Episodio 14.Producto interno
Complemento ortogonal-Proyección ortogonal

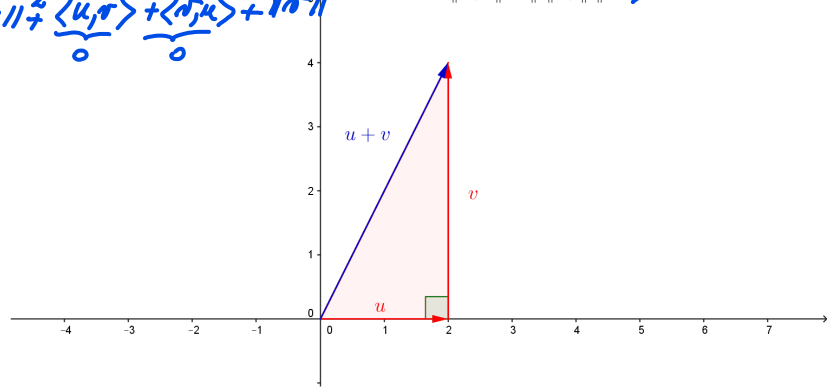
Departamento de Matemática
FIUBA

FACULTAD
DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v ; u+v \rangle =$$
$$\|u\|^2 + \underbrace{\langle u,v \rangle}_{0} + \underbrace{\langle v,u \rangle}_{0} + \|v\|^2$$

TEOREMA DE PITÁGORAS

$u \perp v \Rightarrow \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$



Teorema de Pitágoras

Si $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con Producto Interno, se cumple:

$$\boxed{\mathrm{u} \perp v \Rightarrow \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2}$$

Demostración:

$u \perp v \iff \langle u, v \rangle = 0$

$$\begin{aligned} \|u+v\|^2 &= \langle u+v, u+v \rangle = \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle \\ &= \|u\|^2 + \underbrace{\langle u, v \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle v, u \rangle}_{=0} + \|v\|^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \ \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \ \checkmark$$

Observaciones:

- El recíproco del teorema de Pitágoras sólo es valido si $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{R}$- espacio vectorial.
  Si para un par de vectores se cumple:

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \iff$$

$$\iff \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle = \langle u,u\rangle + \langle v,v\rangle \iff$$

$$\iff \langle u,v\rangle + \underbrace{\langle v,u\rangle}_{=\overline{\langle u,v\rangle}} = 0$$

$= \langle u,v\rangle$

$$\langle u,v\rangle + \overline{\langle u,v\rangle} = 0$$

$$\underbrace{2\mathbb{R}e}\underbrace{(\langle u,v\rangle)} = 0$$

$2\langle u,v\rangle = 0 \qquad \langle u,v\rangle = 0$

$u \perp v$

Si $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, $\langle u,v\rangle \in \mathbb{R} \Rightarrow \langle u,v\rangle = 0 \Rightarrow u \perp v$

FACULTAD DE INGENIERIA Universidad de Buenos Aires

Si $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial, la única implicación es que $\mathbb{R}e(\langle u, v\rangle) = 0$ y esto no significa que los vectores sean ortogonales, sólo implica que el producto interno entre los dos vectores es un complejo de la forma $z = bi$.

no

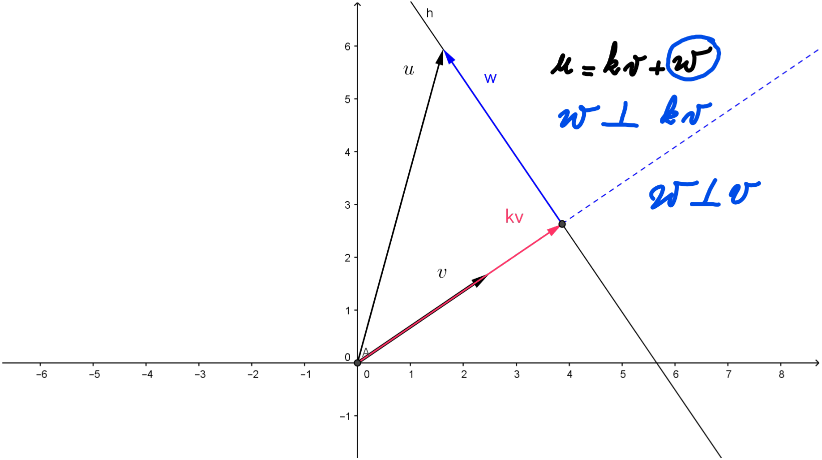
Como contraejemplo inmediato: Tomemos en $\mathbb{C}^n$ el P.I. canónico, $\langle x, y\rangle = y^* x = \bar{y}^T x$. Si $x = (1 \ \ 0)^T$ e $y = (3i \ \ 1)^T$, entonces:

