Trabajo Práctico Nro. 3

Integrales Complejas

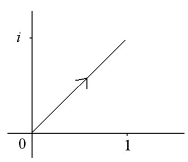
1. Calcular las siguientes integrales:

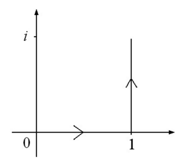
   (a) $\displaystyle\int_0^1 (1+it^2)dt$ (b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi/4} te^{-it^2}dt$

   (c) $\displaystyle\int_0^{\pi} (\operatorname{sen}2t + i\cos 2t)dt$

2. Calcular las siguientes integrales de línea:

   a) $\displaystyle\int_C \operatorname{Re}(z)\, dz$ a lo largo de las siguientes trayectorias:





   b) $\displaystyle\int_C \frac{1}{z}\, dz$, C: semicircunf. superior de $|z|=1$ desde $z_1=-1$ hasta $z_2=1$.

   c) $\displaystyle\int_C (2|z|+3)\, dz$, C: segmento del eje real que une $z_1=-1$ y $z_2=2$.

   d) $\displaystyle\int_C \pi\, e^{(\pi\bar{z})}\, dz$, C: borde del cuadrado de vértices $z_1=0$, $z_2=1$, $z_3=1+i$ y $z_4=i$, recorrido en sentido positivo.

3. Mostrar que para $m,n\in\mathbb{Z}$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{im\theta}e^{-in\theta}d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } m\neq n \\ 2\pi & \text{si } m = n \end{cases}$ y obtener el valor de $\displaystyle\int_\gamma z^m\bar{z}^n\, dz$ siendo γ la circunferencia centrada en el origen, de radio r, recorrida en sentido antihorario.

4. Sea la circunferencia $C: z-a=r_0e^{i\theta}$ donde $r_0>0$ y $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ y f continua sobre C. Demostrar que $\displaystyle\int_{C^+} f(z)\, dz = ir_0\int_0^{2\pi} f(a+r_0e^{i\theta})\, e^{i\theta}\, d\theta$.

5. Sea $f:\mathrm{A}\to\mathbb{C}$, $f=u+i\,v$ continua en A y γ una curva simple orientada incluída en A. Demostrar que $\operatorname{Re}\big(\int_\gamma f(z)dz\big)$ y $\operatorname{Im}\big(\int_\gamma f(z)dz\big)$ dan respectivamente, la circulación a lo largo de γ y el flujo del campo vectorial $(u,-v)$ a través de γ.

6. Sin calcular la integral, obtener las siguientes acotaciones:

   (a) $\left|\int_C \frac{1}{z^4}\,dz\right| \leqslant 4\sqrt{2}$ $\quad C$: segmento que une los puntos $z_1 = i$ y $z_2 = 1$.

   (b) $\left|\int_C \frac{\bar{z}}{\bar{z}+1}\,dz\right| \leqslant \frac{8}{3}\pi$ $\quad C$: circunferencia $|z| = \frac{2}{3}$, recorrida en sentido positivo.

   (c) $\left|\int_C \frac{1}{z^2+1}\,dz\right| \leqslant \frac{\pi}{3}$ $\quad C$: circunferencia $|z| = 2$, en el primer cuadrante.

7. Sea γ la semicircunferencia superior de $|z| = R$. Probar que:

   (a) $\lim\limits_{R\to+\infty} \int_\gamma \frac{e^{iz}}{z^2+a^2}\,dz = 0$ $\qquad$ (b) $\lim\limits_{R\to+\infty} \int_\gamma \frac{\operatorname{Log} z}{z^2}\,dz = 0$

8. Clasificar a los conjuntos conexos del ejercicio 17 (a) del Trabajo Práctico Nro. 2 en simplemente o multiplemente conexos.

9. *a*) Independencia del camino. Estudiar bajo qué condiciones es válido $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\lambda f(z)\,dz$ para dos curvas $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, $\lambda : [a, b] \to \mathbb{C}$ tales que $\gamma(a) = \lambda(a)$ y $\gamma(b) = \lambda(b)$.

   b) Aplicar, si es posible, el resultado del ítem (a) para calcular:

   (i) $\int_C \frac{1}{z}\,dz$ $\quad C$: semicircunf. inferior de $|z| = 1$ desde $z_1 = 1$ hasta $z_2 = -1$.

