Gaussian Variational Bayes

IMPORTATNTE: En este ejercicio solamente se podrá importar numpy, matplotlib.pyplot y las funciones gamma, digamma y softmax de scipy.special (el resto deberá ser impementación propia).

Se desea modelar el tiempo (en minutos con respecto a la hora de entrada) en que diferentes grupos de estudiantes llegan a una determinada clase de la facultad. Estos comportamientos serán modelados como una mezcla de 6 comportamientos distintos dentro de las rutinas de las personas.

(**a**) *Creación del dataset:* Generar 100 muestras de una mezcla de gaussianas con pesos $0.1, 0.4, 0.2, 0.3$, medias $-4, 0, 4, 5$ y varianzas $1, 1.96, 1.44, 1$ respectivamente. *Interpretación:* En realidad existían 4 comportamientos marcados (aunque nosotros no lo sabíamos). Ellos pueden pensarse como:

- Un 10 % de personas muy puntuales ($\mu = -4$ y varianza más pequeña).
- Un 40 % de personas que tienden a llegar justo ($\mu = 0$).
- Un 20 % de personas “relajadas” ($\mu = 4$).
- Un 30 % de personas consistentemente impuntuales ($\mu = 5$ y varianza más pequeña).

(**b**) *K-means:*

- Implementar un algoritmo de K-means para caracterizar la puntualidad de los estudiantes. El entrenamiento debe contener doble condición de parada (número de iteraciones y convergencia). El algoritmo debe ser definido dentro de una clase que posea al menos los métodos `init`, `fit` y `predict`.
- Modelar una mezcla de gaussianas con los resultados del entrenamiento. : Las medias sean los centroides, las varianzas sean estimadas intra-clase y los pesos sean la proporción de las muestras.
- Graficar la densidad estimada y compararla con la original.

(**c**) *Expectation-Maximization:*

- Implementar un algoritmo de EM para caracterizar la puntualidad de los estudiantes. Inicializar el algoritmo con el modelo de K-means. El entrenamiento debe contener doble condición de parada (número de iteraciones y convergencia). El algoritmo EM debe ser definido dentro de una clase que posea al menos los métodos `init`, `fit`, `predict_proba` y `predict`.
- Graficar la densidad estimada, compararla con la de K-means y con la original.

(**d**) Gaussian Variational Bayes:

- Implementar un Variational Bayes Gaussiano que permita computar el modelo. Suponer *a priori* $m = 0$, $\delta = \nu = \beta = 0.05$ y $\alpha = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$, y utilizar el algoritmo EM para inicializar las probabilidades. El entrenamiento debe contener doble condición de parada (número de iteraciones y convergencia). El algoritmo debe ser definido dentro de una clase que posea al menos los métodos `init`, `fit`, `predict_proba` y `predict`.
- Con la distribución *a posteriori* generar 3 muestras de parámetros y graficar la densidad de $X|\mu, \lambda, \pi$ para cada uno de esos conjuntos de parámetros. Compararla con la densidad verdadera, con la de K-means y con la del EM.
- Graficar la densidad *predictiva*. Compararla con la densidad verdadera, con la de K-means y con la del EM.