Trabajo Práctico Nro. 2

Funciones Complejas. Funciones Holomorfas.

1. Expresar cada una de las siguientes funciones en la forma $u(x,y)+i\,v(x,y)$ donde u y v son funciones reales:

   (a) $f(z) = z^2$ (b) $f(z) = 2\,\bar{z} - 2\,i\,z$

   (c) $f(z) = 2|z|^2 - \dfrac{3i}{z-1}$ (d) $f(z) = \dfrac{z-i}{z+1}$

2. Describir el dominio de las funciones:

   (a) $f(z) = z^2 + i2z$ (b) $f(z) = \dfrac{y}{x} + i\,\dfrac{1}{1-y}$ (c) $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$

   (d) $f(z) = \dfrac{z}{\bar{z}-i}$ (e) $f(z) = \dfrac{1}{1-|z|}$

3. Hallar, si existen, los siguientes límites:

   (a) $\lim\limits_{z\to 2+3i} (z-5i)^2$ (b) $\lim\limits_{z\to 2} \dfrac{z^2+3}{iz}$ (c) $\lim\limits_{z\to 1} \dfrac{z^2-1}{z-1}$

   (d) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{z}{\bar{z}}$ (e) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\bar{z}^2}{z}$ (f) $\lim\limits_{z\to 0} (\dfrac{\bar{z}}{z})^2$

   (g) $\lim\limits_{z\to i} \dfrac{x+y-1}{z-i}$ (h) $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{z^2+1}{z^2+z+1-i}$ (i) $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{z^3+3iz^2+7}{z^2-i}$

4. Sean $P(z)$ y $Q(z)$ polinomios complejos de grado n y m respectivamente. Estudiar el $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ para $n>m$, $n=m$ y $n<m$

5. Analizar la continuidad de las funciones:

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{(z+i)^2+1}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ i & \text{si } z = 0 \end{cases} \qquad \text{en el origen.}$$

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^3-1}{z-1} & \text{si } |z| \neq 1 \\ 1 & \text{si } |z| = 1 \end{cases} \qquad \text{en los puntos } 1,\ -1,\ i \text{ y } -i.$$

6. Sean las funciones definidas para todo $z \neq 0$:

   (a) $f(z) = \dfrac{\operatorname{Re} z}{z}$ (b) $f(z) = \dfrac{z}{|z|}$ (c) $f(z) = \dfrac{z\operatorname{Re} z}{|z|}$

   ¿Cuáles pueden ser definidas en $z=0$ de modo que sean continuas en ese punto?

7. Sabiendo que la función $f(z)$ es continua en un conjunto abierto D, ¿qué se puede decir sobre la continuidad de $|f(z)|$, $\bar{f}(z)$, $f(\bar{z})$ y $\dfrac{1}{f(z)}$?

8. Supongamos que z_0 es un punto de discontinuidad de las funciones $f(z)$ y $g(z)$. Analizar si z_0 también es punto de discontinuidad de las funciones $f(z)+g(z)$, $f(z)\,g(z)$ y $\dfrac{f(z)}{g(z)}$.

9. Determinar los puntos en los cuales las funciones dadas tienen derivada y en esos puntos calcularlas:

   (a) $f(z) = x^2 + i\,y^2$ (b) $f(z) = (x - iy)e^{-(x^2+y^2)}$
   (c) $f(z) = \dfrac{x^2}{y} + i\,2xy$ (d) $f(z) = \operatorname{Im} z$
   (e) $f(z) = z\operatorname{Re} z + z\operatorname{Im} z$ (f) $f(z) = (\operatorname{Re} z)^2$
   (g) $f(z) = 3iz + z^2$ (h) $f(z) = |z|$
   (i) $f(z) = (z - 3i)^5$ (j) $f(z) = z^2 + \bar{z}^2 + 2\bar{z}$
   (k) $f(z) = \dfrac{1}{z}$ (l) $f(z) = \dfrac{1}{z-1} + \dfrac{z-1}{(z^2-1)(z-2)}$

10. Sea $f(z) = |z|^2$. Verificar que las condiciones de Cauchy Riemann se cumplen sólo si $z = 0$. ¿Qué se puede decir acerca de las existencia de $f'(z)$ si $z \neq 0$? ¿Existe $f'(0)$?

11. Demostrar que la función

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{(\bar{z})^3}{|z|^2} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

   no es derivable en $z = 0$ pero que las condiciones de Cauchy Riemann se verifican en ese punto.

   Este ejemplo muestra que <u>las condiciones de Cauchy Riemann no son suficientes para asegurar la derivabilidad</u>.

