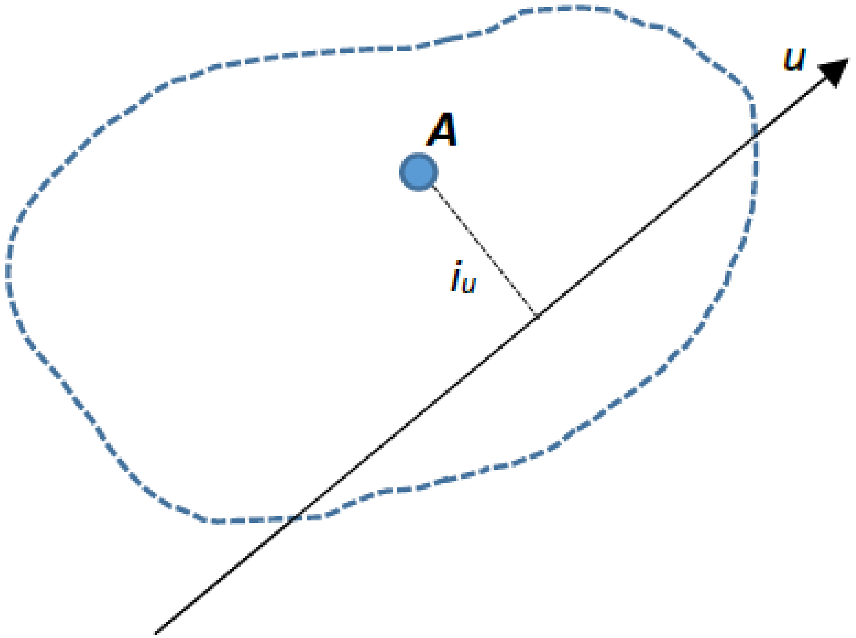
$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$I_P = \int (x^2 + y^2)\, dA = \int x^2 dA + \int y^2 dA = I_x + I_y$$

Para todo par de ejes ortogonales que pasen por el polo P, el valor del momento Polar es **invariante.**

RADIO DE GIRO:

Es la distancia a una recta, tal que si toda el área estuviera concentrada en dicho punto, obtendríamos el mismo momento de inercia de la figura respecto del eje.



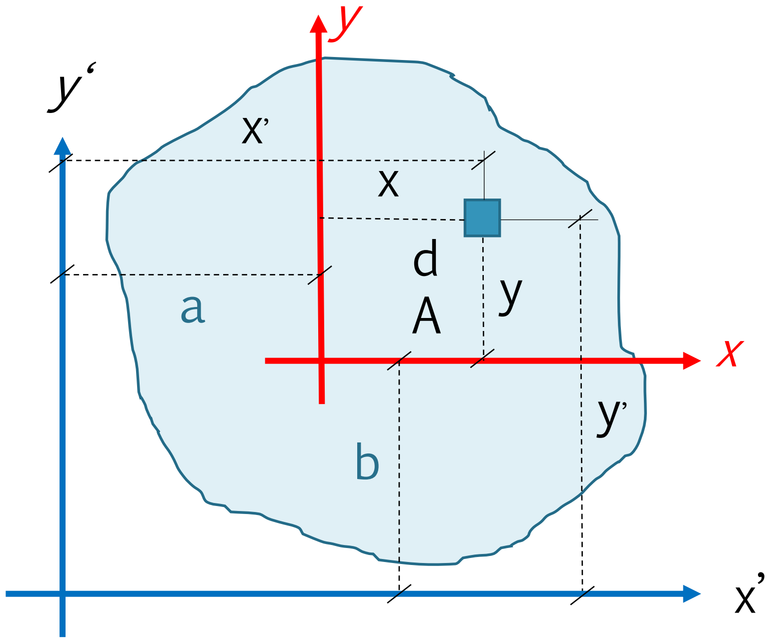
$$I_u = {i_u}^2 \cdot A$$

Entonces: $i_u = \sqrt{\dfrac{I_u}{A}}$

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \qquad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

Nos da una idea de la efectividad en la distribución del área en una sección.

TRASLACIÓN DE EJES



$$\begin{cases} x' = \boldsymbol{x} + a \\ y' = \boldsymbol{y} + b \end{cases}$$

$$I_{x'} = \iint y'^2 dA = \iint (y+b)^2 dA = \iint y^2 dA + 2.b \iint y\, dA + b^2 \iint dA$$

$$\boxed{I_{x'} = I_x + 2\,.b.S_x + b^2.A}$$

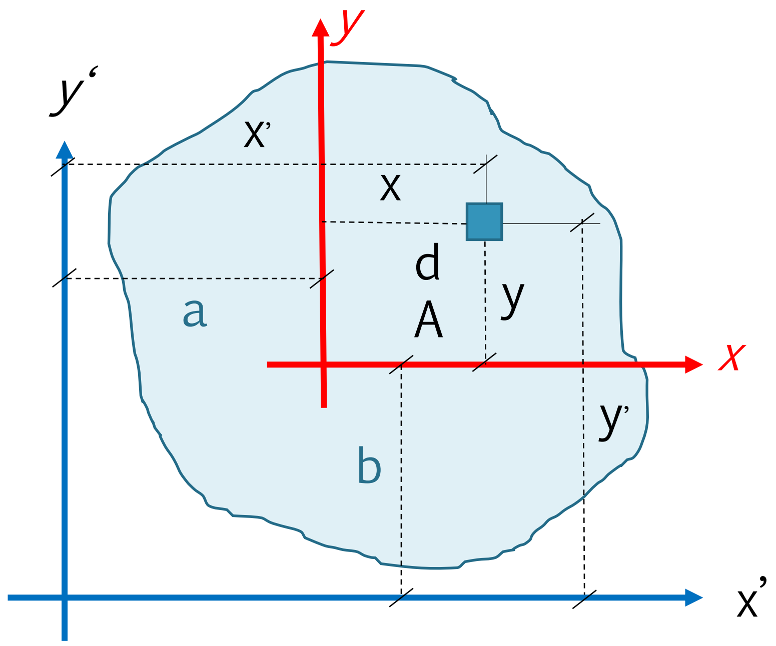
$$I_{y'} = \iint x'^2 dA = \iint (x+a)^2 dA = \iint x^2 dA + 2.a \iint x\, dA + a^2 \iint dA$$

$$\boxed{I_{y'} = I_y + 2\,.a.S_y + a^2.A}$$

$$I_{x'y'} = \iint x'.y' dA = \iint (x+a).(y+b)\, dA = \iint x.y\, dA + b \iint x\, dA + a \iint y\, dA + ab \iint dA$$

$$\boxed{I_{x'y'} = I_{xy} + b.S_y + a.S_x + a.b.A}$$

TRASLACIÓN DE EJES BARICÉNTRICOS: TEOREMA DE STEINER



$$I_{x'} = I_{xG} + \cancel{2.b.S_{xG}} + b^2.A \qquad \boxed{I_{x'} = I_{xG} + b^2.A}$$

