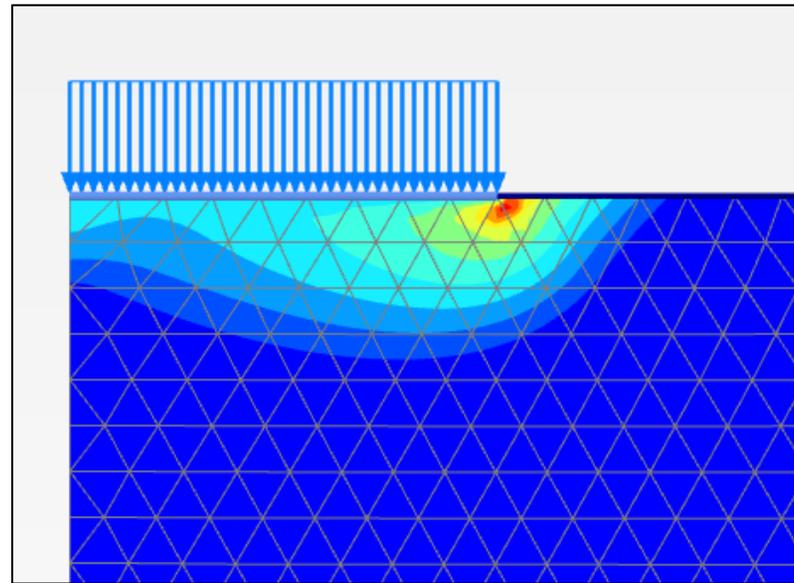
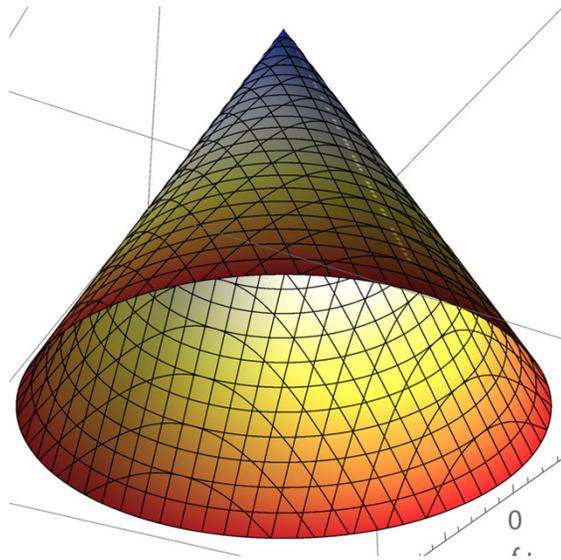


# Elementos de plasticidad aplicada a geotecnia



Mecánica de Suelos y Geología  
Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires

# Índice



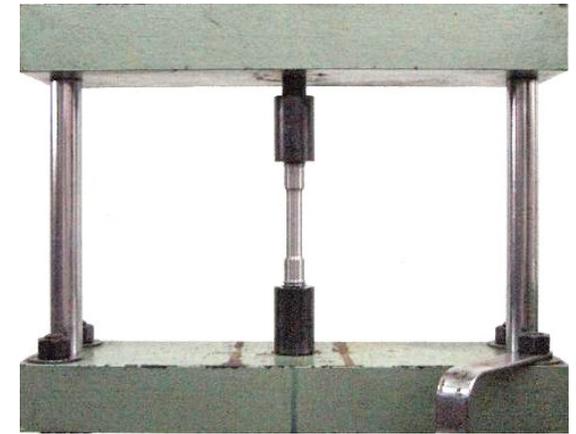
- Ecuaciones constitutivas
- Plasticidad: el bloque friccionante
- Introducción a la plasticidad perfecta
- El modelo de Mohr-Coulomb
- Plasticidad con endurecimiento
- Modelo de compresión edométrica

# Una barra de acero a tracción



## Ensayo

- Medimos longitud y diámetro de la barra
- La ponemos en la máquina de ensayo
- **Aplicamos** una **carga** monotónica de tracción
- **Medimos** el **desplazamiento** de los extremos de la barra



<https://tecnolowikia.wikispaces.com/file/view/HPIM2425.JPG/193485340/576x432/HPIM2425.JPG>

## Resultado

$$E = \frac{\Delta\sigma_a}{\Delta\epsilon_a} \quad \beta_s = \frac{P_{max}}{A_0}$$

**¿Hemos medido las propiedades del acero?**



# Comportamiento observado vs **comportamiento idealizado**

## Hipótesis previas al ensayo

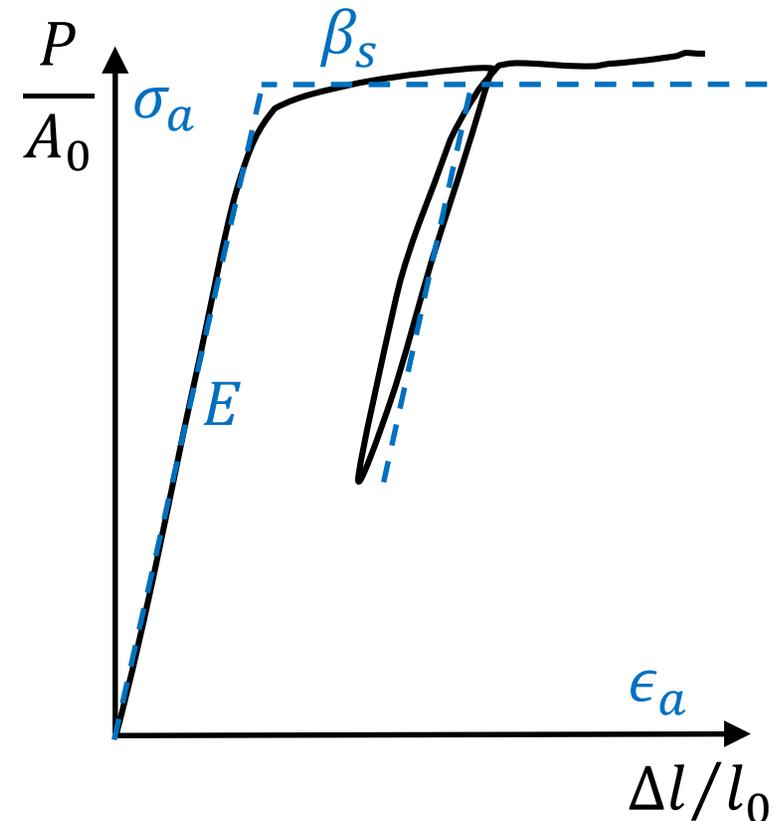
- Definición de deformación

$$\epsilon_a = \Delta l / l_0$$

- Definición de tensión

$$\sigma_a = P / A_0$$

- Muy convenientes: permiten usar el "principio de superposición"



Sólo medimos  $P$  y  $\Delta l$  porque **una teoría previa** nos indica que otras variables no participan en los fenómenos que queremos ver: **Sólo vemos lo que miramos**

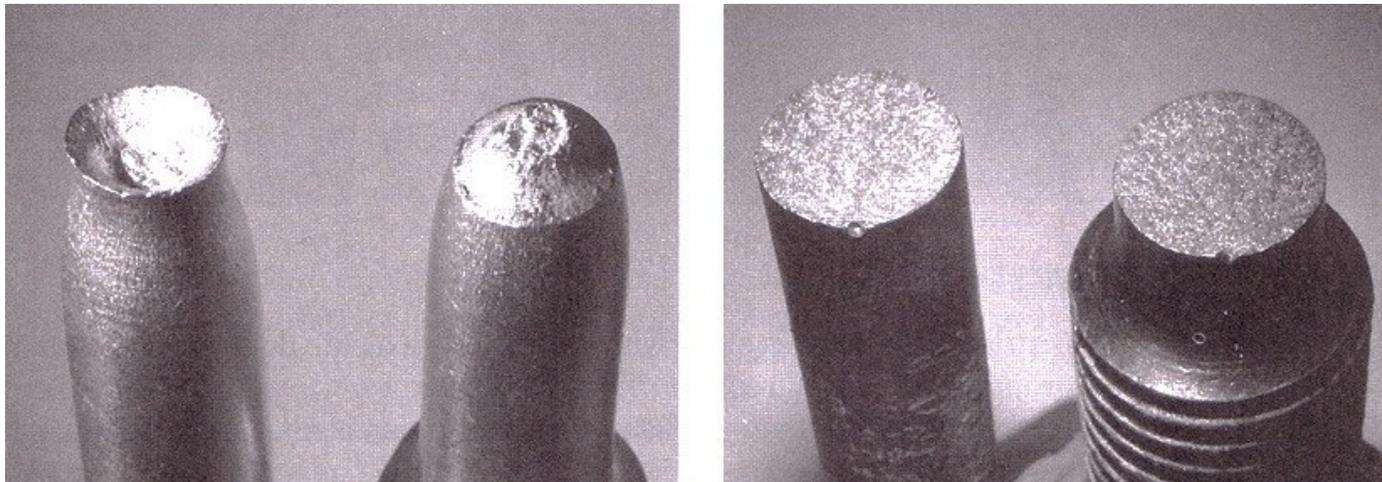
# Una barra de acero a tracción



Como consecuencia de nuestras hipótesis

- **Hemos linealizado el problema**
- No hemos tenido en cuenta el efecto de la localización de deformaciones

**¿Hemos medido las propiedades del acero o las de “esa” barra de acero?**



(Warnes 2006)



# Ecuaciones constitutivas

Una ecuación constitutiva es un conjunto de fórmulas que determina el estado del material antes y después de cualquier cambio en su configuración

- Entrada
  - Valor actual de la tensión y de las variables de estado
  - Incremento de deformación
- Salida
  - Tensión actualizada
  - Variables de estado actualizadas

$$\sigma_{n+1} = f[\sigma_n, \rho_n, \Delta\epsilon]$$

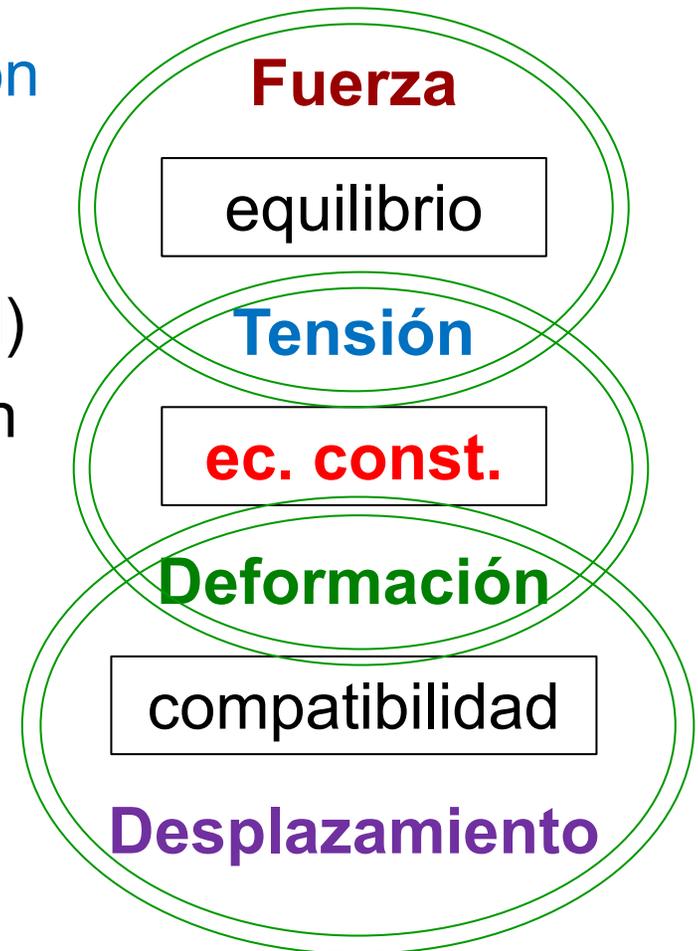
$$\rho_{n+1} = f[\sigma_n, \rho_n, \Delta\epsilon]$$

# Ecuaciones constitutivas

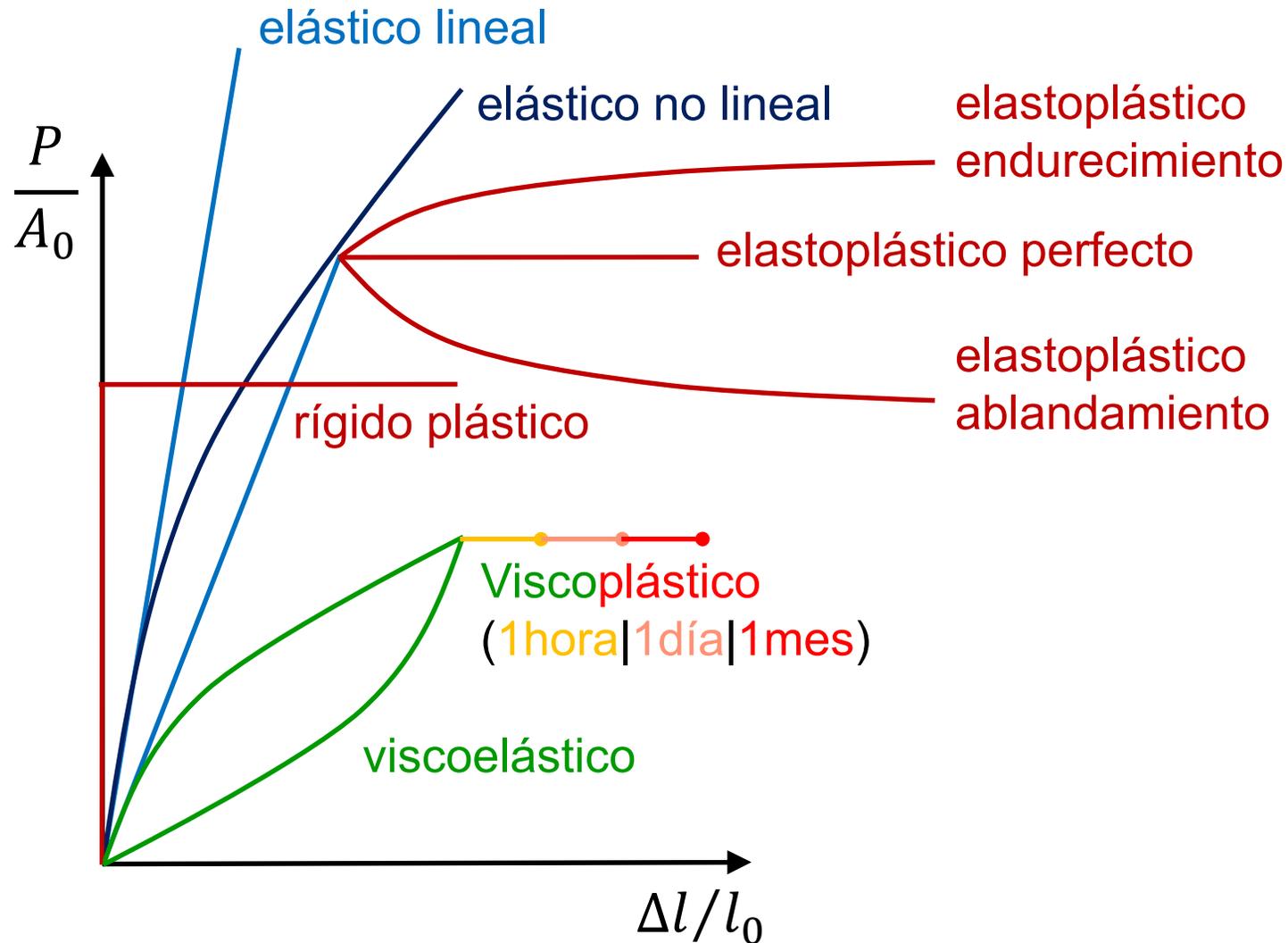


- El equilibrio relaciona **fuerza** con **tensión** (vale para cualquier material)
- La cinemática relaciona **deformación** con **desplazamiento** (cualquier material)
- Las **ecuaciones constitutivas** relacionan **tensión** con **deformación** (dependen del material)
  - Sólido elástico...
  - Fluido Newtoniano...
  - Gas perfecto...

Las **ecuaciones constitutivas** cierran la cadena de cálculo



# Ecuaciones constitutivas comunes en mecánica del sólido



# Índice

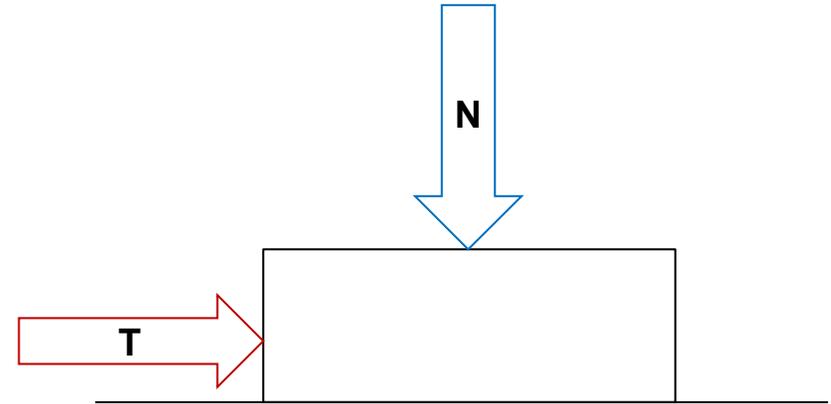


- Ecuaciones constitutivas
- **Plasticidad: el bloque friccionante**
- Introducción a la plasticidad perfecta
- El modelo de Mohr-Coulomb
- Plasticidad con endurecimiento
- Modelo de compresión edométrica