$$\left\langle (1 \ \ 0)^T (3i \ \ 1)^T \right\rangle = (\bar{3i} \ \ \bar{1}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(-3i \ \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -3i = -3i \neq 0$$

$\therefore x \not\perp y$, pero:
$\|x + y\|^2 = \|(1 + 3i \ \ 1)^T\|^2 = |1 + 3i|^2 + 1^2 = 1 + 9 + 1 = 11$
$\|x\|^2 = 1,$ y $\|y\|^2 = 9 + 1 = 10.$
Entonces $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ y $x \not\perp y$.

Descomposición Ortogonal



$u = kv + w$

$w \perp kv$

$w \perp v$

Existencia de la descomposición ortogonal

Sea $\mathbb{V}$-$\mathbb{K}$ espacio vectorial con P.I.

Si u y $v \in \mathbb{V}$, $v \neq 0_{\mathbb{V}}$, queremos saber si existe $w \in V$, ortogonal a v tal que $u = cv + w$, con $c \in \mathbb{K}$.

K del dibujo

Si suponemos $w \perp v \Rightarrow \langle u, v \rangle = \langle cv + w, v \rangle = c \langle v, v \rangle + \underbrace{\langle w, v \rangle}_{=0}$

Entonces, $c = \frac{\langle u,v \rangle}{\|v\|^2}$ y despejamos $w = u - cv$.
Como $\forall\ u, v \in \mathbb{V},\ u = cv + (u - cv)$ podemos afirmar que :

> $\forall u, v \in \mathbb{V}, v \neq 0_{\mathbb{V}}$, si tomamos $c = \frac{\langle u,v \rangle}{\|v\|^2}$, y $w = u - (\frac{\langle u,v \rangle}{\|v\|^2})v$, se cumple:
>
> $$u = cv + w \text{ con } w \perp v$$

En todo este apunte siempre que hablamos de $\mathbb{V}$, estamos hablando de $\mathbb{V} - \mathbb{K}$ espacio vectorial con P.I.

Definición: Se dice que $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subset \mathbb{V}$ es un **conjunto ortogonal**, si $\langle v_i, v_j \rangle = 0 \ \forall \ i \neq j$.
Aclaración: Todo conjunto con un sólo elemento, $\{v_1\}$ se considera ortogonal.

Definición: Se dice que $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subset \mathbb{V}$ es un **conjunto ortonormal**, si $\langle v_i, v_j \rangle = 0 \ \forall \ i \neq j$ y $\|v_i\|^2 = 1$, $\forall i = 1, \ldots, k$.

Observación

- Si $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ es un **conjunto ortogonal que no contiene al vector nulo** $\Rightarrow \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ es l.i.
  Para probarlo, igualamos una combinación lineal a $0_{\mathbb{V}}$:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k = 0_{\mathbb{V}} \ (1)$$

Si tomamos producto interno m. a m. *"contra"* v_1:

$$\langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k, v_1 \rangle = \langle 0_{\mathbb{V}}, v_1 \rangle = 0$$

$$\lambda_1 \langle v_1, v_1 \rangle + \lambda_2 \underbrace{\langle v_2, v_1 \rangle}_{=0} + \cdots + \lambda_k \underbrace{\langle v_k, v_1 \rangle}_{=0} = 0$$

$$\lambda_1 \|v_1\|^2 = 0, \text{ como por hipótesis } v_1 \neq 0_{\mathbb{V}} \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 0}$$

Esto que hicimos con v_1, podemos repetirlo para cada uno de los vectores del conjunto. Entonces, en (1) tomemos producto interno m. a m. *"contra"* v_i, para cada $i = 1, \dots, k$:

$$\langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k, v_i \rangle = \langle 0_{\mathbb{V}}, v_i \rangle = 0$$

$$\lambda_1 \langle v_1, v_i \rangle + \lambda_2 \langle v_2, v_i \rangle + \cdots + \lambda_k \langle v_k, v_i \rangle = 0 (2)$$

Pero $\langle v_j, v_i \rangle = 0 \, \forall \, j \neq i$. Entonces el único término que no se anula a la izquierda de la igualdad es $\lambda_i \|v_i\|^2$ y en (2) queda:

$$\lambda_i \|v_i\|^2 = 0, \text{ como por hipótesis } v_i \neq 0_{\mathbb{V}} \Rightarrow \boxed{\lambda_i = 0 \ \forall \imath = 1, \dots, k.}$$

$\therefore \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ es linealmente independiente.