12. Decir en qué puntos del plano complejo son holomorfas las funciones del ejercicio 9. ¿Alguna es entera?

13. Determinar para qué valores de a y $b \in \mathbb{R}$, $f(z) = (ax + 2y) + i(-2x + by)$ es una función entera.

14. En cada uno de los siguientes casos, hallar la función holomorfa que satisface las condiciones dadas:

   (a) $\begin{array}{l} f'(z) = 3z^2 + 4z - 3 \\ f(1+i) = -3i \end{array}$ (b) $\begin{array}{l} \operatorname{Re}[f'(z)] = 3x^2 - 4y - 3y^2 \\ f(1+i) = 0 \end{array}$

15. *a*) Hallar todas las funciones $f(z)$ continuas en $\mathbb{C}$ tales que $f(z) = \bar{f}(z)$.

    b) Hallar todas las funciones $f(z)$ holomorfas en $\mathbb{C}$ tales que $f(z) = \bar{f}(z)$.

c) ¿Es cierto que si $f(z)$ es holomorfa en $\mathbb{C}$ entonces $g(z)=\bar{f}(\bar{z})$ es holomorfa en $\mathbb{C}$?

16. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas y justificar:

    a) Si $f(z)$ es holomorfa en $\mathbb{C}$ y $\mathrm{Re} f(z)=\mathrm{Im} f(z)$ en $\mathbb{C}$, entonces $f(0)\neq f(1)$.

    b) Si f es holomorfa en $\mathbb{C}$ y si $|f(z)+1|=1\ \forall z\in\mathbb{C}$, entonces $f$es constante en $\mathbb{C}$.

17. Un conjunto abierto y conexo de $\mathbb{C}$ se denomina dominio o recinto.

    a) Indicar cuáles de los siguientes conjuntos son dominios de $\mathbb{C}$:
    (i) $A=\{z\in\mathbb{C} : \mathrm{Arg}(z)\neq 0\}$ (ii) $A=\{z\in\mathbb{C} : \mathrm{Im}(z)\neq 0\}$
    (iii) $A=\{z\in\mathbb{C} : \mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(z)>0\}$ (iv) $A=\{z\in\mathbb{C} : 0<|\mathrm{Re}(z)|<1\}$
    (v) $A=\{z\in\mathbb{C} : 0<|z|<1\}$ (vi) $A=\{z\in\mathbb{C} : |z-2|>4\}$
    (vii) $A=\{z\in\mathbb{C} : |z|<1 \text{ y } |z|>2\}$

    b) Dar un ejemplo de una función no constante y holomorfa en un conjunto D con $f'(z)=0$ para toda $z\in D$.

18. Probar que para $f(z)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$ en coordenadas polares, las ecuaciones de Cauchy Riemann son:

$$r\,u_r=v_\theta \quad , \quad r\,v_r=-u_\theta$$

y si f es derivable en $z_0=r_0(\cos\theta_0+i\,\mathrm{sen}\,\theta_0)$, entonces

$$f'(z_0)=(\cos\theta_0-i\,\mathrm{sen}\,\theta_0)(u_r+iv_r)$$

Funciones Elementales y Multiformes

19. Indicar dominio, imagen y puntos de continuidad de las siguientes funciones:

    (i) $f(z)=az+b$ (ii) $f(z)=\dfrac{1}{z}$ (iii) $f(z)=\bar{z}$ (iv) $f(z)=z^2$ (v) $f(z)=|z|$

20. Para las siguientes funciones:

    (i) $f(z)=\exp z$ (ii) $f(z)=\mathrm{sen}\,z$ (iii)$f(z)=\cos z$ (iv) $f(z)=\mathrm{sh}\,z$
    (v) $f(z)=\mathrm{ch}\,z$ (vi) $f(z)=\mathrm{Arg}\,z$ (vii) $f(z)=\mathrm{Log}\,z$

    a) Obtener $\mathrm{Re}(f)$ y $\mathrm{Im}(f)$.

    b) Indicar dominio e imagen. Hallar sus ceros. Estudiar periodicidad.

