Trabajo Práctico Nro. 5

Singularidades. Teorema de los residuos.

1. Hallar y clasificar las singularidades en $\mathbb{C}^*$ de:

   (a) $f(z) = \dfrac{z+1}{(z-1)(z+2)}$ (b) $f(z) = \dfrac{(z+1)^2}{(z-1)(z+2)}$ (c) $f(z) = e^{\frac{1}{z-2}}$

   (d) $f(z) = z\,\mathrm{ctg}(z)$ (e) $f(z) = \dfrac{z}{2+\operatorname{sen} z}$ (f) $f(z) = \dfrac{1}{z\,(1-\operatorname{ch} z)}$

   (g) $f(z) = \dfrac{e^{\frac{1}{z-1}}}{e^{\frac{1}{z}}-1}$ (h) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z\,(z-\pi)^2}$ (i) $f(z) = \dfrac{e^{-2z}}{e^{-2z}+9}$

   (j) $f(z) = \dfrac{1}{\mathrm{Log}(z^2-i)}$

2. Sea f una función holomorfa en un dominio D que tiene ceros $z_1, z_2, \cdots, z_k$ con multiplicidades $m_1, m_2, \cdots, m_k$ respectivamente. Mostrar que existe una función holomorfa g en D tal que $f(z) = (z-z_1)^{m_1}(z-z_2)^{m_2}\cdots(z-z_k)^{mk}g(z)$.

3. Probar que f tiene un polo de orden menor o igual que $m \in \mathbb{N}$ en z_0, si y sólo si $g(z) = (z-z_0)^m f(z)$ tiene una singularidad evitable en z_0.

4. Sean z_0 cero de orden m de g y cero de orden n de h y $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$. Probar:

   a) Si $n > m$, f tiene un polo de orden $n-m$ en $z = z_0$.

   b) Si $n \leq m$, z_0 es singularidad evitable de f. ¿Cómo se extiende f como función continua en z_0? (diferenciar los casos $n = m$ y $n < m$).

5. Sea $g: D \to \Omega$ holomorfa, tal que para w_0 en Ω, z_0 es raiz simple de la ecuación $g(z) - w_0 = 0$. Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega - \{w_0\})$ tal que w_0 es un polo de orden m de f. Si $h(z) = f(g(z))$, determinar el tipo de singularidad de h en z_0. ¿Y si z_0 es una raiz de multiplicidad k de la ecuación $g(z) - w_0 = 0$? Ejemplificar ambas situaciones.

6. Sea $f(z)$ una función que tiene solamente polos en un dominio D del plano complejo. Clasificar las singularidades de $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ en D.

7. ¿Existe una función $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} - \{1,5\})$ con un único cero simple, polos simples en $z=1$ y $z=5$ respectivamente, tal que $\lim\limits_{z\to\infty} z f(z) = 3$, y $\displaystyle\int_{|z|=2} f(z)\,dz = 3\pi i$?

8. Caracterizar las funciones analíticas en $\mathbb{C}$ según tengan en ∞ una singularidad evitable, un polo (de orden m) o una singularidad esencial.

9. Probar que si f es holomorfa para $|z| > R$ y su límite en infinito es cero, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $|f(z)| \leq \dfrac{c}{|z|^m}$ para $|z| > R$ y algún $c > 0$.

10. Para cada función f del Ejercicio 1, verificar si $\mathrm{Res}[f, 0]$ y de $\mathrm{Res}[f, \infty]$ están definidos y en tal caso, calcularlos.

11. *a*) Probar que si f tiene un polo simple en z_0 y g es holomorfa en z_0 entonces $\mathrm{Res}[fg, z_0] = g(z_0)\mathrm{Res}[f, z_0]$.

    b) Supongamos que f y g son dos funciones holomorfas y que z_0 es cero de orden k y de orden $k+1$ de f y g respectivamente. Probar que:

$$\mathrm{Res}\Big[\frac{f}{g}, z_0\Big] = (k+1)\frac{f^{(k)}(z_0)}{g^{(k+1)}(z_0)}.$$

12. Hallar todas las funciones f que verifican: f tiene un polo doble con residuo igual a 3 en $z=0$; f tiene un polo simple con residuo igual a 7 en $z=1$ y f es acotada en un entorno del infinito.