Obviamente $\{u_1, u_2 \dots u_k\}$ es un conjunto ortonormal $\Rightarrow$ $\{u_1 \dots u_k\}$ es LI

$1 \leq i \leq k$ $\quad \|u_i\| = 1$

$\Rightarrow u_i \neq 0_{\mathbb{V}}$

Bases ortogonales y ortonormales.

Definición:
Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interno. Se dice que $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una **base ortogonal de** $\mathbb{V}$ si es una base de $\mathbb{V}$ y es un conjunto ortogonal.
$(\langle v_i, v_j \rangle = 0 \ \forall i \neq j.)$

Definición:
Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interno. Se dice que $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una **base ortonormal de** $\mathbb{V}$ si es una base de $\mathbb{V}$ y es un conjunto ortonormal.

O sea, $\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases}.$

Descomposición con respecto a una base ortonormal

Sea $B = \{v_1, v_2, \dots v_n\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{V}$, *si* $u \in \mathbb{V}$ $u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$, aplicando el teorema de Pitágoras sucesivamente en los n términos, tenemos:

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &= \|\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n\|^2 = \|\lambda_1 v_1\|^2 + \dots + \|\lambda_n v_n\|^2 \\ &= |\lambda_1|^2\|v_1\|^2 + |\lambda_2|^2\|v_2\|^2 + \cdots + |\lambda_n|^2\|v_n\|^2 \end{aligned} \tag{1}$$

Si,en particular, la base es ortonormal, tenemos:

$\|u\|^2 = |\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2 + \cdots + |\lambda_n|^2$
Pero el resultado es más "sabroso todavía, porque los escalares, o sea las coordenadas de cualquier vector con respecto a una base ortonormal quedan explicitamente determinados por el vector u y su p.i. con respecto a los vectores de la base ortonormal.

Si $u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$, tomemos m. a m. el producto interno *"contra"* v_1:

$$\langle u, v_1 \rangle = \langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k, v_1 \rangle$$

$$\langle u, v_1 \rangle = \lambda_1 \underbrace{\langle v_1, v_1 \rangle}_{1} = \lambda_1$$

Repetimos la misma operación con cada v_i de la base ortonormal:

$$\langle u, v_i \rangle = \langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k, v_i \rangle \underbrace{=}_{B \text{ ortonormal}} \lambda_i \langle v_i, v_i \rangle = \lambda_i$$

$$\boxed{\lambda_i = \langle u, v_i \rangle}$$

Si $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base ortonormal :
$u = \langle u, v_1 \rangle v_1 + \langle u, v_2 \rangle v_2 + \cdots + \langle u, v_n \rangle v_n$.

$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2$ (en $\mathbb{R}$)

$\|u\|^2 = |\langle u, v_1 \rangle|^2 + |\langle u, v_2 \rangle|^2 + \cdots + |\langle u, v_n \rangle|^2$

Complemento ortogonal

Definición:
Si $A \subseteq \mathbb{V}, A \neq \emptyset$, se llama **complemento ortogonal de A** al conjunto $A^{\perp} = \{w \in \mathbb{V} : \langle w, v\rangle = 0\ \forall v \in A\}$, el conjunto formado por todos los vectores de $\mathbb{V}$ que son ortogonales a cada elemento de A.

$A^{\perp} = \{q \in \mathbb{R}_3[x] : ① \text{ y } ②\}$

Ej: $A = \{1 ; x^2\}$ $\quad \mathbb{V} = \mathbb{R}_3[x]$.