# Un bloque friccionante: la función de fluencia



Se tiene un bloque ubicado en una superficie plana



Se procura desarrollar un conjunto de fórmulas que permitan determinar

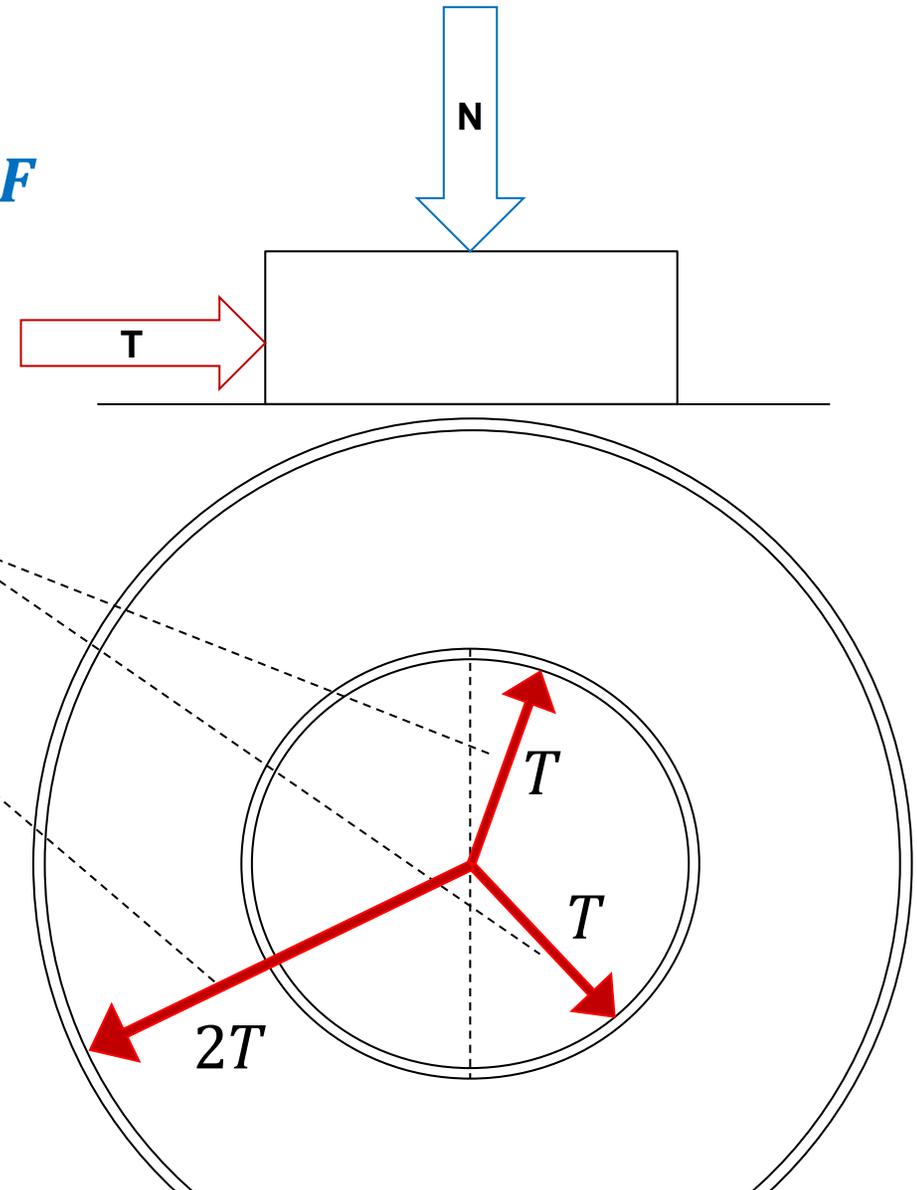
- Cuando se mueve el bloque (**función de fluencia**)
- Para donde se mueve el bloque (**regla de flujo**)
- Cuanta energía hay que gastar (**disipación plástica**)



# Un bloque friccionante: la función de fluencia $F$

Para medir la **función de fluencia  $F$**

- Aumente  $T$  hasta que el bloque **se mueva**
- Verifique que  $T$  tiene el mismo valor en todas direcciones
- Duplique  $N$  y verifique que  $T$  se duplica
- Escriba la forma matemática



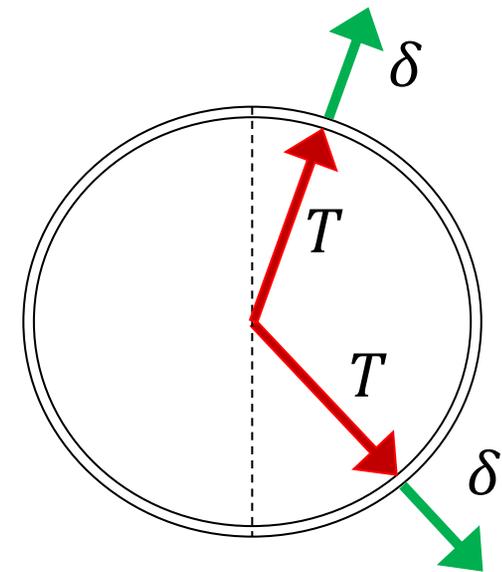
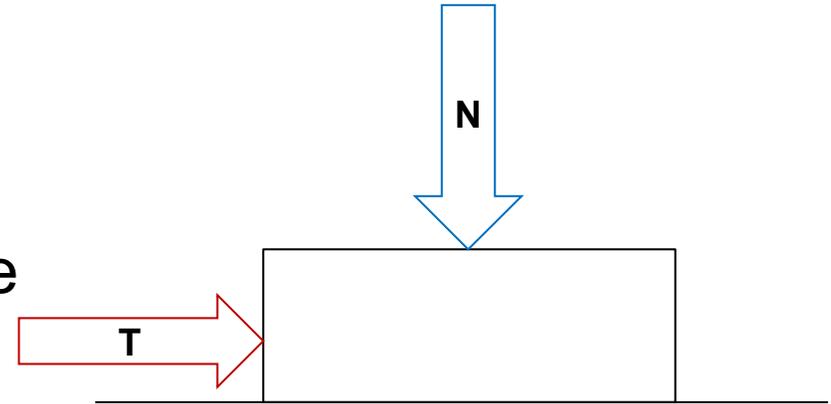
$$F = \sqrt{T_x^2 + T_y^2} - \mu N = 0$$



# Un bloque friccionante : el potencial plástico $G$

Para medir el **potencial plástico**

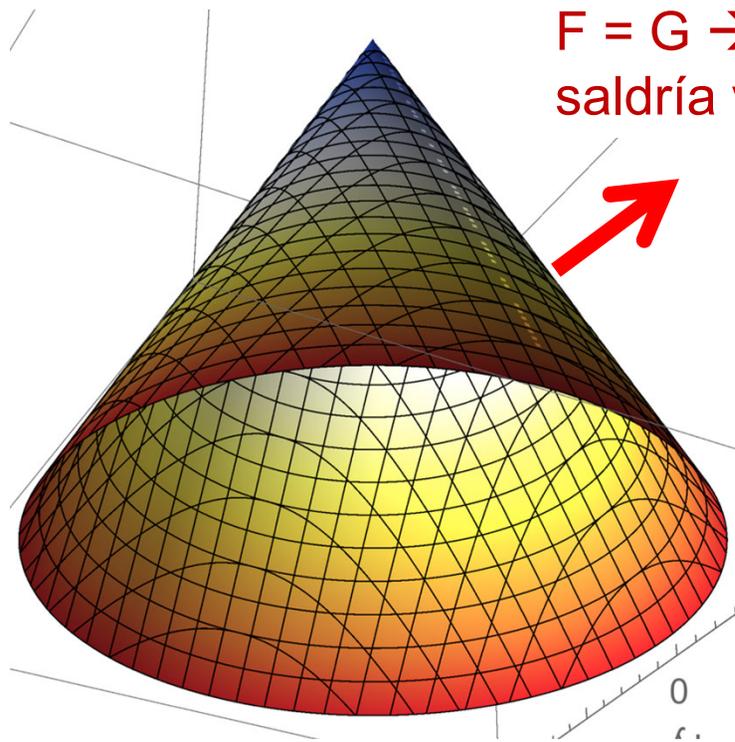
- Verifique que el bloque se mueve **para donde apunta  $T$**
- Duplique  $N$  y repita
- Verifique que el valor de  $N$  no afecta la dirección de movimiento
- Verifique que el bloque no se despega de la mesa



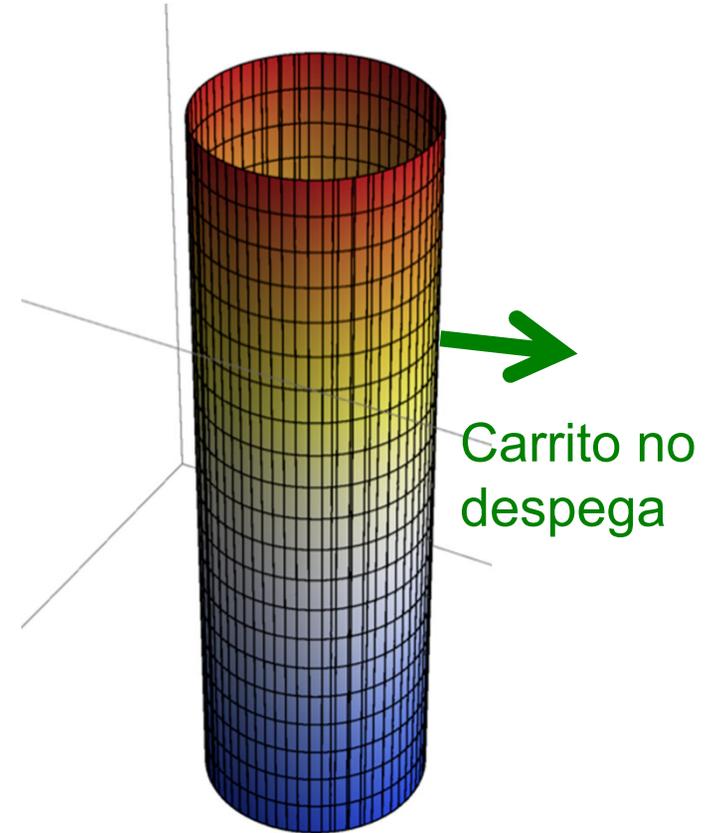
$$G = \sqrt{T_x^2 + T_y^2} - \mu = 0$$



# No asociatividad: función de fluencia distinta a potencial plástico



$F = G \rightarrow$  Carrito saldría volando



Carrito no despega

$$F = \sqrt{T_x^2 + T_y^2} - \mu N = 0$$

$$G = \sqrt{T_x^2 + T_y^2} - \mu = 0$$

# Índice



- Ecuaciones constitutivas
- Plasticidad: el bloque friccionante
- **Introducción a la plasticidad perfecta**
- El modelo de Mohr-Coulomb
- Plasticidad con endurecimiento
- Modelo de compresión edométrica

# La idea de la plasticidad perfecta

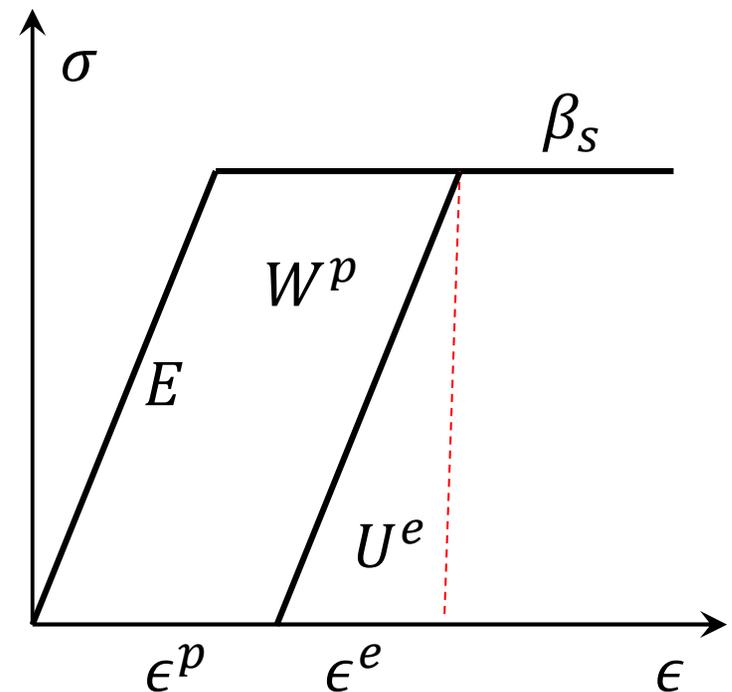


El material elastoplástico perfecto tiene un **comportamiento elástico hasta** la tensión en la que se produce la **fluencia** (indicada por el histórico “criterio de falla”)

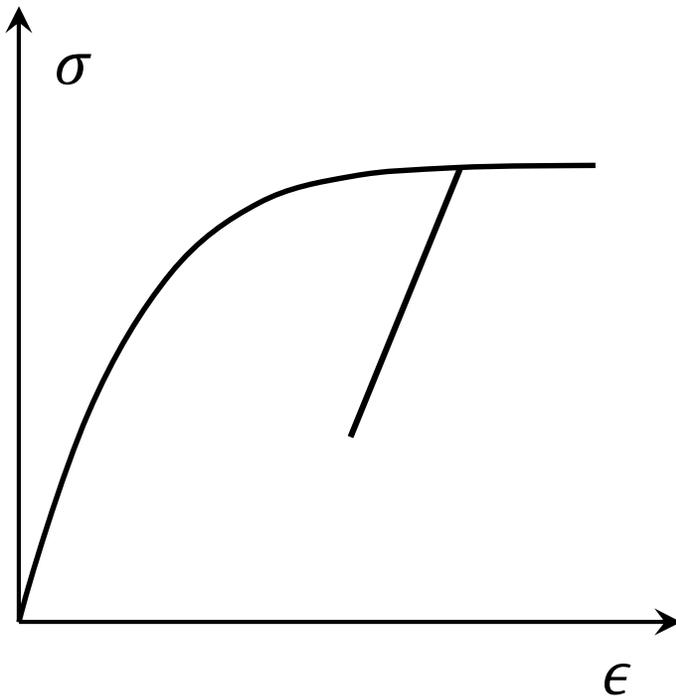
Si se aumenta la deformación el material **fluye a tensión constante**

## Ingredientes

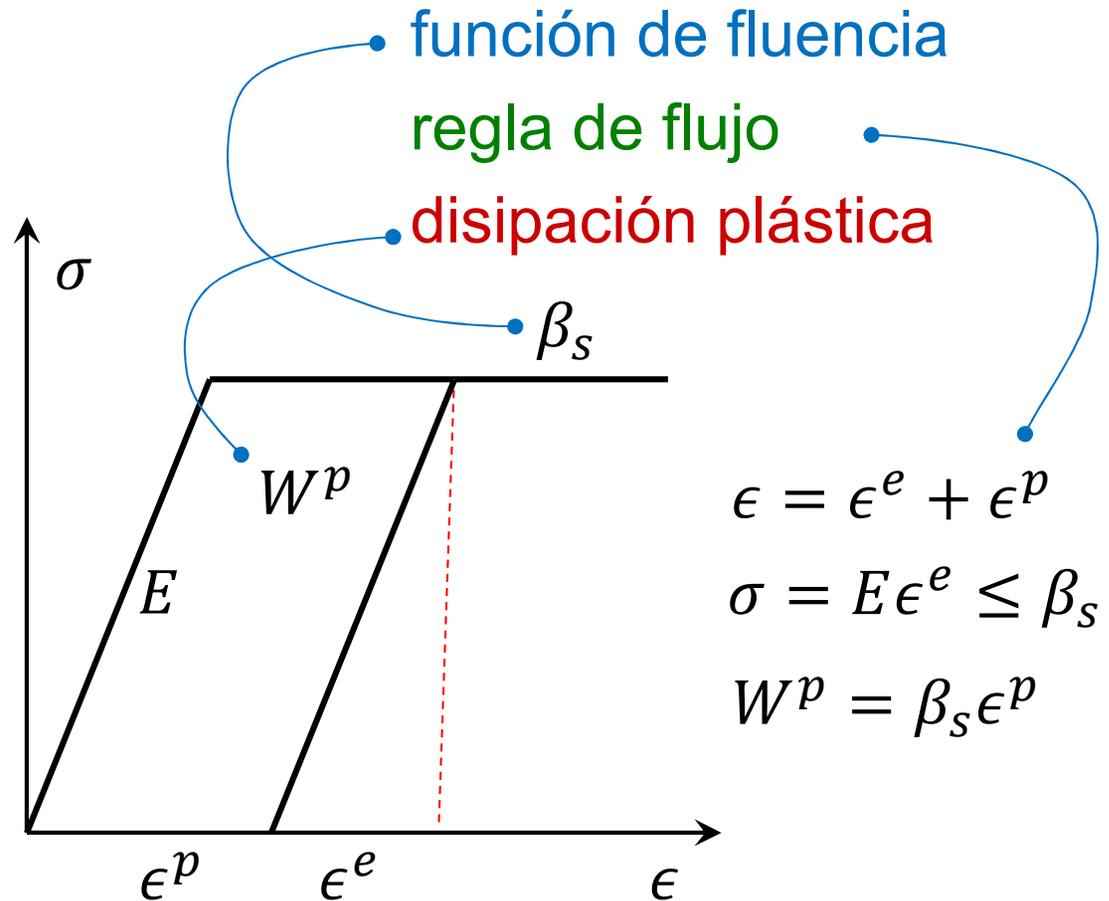
- Rango elástico  $\sigma < \beta_s$
- Fluencia a tensión constante  $\beta_s$
- Descarga elástica
- Almacena energía elástica  $U^e$
- Disipa trabajo plástico  $W^p$



# La idea de la plasticidad perfecta



Ensayo de laboratorio



Interpretación

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p$$
$$\sigma = E\epsilon^e \leq \beta_s$$
$$W^p = \beta_s \epsilon^p$$

Teoría



# Plasticidad perfecta

## El rol de la función de fluencia

- **La tensión no puede ser mayor que la tensión de fluencia**
- Si la tensión es menor a la tensión de fluencia, el comportamiento es elástico
- Si la tensión es igual a la tensión de fluencia, puede haber deformación plástica
- La deformación plástica depende del trabajo aportado

$$f[\sigma] \leq 0$$

$$f[\sigma] < 0 \rightarrow \dot{\epsilon}^p = 0$$

$$f[\sigma] = 0 \rightarrow \dot{\epsilon}^p \geq 0$$

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{\dot{W}^p}{\beta_s}$$

# Índice



- Ecuaciones constitutivas
- Plasticidad: el bloque friccionante
- Introducción a la plasticidad perfecta
- **El modelo de Mohr-Coulomb**
- Plasticidad con endurecimiento
- Modelo de compresión edométrica

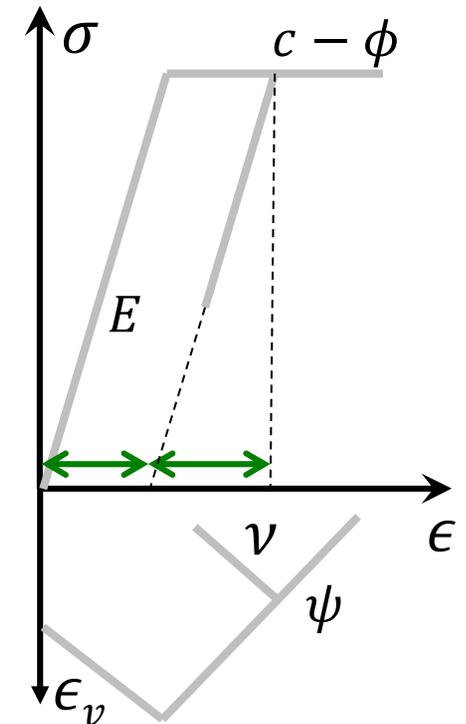
# El modelo de Mohr-Coulomb en el ensayo triaxial drenado



- Cinemática de la elastoplasticidad  
**¿Cuáles son los mecanismos que producen deformación?**

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p$$

*Es la hipótesis básica de la compatibilidad  
 Esta simple fórmula implica que no hay deformaciones dependientes del tiempo*



# El modelo de Mohr-Coulomb en el ensayo triaxial drenado

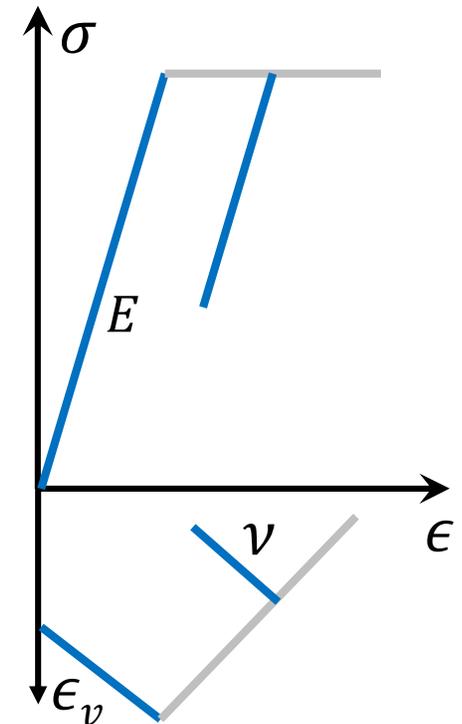


- Cinemática de la elastoplasticidad
- Relación tensión-deformación  
**¿cuál es la rigidez?**

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p$$

$$\dot{\sigma} = \mathbf{D} : \dot{\epsilon}^e$$

*Permite calcular las tensiones conociendo sólo la parte elástica de las deformaciones*





# El modelo de Mohr-Coulomb en el ensayo triaxial drenado

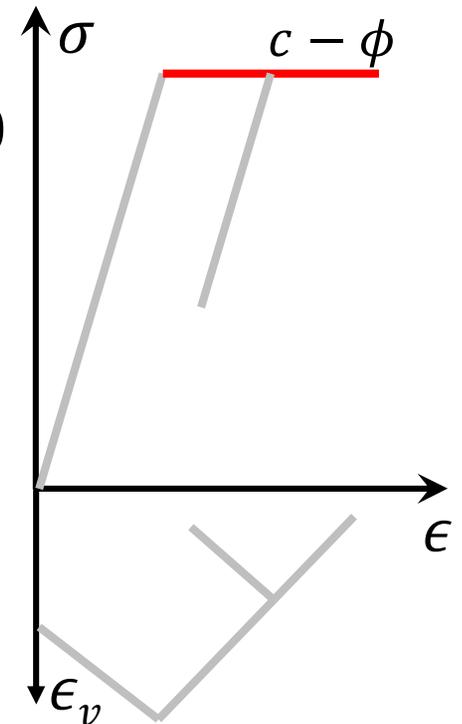
- Cinemática de la elastoplasticidad
- Relación tensión-deformación
- Función de fluencia: criterio Mohr-Coulomb  
**¿cuando falla?**

$$f_s = \sigma_3 - \sigma_1 + (\sigma_1 + \sigma_3) \sin[\phi] - 2c \cos[\phi] = 0$$

*Permite establecer cuando se produce la plasticidad (la “falla”) del material*

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p$$

$$\dot{\sigma} = \mathbf{D} : \dot{\epsilon}^e$$



# El modelo de Mohr-Coulomb en el ensayo triaxial drenado



- Cinemática de la elastoplasticidad
- Relación tensión-deformación
- Función de fluencia
- Ley de flujo (**ángulo de dilatancia**)  
**¿hacia dónde se deforma?**

$$g_s = \sigma_3 - \sigma_1 + (\sigma_1 + \sigma_3) \sin[\psi] - 2c \cos[\psi] = 0$$

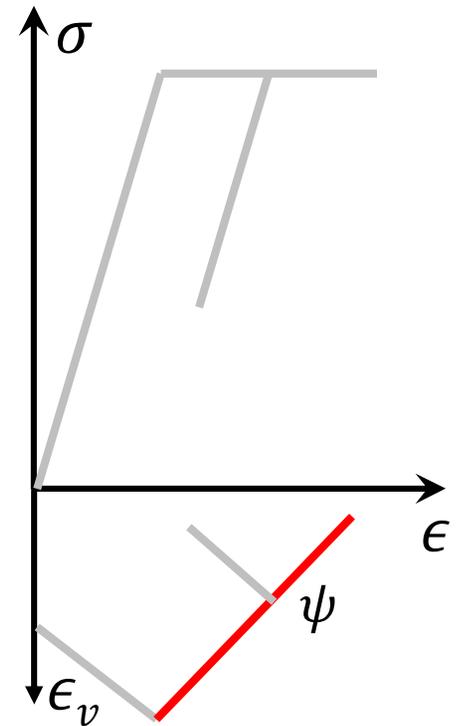
$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial g_s}{\partial \sigma}$$

*Permite establecer que dirección tendrán las deformaciones permanentes del material*

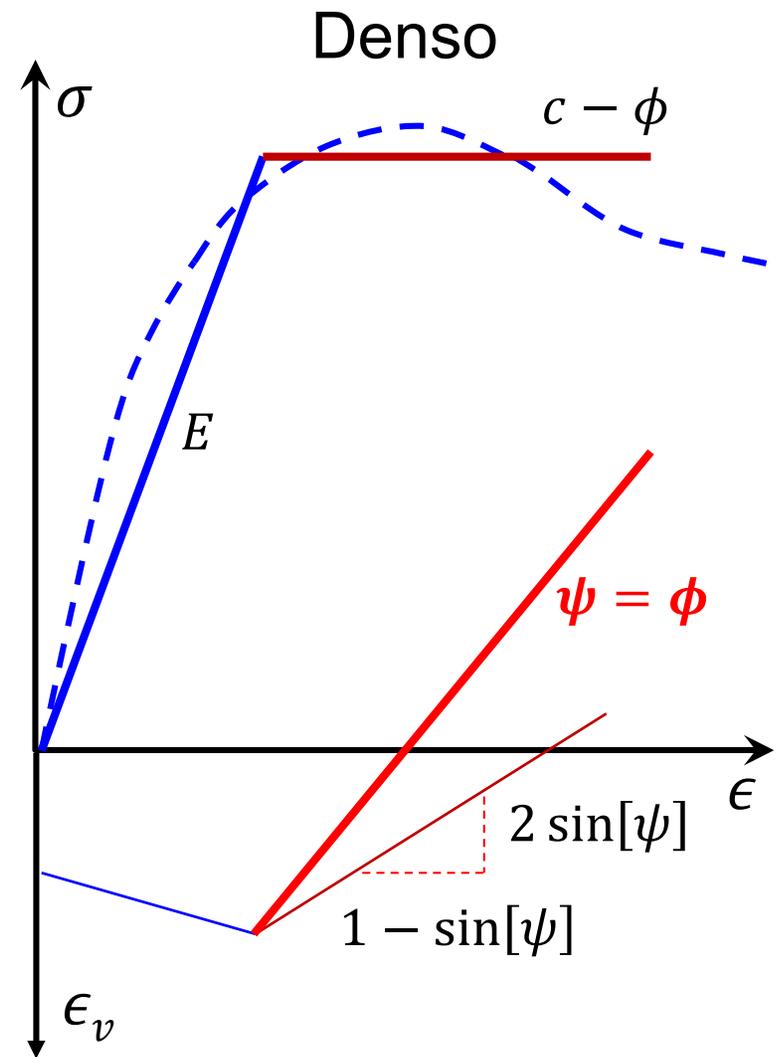
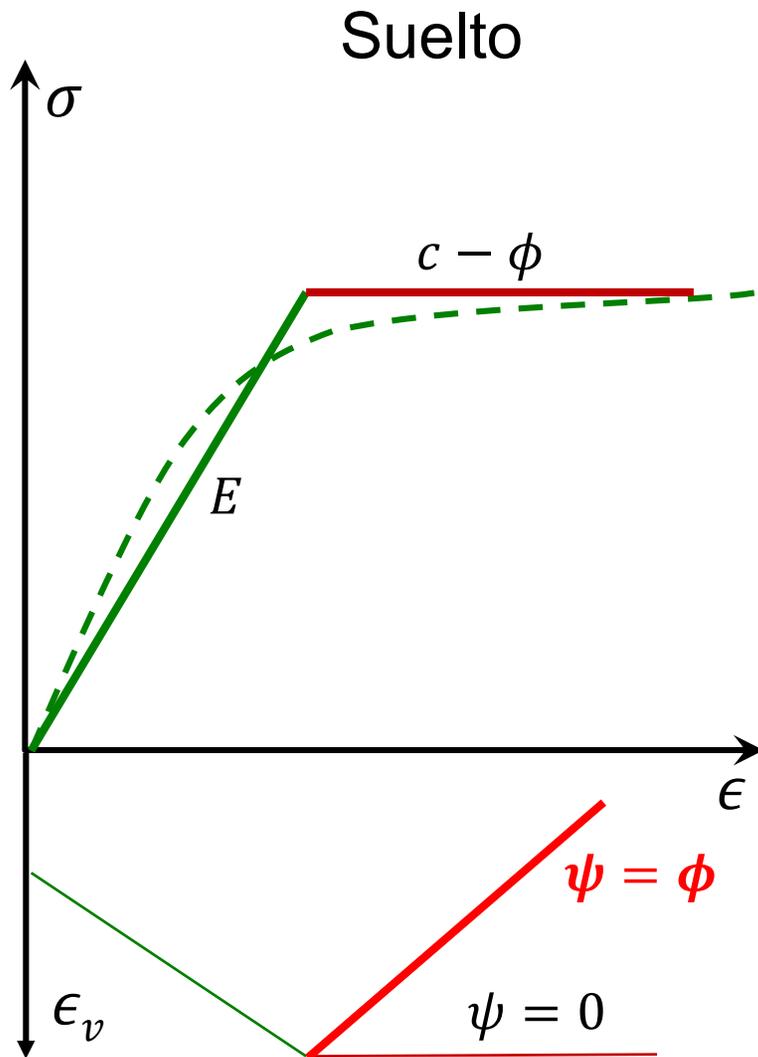
$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p$$

$$\dot{\sigma} = \mathbf{D} : \dot{\epsilon}^e$$

$$f_s = 0$$



# Plasticidad asociativa y no asociativa explicada en el ensayo triaxial drenado



# Índice



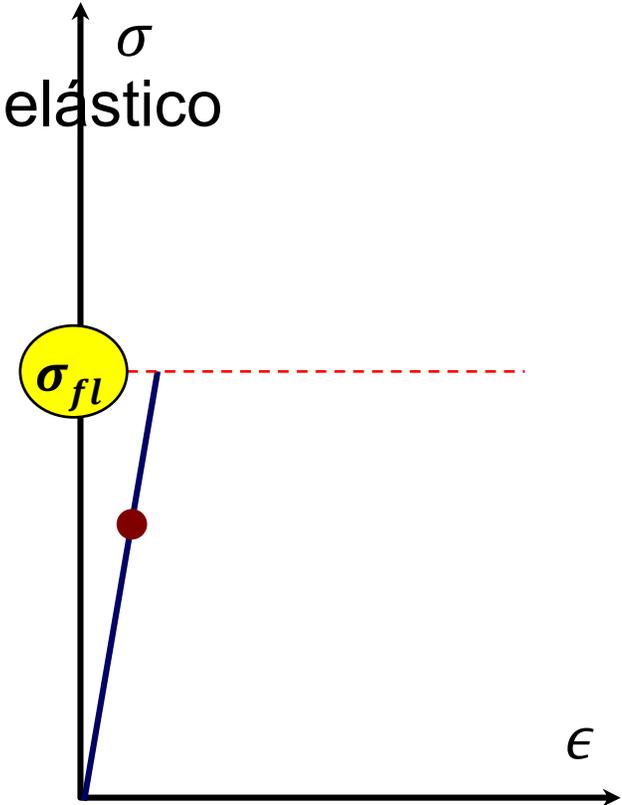
- Ecuaciones constitutivas
- Plasticidad: el bloque friccionante
- Introducción a la plasticidad perfecta
- El modelo de Mohr-Coulomb
- **Plasticidad con endurecimiento**
- Modelo de compresión edométrica



# El concepto de la plasticidad con endurecimiento

Función de fluencia  $f[\sigma] = \|\sigma\| - (\sigma_{fl} + \alpha \cdot \|\epsilon^p\|) = 0$

Mientras  $f < 0$  el material está en estado elástico

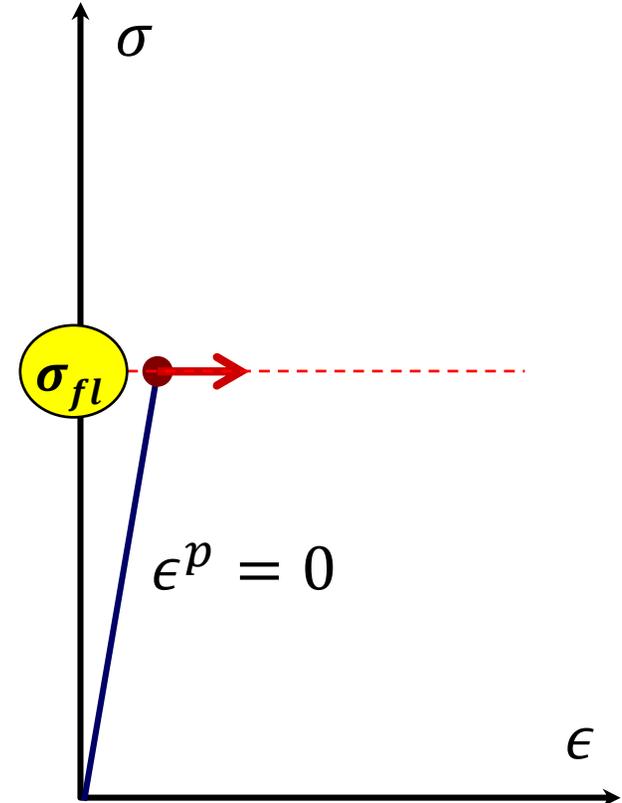




# El concepto de la plasticidad con endurecimiento

Función de fluencia  $f[\sigma] = \|\sigma\| - (\sigma_{fl} + \alpha \cdot \|\epsilon^p\|) = 0$

Cuando  $f = 0$  comienzan las deformaciones plásticas



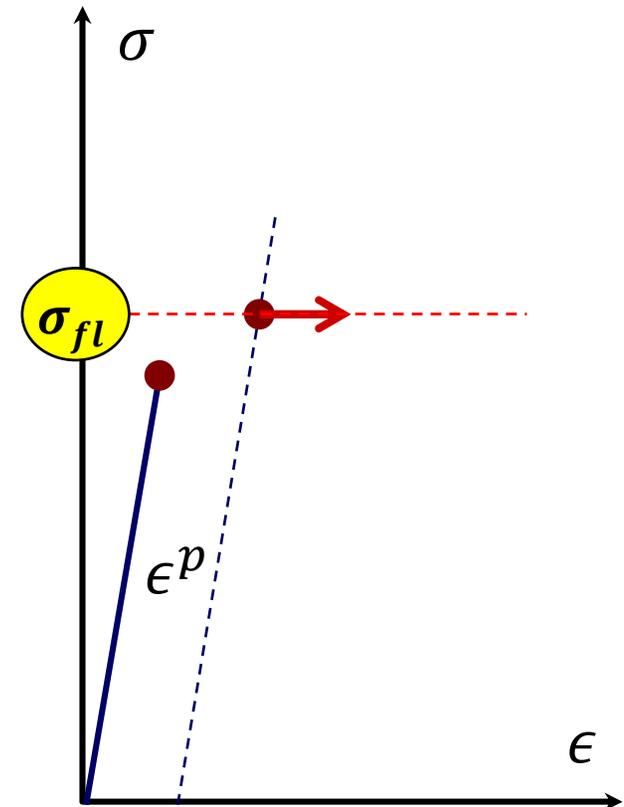


# El concepto de la plasticidad con endurecimiento

Función de fluencia  $f[\sigma] = \|\sigma\| - (\sigma_{fl} + \alpha \cdot \|\epsilon^p\|) = 0$

Cuando  $f = 0$  comienzan las deformaciones plásticas

El material “endurece”, o sea, aumenta su tensión de fluencia





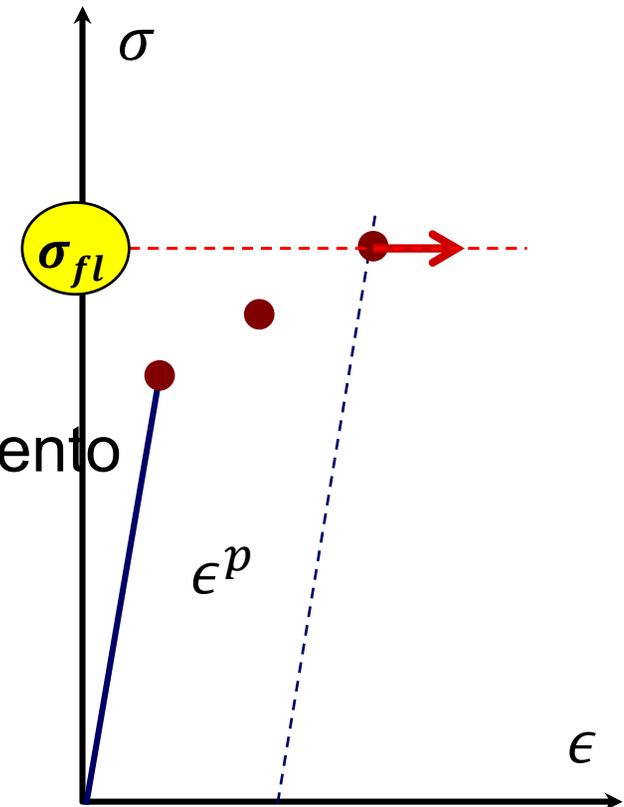
# El concepto de la plasticidad con endurecimiento

Función de fluencia  $f[\sigma] = \|\sigma\| - (\sigma_{fl} + \alpha \cdot \|\epsilon^p\|) = 0$

Cuando  $f = 0$  comienzan las deformaciones plásticas

El material “endurece”, o sea, aumenta su tensión de fluencia

Mas deformación implica más endurecimiento





# El concepto de la plasticidad con endurecimiento

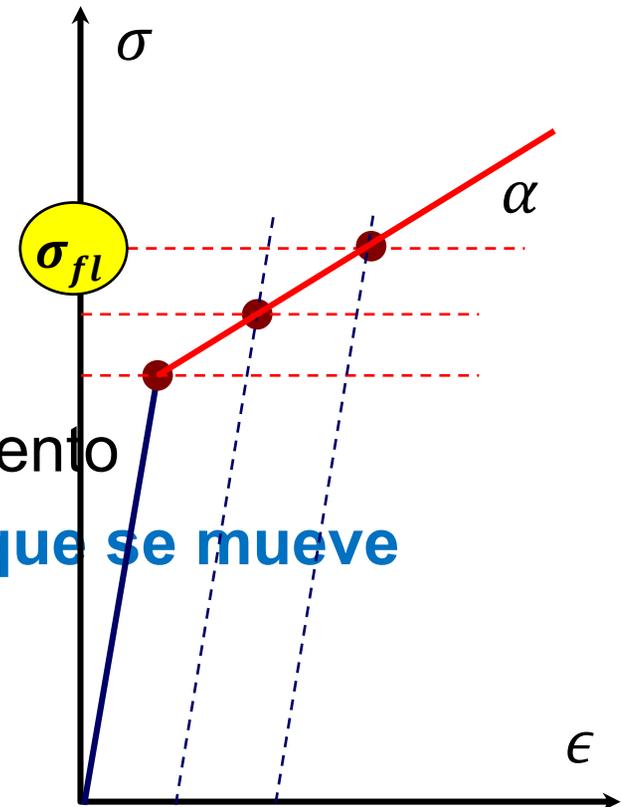
Función de fluencia  $f[\sigma] = \|\sigma\| - (\sigma_{fl} + \alpha \cdot \|\epsilon^p\|) = 0$