   (ii) $\int_C \frac{1}{z}\,dz$ $\quad C$: curva definida por $x^4 + y^4 = 1$ desde $z_1 = -1$ hasta $z_2 = 1$.

10. Calcular, en cada caso, la integral de línea de la función f a lo largo de los contornos C indicados:

    (a) $f(z) = \frac{1}{z^2+2z+2}$ $\qquad C = \{z \in \mathbb{C} / \ |z| = 1\}$.

    (b) $f(z) = z^3$ $\qquad$ (i) $C = \{z \in \mathbb{C} / \ |z| = 1\}$,
    (ii) C: recta que une los puntos $z = 1$ y $z = i$,
    (iii) C: arco de circunferencia de centro 0 y radio 1 que une los puntos $z = 1$ y $z = i$,
    (iv) C: un contorno que une los puntos $z = 1$ y $z = i$.

    (c) $f(z) = z \operatorname{sen}(z^2)$ $\qquad C$: contorno que une los puntos $z = -i\pi$ y $z = i\pi$.

11. Sea $D = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ y γ la frontera de D, orientada de modo que los puntos de D están a la izquierda de γ. Probar que $\displaystyle\int_{\gamma} f(z)\, dz = 0$ para:

$$\text{(a) } f(z) = \frac{e^z}{z^2+9} \qquad \text{(b) } f(z) = \operatorname{ctg} z$$

12. *a*) Sean D y los contornos C, C_1 y C_2 como se indican en la Figura a (más abajo). Probar que si f es holomorfa en D y continua sobre los contornos C, C_1 y C_2, el valor de la integral de f sobre la frontera de D es cero (o sea que bajo estas condiciones, se puede extender el teorema de Cauchy a dominios múltiplemente conexos). Deducir la relación entre las integrales de f sobre C, C_1 y C_2.

    b) Mostrar:

$$\int_{|z|=2} \frac{\operatorname{sen} z}{z^2-1} dz = \int_{|z-1|=1/2} \frac{\operatorname{sen} z}{z^2-1} dz + \int_{|z+1|=1/2} \frac{\operatorname{sen} z}{z^2-1} dz$$

    c) Analizar bajo qué condiciones $\displaystyle\int_{C_1} f(z)\, dz = \int_{C_2} f(z)\, dz$ siendo $f(z) = \dfrac{1}{(z-a)(z-b)}$ y C_1 y C_2 como se indican en la Figura b.

Figura a

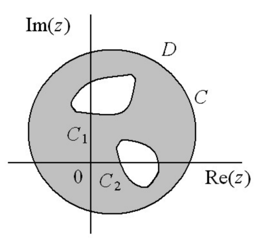
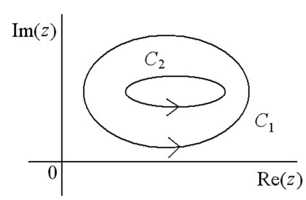


Figura b



13. Aplicando la fórmula integral de Cauchy, integrar la función $f(z) = \dfrac{2z^2-4}{z^2+1}$ a lo largo del círculo de radio 1 y recorrido una vez en sentido antihorario, con centro en:

    (a) $z = i$ (b) $z = \dfrac{1}{2}$ (c) $z = -i$

14. Calcular las siguientes integrales:

$$\text{(a)} \int_{|z|=1} \frac{z^2+4}{z}\, dz \qquad \text{(b)} \int_{|z|=4} \left(\frac{\cos(\pi z)}{z+1} + \frac{2e^z}{z-3} \right) dz \qquad \text{(c)} \int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{\operatorname{Log}(z+2)}{(z+1)(z^2+4)}\, dz$$

15. Calcular todos los posibles valores de la integral $\displaystyle\int_\Gamma \frac{dz}{z\,(z^2-1)}$ para diferentes contornos cerrados Γ que no pasen por $0, 1$ y -1.

16. Calcular la integral de línea de las siguientes funciones:

    (i) $f(z) = \dfrac{z^3-z}{(z+1)^2}$ (ii) $f(z) = \dfrac{z^4}{(z-1)^2(z-3)}$

    (iii) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sh} z}{(z^2-1)^2}$ (iv) $f(z) = \dfrac{e^z}{z^n}$ para $n>0$

    sobre el círculo de radio 2 y centro en: (a) $z=0$, (b) $z=2+i$.

17. Mostrar que si $f(z)$ es holomorfa en $\Gamma\cup\text{int}(\Gamma)$ donde Γ es un contorno cerrado en $\mathbb{C}$, entonces $\displaystyle\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz = \int_\Gamma \frac{f'(z)}{(z-a)}\,dz, \quad \forall\, a \notin \Gamma.$

18. Probar que si $f(z)$ es holomorfa en un dominio D y si el disco cerrado $|z-a| \leqslant R$ está en D, entonces $f(a) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(a+Re^{it})\,dt.$

    Este resultado puede interpretarse como un teorema del valor medio que expresa el valor de f en el centro de la circunferencia como un "promedio" de los valores sobre la misma.

19. Sea $f(z)$ una función holomorfa en $|z-a|<R$. Si $0<r<R$, demostrar que $f'(a) = \dfrac{1}{2\pi r}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})\,e^{-it}\,dt.$

20. Explicar por qué si $f=u+iv$ es holomorfa en un dominio D, existen todas las derivadas parciales de u y de v y son continuas en D.

21. Demostrar que si f es holomorfa en $|z-z_0|<R$ y continua en $|z-z_0|=R$ con $|f(z)|\leq M$ en $|z-z_0|=R$, entonces

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!M}{R^n} \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

22. Probar que si $f(z)$ es holomorfa y $|f(z)| < \dfrac{1}{1-|z|}$ en $B(0,1)$ entonces $|f'(0)|\leq 4$.

23. Justificar que, a excepción de la función nula, no existe función entera que tenga límite 0 en ∞.

Funciones Armónicas

24. Determinar si las siguientes funciones son armónicas indicando el dominio en que lo son.

   (a) $u(x,y) = e^{-x}\cos y$

   (b) $u(x,y) = e^{x}\,(x\cos y - y\,\mathrm{sen}\,y)$

   (c) $v(x,y) = x^2 - y^2 + e^{x}\cos y + x$

   (d) $v(x,y) = e^{2xy}\,cos(x^2 - y^2)$

   (e) $u(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$

   (f) $u(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$

   (g) $v(x,y) = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$

25. Hallar una función holomorfa $u + i\,v$ tal que su parte real (respectivamente, su parte imaginaria) coincida con la función u (respectivamente, v) de cada ítem del ejercicio 31. Especificar su dominio de holomorfía.

26. Establecer las condiciones que deben cumplir a, b y $c \in \mathbb{R}$ para que las siguientes funciones sean armónicas en $\mathbb{R}^2$:

   (a) $u(x,y) = ax + bxy + cy$

   (b) $u(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$

27. Probar que si $\phi(x,y)$ es armónica en un dominio S entonces $\psi = \phi_x - i\phi_y$ es holomorfa en S (la función ψ se llama el gradiente conjugado de ϕ).

28. Justificar por qué si $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ es holomorfa, la función $3u^2\,v–v^3$ es armónica respecto a (x,y).

29. Obtener una conjugada armónica de $x^2 - y^2 + e^{2\pi(x-1)}\cos(2\pi y)$. Hallar la curva ortogonal a la curva definida por $x^2 - y^2 + e^{2\pi(x-1)}\cos(2\pi y) = 1$ en $(1,1)$.

Aplicaciones sobre armónicas conjugadas

30. Sea $\phi(x,y) = 2x - 6y$ la distribución de temperatura estacionaria de un sólido bidimensional. ¿Cuál es la temperatura compleja? Describir las líneas isotérmicas y las líneas de flujo.

31. El potencial complejo de un flujo de fluido está dado por $\Phi(z) = 1/z$ para $z \neq 0$. Hallar la velocidad compleja. Mostrar que la curva equipotencial que pasa por $(1,1)$ es $(x-1)^2 + y^2 = 1$. Obtener la línea de coriente que pasa por $(1,1)$. Graficar ambas curvas.

32. Encontrar el potencial complejo de un fluido que se mueve con velocidad constante v_0 y cuya dirección forma un ángulo θ con el semieje real positivo. Hallar las componentes del campo de velocidad. Esbozar las curvas equipotenciales y las líneas de corriente.

33. Determinar si las siguientes ecuaciones describen las líneas de corriente de un fluido ideal. En caso afirmativo, calcular el correspondiente potencial complejo:
    (i) $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x+1}\right) = cte$,
    (ii) $\dfrac{x-y}{x^2+y^2} = cte$,
    (iii) $e^{(x^2-y^2)}\operatorname{sen}(2xy) + x^2 - y^2 = cte$