$\langle p, q\rangle = \int_0^1 p\, q\, dx$ $\quad$ tomo $p = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

$\Rightarrow \langle p, 1\rangle = \int_0^1 p\, dx = a_3 \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 + a_2 \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + a_1 \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + a_0 x\Big|_0^1 =$

$= \frac{1}{4} a_3 + \frac{1}{3} a_2 + \frac{1}{2} a_1 + a_0 = 0$ ①

$\langle p, x^2\rangle = \int_0^1 p \cdot x^2 dx = a_3 x^6/6\Big|_0^1 + a_2 x^5/5\Big|_0^1 + a_1 x^4/4\Big|_0^1 + a_0 \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = 0$

$1/6\, a_3 + 1/5\, a_2 + 1/4\, a_1 + 1/3\, a_0 = 0$ ②

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

- $A^\perp$ es un subespacio de $\mathbb{V}$, $\forall A \subseteq \mathbb{V}$. Es inmediato, pues:

  $A^\perp \neq \emptyset$

  a $0_\mathbb{V} \in A^\perp$ pues $\langle 0_\mathbb{V}, v\rangle$ $v \in \mathbb{V}$, en particular entonces $\langle 0_\mathbb{V}, v\rangle$ $v \in A$

  b si w_1 y w_2 son elementos de $A^\perp$ $v \in A$
  $\langle w_1 + w_2, v\rangle = \langle w_1, v\rangle + \langle w_2, v\rangle = 0 + 0 = 0$ $\forall v \in A$

  c Tarea para el hogar Si $w_1 \in A^\perp$ $\langle \lambda w_1 ; v\rangle = \lambda \underbrace{\langle w_1, v\rangle}_{0}$ $\Rightarrow \lambda w_1 \in A^\perp$

- $\{0_\mathbb{V}\}^\perp = \mathbb{V}$. Sabemos que $\forall$ $\langle .,.\rangle$ se cumple que $\langle 0_\mathbb{V}, v\rangle = 0$ $\forall v \in \mathbb{V} \Rightarrow v \in \{0_\mathbb{V}\}^\perp$ $\forall v \in \mathbb{V} \Rightarrow \mathbb{V} = \{0_\mathbb{V}\}^\perp$.

- $\mathbb{V}^\perp = \{0_\mathbb{V}\}$, pues si $v \in \mathbb{V}^\perp \Rightarrow$ $\langle v, u\rangle = 0$ $\forall u \in \mathbb{V}$ en particular $\langle v, v\rangle = 0 \Rightarrow v = 0_\mathbb{V} \Rightarrow \mathbb{V}^\perp = \{0_\mathbb{V}\}$.

- Si S y T son **subconjuntos** de $\mathbb{V}$, $S \subseteq T \Rightarrow T^\perp \subseteq S^\perp$. Pues si $v \in T^\perp \Rightarrow \langle v, v_t\rangle = 0$ $\forall$ $v_t \in T$ como $S \subseteq T$ en particular, $\langle v, v_S\rangle = 0$ $\forall$ $v_S \in S$ $\Rightarrow v \in S^\perp \Rightarrow T^\perp \subseteq S^\perp$

- Si $S \subseteq \mathbb{V}$ es un subespacio $\Rightarrow S \cap S^\perp = \{0_\mathbb{V}\}$. Pues si $v \in S \cap S^\perp$, $\langle v, v\rangle = 0 \Rightarrow v = 0_\mathbb{V} \Rightarrow S \cap S^\perp = \{0_\mathbb{V}\}$

dim V finita $S \oplus S^\perp$

Complemento ortogonal de un subespacio de dimensión finita.

Si S es un subespacio de $\mathbb{V}$, $S =$gen$\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$
$S^\perp = \{v \in \mathbb{V} / \langle v_i, v\rangle = 0 \;\; i = 1, \ldots k.\}$

Para demostrar esta igualdad entre subespacios vamos a demostrar la doble inclusión.
Si $w \in S^\perp \Rightarrow \langle w, v_S\rangle = 0 \; \forall v_S \in S \Rightarrow \langle w, v_i\rangle = 0, \;\; i = 1, \ldots k.$
Así demostramos que

$$w \in \{v \in \mathbb{V} / \langle v_i, v\rangle = 0 \text{ para cada } i = 1, \ldots k.\} \Rightarrow$$

$$\boxed{S^\perp \subseteq \{v \in \mathbb{V} / \langle v_i, v\rangle = 0 \; \forall \; i = 1, \ldots k.\}}$$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