21. Escribir las siguientes expresiones en forma binomial:

    (a) e^{2+i2} (b) e^3e^{i2} (c) e^i

    (d) $\mathrm{sen}(4+i2)$ (e) $\cos(e^{1+3i})$ (f) $\mathrm{tg}(i)$

    (g) $\mathrm{sh}(\frac{1}{1-i})$ (h) $\mathrm{Log}(1-i)$ (i) $(-i)^{2i}$ (sólo el valor principal)

22. Verificar que:

    (a) $\exp(0)=1$ (b) $\exp(i\frac{\pi}{2})=i$ (c) $\exp(z+i\pi)=-\exp(z)$ (d) $\overline{\exp(z)}=\exp(\bar{z})$

23. Resolver las siguientes ecuaciones:

    (a) $\exp z=1$ (b) $\cos z=0$ (c) $\cos z=10$

    (d) $\operatorname{sen} z=0$ (e) $\operatorname{sen} z-a=0 \quad (|a|\leqslant 1)$ (f) $\operatorname{ch} z=\dfrac{1}{2}$

    (g) $\operatorname{sh} z=2i$ (h) $\operatorname{Log} z=i\frac{\pi}{2}$ (i) $\operatorname{sh}(2z-1)=2i$

    (j) $(\exp z-1)^3=1$ (k) $\cos(\dfrac{1}{z})+1=0$ (l) $(\operatorname{Log} z)^2+\operatorname{Log} z=-1$

24. *a*) Demostrar que $f(z)=\exp(iz)$ está acotada en el semiplano superior (es decir, probar que $\exists\, M>0 / \,|f(z)|<M,\ \forall\, z\colon \operatorname{Im}(z)>0$). ¿Qué puede afirmar al respecto de $f(z)=\exp(-iz)$?

    b) Investigar si $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$ están, o no, acotadas en el semiplano superior y en el inferior.

    c) Verificar que $\operatorname{sen}^2(z)+\cos^2(z)=1$ para todo z complejo.

25. Determinar si existen los siguientes límites en el plano complejo ampliado $\mathbb{C}^*$:

    (a) $\lim\limits_{z\to\infty} \exp z$ (b) $\lim\limits_{z\to\infty} \exp(-z^2)$ (c) $\lim\limits_{z\to 0} \exp(-|z|^2)$

26. *a*) Para las funciones del ejercicio 20, determinar los puntos en que son continuas, derivables y/o holomorfas.

    b) Calcular $f'(z)$ en $z=z_0$, siendo:

    (i) $f(z)=\operatorname{sh}(\operatorname{sen} z) \quad z_0=\pi/4$ (ii) $f(z)=\exp(2\operatorname{ch} z) \quad z_0=i$

    (iii) $f(z)=\dfrac{1}{\cos z} \quad z_0=2i$ (iv) $f(z)=\operatorname{Log}(\cos^2 z) \quad z_0=\pi(1+i)$

27. Estudiar continuidad y holomorfía de:

    (a) $f(z)=\operatorname{tg} z$ (b) $f(z)=\dfrac{1}{\operatorname{sen}(1/z)}$ (c) $f(z)=\dfrac{1}{\exp z+3}$

    (d) $f(z)=\dfrac{1}{(\exp z-1)(\operatorname{sen}(1+i)z)}$ (e) $f(z)=e^{(x^2-y^2)}(\cos(2xy)+i\operatorname{sen}(2xy))$

    (f) $f(z)=\operatorname{sen}(\dfrac{x}{x^2+y^2})\operatorname{ch}(\dfrac{y}{x^2+y^2})-i\cos(\dfrac{x}{x^2+y^2})\operatorname{sh}(\dfrac{y}{x^2+y^2})$

28. Comprobar que:

    a) $\log z_1+\log z_2=\log(z_1z_2)$

    b) $\log z_1-\log z_2=\log\dfrac{z_1}{z_2}$ pero $\operatorname{Log}(-1-i)-\operatorname{Log} i\neq \operatorname{Log}(\dfrac{-1-i}{i})$

    c) $z^az^b=z^{a+b}$

    d) $\dfrac{z^a}{z^b}=z^{a-b}$

    e) $\log z^a=a\log z$ pero $\operatorname{Log} i^3\neq 3\operatorname{Log} i$

29. Para cada una de las siguientes funciones, describir el mayor dominio de holomorfía y calcular, si es posible, su valor en $z = i$:

    (a) $f(z) = \text{Log}(2z + i)$ (b) $f(z) = \text{Log}\left(\dfrac{1}{z(z-1)}\right)$

    (c) $(z-1+i)^{\frac{1}{2}}$ (d) $((z-i)(z-1))^{\frac{1}{2}}$

    tomando en (c) y (d) el valor principal.

Transformaciones del Plano Complejo

30. Probar que si $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ es derivable en (x,y) entonces

$$|\text{detDf}(x,y)| = J\begin{bmatrix} u & v \\ x & y \end{bmatrix} = |f'(z)|^2$$

31. ¿En qué se transforman las rectas x=cte e y=cte bajo la aplicación $f(z) = \dfrac{1+3z}{2+z}$?