Cuando  $f = 0$  comienzan las deformaciones plásticas

El material “endurece”, o sea, aumenta su tensión de fluencia

Mas deformación implica más endurecimiento

**La línea inclinada es una “horizontal” que se mueve**



# Índice



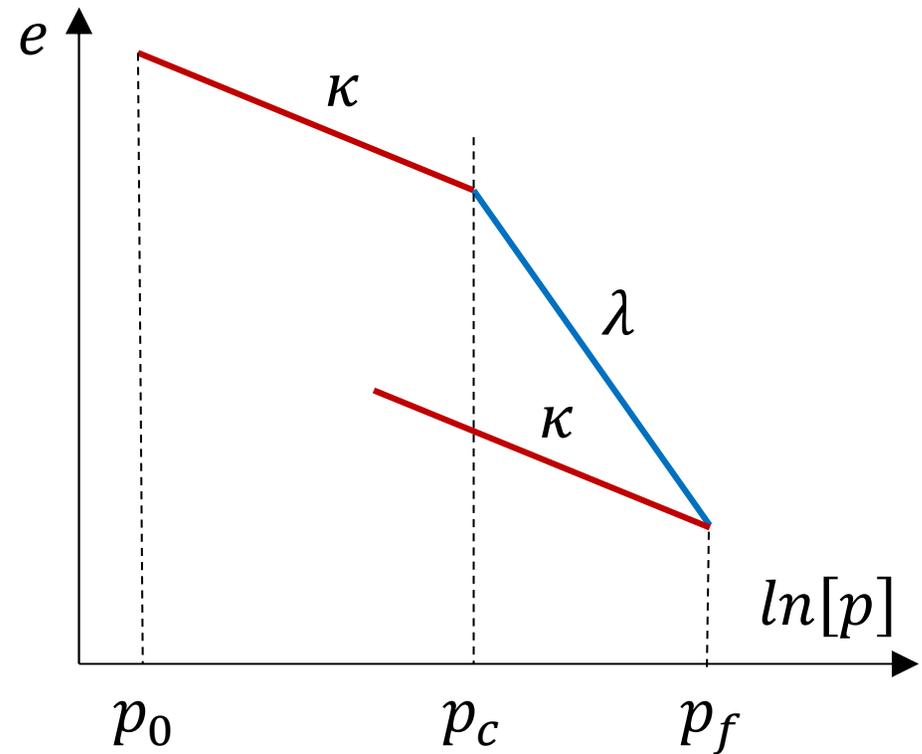
- Ecuaciones constitutivas
- Plasticidad: el bloque friccionante
- Introducción a la plasticidad perfecta
- El modelo de Mohr-Coulomb
- Plasticidad con endurecimiento
- **Modelo de compresión edométrica**



# Modelo de compresión edométrica

## Hipótesis

- Cinemática de grandes deformaciones
  - $\Delta\epsilon_v = \Delta e / (1 + e)$
  - $\Delta e = (1 + e)\Delta\epsilon_v$
- Material elastoplástico
  - $\Delta\epsilon = \Delta\epsilon^e + \Delta\epsilon^p$
- Compresión unidimensional
  - $\Delta\epsilon_3 = \Delta\epsilon_3^e + \Delta\epsilon_3^p = 0$
- Respuestas **elástica** y **elastoplástica** lineales en  $e - \ln[p]$



**Esto implica que la fluencia no ocurre a presión constante: plasticidad con endurecimiento**

# Cinemática de deformación



## Carga **elástica**

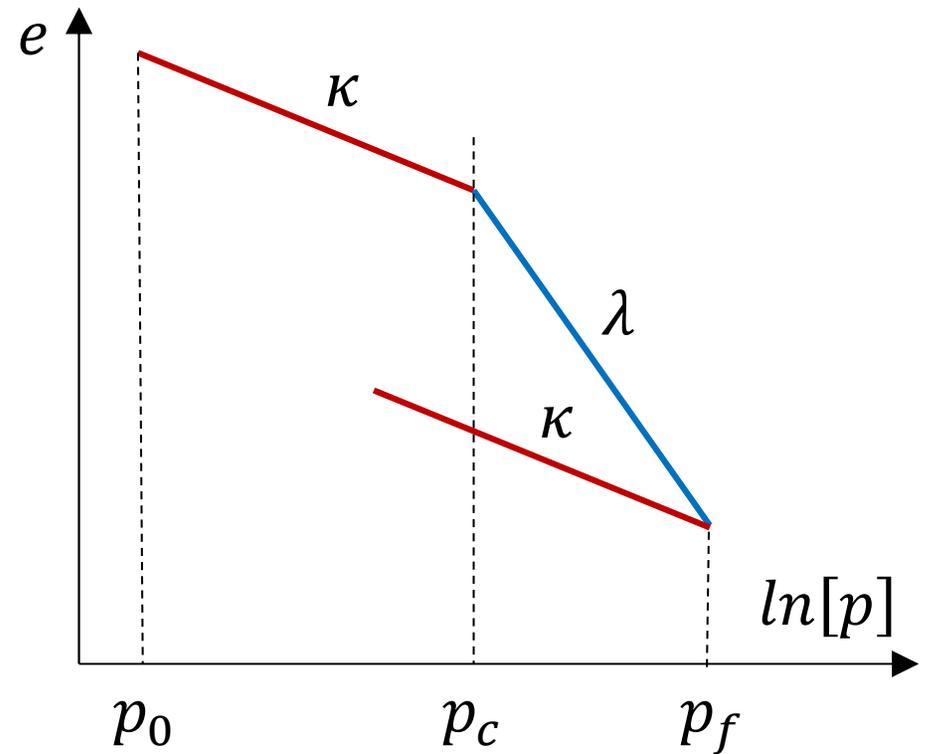
- $\Delta\epsilon_1^e > 0, \Delta\epsilon_1^p = 0$
- $\Delta\epsilon_3^p = 0 \rightarrow \Delta\epsilon_3^e = 0$

## Carga **elastoplástica**

- $\Delta\epsilon_1^e > 0, \Delta\epsilon_1^p > 0$
- $\Delta\epsilon_3^e > 0 \rightarrow \Delta\epsilon_3^p = -\Delta\epsilon_3^e$

## Descarga **elástica**

- $\Delta\epsilon_1^e < 0, \Delta\epsilon_1^p = 0$
- $\Delta\epsilon_3^p = 0 \rightarrow \Delta\epsilon_3^e = 0$





# Relación tensión-deformación

- Del gráfico

$$\Delta e = \kappa \ln \left[ \frac{p + \Delta p}{p} \right]$$

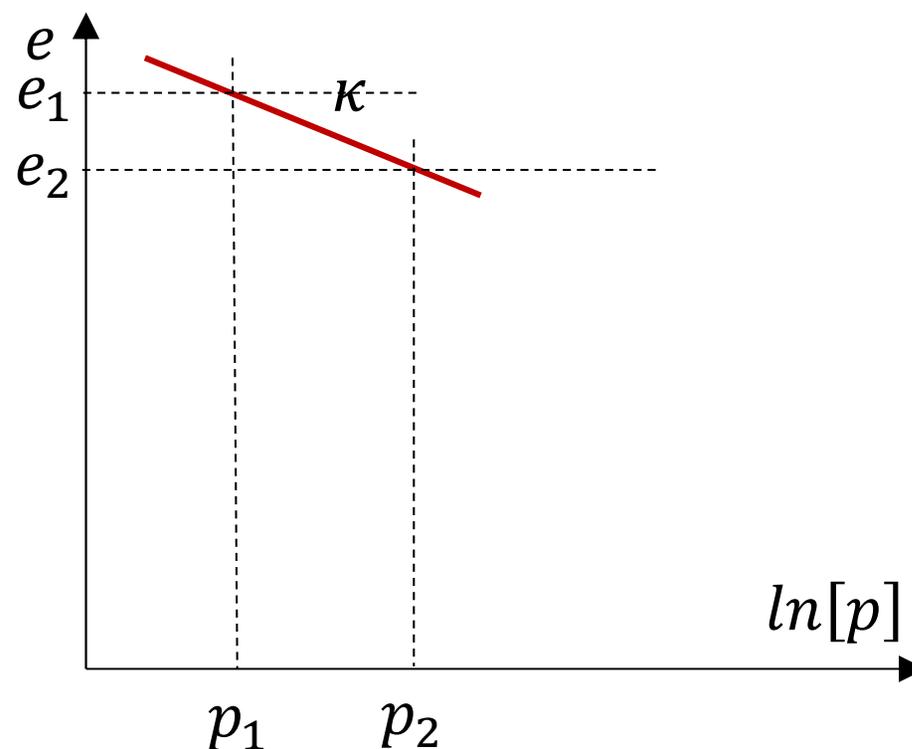
- Reemplazando

$\Delta \epsilon_v = \Delta e / (1 + e)$  y derivando

$$\frac{\partial p}{\partial \epsilon_v^e} = K[p, e] = \frac{1 + e}{\kappa} p$$

- En forma incremental

$$\dot{p} = \frac{1 + e}{\kappa} p \cdot \dot{\epsilon}_v^e \quad \dot{\epsilon}_v^e = \frac{\kappa}{(1 + e)p} \dot{p}$$





# Función de fluencia y deformaciones plásticas

- La función de fluencia es

$$F = p - p_c = 0$$

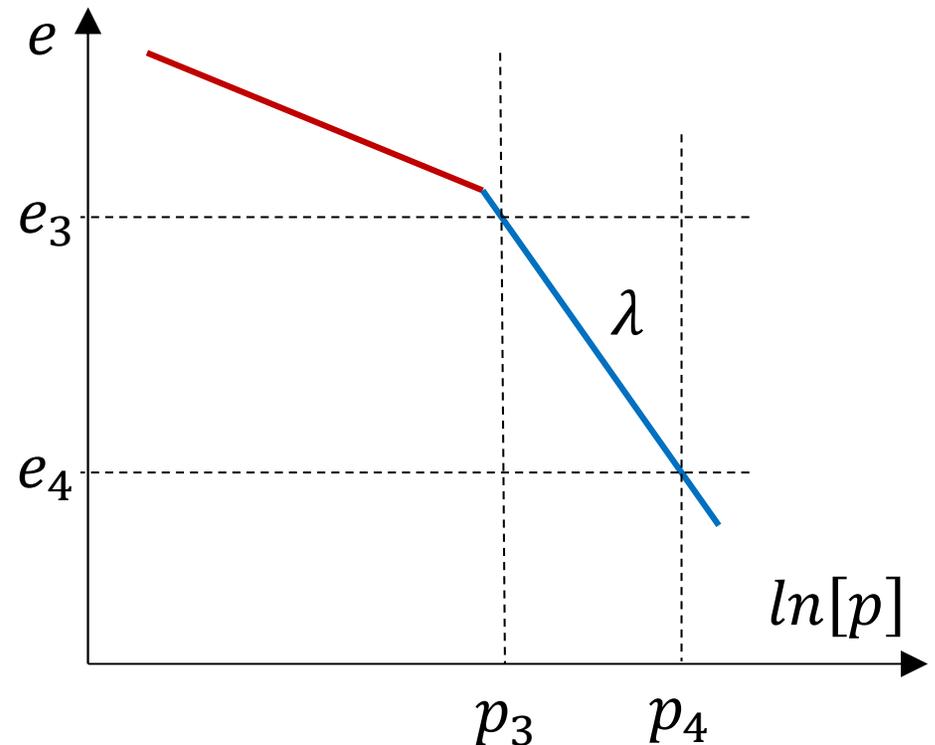
- Con el mismo procedim.

$$\dot{\epsilon}_v = \frac{\lambda}{(1+e)p} \dot{p}$$

- Pero  $\dot{\epsilon}_v = \dot{\epsilon}_v^e + \dot{\epsilon}_v^p$

$$\dot{\epsilon}_v^p = \dot{\epsilon}_v - \dot{\epsilon}_v^e = \frac{\lambda - \kappa}{(1+e)p} \dot{p}$$

$$\dot{p} = \left( \frac{1+e}{\lambda - \kappa} p \right) \dot{\epsilon}_v^p \rightarrow \mathbf{K^p[e, p]} = \frac{1+e}{\lambda - \kappa} p$$

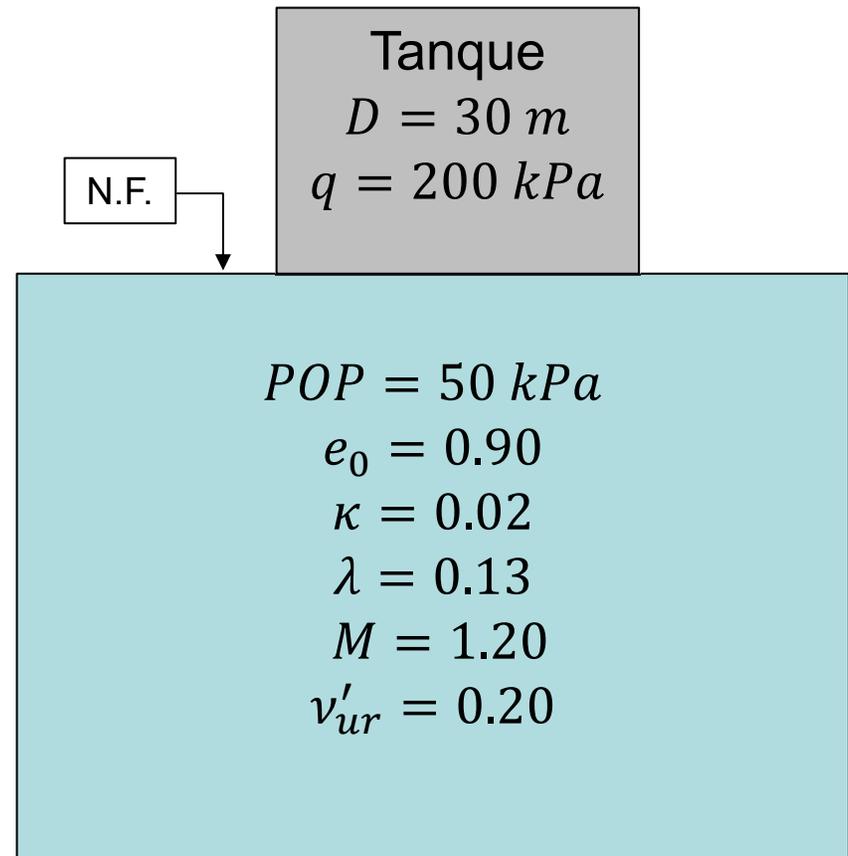


**Esta es una formulación moderna de la compresión 1D**

# Ejemplo: carga de tanque



Tanque 30m de diámetro, carga 200 kPa, fundado en arcilla preconsolidada



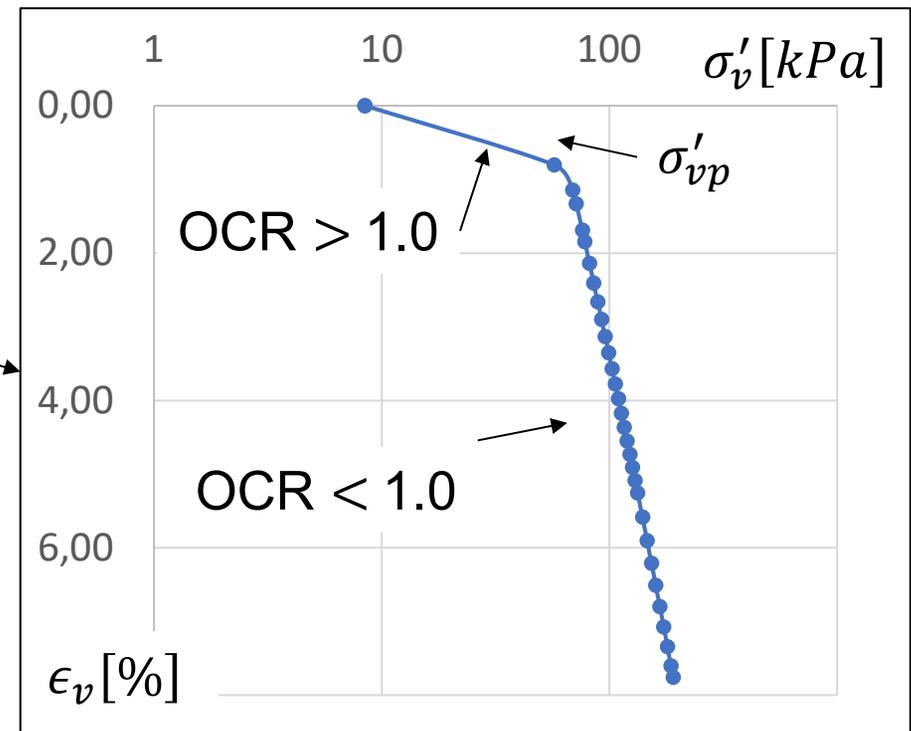
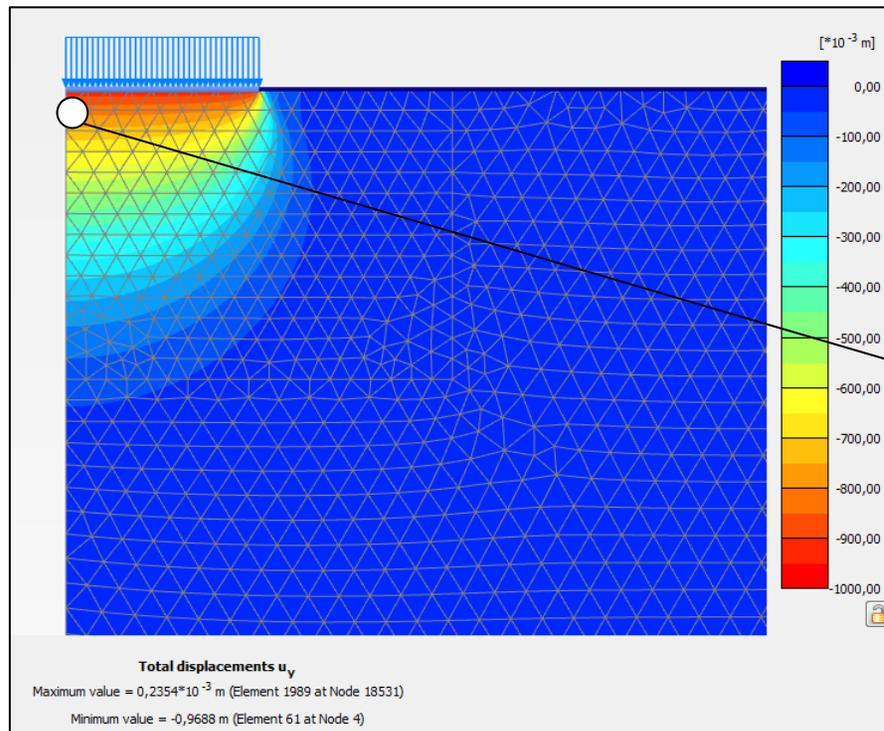
Tres escenarios de carga:

- Carga lenta (drenado)
- Carga rápida (no drenado)
- Carga en cuatro etapas rápidas (no drenadas) de 50kPa, con consolidación entre etapas

# Ejemplo: carga lenta



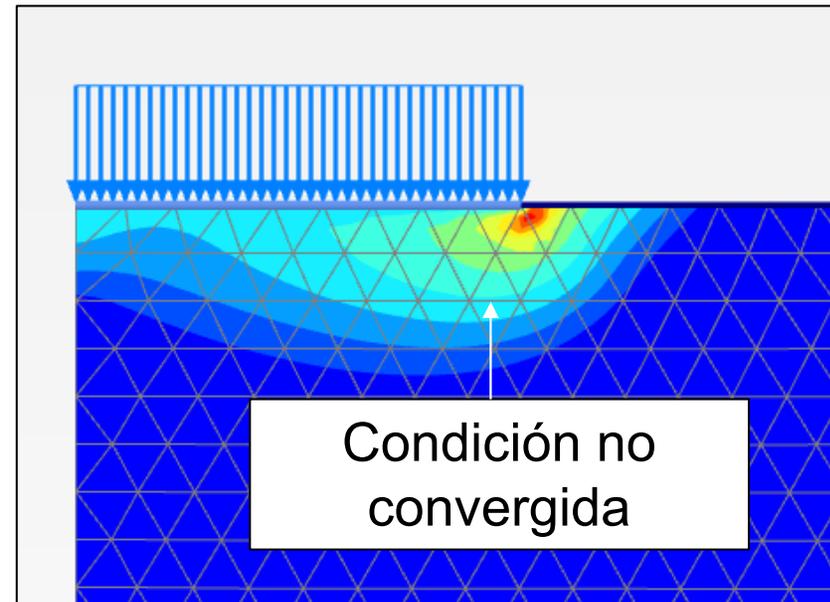
- **Carga lenta = comportamiento drenado**
- Fundación estable, no falla
- Asentamiento máximo bajo platea 98 cm





# Ejemplo: carga rápida

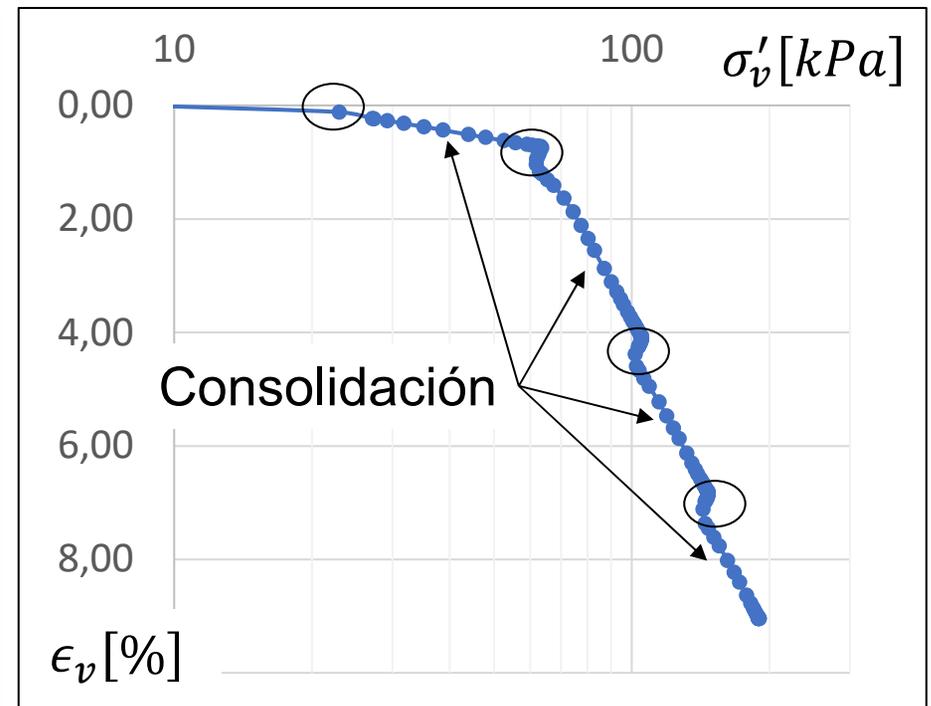
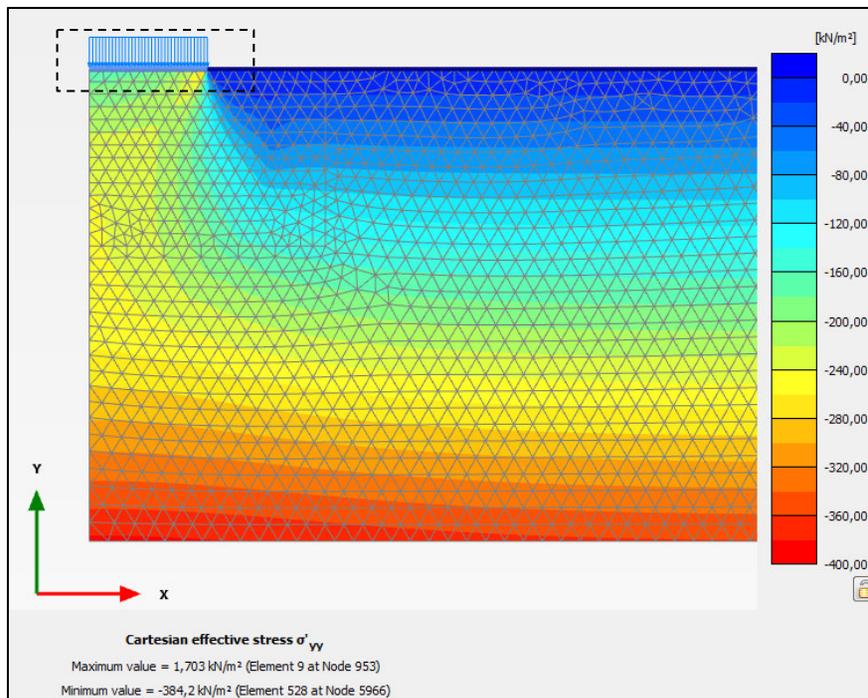
- **Carga única = carga rápida = comportamiento no drenado**
- El suelo falla antes de la carga de 200 kPa
- $s_u \cong \frac{1}{2} \sin[\phi'] \sigma'_v \cdot OCR^{(\lambda-\kappa)/\lambda}$
- $Q_{ult} \cong 1.2 (2 + \pi) s_u \cong 6 \cdot 0.23 \cdot 50 \text{ kPa} \cong 70 \text{ kPa} < 200 \text{ kPa}$





# Ejemplo: carga en cuatro etapas

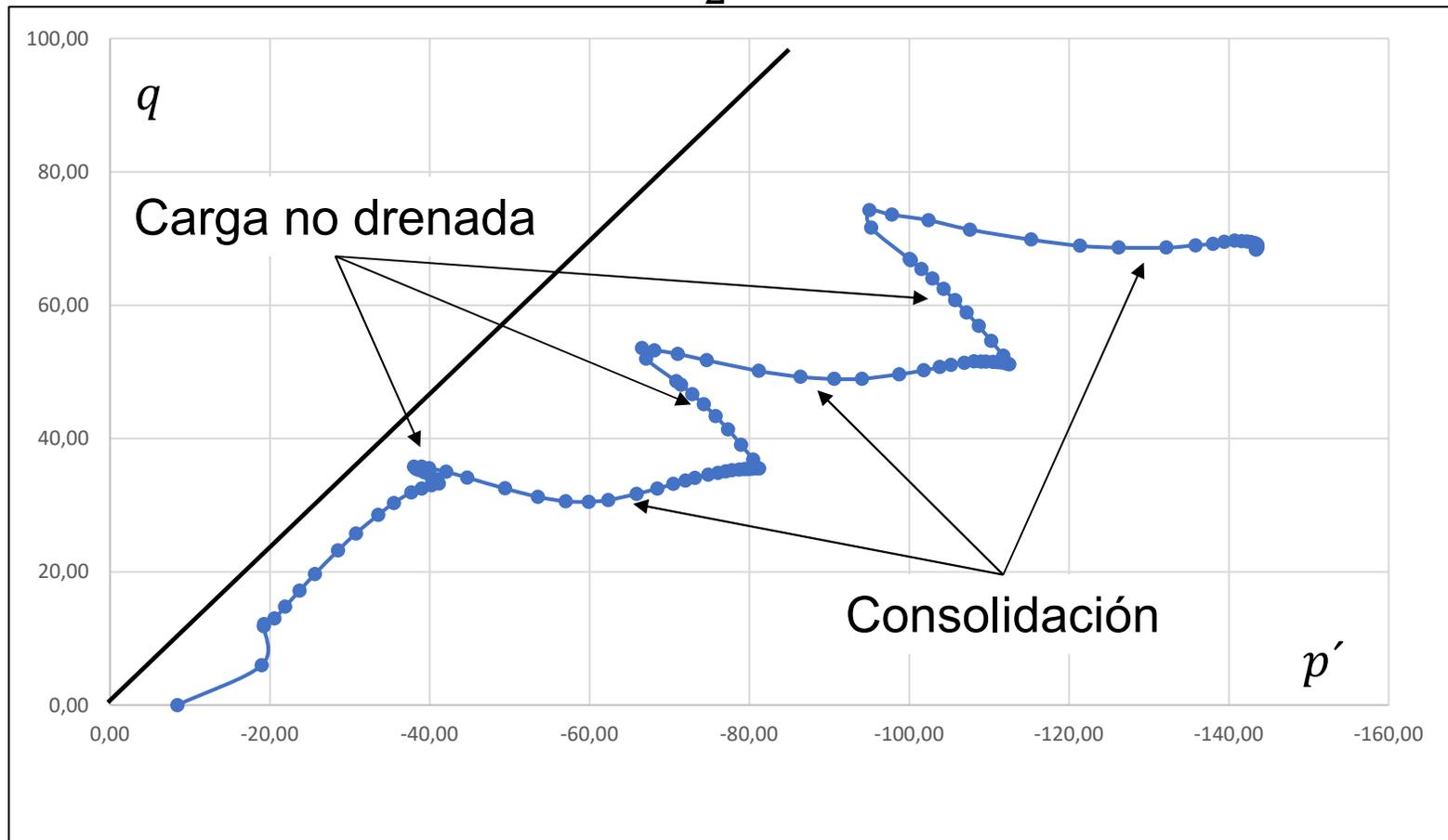
- **Carga rápida durante etapas = comportamiento no drenado**
- Consolidación del 95% entre escalones de carga
- La próxima etapa resiste mas





# Ejemplo: carga en cuatro etapas trayectoria $p' - q$

La reducción de  $e$  aumenta  $s_u = \frac{1}{2} \sin[\phi'] \sigma'_v \cdot OCR^{(\lambda-\kappa)/\lambda}$



# Bibliografía

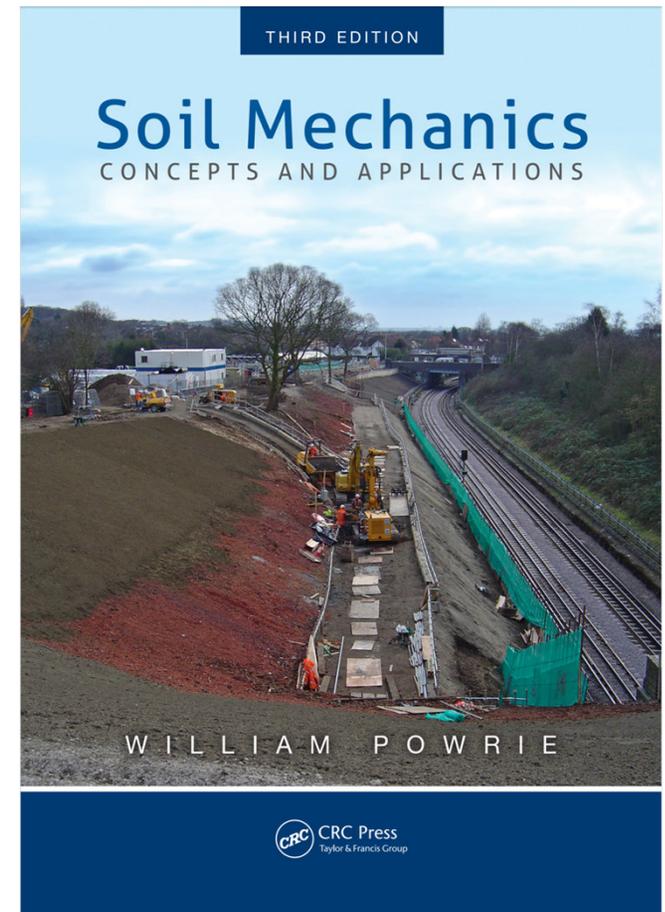


## Básica

- Powrie, W. Soil Mechanics. Concepts and Applications. 2ª Ed. Spon Press.
- **Potts et al. Guidelines for the use of advanced numerical analyses. COST Action C7. Telford.**
- Jimenez Salas et al. Geotecnia y Cimientos. Rueda

## Complementaria

- Chen, W. y Mizuno, W. Nonlinear analysis in soil mechanics. Elsevier.
- Chen, W y Liu, X. Limit analysis in soil mechanics. Elsevier
- Potts y Zdracovic. Finite element analysis in geotechnical engineering. Theldord.
- Zienkiewicz et al. Computational geomechanics. Wiley.





# MATERIAL EXTRA

# Karl Terzaghi (1883-1963)



## Libros fundamentales (y fundadores)

- Erdbaumechanik (1925)
- Mecánica Teórica de los Suelos (1934)
- Mecánica de Suelos en la Ingeniería Práctica (1948, 1963, 1996)



([http://www.igb.tuwien.ac.at/uploads/pics/terzaghi\\_marke\\_01.jpg](http://www.igb.tuwien.ac.at/uploads/pics/terzaghi_marke_01.jpg))

# Terzaghi – Peck, Prólogo a la primera edición, **1948**



“Desafortunadamente las actividades de investigación en mecánica de suelos... distrajeron la atención de muchos investigadores y docentes de las múltiples limitaciones impuestas por la naturaleza a la aplicación de la matemática a los problemas de ingeniería de tierras...

En la inmensa mayoría de los casos no se necesita más que una predicción grosera, y si dicha predicción **no puede ser realizada con medios simples, no puede ser realizada en absoluto**”

(Terzaghi 1948)

# Terzaghi – Peck, Prólogo a la tercera edición, **1996**



“En el medio siglo que transcurrió... la investigación... ha permanecido inalterada, y se ha acumulado una vasta literatura referida a las propiedades de los suelos...

Por lo tanto, **hoy puede no ser cierto** que si una predicción no puede ser realizada con medios simples, no puede ser realizada en absoluto.

Como **contrapartida** de este progreso, es cada vez más importante que la elección de las propiedades de los suelos usadas en el análisis esté basada en un **conocimiento fundamentalmente correcto del comportamiento de los suelos**”

(Peck 1996)



# La linealidad oculta en la ingeniería: El “principio de superposición”

**El efecto de la suma de las causas es igual a la suma de los efectos de las causas por separado**

El “principio de superposición” no es un principio sino la **consecuencia de** una serie de **linealizaciones**

- Fuerzas a tensiones: estado indeformado  $\sigma = P/A_0$
- Deformación a desplazamiento: cinemática de las pequeñas deformaciones  $\epsilon = \delta/l_0$
- Tensión a deformación: elasticidad lineal  $\sigma = E \cdot \epsilon$

Si (y solo si) se asumen estas hipótesis, entonces

$$\delta_{A+B} = f[P_{A+B}] = \frac{(P_A + P_B) \cdot l_0}{A_0 \cdot E} = \frac{P_A \cdot l_0}{A_0 \cdot E} + \frac{P_B \cdot l_0}{A_0 \cdot E} = f[P_A] + f[P_B] = \delta_A + \delta_B$$



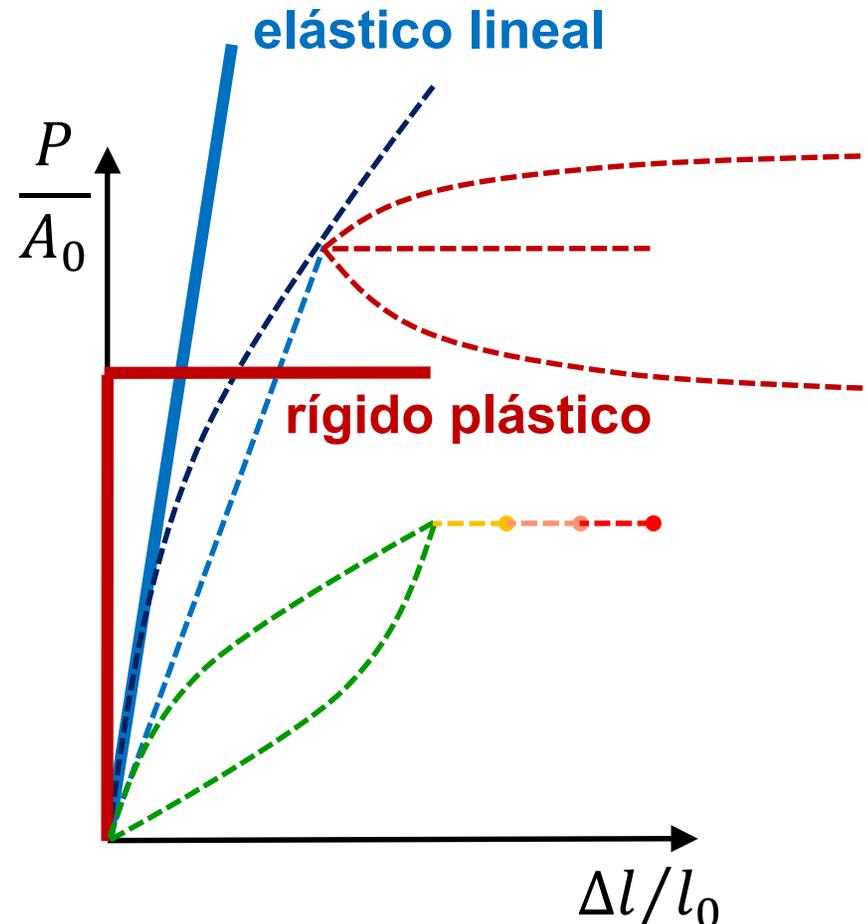
# Ecuaciones constitutivas de los métodos analíticos

Métodos analíticos: emplean ecuaciones constitutivas que pueden integrarse (líneas rectas)

- **Rígido plástico** (carga última)
- **Elástico lineal** (deformación)

El procedimiento convencional es

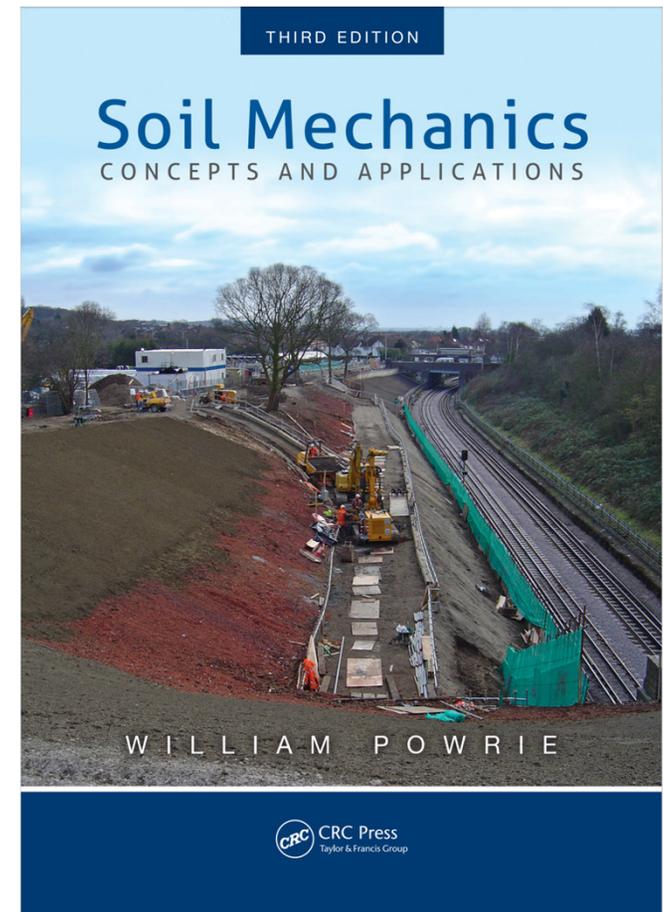
- Se confirma que la demanda (por ejemplo carga) es menor a la capacidad (resistencia)
- Se asume comportamiento elástico y se calculan los desplazamientos del sistema



# Índice



- Motivación
- **Ecuaciones constitutivas**
- Plasticidad: el bloque friccionante
- Introducción a la plasticidad perfecta
- El modelo de Mohr-Coulomb
- Plasticidad con endurecimiento
- Modelo de compresión edométrica

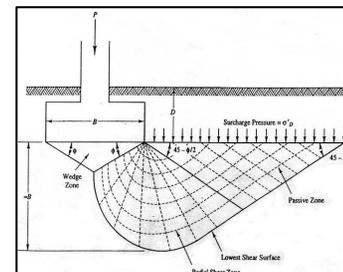
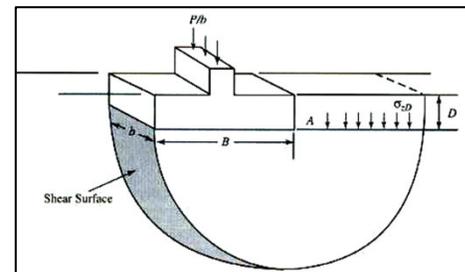
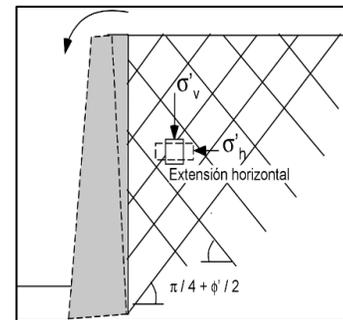
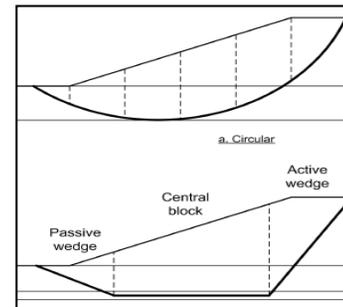


# Técnicas de análisis de los problemas de carga última en geotecnia



Todos satisfacen plasticidad de Mohr-Coulomb

- **Equilibrio límite:** en la línea de potencial deslizamiento
- **Análisis límite:** en toda la masa plastificada
- **Métodos numéricos:** en todo el dominio

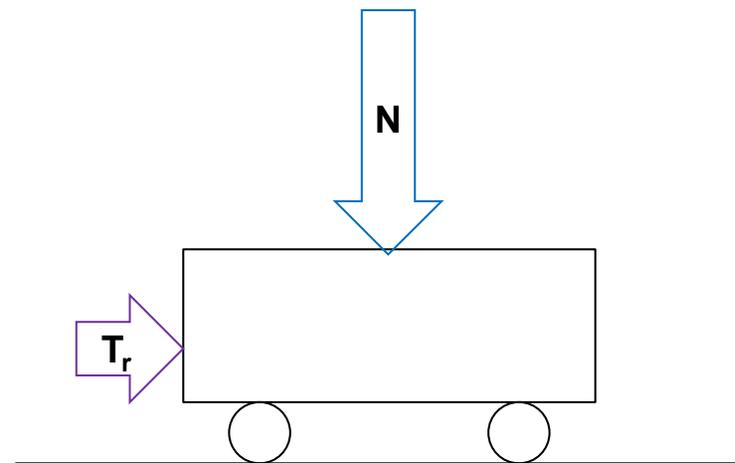




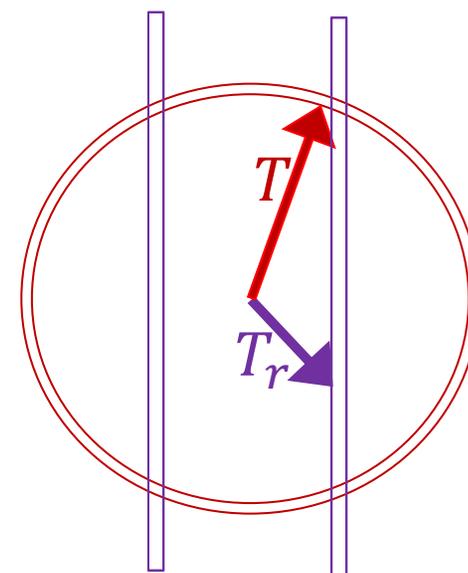
# El bloque sobre ruedas: función de fluencia

## Función de fluencia

- En algunas direcciones **rueda**:  $T_r$
- En otras direcciones **derrapa**:  $T$
- El efecto de  $N$  es el mismo de antes



$$F \rightarrow \begin{cases} F_1 = \sqrt{T_x^2 + T_y^2} - \mu N = 0 \\ F_2 = |T_x| - \mu_r N = 0 \end{cases}$$

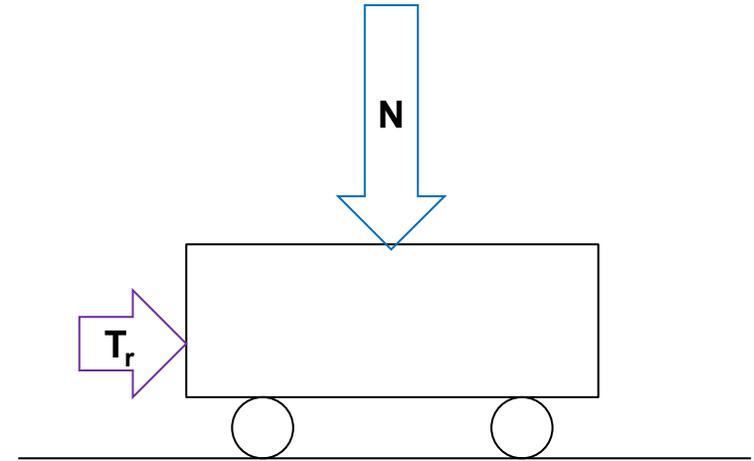


# El bloque sobre ruedas: potencial plástico

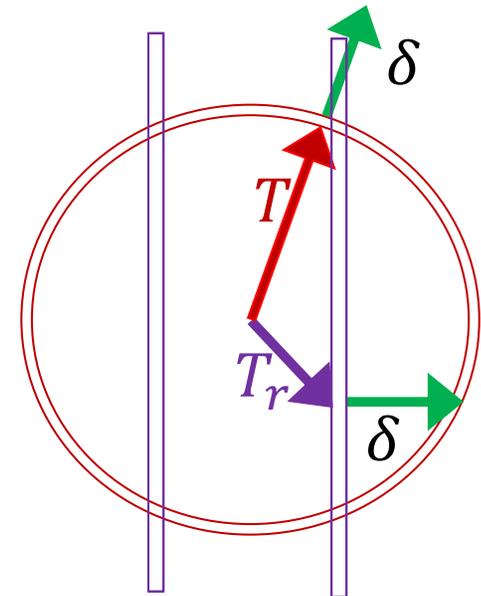


## Potencial plástico

- Cuando **derrapa** se mueve como antes
- Cuando **rueda** se mueve en la dirección de las ruedas

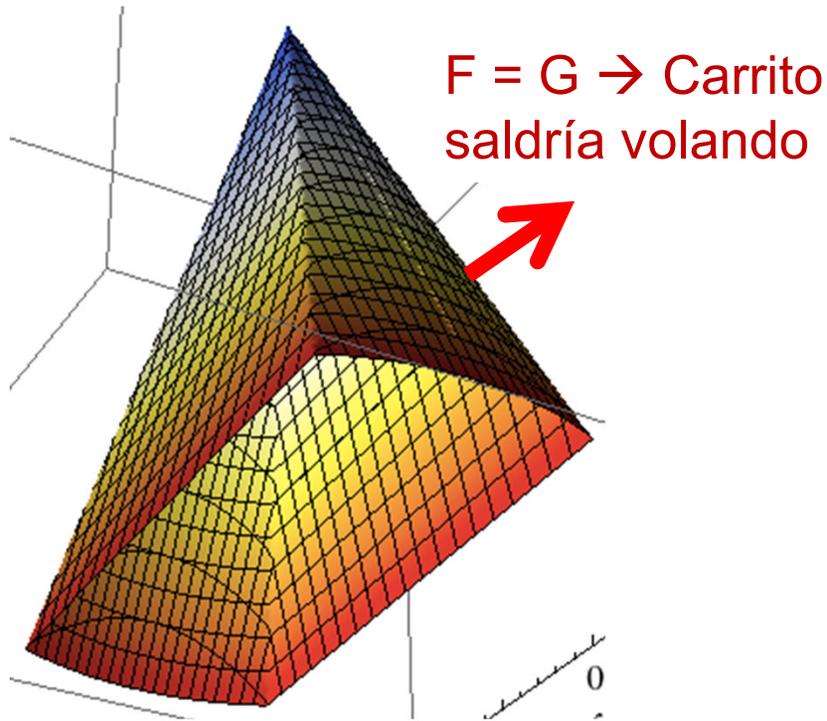


$$G \rightarrow \begin{cases} G_1 = \sqrt{T_x^2 + T_y^2} - \mu = 0 \\ G_2 = |T_x| - \mu_r = 0 \end{cases}$$

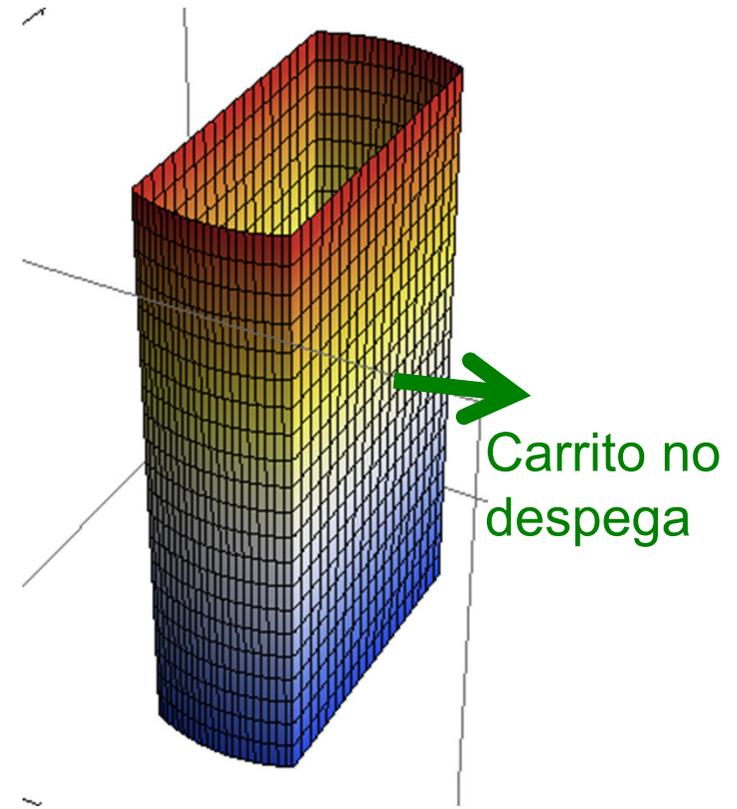




# El bloque sobre ruedas: función de fluencia distinta a potencial plástico



$$F \rightarrow \begin{cases} F_1 = \sqrt{T_x^2 + T_y^2} - \mu N = 0 \\ F_2 = |T_x| - \mu_r N = 0 \end{cases}$$



$$G \rightarrow \begin{cases} G_1 = \sqrt{T_x^2 + T_y^2} - \mu = 0 \\ G_2 = |T_x| - \mu_r = 0 \end{cases}$$

# El bloque friccionante en fórmulas



Cinemática 
$$\begin{Bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_x^e \\ \delta_y^e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta_x^p \\ \delta_y^p \end{Bmatrix}$$

Relación carga-desplazamiento 
$$\begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_x^e \\ \delta_y^e \end{Bmatrix}$$

Función de fluencia 
$$F = \sqrt{T_x^2 + T_y^2} - \mu N = 0$$

Potencial plástico 
$$G = \sqrt{T_x^2 + T_y^2} - \mu = 0$$

Datos de entrada  $K = 2 \text{ MN/m} \mid \mu = 0.50 \mid N = 100 \text{ kN}$

Se impone un desplazamiento horizontal de 10cm  
¿cuánto trabajo se aporta, almacena y consume?

# Prueba elástica y función de fluencia



1. Se impone desplazamiento 10cm  $\begin{Bmatrix} 10cm \\ 0cm \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_x^e \\ \delta_y^e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta_x^p \\ \delta_y^p \end{Bmatrix}$

2. Se asume comportamiento elástico  $\begin{Bmatrix} \delta_x^e \\ \delta_y^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10cm \\ 0cm \end{Bmatrix}$

3. Se calcula la fuerza resultante

$$\begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_x^e \\ \delta_y^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \frac{MN}{m} \begin{Bmatrix} 10cm \\ 0cm \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 200kN \\ 0kN \end{Bmatrix}$$

4. Se verifica el criterio de fluencia

$$F = \sqrt{T_x^2 + T_y^2} - \mu N = 200kN - 0.50 \cdot 100kN = +150kN$$

# Cómputo del desplazamiento plástico



**Como  $F > 0$  habrá desplazamiento plástico**

5. Se calcula la dirección de desplazamiento plástico

$$\begin{Bmatrix} \delta_x^p \\ \delta_y^p \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} \partial G / \partial T_x \\ \partial G / \partial T_y \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} T_x / \sqrt{T_x^2 + T_y^2} \\ T_y / \sqrt{T_x^2 + T_y^2} \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

6. Se calcula el multiplicador plástico  $\lambda$  para que  $F = 0$

$$F = \sqrt{\left(K(\delta_x - \delta_x^p)\right)^2 + \left(K(\delta_y - \delta_y^p)\right)^2} - \mu \cdot N = 0$$

$$F = 2 \text{ MN/m} \sqrt{(10 \text{ cm} - \lambda)^2 + 0} - 0.5 \cdot 100 \text{ kN} = 0 \rightarrow \lambda = 7.5 \text{ cm}$$



# Cómputo del desplazamiento elástico, fuerzas y trabajo de deformación

7. Se calculan los desplazamientos y las fuerzas finales

$$\begin{Bmatrix} 10cm \\ 0cm \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_x^e \\ \delta_y^e \end{Bmatrix} + 7.5cm \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \delta_x^e \\ \delta_y^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.5cm \\ 0.0cm \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_x^e \\ \delta_y^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \frac{MN}{m} \begin{Bmatrix} 2.5cm \\ 0cm \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 50kN \\ 0kN \end{Bmatrix}$$

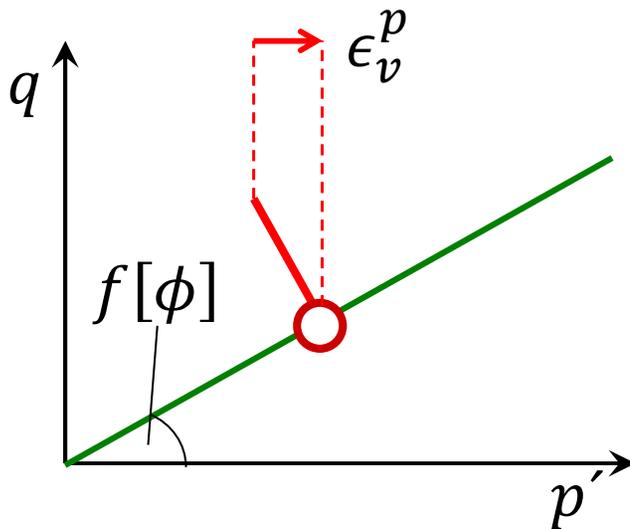
8. Se calcula el **trabajo realizado**

$$\begin{aligned} W &= W^e (\text{elástico, recuperable}) + W^P (\text{plástico, irreversible}) = \\ &= \frac{1}{2} K \cdot (\delta_x^e)^2 + T_x^{fl} \cdot \delta_x^p = \frac{1}{2} 2 \frac{MN}{m} (2.5cm)^2 + 50kN \cdot 7.5cm \\ &= 0.63kNm + 3.75kNm = 4.38kNm \end{aligned}$$

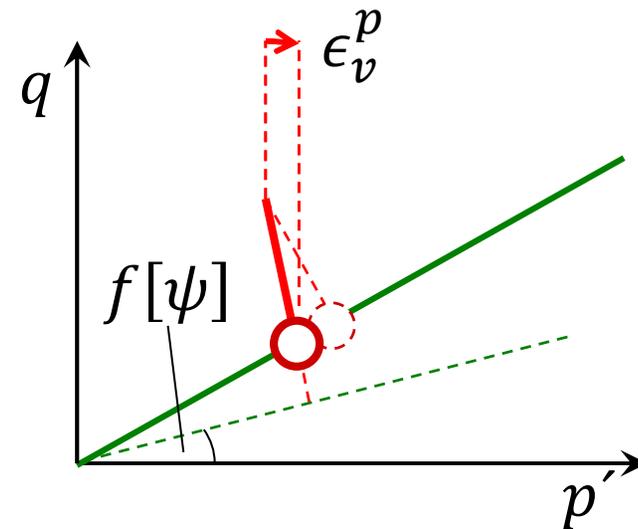


# Plasticidad asociativa y no asociativa en el diagrama $p' - q$

- Asociatividad (deformación perpendicular a  $f[\phi]$ ): deformación volumétrica **excesiva**
- No asociatividad (deformación perpendicular a  $f[\psi]$ ): deformación volumétrica **realista**