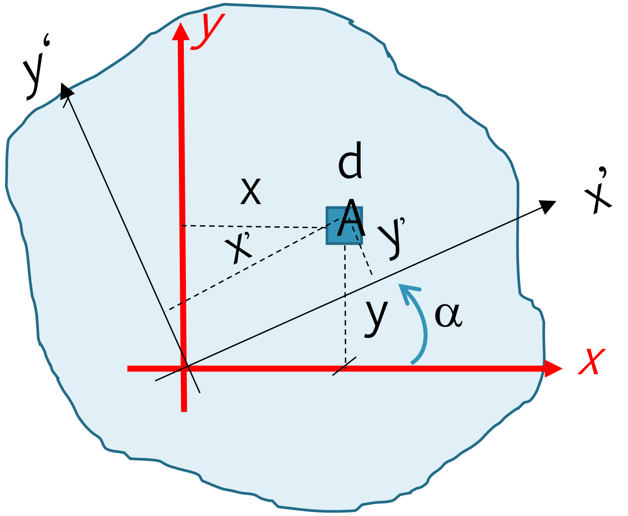
$$I_{y'} = I_{yG} + \cancel{2.a.S_{yG}} + a^2.A \qquad \boxed{I_{y'} = I_{yG} + a^2.A}$$

$$I_{x'y'} = I_{xGyG} + \cancel{b.S_{yG}} + \cancel{a.S_{yG}} + a.b.A \qquad \boxed{I_{x'y'} = I_{xGyG} + a.b.A}$$

Conclusión:
Los momentos de inercia baricéntricos son siempre menores que los momentos de inercia respecto a cualquier otro par de ejes paralelos.

ROTACIÓN DE EJES ORTOGONALES

Características geométricas respecto de **x, y** conocidas.
Se desea conocer respecto de x',y', girados a respecto de x,y.



$$\begin{cases} x' = \mathbf{x}.\cos(\alpha) + \mathbf{y}.\sin(\alpha) \\ y' = \mathbf{y}.\cos(\alpha) - \mathbf{x}.\sin(\alpha) \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 2.\sin(\alpha).\cos(\alpha) = \sin(2\alpha) \\ \cos(\alpha)^2 - \sin(\alpha)^2 = \cos(2\alpha) \end{matrix}}$$

$$I_{x'} = \iint y'^2 dA = \iint (y.\cos(\alpha) - x.\sin(\alpha)\ )^2 dA =$$

$$= -\sin(2\alpha) \iint x.y\, dA + \sin(\alpha)^2 \iint x^2 dA + \cos(\alpha)^2 \iint y^2 dA$$

$$\boxed{I_{x'} = \sin(\alpha)^2 . I_y + \cos(\alpha)^2 . I_x - \sin(2\alpha)\, I_{xy}}$$

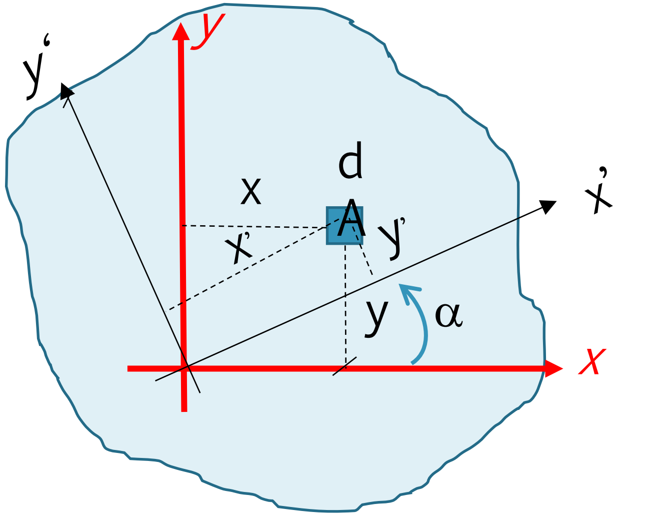
$$I_{y'} = \iint x'^2 dA = \iint (x.\cos(\alpha) + y.\sin(\alpha)\ )^2 dA =$$

$$= \sin(2\alpha) \iint x.y\, dA + \cos(\alpha)^2 \iint x^2 dA + \sin(\alpha)^2 \iint y^2 dA$$

$$\boxed{I_{y'} = cos(\alpha)^2 . I_y + sin(\alpha)^2 . I_x + \sin(2\alpha)\, I_{xy}}$$

ROTACIÓN DE EJES ORTOGONALES

Características geométricas respecto de **x, y** conocidas.
Se desea conocer respecto de x’,y’, girados a respecto de x,y.



$$\begin{cases} x' = \boldsymbol{x}.\cos(\alpha) + \boldsymbol{y}.\sin(\alpha) \\ y' = \boldsymbol{y}.\cos(\alpha) - \boldsymbol{x}.\sin(\alpha) \end{cases}$$

$$2.\sin(\alpha).\cos(\alpha) = \sin(2\alpha)$$

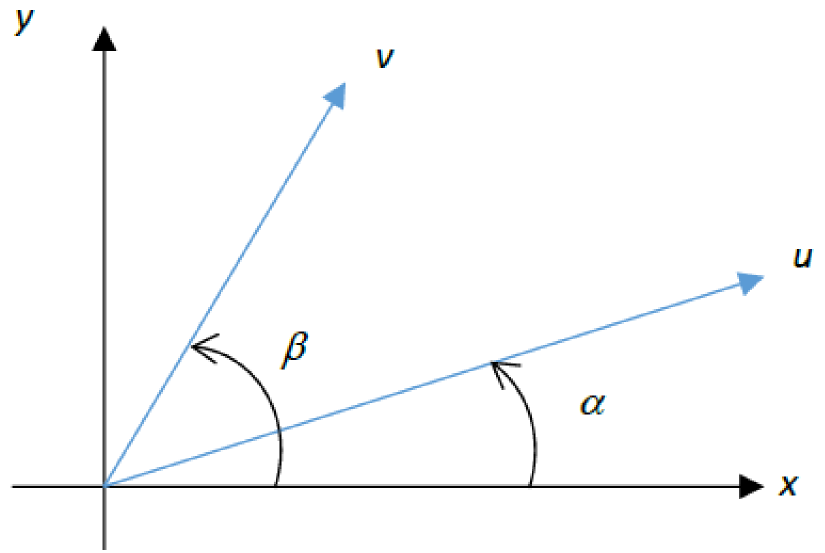
$$\cos(\alpha)^2 - \sin(\alpha)^2 = \cos(2\alpha)$$

$$I_{x'y'} = \iint x'.y'dA = \iint (x.\cos(\alpha) + y.\sin(\alpha)).(y.\cos(\alpha) - x.\sin(\alpha))\, dA =$$

$$= \cos(2\alpha)\iint x.y\, dA - \frac{\sin(2\alpha)}{2}\iint x^2 dA + \frac{\sin(2\alpha)}{2}\iint y^2 dA = \boxed{I_{x'y'} = \cos(2\alpha)\, I_{xy} - \frac{\sin(2\alpha)}{2}(I_y - I_x)}$$

EJES CONJUGADOS DE INERCIA:

Es un par de ejes cuyo momento centrífugo es nulo.