32. Transformar la región D del plano complejo mediante las funciones indicadas:

    a) $D = \{z \in \mathbb{C} : |z-3| \leqslant 1 \ , \ \text{Re}\, z > 3 \ , \ \text{Im}\, z < 0\}$ $f(z) = \dfrac{1}{z-2}$

    b) $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \text{Arg}\, z < \dfrac{\pi}{4}\}$ $f(z) = \dfrac{z}{z-1}$

    c) $D = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}\, z > 0 \ , \ \text{Im}\, z > 0\}$ $f(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$

    d) $D = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| < 2 \ \wedge \ |z-1| > 1 \ , \ \text{Re}\, z < 1 \ , \ \text{Im}\, z > 0\}$ $f(z) = \dfrac{1}{z}$

    e) $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \ , \ \text{Im}\, z > 0\}$ $f(z) = 1 + \dfrac{1}{z}$

33. Encontrar la transformación homográfica que transforma los puntos:

    a) $-1, \ 0, \ 1$ en los puntos $1, \ i, \ -1$ respectivamente.

    b) $-1, \ i, \ 1+i$ en los puntos $i, \ \infty, \ 1$ respectivamente.

    c) $-1, \ \infty, \ i$ en los puntos $0, \ \infty, \ 1$ respectivamente.

34. Hallar la forma general de la transformación homográfica que transforma:

    a) El semiplano superior en el interior del círculo unitario.

    b) El interior del círculo unitario en el semiplano derecho, de modo que $f(z_1) = 0$ y $f(z_2) = \infty$, donde z_1 y z_2 son dos puntos de la circunferencia $|z| = 1$, tales que $\text{Arg}\, z_1 < \text{Arg}\, z_2$.

35. Probar que la composición de homografías es una homografía.

36. Para cada una de las siguientes funciones

    (i) $f(z)=az+b$ (ii) $f(z)=z^2$ (iii) $f(z)=\dfrac{-z+2i}{iz-1}$ (iv) $f(z)=\exp z$
    (v) $f(z)=\operatorname{sen} z$ (vi) $f(z)=\cos z$ (vii) $f(z)=\operatorname{sh} z$ (viii) $f(z)=\operatorname{ch} z$

    se pide

    a) Indicar los puntos en donde la transformación es conforme.

    b) Determinar la imagen por la transformación de la red cartesiana.

37. *a*) Hallar la imagen del primer cuadrante bajo la transformación $f(z)=z^3$.

    b) Hallar la imagen del rectángulo $\{z : z = x+iy, 0<x<\frac{\pi}{4}, -1<y<1\}$ bajo la transformación $f(z)=\operatorname{sen} z$.

    c) Hallar la imagen del sector $\{z : z = x+iy, -x<y<x, y<0\}$ bajo la transformación $f(z)=z^2$.

    d) Hallar la imagen de la semi–banda $\{z : z = x+iy, 0<x<\frac{\pi}{2}, y>0\}$ bajo la transformación $f(z)=\operatorname{sen}^2(z)$.

    En cada caso, indicar cómo se transforma el borde.

38. Describir $T(D)$ gráfica y analíticamente e <u>indicar con detalle</u> cómo se transforman por T los bordes de D:

    a) $D=\{z\in\mathbb{C} : 0<\operatorname{Re} z<\frac{\pi}{2} \text{ y } \operatorname{Im} z>0\}$ y $T(z)=sen(2z-\frac{\pi}{2})+1+i$,

    b) $D=\{z\in\mathbb{C} : \frac{\pi}{2}< Arg\, z<\frac{3}{4}\pi\}$ y $T(z)=\dfrac{z^2+1}{z^2-1}$,

    c) $D=\{z\in\mathbb{C} : 0<\operatorname{Re} z<\frac{\pi}{2} \text{ y } 0<\operatorname{Im} z<1\}$ y $T(z)=exp(iz)$.

    Estudiar, en cada caso, la biyectividad de T restringida a D.

39. Determinar una transformación conforme que transforme:

    a) el semiplano $\{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Re} z<\operatorname{Im} z\}$ en el círculo unitario,

    b) $\{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Re} z<0\}$ en $\{z\in\mathbb{C} : -\pi<\operatorname{Im} z<\pi\}$,

    c) $\{z\in\mathbb{C} : |z|<2 , \operatorname{Im} z<0\}$ en el primer cuadrante,

    d) $\{z\in\mathbb{C} : |z-1|<\sqrt{2} \wedge |z+1|<\sqrt{2}\}$ en el primer cuadrante,

    e) $\{z\in\mathbb{C} : 0<\mathrm{Re}\,\mathrm{z}<2 \text{ y } \mathrm{Im}\,\mathrm{z}>0\}$ en $\{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Im} z>1\}$.

    En cada caso, indicar cómo se transforma el borde y si la transformación entre ambos conjuntos es biyectiva.