La otra inclusión, también es directa:
Sea $w \in \{v \in \mathbb{V} / \langle v_i, v \rangle = 0 \ \forall \ i = 1, \dots k.\}$
Si $v_S \in S \Rightarrow v_S = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$. Entonces:

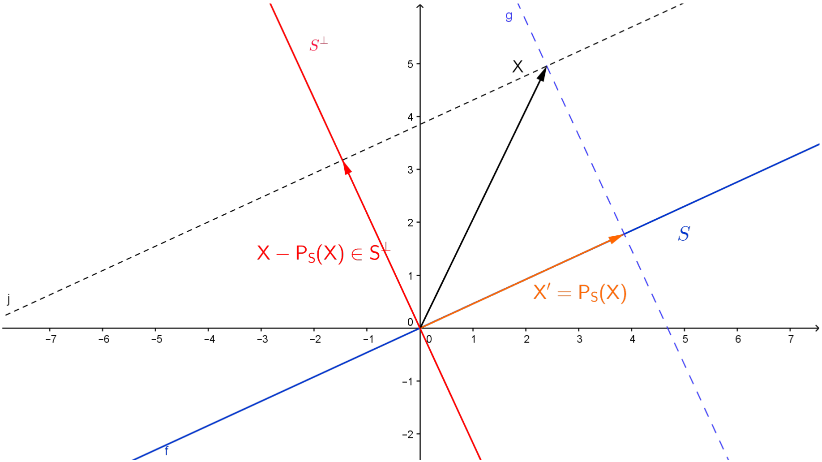
$$\begin{aligned} \langle w, v_s \rangle &= \langle w, \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k \rangle \\ &= \bar{\alpha_1} \underbrace{\langle w, v_1 \rangle}_{=0} + \bar{\alpha_2} \underbrace{\langle w, v_2 \rangle}_{=0} + \cdots + \bar{\alpha_k} \underbrace{\langle w, v_k \rangle}_{=0} \\ &= 0 \Rightarrow w \in S^{\perp}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\{v \in \mathbb{V} / \langle v_i, v \rangle = 0 \ \forall \ i = 1, \dots k.\} \subseteq S^{\perp}}$$

Luego :

$$\boxed{\mathrm{S}^{\perp} = \{v \in \mathbb{V} / \langle v_i, v \rangle = 0 \ \ i = 1, \dots k.\}}$$

Proyección Ortogonal



Proyección Ortogonal

Sea $S \subseteq \mathbb{V}$ un subespacio de $\mathbb{V}$ y $v \in \mathbb{V}$, se dice que v' es la **proyección ortogonal** de v sobre S si:

1. $v' \in S$.
2. $v - v' \; S^{\perp}$.

Notación: Se escribe $P_S(v) = v'$

Dos observaciones importantes

a Sea $v \in \mathbb{V}$, **si existe** $P_S(v) = v' \Rightarrow$ es única.
Sea $v \in \mathbb{V}$ y supongamos que existen $v' = P_S(v)$ y $v_0 = P_S(v)$.

v' cumple $\begin{cases} v' \in S. \\ v - v' \in S^{\perp} \end{cases}$

v_0 cumple $\begin{cases} v_0 \in S. \\ v - v_0 \in S^{\perp} \end{cases}$

Entonces:

$$\begin{cases} v_0 - v' \in S, \text{pues } S \text{ es subespacio.} \\ (v - v') - (v - v_0) = v_0 - v' \in S^{\perp}, \text{ pues } S^{\perp} \text{ es subespacio.} \end{cases}$$

Entonces $v_0 - v' \in S \cap S^{\perp} = \{0_{\mathbb{V}}\} \Rightarrow v_0 - v' = 0_{\mathbb{V}} \Rightarrow v_0 = v'$

$\boxed{\text{Si existe, } P_S(v) \text{ es única}}$

FACULTAD DE INGENIERIA Universidad de Buenos Aires

b Para todo $v \in \mathbb{V}$, $P_S(v)$ es el punto de S más cercano a v:
$\forall v \in \mathbb{V}$ se cumple $\mathrm{d}(v, P_S(v)) \leq \mathrm{d}(v, v_s)$ con $v_S \in S$.

