

Trabajo Práctico Nro. 8

Transformada de Fourier

Nomenclatura:

$$\mathbb{1}_{[a,b]}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [a, b] \\ 0 & \text{si } t \notin [a, b] \end{cases}, \text{ función característica del intervalo } [a, b].$$

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}, \text{ función de Heaviside.}$$

1. Para $a > 0$:

a) Probar que $\mathbb{1}_{[-a,a]}(t) = \mathbb{1}_{[-1,1]}(\frac{t}{a}) = H(t+a) - H(t-a)$.

b) Calcular $\mathcal{F}(\mathbb{1}_{[-1,1]}(t))$ y $\mathcal{F}(\mathbb{1}_{[-a,a]}(t))$.

2. Verificar que cada una de las siguientes funciones es absolutamente integrable en \mathbb{R} y obtener su transformada de Fourier. ($a > 0$)

(a) $f(t) = \begin{cases} |t| & \text{si } |t| \leq a \\ 0 & \text{si } |t| > a \end{cases}$

(b) $f(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{a} & \text{si } |t| \leq a \\ 0 & \text{si } |t| > a \end{cases}$

(c) $f(t) = e^{-a|t|}$

(d) $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ e^{-at} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$

(e) $f(t) = te^{-a|t|}$

(f) $f(t) = |t|e^{-a|t|}$

(g) $f(t) = e^{-at^2}$

(h) $f(t) = \frac{1}{a^2 + t^2}$

(i) $f(t) = \frac{t}{a^2 + t^2}$

(j) $f(t) = \frac{5e^{3it}}{t^2 - 4t + 13}$

(k) $\cos(2t)[H(t+1) - H(t-1)]$

(l) $f(t) = H(t-3)(t-3)e^{-4t}$

3. A partir de $\mathcal{F}(e^{-t^2})$ y, siendo a, b, c números reales positivos, hallar:

(a) $\mathcal{F}(e^{-a(t-b)^2})$, (b) $\mathcal{F}(te^{-a(t-b)^2})$, (c) $\mathcal{F}(\cos(ct)e^{-t^2})$, (d) $\mathcal{F}(\sin(ct)e^{-t^2})$.

4. Analizar la existencia de la transformada de Fourier de $f(t) = \frac{1}{t}$ y en caso afirmativo, calcularla.

5. Obtener el valor de cada una de las siguientes integrales impropias, a partir de la transformada de Fourier de una función adecuada:

(a) $\int_0^{+\infty} \frac{\sen x}{x} dx$

(b) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

(c) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$

6. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Probar que:

- $\overline{\mathcal{F}(f)}(w) = \mathcal{F}(f)(-w)$.
- si $f(x)$ es una función par, entonces $\mathcal{F}(f)(w)$ es real para todo w real y es una función par.
- si $f(x)$ es una función impar, $i\mathcal{F}(f)(w)$ es real para todo w real y es una función impar.

7. a) Probar que si $f(x)$ es derivable y absolutamente integrable en \mathbb{R} y además $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ entonces

$$\mathcal{F}[f'](w) = iw\mathcal{F}[f](w)$$

Observar que bajo las condiciones anteriores, no se requiere que $f'(x)$ sea absolutamente integrable. Ejemplo: $f(x) = e^{-x^2} \sin(e^x)$.

b) Sea f continua a trozos y absolutamente integrable en \mathbb{R} tal que $\hat{f}(0) = 0$. Mostrar que:

$$\mathcal{F} \left[\int_{-\infty}^t f(s) ds \right] (w) = \frac{1}{iw} \hat{f}(w)$$

8. Hallar la transformada inversa de Fourier de cada una de las siguientes funciones.

$$(a) F(w) = \frac{6e^{4iw} \operatorname{sen}(2w)}{9 + w^2} \quad (b) F(w) = e^{-3|w+4|} \cos(2w + 8) \quad (c) F(w) = e^{-\frac{w^2}{9}} \operatorname{sen}(8w)$$

9. Calcular la transformada de Fourier de:

$$(a) f(t) = \frac{t}{(a^2 + t^2)^2} \quad (b) f(t) = \frac{\operatorname{sen}(at)}{at} \quad t \neq 0 \quad (a \in \mathbb{R})$$

i) aplicando residuos, ii) mediante fórmula de inversión.

10. Para las funciones f de (a), (f) y (g) del ejercicio 2, analizar cómo se relacionan $f(t)$, $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)e^{iwt} dw$ y $\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M \hat{f}(w)e^{iwt} dw$ para cada $t \in \mathbb{R}$.

11. Calcular $\left(\mathbb{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} * \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} \right) (t)$ y su transformada de Fourier.

12. Probar la existencia y calcular la transformada inversa de Fourier de

$$(a) F(w) = \frac{1}{(1+w^2)^2} \quad (b) F(w) = \frac{1}{(1+iw)^2}$$

$$(c) F(w) = \frac{1}{(1+iw)(2+iw)} \quad (d) F(w) = \frac{\operatorname{sen}(3w)}{w(2+iw)}$$

(Sugerencia: utilizar el teorema de convolución).

13. Mostrar que bajo hipótesis adecuadas (¿cuáles?):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{g(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(w)\overline{\hat{g}(w)} dw$$

y calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\operatorname{sen} \alpha w)(\operatorname{sen} \beta w)}{w^2} dw$.

14. Calcular, por medio de la identidad de Parseval, el valor de:

$$(a) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t^2} dt \quad (b) \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1 - e^{iwt}}{iw} \right|^2 dt$$

15. Hallar la solución del problema de la conducción del calor en una varilla infinita:

$$\begin{cases} u_{xx} = u_t & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = e^{-x^2} & -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

16. Hallar la solución del problema de distribución de temperatura en el semiplano:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & -\infty < x < +\infty, \quad 0 < y < +\infty \\ u(x, 0) = \frac{1}{x^2 + 4} & -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

17. Resolver el problema del potencial electrostático en la banda infinita:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & -\infty < x < +\infty, \quad 0 < y < 1 \\ u(x, 0) = e^{-2|x|} & -\infty < x < +\infty \\ u(x, 1) = 0 & -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

18. Resolver el problema de la onda en la cuerda infinita:

$$\begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx} & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = xe^{-|x|} & -\infty < x < +\infty \\ u_t(x, 0) = \begin{cases} e^x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \end{cases}$$

¿Se puede resolver mediante el método de D'Alembert? (confrontar con el ejercicio 4 del Trabajo Práctico Nro. 6).