**asociativa = normal en  $p' - q$**



**no asociativa**

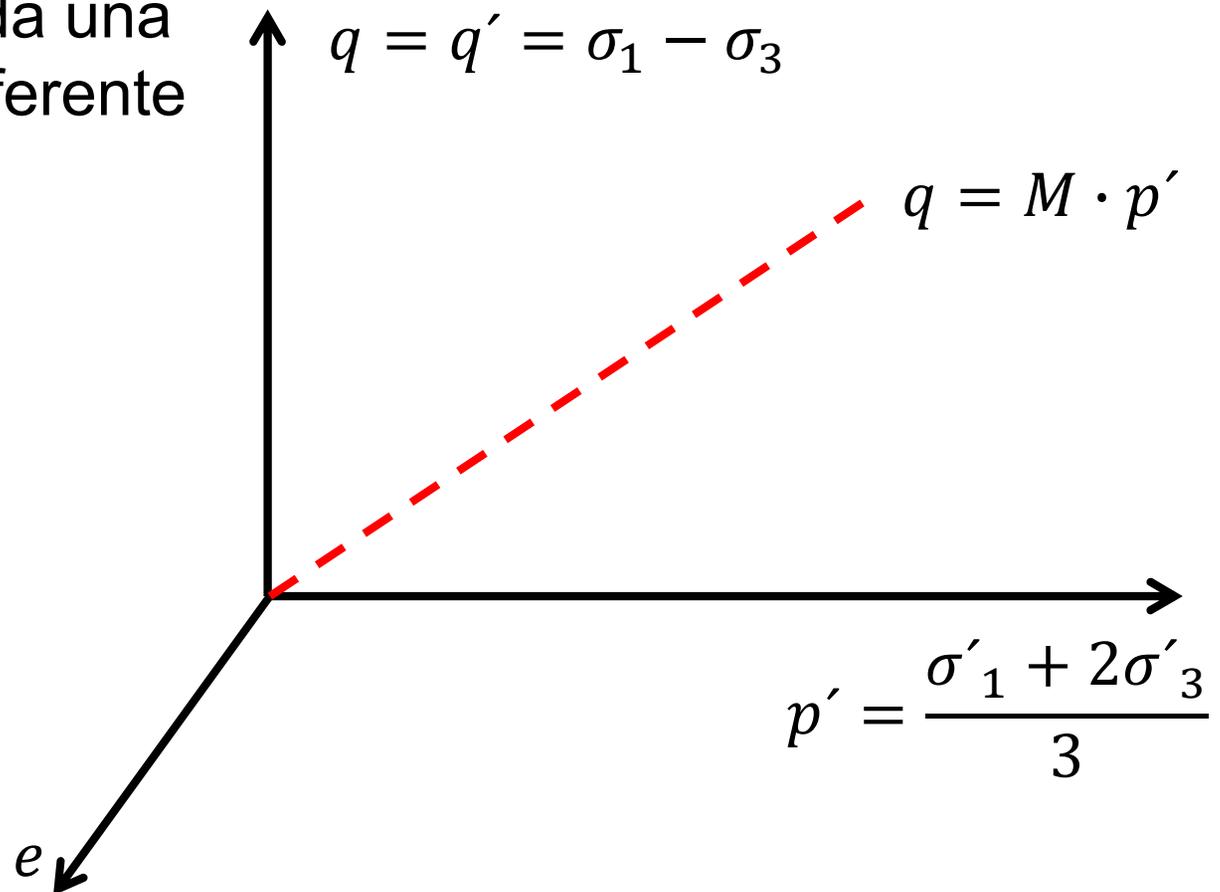


# Trayectoria de tensiones en edómetro y triaxial

El edómetro y el triaxial someten al suelo a diferentes trayectorias de tensiones: para cada una se mide una rigidez diferente

En el espacio  $p'$ ,  $q$ ,  $e$ , la curva de resistencia intrínseca se escribe

- $q = M \cdot p'$
- $M = \frac{6 \sin[\phi]}{3 - \sin[\phi]}$

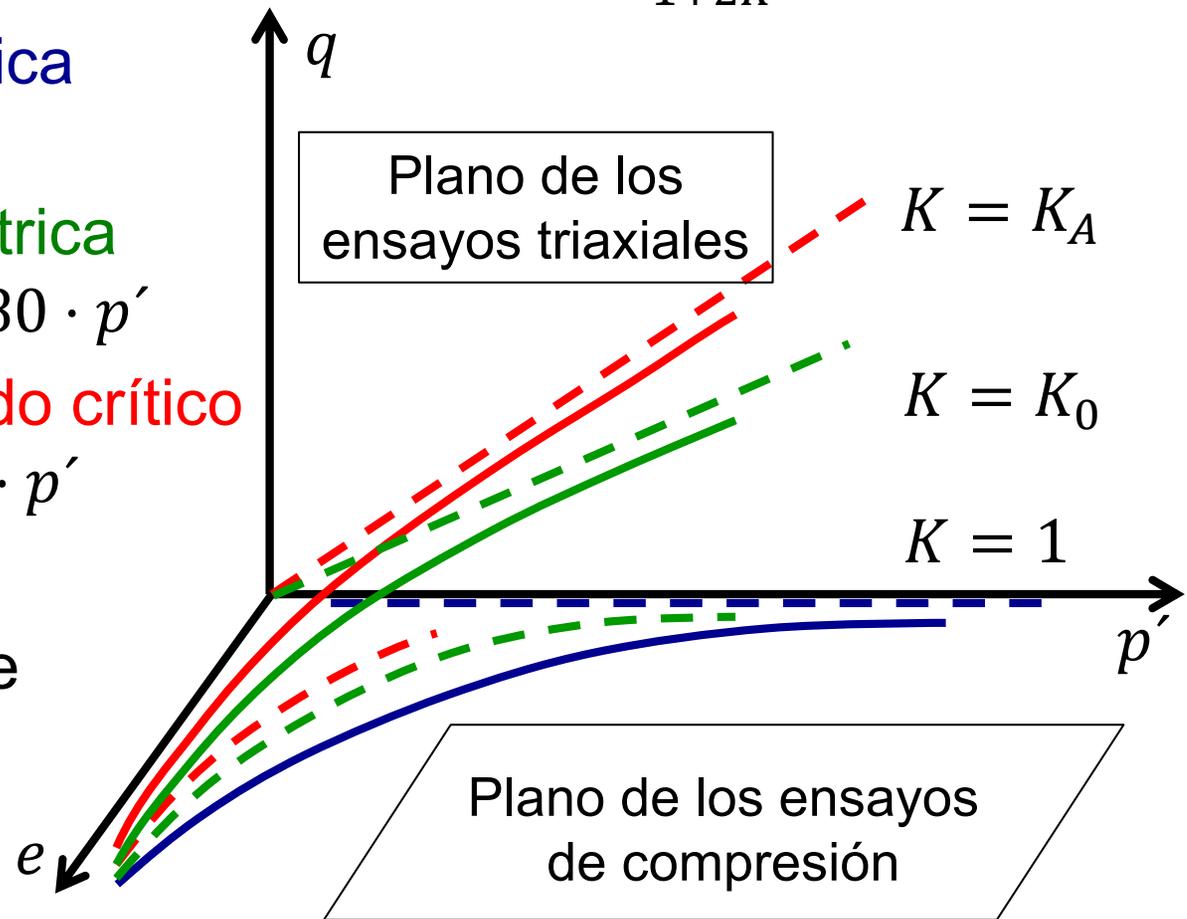




# Trayectoria de tensiones en edómetro y triaxial

- En trayectorias a  $K = \sigma_1/\sigma_3 = cte \rightarrow q = 3 \frac{1-K}{1+2K} p'$
- **Compresión isotrópica**  
 $K = 1, q = 0$
- **Compresión edométrica**  
 $K = K_0, q \cong 0.70|0.80 \cdot p'$
- **Oblicuidad del estado crítico**  
 $K = K_A, q \cong 1.1|1.3 \cdot p'$

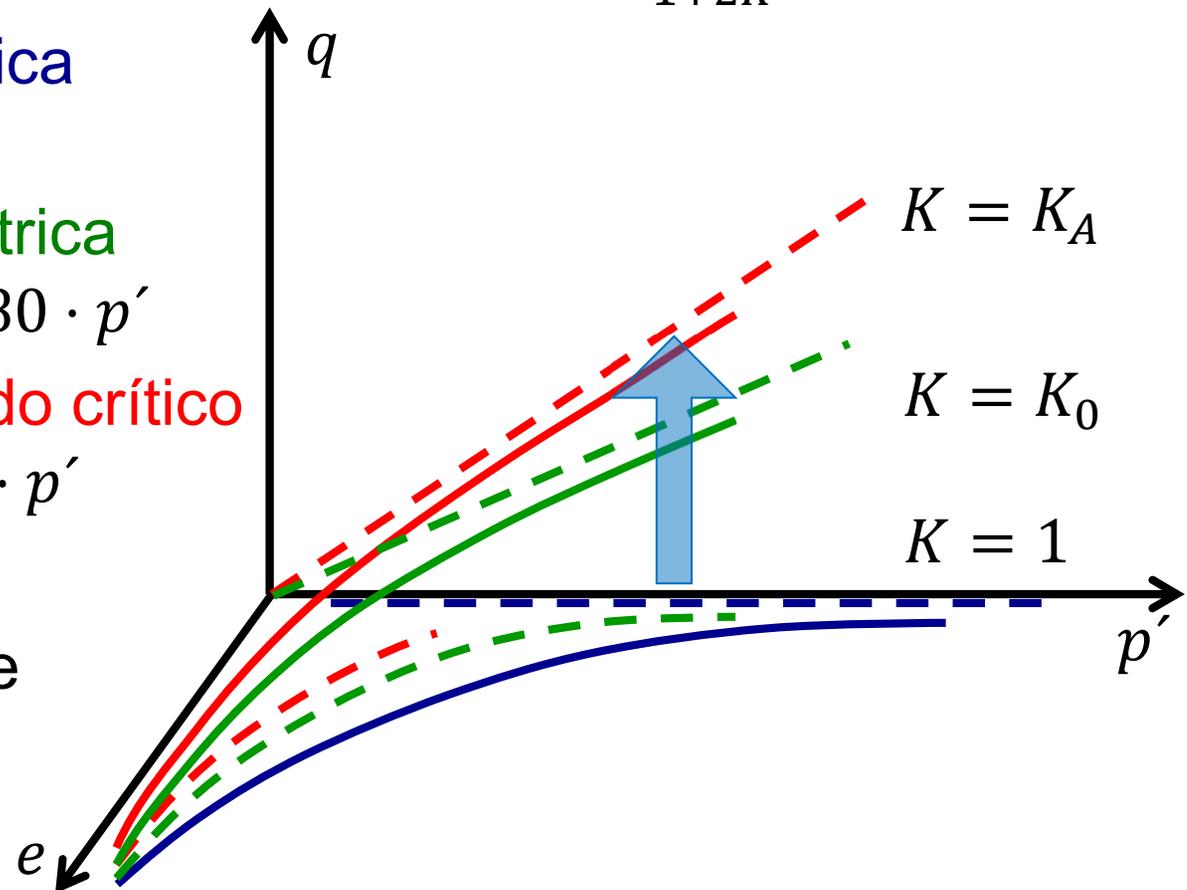
Noten la superficie que se forma uniendo las curvas de colores





# Trayectoria de tensiones en edómetro y triaxial: trayectoria de corte

- En trayectorias a  $K = \sigma_1/\sigma_3 = cte \rightarrow q = 3 \frac{1-K}{1+2K} p'$
- **Compresión isotrópica**  
 $K = 1, q = 0$
- **Compresión edométrica**  
 $K = K_0, q \cong 0.70|0.80 \cdot p'$
- **Oblicuidad del estado crítico**  
 $K = K_A, q \cong 1.1|1.3 \cdot p'$



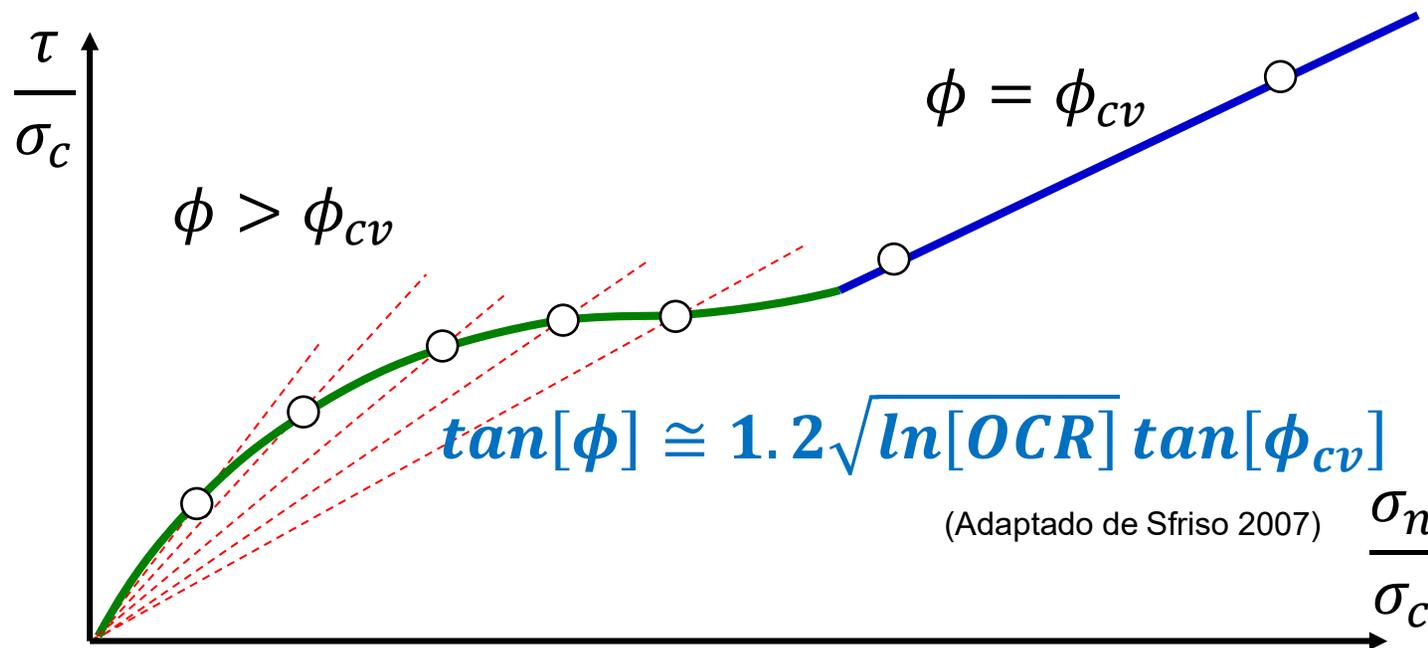
Noten la superficie que se forma uniendo las curvas de colores

# Comportamiento integrado: resistencia y rigidez

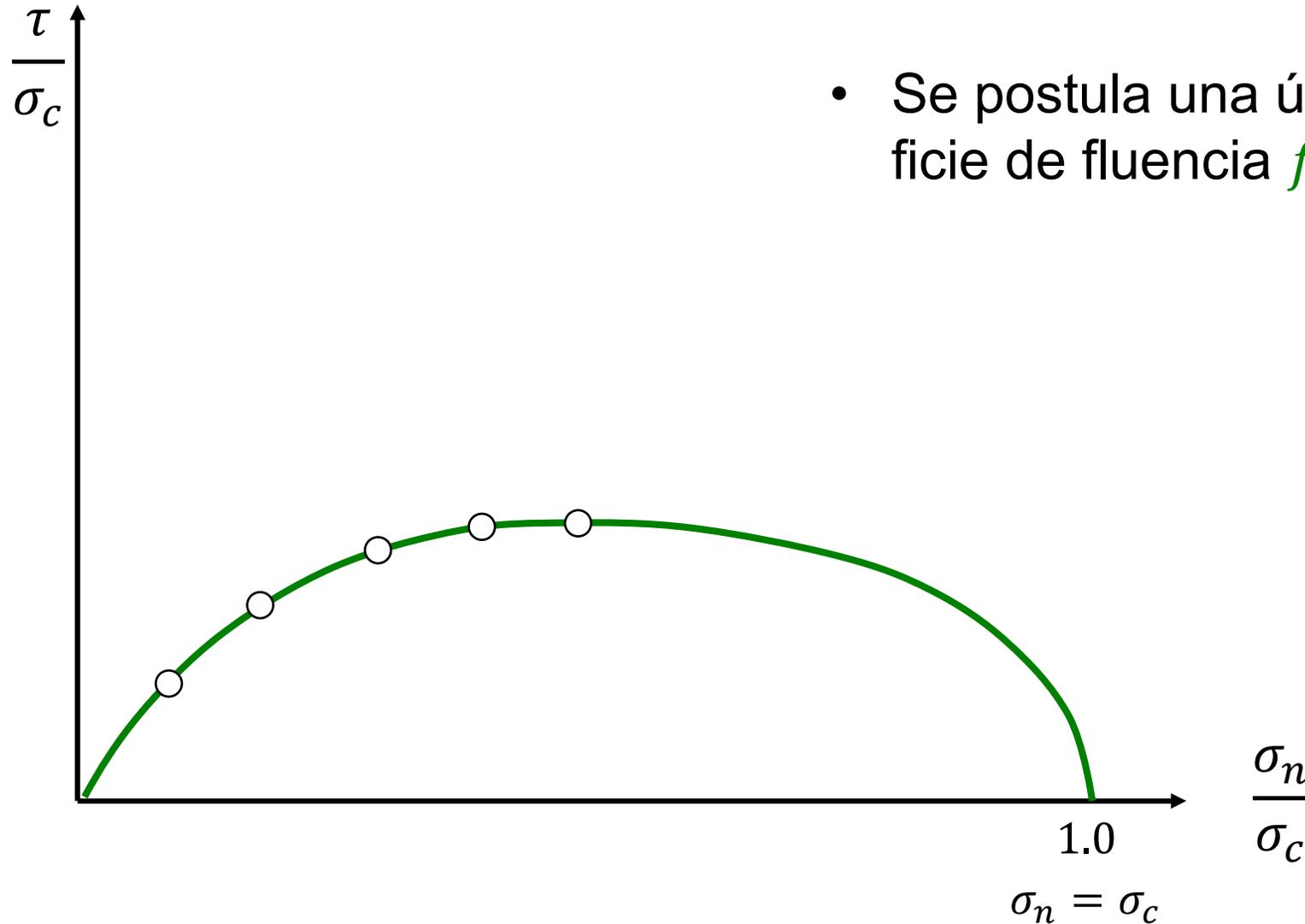


$OCR$  mide la historia de tensiones y controla la rigidez

- $OCR \geq \sim 2.0 \rightarrow \phi[OCR] > \phi_{cv}$  y la arcilla tiene mayor rigidez
- $OCR < \sim 2.0 \rightarrow \phi = \phi_{cv}$  y la arcilla tiene menor rigidez



