

## Trabajo Práctico Nro. 4

### Sucesiones y Series Numéricas.

1. Analizar la convergencia de las siguientes sucesiones reales:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \ a_n = 3 - \frac{1}{n} & \text{(b)} \ a_n = (-1)^n \frac{5}{n} & \text{(c)} \ a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \\
 \text{(d)} \ a_n = \frac{n^2}{2} & \text{(e)} \ a_n = \frac{\text{sen}(2n)}{n} & \text{(f)} \ a_n = \frac{\sqrt{n^3+2}}{n^2-2} \\
 \text{(g)} \ a_n = \frac{n!}{(n+1)!} & \text{(h)} \ a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1} & \text{(i)} \ a_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}, \quad a \geq b \geq 0 \\
 \text{(j)} \ a_n = \cos(n\pi) & \text{(k)} \ a_n = \frac{\text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2} & \text{(l)} \ a_n = \frac{n^k}{2^n}, \quad k \in \mathbb{N}
 \end{array}$$

2. Hallar, si existe, el límite de las siguientes sucesiones de números complejos:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \ z_n = \sqrt[n]{n} + ir, \quad r \in \mathbb{R} & \text{(b)} \ z_n = \frac{n}{n+i3} - \frac{in}{n+1} \\
 \text{(c)} \ z_n = \frac{1+2n^2}{n^2} - i \frac{n-1}{n} & \text{(d)} \ z_n = i^n \\
 \text{(e)} \ z_n = n i^n & \text{(f)} \ z_n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n \\
 \text{(g)} \ z_n = \text{sen}(ni) & \text{(h)} \ z_n = (\cos t + i \text{sen } t)^n, \quad t \in \mathbb{R}
 \end{array}$$

3. Encontrar dos subsucesiones convergentes de cada una de las sucesiones:

$$\text{(a)} \ \{e^{n\pi i/3}\} \quad \text{(b)} \ \{i^{2n}\}$$

4. Sea una sucesión  $\{z_n\} \subset \mathbb{C}$ . Probar que:

- (i) Si  $\{z_n\}$  es una sucesión convergente entonces es acotada,
- (ii) Si  $\{|z_n|\}$  es una sucesión convergente entonces  $\{z_n\}$  es convergente.

En ambos casos, dar un contraejemplo de la recíproca.

5. Analizar la convergencia de las siguientes series reales:

$$\text{(a)} \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} \quad \text{(b)} \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)k} \quad \text{(c)} \ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+2^k} \quad \text{(d)} \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 + \cos(k)}{k}$$

6. Analizar la convergencia de las siguientes series reales:

$$\text{(a)} \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k 2^k} \quad \text{(b)} \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{100^k} \quad \text{(c)} \ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4k+1}{3^k} \quad \text{(d)} \ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{(k+1)!}$$

7. Analizar la convergencia de las siguientes series reales:

$$\text{(a)} \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k+1}}{k^k} \quad \text{(b)} \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{10^k} \quad \text{(c)} \ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1+k}{k}\right)^{k^2} \quad \text{(d)} \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)^k}{k}$$

8. Determinar el carácter de las siguientes series reales:

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+3} \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{3^k} \quad (c) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k\pi)}{\sqrt{k}} \quad (d) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{6^k}$$

En los casos que corresponda, analizar la convergencia absoluta de la serie.

9. Analizar cuáles de las siguientes series reales son absolutamente convergentes, cuáles condicionalmente convergentes y cuáles divergentes. En los casos convergentes en que sea posible, calcular a qué converge.

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^{k-1} \quad (c) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3}\right)$$

$$(d) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{2}{3}\right)^k \quad (e) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt[k]{k_0}}{2} \quad (f) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{4k^2-3}$$

$$(g) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{k^3+k+2} \quad (h) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k 3^k} \quad (i) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$$

$$(j) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \quad (k) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(k+1))^k} \quad (l) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(k+1)}(k+1)}{2k+1}$$

$$(m) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2k}{3k+1}\right)^k \quad (n) \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{k^2}\right) \quad (o) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k k!}{k^k} \quad r > 0, r \neq e$$

10. Analizar la convergencia absoluta y condicional de las siguientes series complejas. Si es posible, calcular a qué converge.

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n - i2^n}{3^n} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n} \quad (c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n}$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+3i)^n}{5^n} \quad (e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2i^n}{5+in^2} \quad (f) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\cos\left(\frac{n\pi}{5}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{5}\right)\right)$$

$$(g) \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\theta} \quad (f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n} \quad (h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n^2} \quad (\theta \in [0, 2\pi))$$

11. Dar ejemplos de una serie compleja (no real):

- (i) acotada pero que no converge,
- (ii) que converge sólo condicionalmente.

## Desarrollos en Series de Potencias.

12. Determinar el dominio de convergencia en  $\mathbb{C}$  de las series:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} a^n z^n, & a \in \mathbb{C} & \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n^2} & \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(z+1)^n}{3n+1} \\ \text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^{kn}, & k \in \mathbb{N} & \text{(e)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n \end{array}$$

13. a) Dada  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{a^2+n^2}$  con  $a > 0$ , hallar la región de convergencia de  $f(z)$  y probar que la convergencia es uniforme en la región cerrada.

b) Justificar que  $f$  es una función holomorfa y encontrar su derivada. ¿Es, la serie resultante al derivar término a término la  $f$ , uniformemente convergente en la región cerrada?

14. Hallar todos los  $z \in \mathbb{C}$  para los cuales la serie  $\sum_{n=30}^{\infty} \left(\frac{z}{z+1}\right)^n$  es convergente.

15. a) Desarrollar las siguientes funciones en serie de Taylor alrededor del punto  $z_0$  indicado:

$$\text{(i)} \exp z \quad z_0 = 0, \quad z_0 = \pi i \quad \text{(ii)} \frac{1}{z-1} \quad z_0 = 0, \quad z_0 = i$$

$$\text{(iii)} \sin z \quad z_0 = 0, \quad z_0 = \pi$$

b) A partir de (a), obtener el desarrollo en serie de Taylor centrado en  $z_0$  de:

$$\text{(i)} \operatorname{sh} z \quad z_0 = \pi i \quad \text{(ii)} \frac{1}{(z-1)^2} \quad z_0 = 0$$

$$\text{(iii)} \cos z \quad z_0 = \pi \quad \text{(iv)} \operatorname{Log} \left(\frac{1}{z-1}\right) \quad z_0 = i$$

c) Desarrollar las siguientes funciones en serie de Taylor alrededor del punto  $z_0$  indicado, recurriendo a un cambio de variable conveniente:

$$\text{(i)} \sin(2z+1) \quad z_0 = 0 \quad \text{(ii)} \sin z \quad z_0 = \frac{\pi}{4} \quad \text{(iii)} \exp(z^2) \quad z_0 = 0$$

16. a) Desarrollar las siguientes funciones racionales en serie de Taylor alrededor del punto  $z_0$  indicado, en base al desarrollo de una serie geométrica.

$$\text{(i)} \frac{1}{3z+2} \quad z_0 = 0 \quad \text{(ii)} \frac{z}{z^2-1} \quad z_0 = 0$$

$$\text{(iii)} \frac{1}{(3z+2)(z-1)} \quad z_0 = 0 \quad \text{(iv)} \frac{1}{z^2-1} \quad z_0 = \frac{1}{2}$$

b) Obtener el valor de la derivada de orden 10 de  $f(z) = \frac{z}{z^2-1}$  en  $z_0 = 0$ .

17. Determinar si la función  $\text{Arg}(z)$  admite un desarrollo de Taylor en discos abiertos del plano complejo y, en caso afirmativo, caracterizar tales discos.
18. Sea  $f(z)$  holomorfa en  $\mathbb{C}$ , para la que se sabe que existe una constante  $M > 0$  y un entero  $k \in \mathbb{N}$ , tal que se verifica:  $|f(z)| \leq M|z|^k$  para todo  $z$  en  $\mathbb{C}$ . Probar que  $f(z)$  es un polinomio de grado no mayor que  $k$ , nulo en  $z=0$ .  
(Sugerencia: probar que  $f^{(n)}(a) = 0 \forall a \in \mathbb{C}$ , y para todos los enteros  $n > k$ , usando la F.I.C. para las derivadas de una función holomorfa, y acotando las integrales).
19. Hallar el desarrollo en serie de Laurent en potencias de  $z$  para las siguientes funciones, de modo que sea convergente en los puntos  $z_0$  indicados. Especificar el dominio de convergencia de la serie calculada.

$$(i) f(z) = \frac{1}{z^2 - 2z - 3} \quad z_0 = 2 \quad (ii) f(z) = \frac{2z+1}{z^2 - 6z + 5} \quad z_0 = -8$$

$$(iii) f(z) = \frac{3z-1}{z^2 - 4z + 3} \quad z_0 = -2 \quad (iv) f(z) = \frac{2z^2}{2z^2 - 5z + 2} + \text{sen}\left(\frac{3}{z^2}\right) \quad z_0 = -i$$

20. Hallar el desarrollo en serie de Laurent de  $\frac{1}{z^2 - 1}$  en las regiones que se indican y especificar la correspondiente región de convergencia:
- en el infinito,
  - alrededor de  $z_0 = i$ ,
  - en  $|z+1| > 1$ .
21. Obtener todos los desarrollos de Laurent y determinar la región de validez de cada uno, para:

$$(i) f(z) = \frac{z-1}{(z+1)z(z-2)} \text{ en potencias de } (z+1),$$

$$(ii) f(z) = \frac{(z+1)e^{\frac{1}{z-i}}}{(z-i)} \text{ en potencias de } (z-i).$$

22. Hallar el desarrollo en serie de Laurent de la forma  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$  de la función  $f(z) = \frac{z}{(2z-1)(2z^{-1}-1)}$  tal que la serie numérica  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$  sea convergente.

23. Hallar el desarrollo en serie de Laurent de la forma  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$  de la función

$$f(z) = \frac{1}{(4z+1)(z-2)} \text{ de modo que}$$

- a) la serie numérica  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n a_n$  sea absolutamente convergente,

b) la serie numérica  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 a_n$  sea absolutamente convergente,

y calcular estas dos series numéricas.

24. ¿Cuáles de las siguientes funciones admiten desarrollo en serie de Laurent en una vecindad de 1 en potencias de  $(z-1)$ ? En caso negativo, decir por qué no. En caso afirmativo, describir la región de convergencia y analizar si se reduce a un desarrollo sólo con potencias no negativas.

(i)  $\text{Log}(z-1)$       (ii)  $\cotg(\pi z)$       (iii)  $\sqrt{z-1}$   
(iv)  $e^{\frac{1}{z-1}}$       (v)  $\frac{\text{tg}(\pi z)}{z-1}$       (vi)  $\text{sen}\left(\frac{1}{z-1}\right)$

25. ¿Admite la función  $f(z) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{z}}}$  un desarrollo de Laurent en potencias de  $z$ ? Caracterizar dicho desarrollo y determinar su región de validez.