13. Sea $f(z)=\dfrac{e^z-1-z}{z^n}$, $n\in\mathbb{N}$.

    a) Indicar para qué valores de n la serie de Laurent de $f(z)$ tiene sólo términos de exponentes no negativos con radio de convergencia infinito.

    b) Indicar para qué valores de n $\exists z_0\in\mathbb{C}$ tal que z_0 es polo de orden k de $f(z)$. Hallar en ese caso la serie de Laurent en una vecindad de z_0.

    c) Calcular $\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ siendo $C\colon \{z\in\mathbb{C} : |z|=1\}$.

    d) ¿Qué tipo de singularidad tiene f en infinito? Hallar $\mathrm{Res}[f,\infty]$.

14. Calcular las integrales de las siguientes funciones a lo largo de los contornos que se indican recorridos con orientación positiva.

    (a) $f(z)=\pi\,\mathrm{sen}(\pi z)$ C: el cuadrado de vértices 0, 1, $1+i$ y i

    (b) $f(z)=\dfrac{\mathrm{sen}(3z)}{(z-\frac{\pi}{4})^2}$ C: el cuadrado de vértices $2-2i$, $2+2i$, $-2+2i$ y $-2-2i$

    (c) $f(z) = \dfrac{e^{-2z}}{e^{-2z}+9} + z\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{z}\right)$ $C\colon \{z\in\mathbb{C} : |z|=9\}$

    (d) $f(z)=\dfrac{1}{z\,(1-e^{-2iz})}$ $C\colon \{z\in\mathbb{C} : |z-1|=1{,}5\}$

    (e) $f(z)=(1+z)(e^{\frac{1}{z}}+e^{\frac{1}{z-1}})$ $C\colon \{z\in\mathbb{C} : |z|=3\}$

    (f) $f(z)=\dfrac{(z-i)e^{1/z}}{z^2}$ $C :: \{z\in\mathbb{C} : |z-1-i|=2\}$

15. Calcular los posibles valores de

$$\int_{|z|=r} \left((z-r)e^{|z|} + \frac{z\,e^z}{z^2+a^2}\right) dz \quad (a>0,\ r>0,\ a\neq r)$$

16. Determinar si vale la siguiente igualdad:

$$\int_{|z|=\frac{5}{4}} \frac{1}{\mathrm{sen}(\frac{\pi}{z})}\,dz = \int_{|z|=\frac{3}{4}} \frac{1}{\mathrm{sen}(\frac{\pi}{z})}\,dz \ + \ 4i$$

Cálculo de integrales reales mediante integración compleja.

17. Analizar la convergencia de las siguientes integrales impropias:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+4x^3}}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{\cos x}\,dx$ (e) $\displaystyle\int_0^{10} x^p \operatorname{sen} x\,dx,\ \forall\, p\in\mathbb{R}$ (f) $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x}\,x^p\,dx,\ \forall\, p\in\mathbb{R}$

(g) $\displaystyle\int_0^1 x^p \ln x\,dx,\ \forall\, p\in\mathbb{R}$ (h) $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^p \ln x\,dx,\ \forall\, p\in\mathbb{R}$

18. Verificar la siguiente igualdad, previo análisis de convergencia:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad a>0.$$

(Sugerencia: usar integración doble y coordenadas polares.)

19. Estudiar la convergencia de las siguientes integrales y de acuerdo a lo hallado, calcular el valor de la integral utilizando residuos.

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^2+1}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+5x^2+4}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(3x)}{1+x^2}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x\,(1+x^2)}\,dx$ (e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,\operatorname{sen}(\pi x)}{(1+x^2)(x^2-4)}\,dx$

20. <u>Para todo $\omega\in\mathbb{R}$</u>, comprobar que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{i\omega x}}{x^4+1}\,dx = i\pi e^{-|\omega|/\sqrt{2}}\operatorname{sen}(\omega/\sqrt{2})$

y deducir los valores de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos(\omega x)}{x^4+1}\,dx$ y de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\operatorname{sen}(\omega x)}{x^4+1}\,dx$.