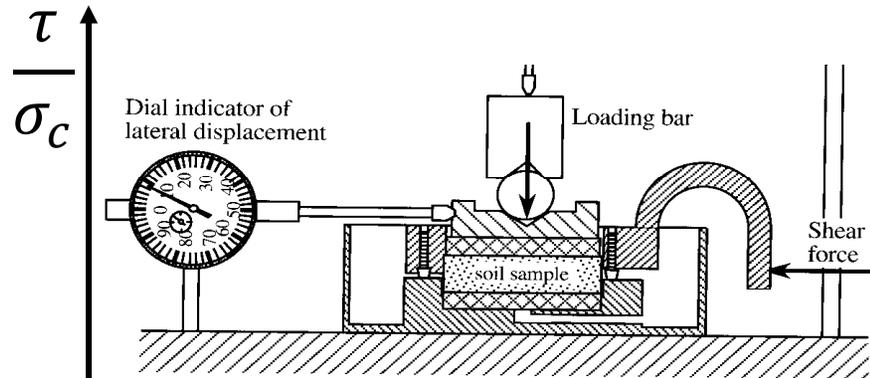
# Modelo de estado crítico para arcillas



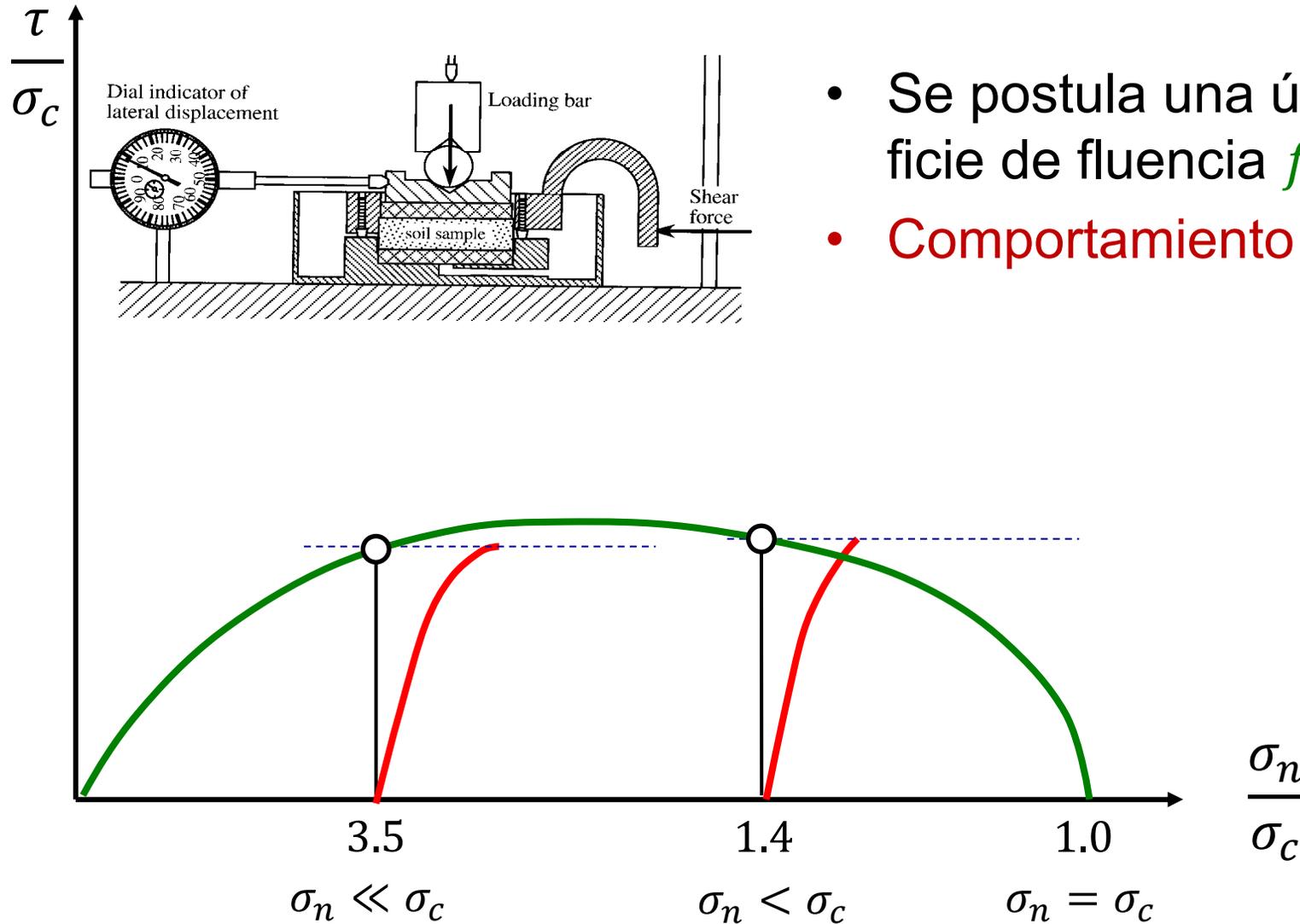
- Se postula una única superficie de fluencia  $f[\sigma_c, e] = 0$

(Mitchell 1996)

# Modelo de estado crítico para arcillas

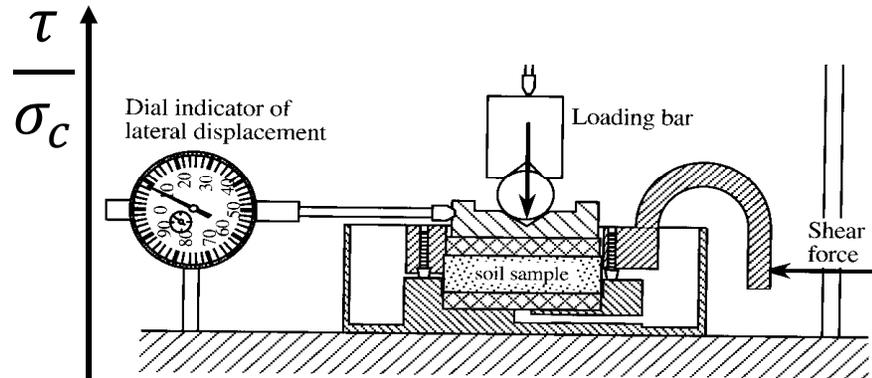


- Se postula una única superficie de fluencia  $f[\sigma_c, e] = 0$
- Comportamiento elástico

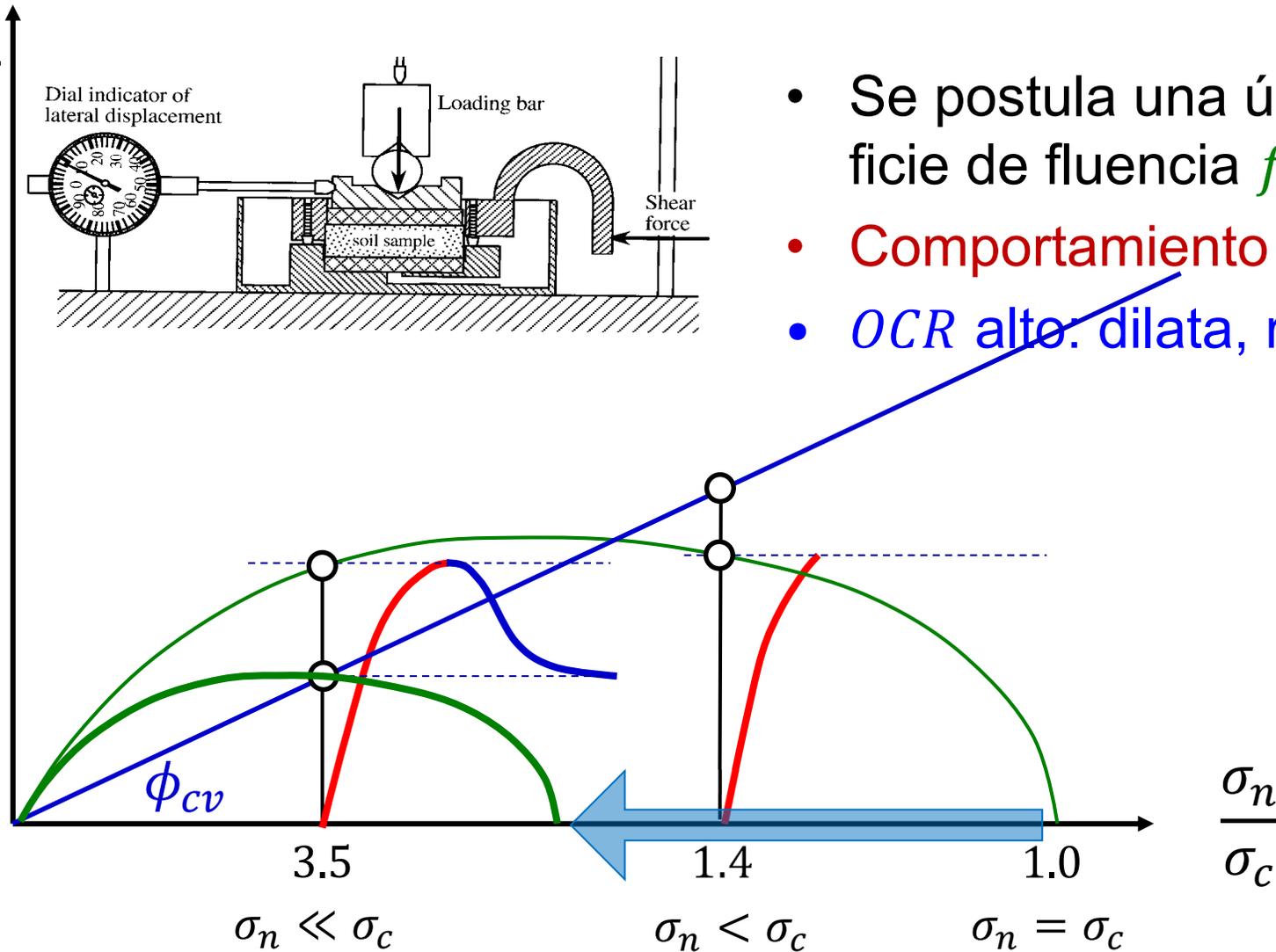


(Mitchell 1996)

# Modelo de estado crítico para arcillas

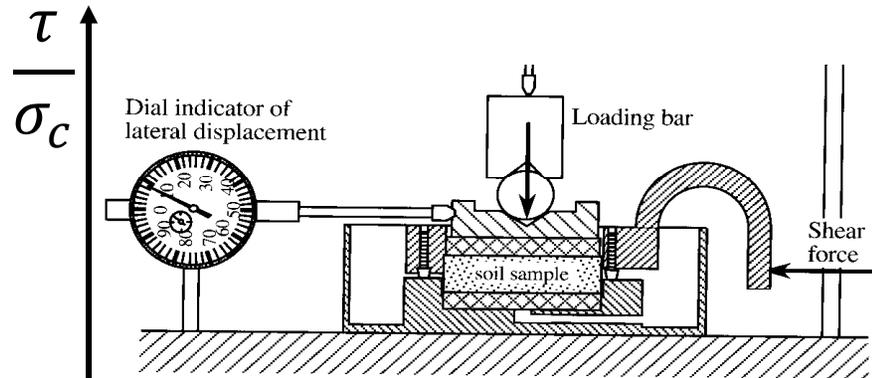


- Se postula una única superficie de fluencia  $f[\sigma_c, e] = 0$
- Comportamiento elástico
- $OCR$  alto: dilata, reduce  $\sigma_c$

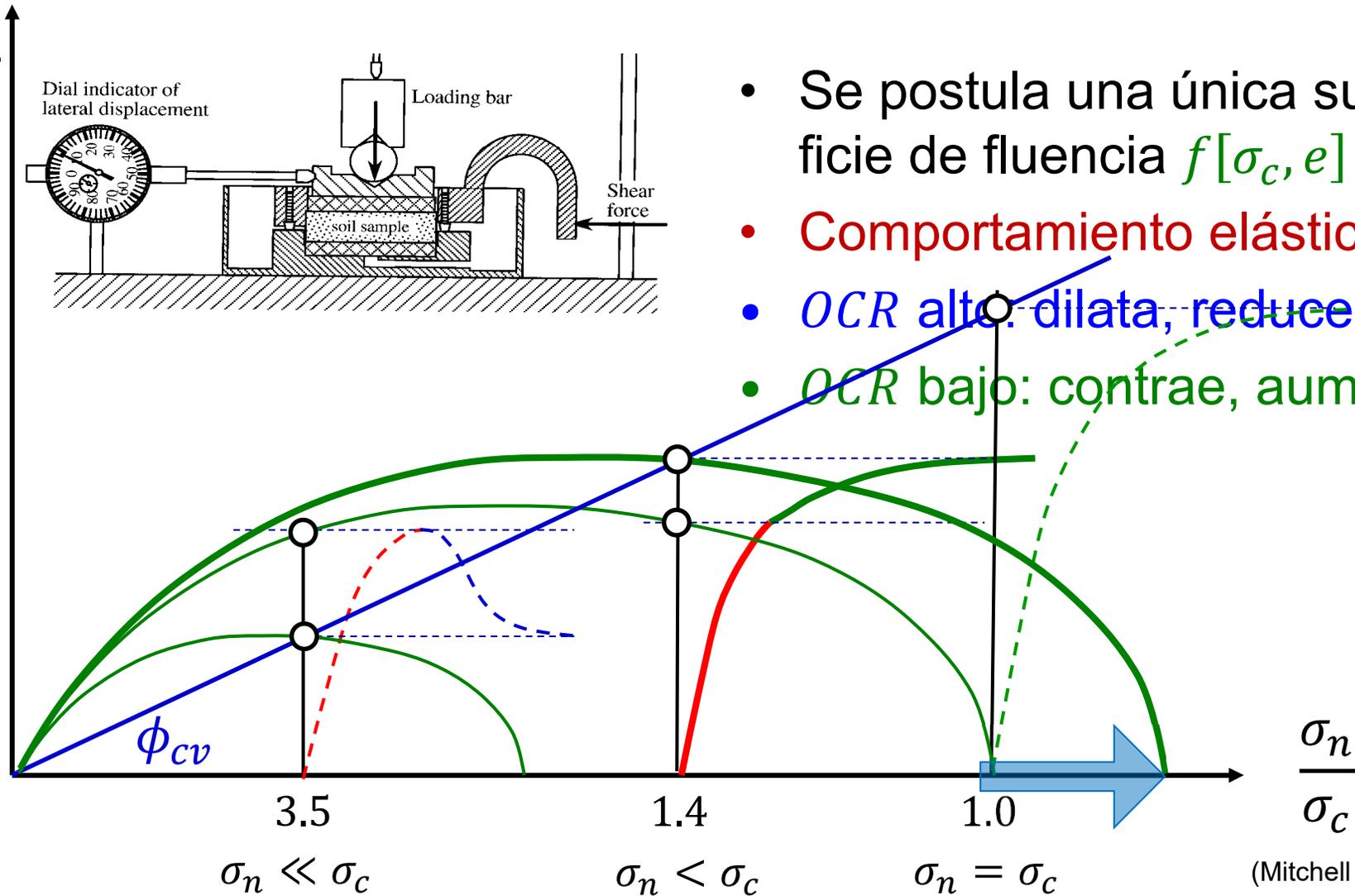


(Mitchell 1996)

# Modelo de estado crítico para arcillas

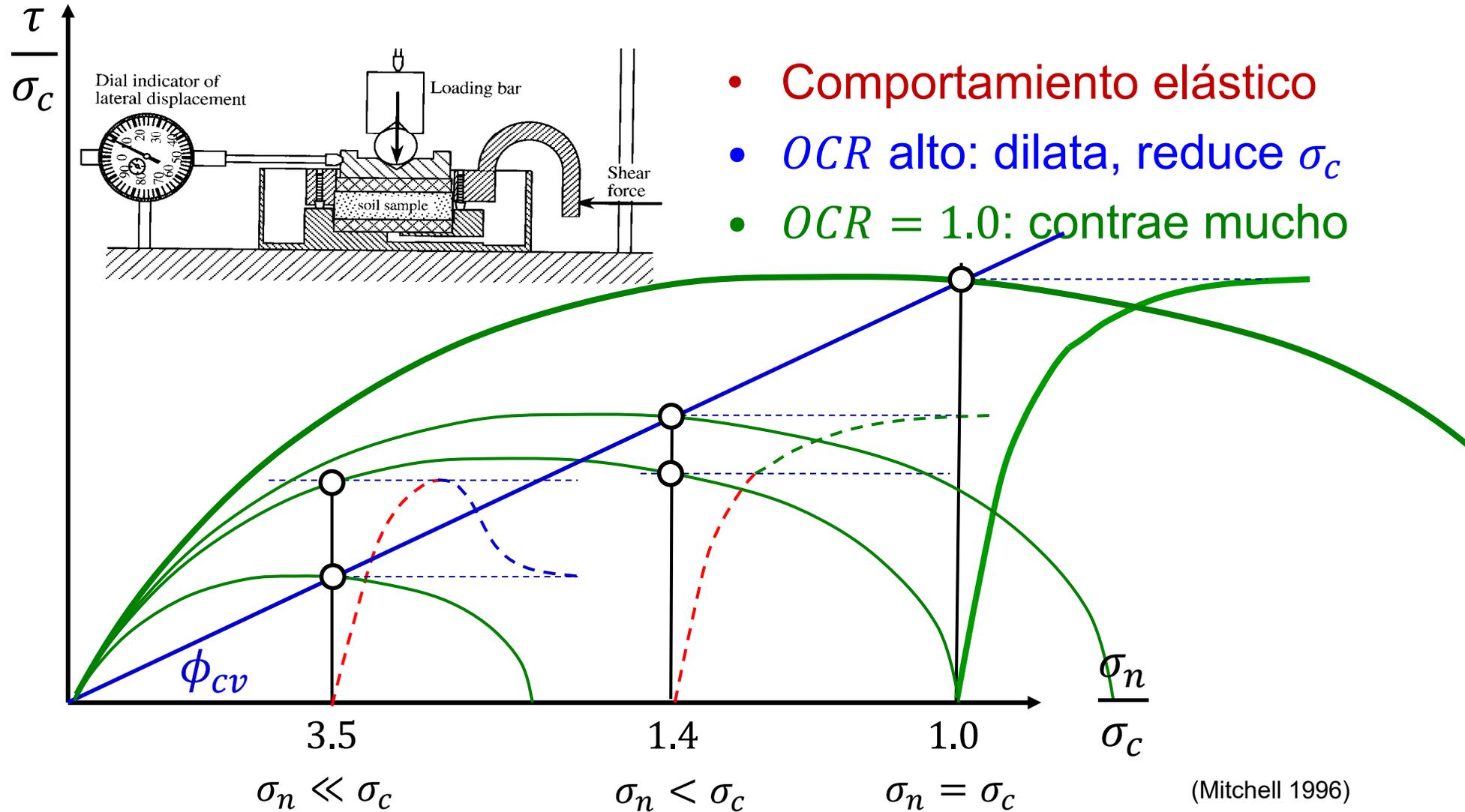


- Se postula una única superficie de fluencia  $f[\sigma_c, e] = 0$
- **Comportamiento elástico**
- **OCR alto: dilata, reduce  $\sigma_c$**
- **OCR bajo: contrae, aumenta  $\sigma_c$**



(Mitchell 1996)

# Modelo de estado crítico para arcillas



(Mitchell 1996)