$\forall v \in \mathbb{V}$ se cumple $\|v - P_S(v)\|^2 \leq \|v - v_S\|^2$.

$$
\begin{aligned}
\|v - v_S\|^2 &= \|v - v_S + P_S(v) - P_S(v)\|^2 \\
&= \|\underbrace{(v - P_S(v))}_{\in S^\perp} + \underbrace{(P_S(v) - v_S)}_{\in S}\|^2 \\
&= \|v - P_S(v\|^2 + \|P_S(v) - v_S\|^2 \text{ (Pitágoras)}
\end{aligned}
$$

Demostramos que $\|v - P_S(v)\|^2 \leq \|v - v_S\|^2$ y la igualdad sólo vale si $v_S = P_S(v)$.

$$\boxed{\mathrm{d}(v, P_S(v)) \leq \mathrm{d}(v, v_S) \; \forall \; v_S \in S.}$$

Si existe, $P_S(v)\ \forall\ v \in \mathbb{V}$:

- $v - P_S(v) = P_{S^\perp}(v),\ \forall v \in \mathbb{V}$.
  Basta con probar que cumple las condiciones de la derfinición de proyección ortogonal:
  1. $(v - P_S(v)) \in S^\perp$, por la definición de $P_S(v)$
  2. $v - ((v - P_S(v)) = P_S(v) \in S$, por lo tanto $v - ((v - P_S(v)) \in (S^\perp)^\perp$ pues es ortogonal a todos los elementos de $S^\perp$

  Entonces $v - P_S(v)$ cumple con la definición de proyección ortogonal sobre $S^\perp$. Luego $P_{S^\perp}(v) = v - P_S(v)$
- $v = P_S(v) + P_{S^\perp}(v)\ \forall v \in \mathbb{V}$.
- $\mathbb{V} = S \oplus S^\perp$. Además, si $\mathbb{V}$ es de dimensión finita $(S^\perp)^\perp = S$
- Si $v \in \mathbb{V}$ y $v = v_S + v_{S^\perp}$ con $v_S \in S$ y $v_{S^\perp} \in S^\perp$.
  $v_S = P_S(v)$ y $v_{S^\perp} = P_{S^\perp}(v)$ (Tarea: ver que v_S y $v_{S^\perp}$ cumplen con la definición de proy. ortogonal sobre S y $S^\perp$ respectivamente.)

Más propiedades

a $P_S(v) = v \iff v \in S$.
Si $P_S(v) = v \Rightarrow v \in S$. Si $v \in S$, cumple la definición de proyección ortogonal:$v \in S$ y $v - v = 0_{\mathbb{V}} \in S^{\perp} \Rightarrow P_S(v) = v$

b $P_S(v) = 0_{\mathbb{V}} \iff v \in S^{\perp}$. (Tarea)

c $P_S(\lambda v + w) = \lambda P_S(v) + P_S(w),\ \forall\, v, w \in \mathbb{V} y \forall\, \lambda \in K$.
1) $\lambda P_S(v) + P_S(w) \in S.\checkmark$
2)$\lambda v + w - (\lambda P_S(v) + P_S(w)) =$
$$= \lambda(v - P_S(v)) + (w - P_S(w)) \in S^{\perp}.\checkmark$$
Por lo tanto, $P_S(\lambda v + w) = \lambda P_S(v) + P_S(w)$

d Lo anterior demuestra que, $P_S : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ es t.l. y además por a. y b. $\boxed{\mathrm{Im}(P_S) = S,\ \mathrm{Nu}(P_S) = S^{\perp}.}$

e $P_S(P_S(v)) = P_S(v)\ \forall\, v \in \mathbb{V}$

Fórmula de la proyección ortogonal.

Sea S un subespacio en $\mathbb{V}$, $v \in \mathbb{V}$, y $B_S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ una base ortogonal de S:

$$P_S(v) = \frac{\langle v, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{\langle v, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 + \cdots + \frac{\langle v, v_k \rangle}{\|v_k\|^2} v_k$$

$$P_S(v) \in S \Rightarrow P_S(v) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k, \lambda_i \in \mathbb{K},\ i = 1, \ldots, k.(1)$$

$$v - P_S(v) \in S^\perp \iff v - P_S(v) \perp v_i \ \forall\ i = 1, \ldots, k.(2)$$

Reemplazando (1) en (2), obtenemos que:

$$\langle v - (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k), v_i \rangle = 0 \; \forall \; i = 1, \ldots, k.$$

$$\langle v, v_i \rangle - \langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k, v_i \rangle = 0 \; \forall \; i = 1, \ldots, k.$$

$$\langle v, v_i \rangle = \langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k, v_i \rangle \;\; \forall \; i = 1, \ldots, k.$$