Teniendo el eje ***u*** que forma un ángulo α con $\boldsymbol{x}$, calculamos el eje ***v*** conjugado de inercia:

$$\tan(\beta) = \frac{I_x - I_{xy}.\tan(\alpha)}{I_{xy} - I_y.\tan(\alpha)}$$

- Si además de ser Conjugados, el par de ejes son ortogonales entre sí, se los denomina Ejes Principales de Inercia.
- Si uno de los ejes es de simetría, cualquiera sea el otro eje, el Momento Centrífugo será nulo.

EJES PRINCIPALES DE INERCIA:

Es el par de ejes para los cuales los momentos de inercia son máximos y mínimos.
Para hallar el eje, derivamos la expresión de rotación respecto del ángulo.

$$\boxed{I_{x'} = \sin(\alpha)^2 . I_y + \cos(\alpha)^2 . I_x - \sin(2\alpha)\, I_{xy}}$$

$$\frac{dI_{x'}}{d\alpha} = 0 = \frac{d\sin(\alpha)^2}{d\alpha}.I_y + \frac{d\cos(\alpha)^2}{d\alpha}.I_x - \frac{d\sin(2\alpha)}{d\alpha}.I_{xy}$$

$$0 = \sin(2\alpha_0).I_y - \sin(2\alpha_0).I_x - 2.\cos(2\alpha_0).I_{xy}$$

$$2.\cos(2\alpha_0).I_{xy} = \sin(2\alpha_0).(I_y - I_x)$$

$$\frac{2.I_{xy}}{(I_y - I_x)} = \frac{\sin(2\alpha_0)}{\cos(2\alpha_0)} = \tan(2\alpha_0)$$

$$\boxed{\tan(2\alpha_0) = \frac{2.I_{xy}}{(I_y - I_x)}}$$

EJES PRINCIPALES DE INERCIA:

Es el par de ejes para los cuales los momentos de inercia son máximos y mínimos.
Para hallar el eje, derivamos la expresión de rotación respecto del ángulo.

$$\boxed{\tan(2\alpha_0) = \frac{2.I_{xy}}{(I_y - I_x)}}$$

- **Los Ejes Principales de Inercia son Ortogonales y Conjugados**
- El producto de inercia $I_{x'y'}$ es nulo para los ejes principales de inercia.
- **Todo eje de simetría es principal de inercia**

MOMENTOS DE INERCIA PRINCIPALES:

Reemplazando el a que maximiza el valor del Momento de Inercia en la ecuación de rotación de ejes, se obtienen los momentos de inercia máximos y mínimos o Momentos Principales de Inercia

$$\underbrace{\cos(\alpha)^2 = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2} \qquad sin(\alpha)^2 = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}}$$

$$I_{x'} = \sin(\alpha)^2 . I_y + \cos(\alpha)^2 . I_x - \sin(2\alpha)\, I_{xy} = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2} . I_y + \frac{1+\cos(2\alpha)}{2} . I_x - \sin(2\alpha)\, I_{xy} =$$

$$= \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{\cos(2\alpha)}{2} . (I_x - I_y) - \sin(2\alpha)\, I_{xy} =$$

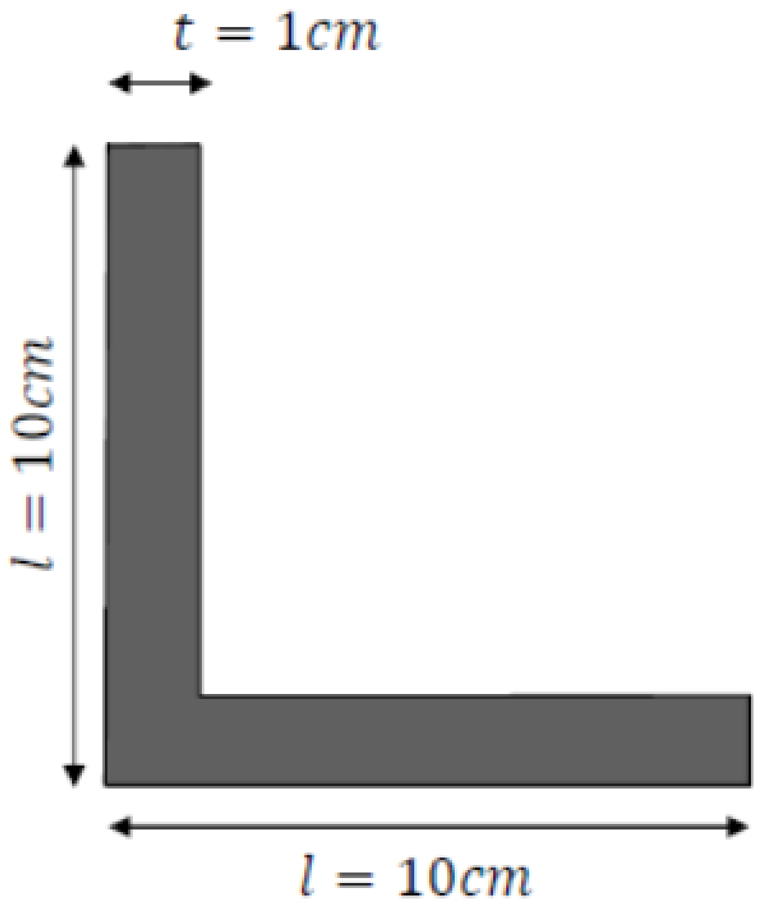
Reemplazando el α por α_0: $\tan(2\alpha_0) = \frac{2. I_{xy}}{(I_y - I_x)}$

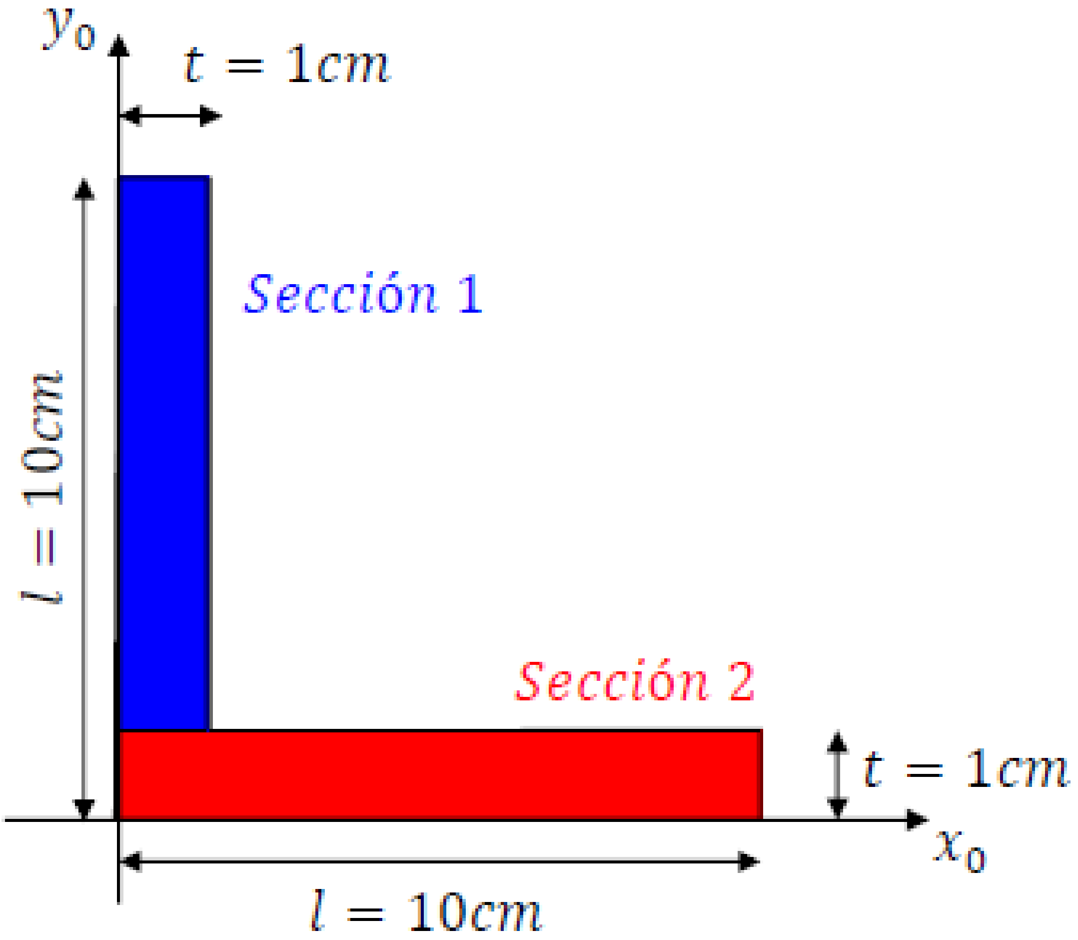
$$\boxed{I_{I,II} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}{}^2}}$$

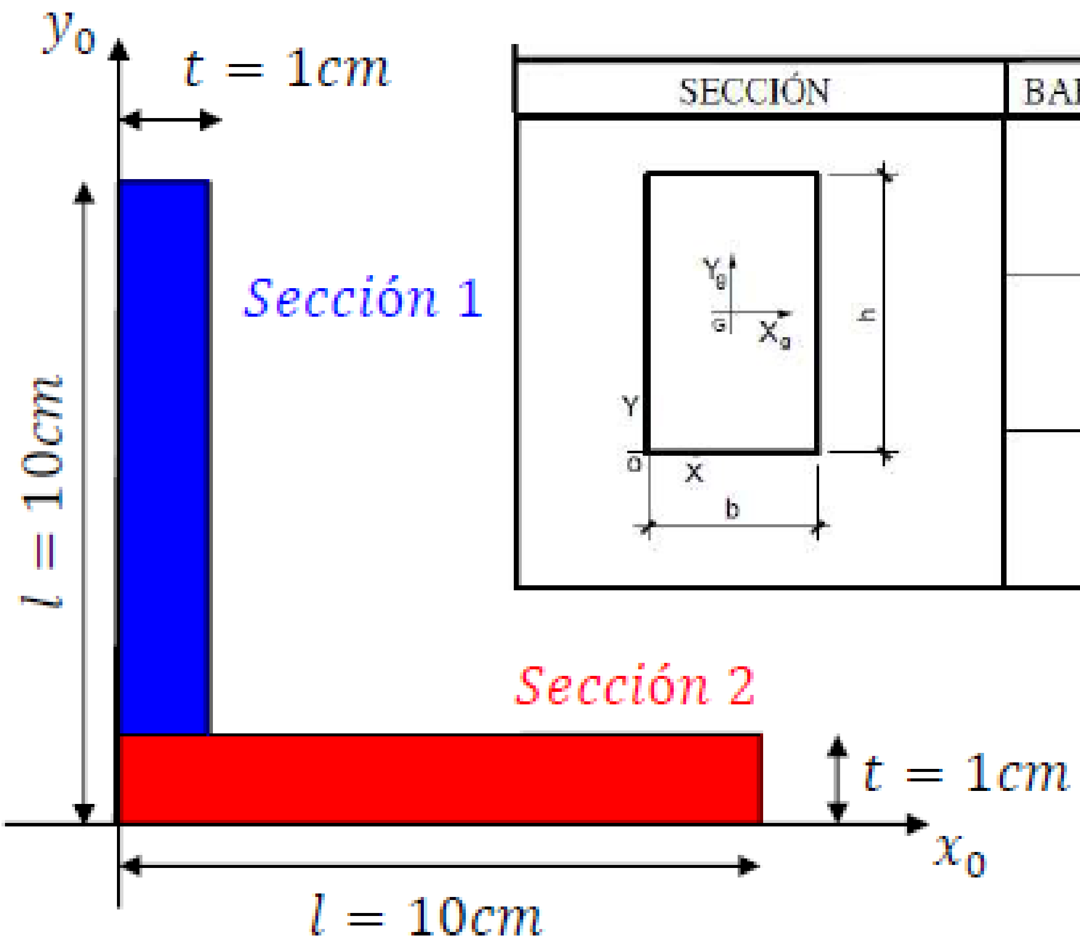
$$I_{max} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}{}^2}$$

$$I_{min} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}{}^2}$$

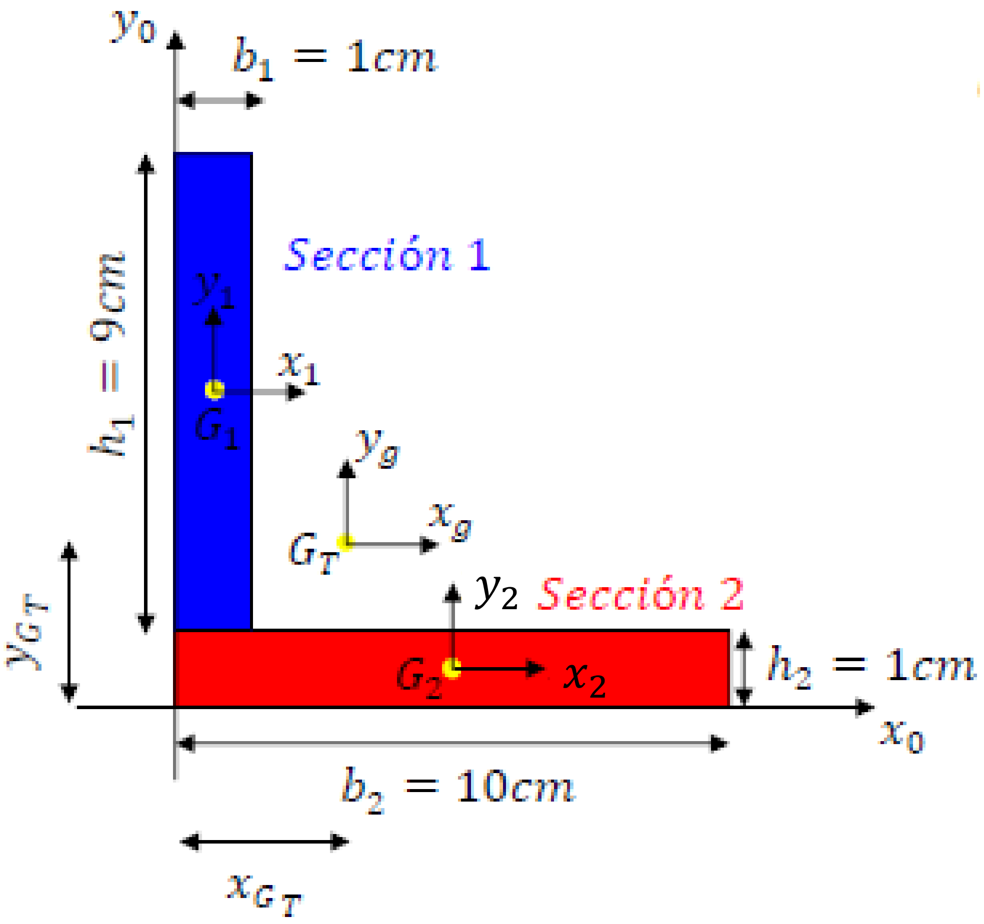
Calcular la posición de baricentro y los ejes y momentos de inercia principales baricéntricos.







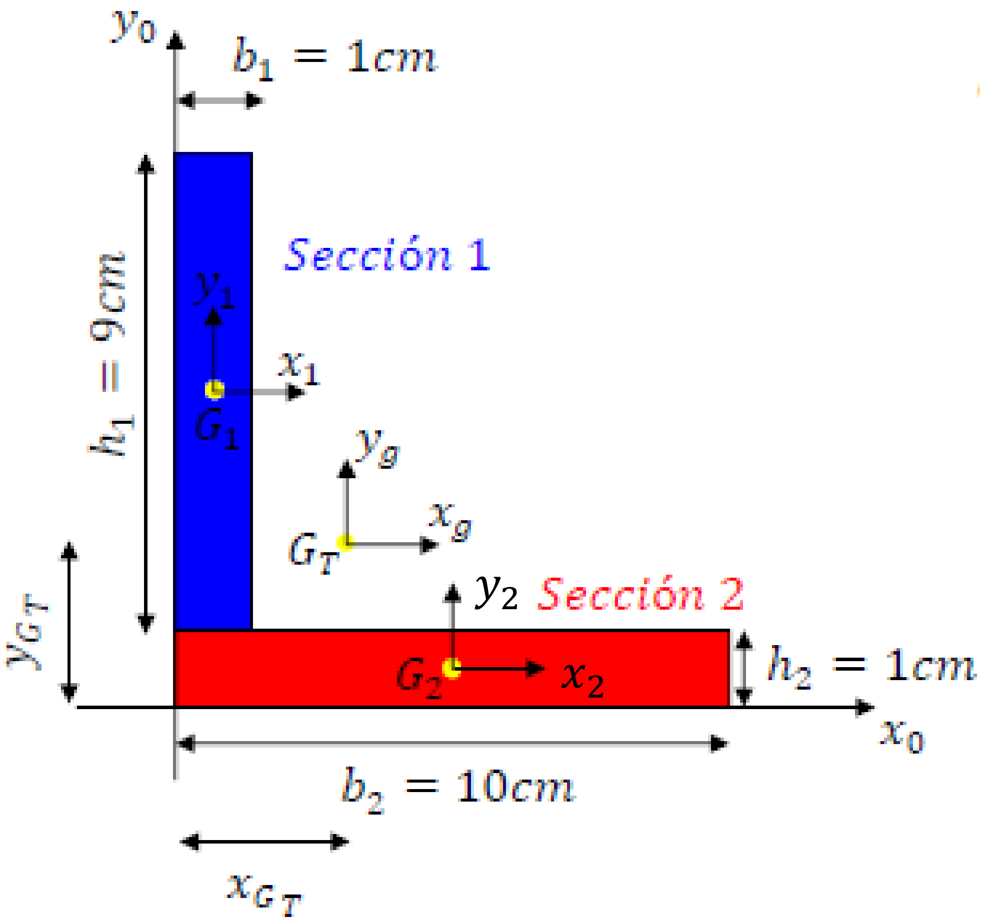
SECCIÓN	BARICENTRO / ÁREA	MOMENTOS DE INERCIA Y MOMENTOS CENTRIFUGOS	
	$x_g = \frac{b}{2}$	$J_x = \frac{b \cdot h^3}{3}$	$J_{xg} = \frac{b \cdot h^3}{12}$
	$y_g = \frac{h}{2}$	$J_y = \frac{b^3 \cdot h}{3}$	$J_{yg} = \frac{b^3 \cdot h}{12}$
	$F = b \cdot h$	$J_{xy} = \frac{b^2 \cdot h^2}{4}$	$J_{xyg} = 0$



Calculo el Baricentro de cada Sección:

$G_1 = (0{,}5cm, 5{,}5cm)$ $\quad A_1 = 1cm * 9cm = 9cm^2$

$G_2 = (5cm, 0{,}5cm)$ $\quad A_2 = 10cm * 1cm = 10cm^2$



Calculo el Baricentro de la Sección Compuesta:

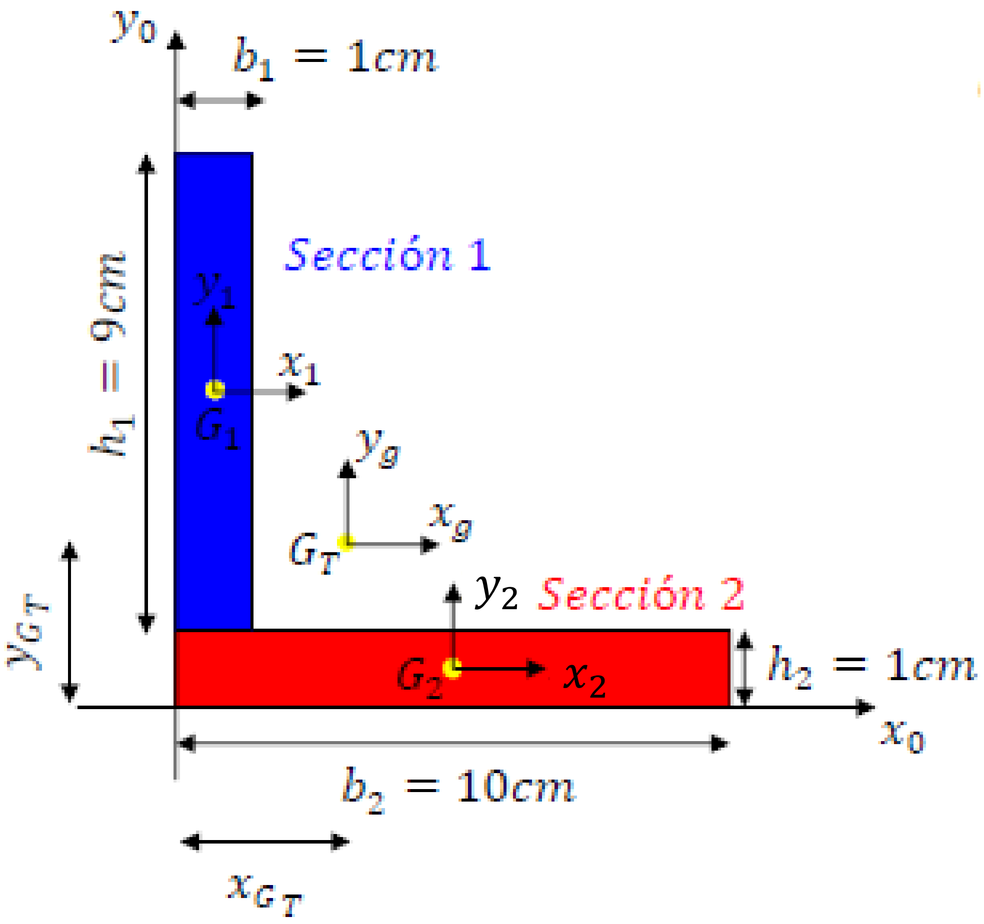
$$x_{G_T} = \frac{\sum x_{G_i} A_i}{\sum A_i} \qquad y_{G_T} = \frac{\sum y_{G_i} A_i}{\sum A_i}$$

$$x_{G_T} = \frac{0{,}5cm * 9cm^2 + 5cm * 10cm^2}{9cm^2 + 10cm^2} = 2{,}868cm$$

$$y_{G_T} = \frac{5{,}5cm * 9cm^2 + 0{,}5cm * 10cm^2}{9cm^2 + 10cm^2} = 2{,}868cm$$

$$\boxed{G_T = (2{,}868cm; 2{,}868cm)}$$

Calculo los Momentos de Inercia de cada Sección:



$$I_x = \frac{b * h^3}{12} \qquad I_y = \frac{h * b^3}{12}$$

$$I_{x1} = \frac{1cm * (9cm)^3}{12} = 60{,}75cm^4$$

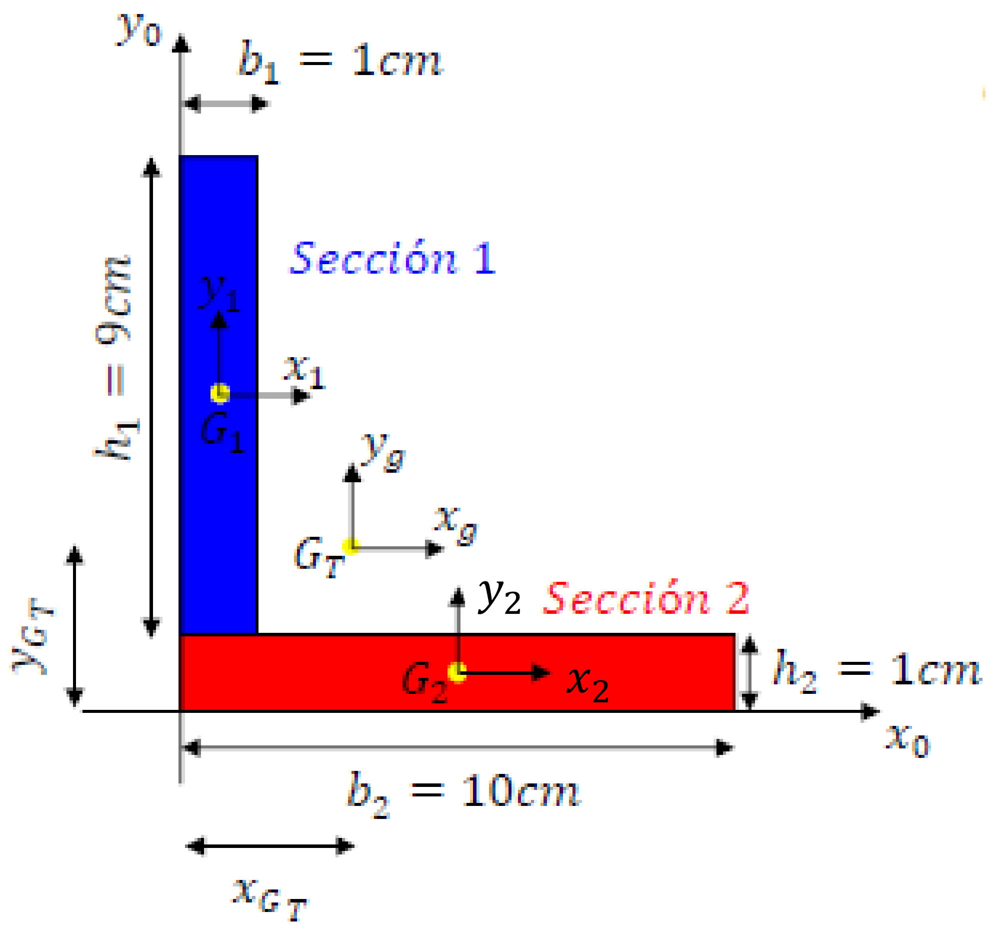
$$I_{y1} = \frac{9cm * (1cm)^3}{12} = 0{,}75cm^4$$

$$I_{x2} = \frac{10cm * (1cm)^3}{12} = 0{,}833cm^4$$

$$I_{y_2} = \frac{1cm * (10cm)^3}{12} = 83{,}333cm^4$$

$$I_{x_1y_1} = 0 \qquad I_{x_2y_2} = 0$$

Uso el Teorema de Steiner para calcular el Momento de Inercia en X de la Sección Compuesta:



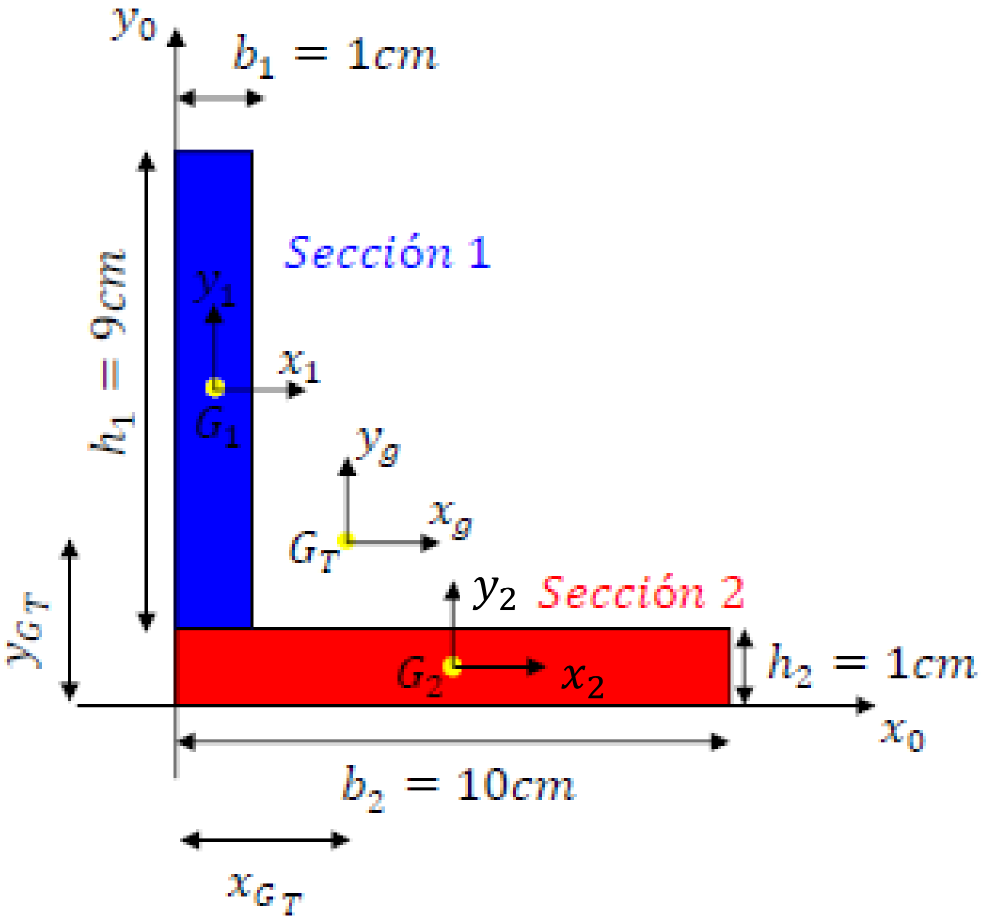
$$I_{x_g} = I_{x_1} + a_1^2 A_1 + I_{x_2} + a_2^2 A_2$$

$$a_1 = y_{G_T} - y_{G_1} = 2{,}868\text{cm} - 5{,}5\text{cm} = -2{,}632\text{cm}$$

$$a_2 = y_{G_T} - y_{G_2} = 2{,}868\text{cm} - 0{,}5\text{cm} = 2{,}368\text{cm}$$

$$I_{x_g} = 60{,}75cm^4 + (-2{,}632)^2 * 9cm^2 + 0{,}833cm^4 + (2{,}368)^2 * 10cm^2 = 180cm^4$$

Uso el Teorema de Steiner para calcular el Momento de Inercia en Y de la Sección Compuesta :



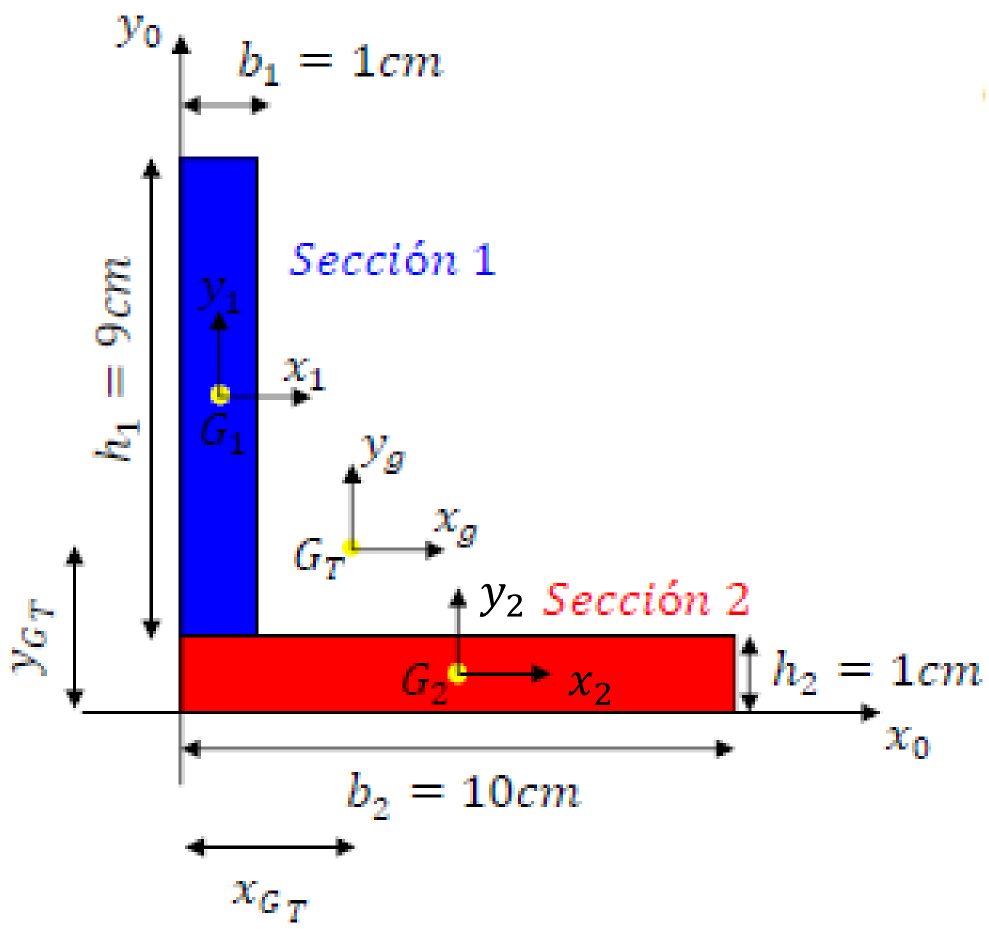
$$I_{y_g} = I_{y_1} + b_1^2 A_1 + I_{y_2} + b_2^2 A_2$$

$$b_1 = x_{G_T} - x_{G_1} = 2{,}868\text{cm} - 0{,}5\text{cm} = 2{,}368\text{cm}$$

$$b_2 = x_{G_T} - x_{G_2} = 2{,}868\text{cm} - 5\text{cm} = -2{,}132\text{cm}$$

$$I_{y_g} = 0{,}75cm^4 + (2{,}368)^2 * 9cm^2 + 83{,}333cm^4 + (-2{,}132)^2 * 10cm^2 = 180cm^4$$

Uso el Teorema de Steiner para calcular el Momento Centrífugo de la Sección Compuesta:



$$I_{x_g y_g} = I_{x_1 y_1} + a_1 b_1 A_1 + I_{x_2 y_2} + a_2 b_2 A_2$$

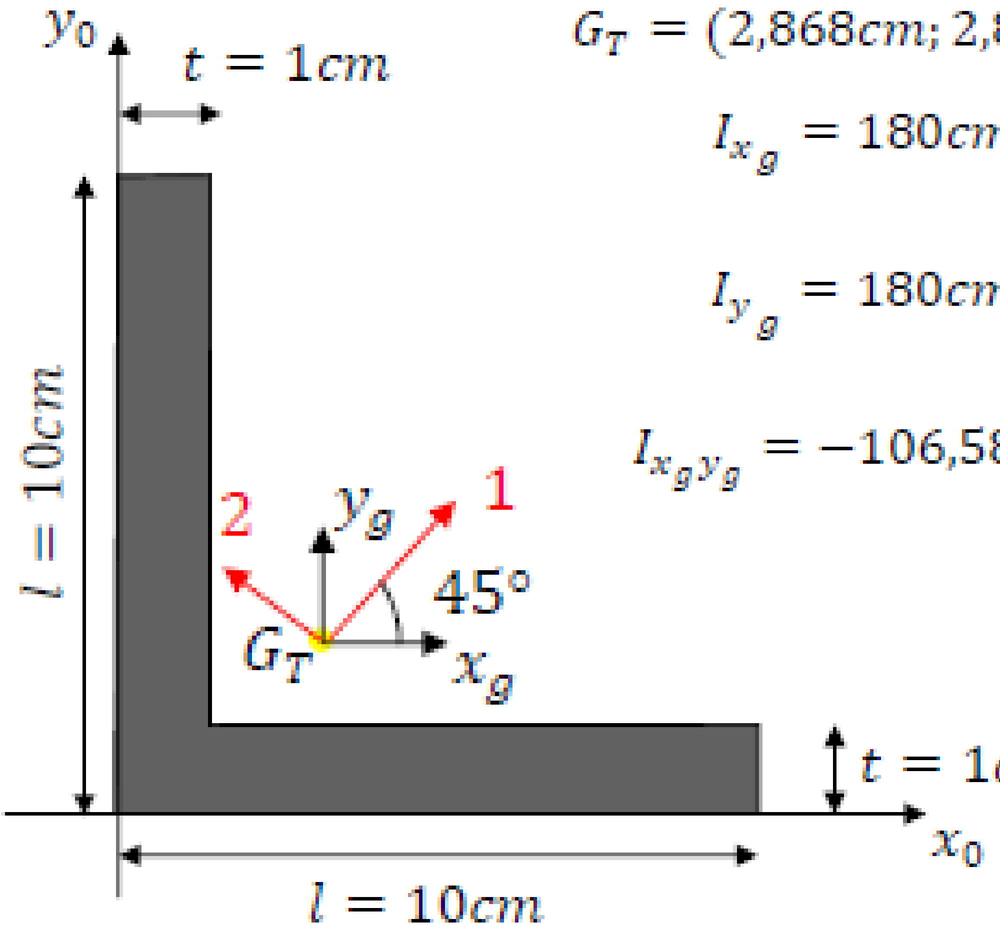
$$a_1 = y_{G_T} - y_{G_1} = 2{,}868\text{cm} - 5{,}5\text{cm} = -2{,}632\text{cm}$$

$$a_2 = y_{G_T} - y_{G_2} = 2{,}868\text{cm} - 0{,}5\text{cm} = 2{,}368\text{cm}$$

$$b_1 = x_{G_T} - x_{G_1} = 2{,}868\text{cm} - 0{,}5\text{cm} = 2{,}368\text{cm}$$

$$b_2 = x_{G_T} - x_{G_2} = 2{,}868\text{cm} - 5\text{cm} = -2{,}132\text{cm}$$

$$I_{x_g y_g} = 0cm^4 + (-2{,}632\text{cm})(2{,}368\text{cm}) * 9cm^2 + 0cm^4 + (2{,}368\text{cm})(-2{,}132\text{cm}) * 10cm^2 = -106{,}58cm^4$$



$G_T = (2{,}868cm; 2{,}868cm)$

$I_{x_g} = 180cm^4$

$I_{y_g} = 180cm^4$

$I_{x_g y_g} = -106{,}58cm^4$

Momentos de Inercia Principales:

$$I_{max-min} = \frac{I_{x_g} + I_{y_g}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{x_g} - I_{y_g}}{2}\right)^2 + {I_{x_g y_g}}^2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} I_{max} &= 286{,}58cm^4 \\ I_{min} &= 73{,}43cm^4 \end{aligned}}$$

Ejes de Inercia Principales:

$$\tan(2\theta) = \frac{-2I_{x_g y_g}}{I_{x_g} - I_{y_g}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} 2\theta &= 90° \\ \theta &= 45° \end{aligned}}$$

George Washington Bride, New Jersey, EEUU

GRACIAS POR SU ATENCIÓN!