Como $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ es un conjunto ortogonal:
$\langle v, v_i \rangle = \lambda_i \langle v_i, v_i \rangle \;\; \forall \; i = 1, \ldots, k.$
Además $\langle v_i, v_i \rangle = \|v_i\|^2 \neq 0$ pues $v_i \neq 0_{\mathbb{V}} \; \forall \; i = 1, \ldots, k$ porque forman parte de una base .

$$\lambda_i = \frac{\langle v, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} \text{ y reemplazando en (1):}$$

$$P_S(v) = \frac{\langle v, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{\langle v, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 + \cdots + \frac{\langle v, v_k \rangle}{\|v_k\|^2} v_k \checkmark$$

Antes de hacer algunos ejemplos, dos cosas:

1. Ya tenemos una fórmula para encontrar la proyección ortogonal si tenemos una base ortogonal del subespacio. Queda la pregunta ¿ siempre podré encontar una base ortogonal ? Con el procedimiento de Gram Scmidt, que vas a conocer en el próximo episodio vas a poder construir una base ortogonal para todo subespacio de dimensión finita. Entonces, cuando el subespacio sobre el que proyectamos es de dimensión finita, siempre vas a poder calcular la proyección ortogonal.
2. Para un subespacio de dimensión 2 ya conocemos una manera de construir una base ortogonal, a través de la fórmula de descomposición ortogonal que probamos al inicio de este episodio.

Ejemplos.

- Sea $S \in \mathbb{R}^3$ con el P.I. canónico,
  $S = \{(x_1\ x_2\ x_3)^T \in \mathbb{R}^3 / x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\}$, se pide:
  a Hallar $S^\perp$.
  b Hallar una base ortogonal de S.
  c Encuentre $P_S((1\ 2\ 3)^T)$
  d Encuentre $P_S((x_1 x_2 x_3)^T)\ \forall\ (x_1 x_2 x_3)^T \in \mathbb{R}^3$.

  Resolución:

  a Para encontrar $S^\perp$, miremos la condición de S:
  $x_1 - x_2 + x_3 = 0 \Leftrightarrow (1 - 1\ 2)(x_1\ x_2\ x_3)^T = 0$. Entonces
  $S = (\text{gen}\{(1 - 1\ 2)^T\})^\perp \Rightarrow S^\perp = \text{gen}\{(1 - 1\ 2)^T\}$ Por lo tanto proponemos $B_{S^\perp} = \{(1 - 1\ 2)^T\}$
  b Para hallar una base **ortogonal** de S, busquemos los generadores de S.
  $(x_1\ x_2\ x_3)^T \in S \Leftrightarrow x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 - 2x_3$.
  $(x_1\ x_2\ x_3)^T = (x_2 - 2x_3\ x_2\ x_3)^T = x_2(1\ 1\ 0)^T + x_3(-2\ 0\ 1)^T$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Entonces: $S = \text{gen}\{(1\ 1\ 0)^T, (-2\ 0\ 1)^T\}$
Estos vectores no son ortogonales, pero justamente en el comienzo de nuestra episodio hemos demostrado que si u y v eran dos vectores cualesquiera ($v \neq 0_{\mathbb{V}}$), tomando $c = \frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}$, obteníamos $w = u - cv = u - \frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2} v$, de manera tal que $w \perp v$ y cv, ahora que hemos definido proyección ortogonal, sabemos que es la proyección ortogonal de u sobre el subespacio $\text{gen}\{v\}$.
Entonces, llamando $u = (1\ 1\ 0)^T$ y $v = (-2\ 0\ 1)^T$, obtenemos:

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle (1\ 1\ 0)^T, (-2\ 0\ 1)^T \right\rangle}{\|[(-2\ 0\ 1)^T\|^2} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{(-2)}{5} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$w = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 1 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{una base ortogonal de } S \text{ es } B_s = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

c Nos piden encontrar $P_S((1\ 2\ 3)^T)$.Como $\dim(S^\perp)=1$ y $P_S(v)=v-P_{S^\perp(v)}$, calculamos primero $P_{S^\perp}((1\ 2\ 3)^T)$ con la fórmula de proyección ortogonal:

$$P_{S^\perp}((1\ 2\ 3)^T)=\frac{\langle (1\ 2\ 3)^T,(1\ \ -1\ 2)^T\rangle}{\|(\ 1-1\ \ 2)^T\|^2}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

$$P_{S^\perp}((1\ 2\ 3)^T)=\frac{5}{6}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=$$

$$P_S((1\ 2\ 3)^T)=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}-\frac{5}{6}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{6}\\ \\ \frac{17}{6}\\ \\ \frac{4}{3}\end{pmatrix}.$$

d Para encontrar $P_S\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right)$ podemos repetir la estrategia ya utilizada. Calculamos en primer lugar la proyección sobre $S^{\perp}$:

$$P_{S^{\perp}}((x_1\ x_2\ x_3)^T) = \frac{\langle (x_1\ x_2\ x_3)^T, (1\ -1\ 2)^T \rangle}{\|(\ 1 - 1\ \ 2)^T\|^2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$P_{S^{\perp}}((x_1\ x_2\ x_3)^T) = \frac{(x_1 - x_2 + 2x_3)}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$P_S((x_1\ x_2\ x_3)^T) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \frac{(x_1 - x_2 + 2x_3)}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Obtenemos:

$$P_S((x_1\ x_2\ x_3)^T) = \begin{pmatrix} \frac{5x_1+x_2-2x_3}{6} \\ \frac{x_1+5x_2+2x_3}{6} \\ \frac{-2x_1+2x_2+2x_3}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Donde

$$[P_S]_E^E = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

- Sea $S=$gen$\{1, \text{sen}(x), \cos(x)\} \subseteq C([-\pi\ \pi])$ con el P.I. $\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$.
  - a Verifique que $B_S = \{1, \text{sen}(x), \cos(x)\}$ es una base ortogonal de S.
  - b ¿Cuál es el elemento de S más cercano a $p(x) = x + 3$?

Resolución:

a Antes de hacer cuentas con las integrales recordemos que si f es una función impar $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$ y si f es una función par $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_{0}^{a} f(t)dt$.
Así que $\langle 1, \text{sen}(x)\rangle = \langle \cos(x), \text{sen}(x)\rangle = 0$
Pues estos productos internos corresponden a integrar en un intervalo simétrico del 0 una función impar. Además $\langle 1, \cos(x)\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)dt = 0$ Por lo tanto el conjunto B_S es ortogonal, como no contiene al vector nulo es l.i y como por hipótesis genera S es una base ortogonal de S.

b El elemento más cercano de S al polinomio p es la proyección ortogonal de p sobre S.
Como ya tenemos una base ortogonal, sólo necesitamos aplicar la fórmula y, con paciencia, calcular las integrales involucradas.

$P_S(x+3) = \frac{\langle x+3,1\rangle}{\|1\|^2}1 + \frac{\langle x+3,\text{sen}(x)\rangle}{\|\text{sen}(x)\|^2}\text{sen}(x) + \frac{\langle x+3,\cos(x)\rangle}{\|\cos(x)\|^2}\cos(x)$

Calculamos:

$\|1\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} 1dt = [t]_{-\pi}^{\pi} = 2\pi.$

$\|\cos(x)\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} cos(t)\ cos(t)dt = \frac{1}{2}\,[t]_{-\pi}^{\pi} = \pi.$

$\|\text{sen}(x)\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(t)\ \text{sen}(t)dt = \frac{1}{2}\,[t]_{-\pi}^{\pi} = \pi.$

$\langle x+3,1\rangle = \int_{-\pi}^{\pi}(t+3)dt = \left[t^2+3t\right]_{-\pi}^{\pi} = 6\pi.$

$\langle x+3,\cos x\rangle = \int_{-\pi}^{\pi}(t+3)\cos(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} 3\cos(t)dt = 0$

$\langle x+3,\text{sen}(x)\rangle = \int_{-\pi}^{\pi}(t+3)\text{sen}(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} t\text{sen}(t)dt = 2\pi$

Reemplazando en la fórmula los resultados de los cálculos auxiliares:

$$P_S(x+3) = \frac{6\pi}{2\pi}1 + \frac{2\pi}{\pi}\text{sen}(x) + \frac{0}{2\pi}\cos(x)$$

$$P_S(x+3) = 3 + 2\text{sen}(x)$$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires