dominadas y así sucesivamente, hasta que no sea posible eliminar ninguna. Al cabo de esta "limpieza" puede ocurrir, con un poco de suerte, que los jugadores queden con una única opción para jugar. En tal caso —como dijo Kissinger— la ausencia de alternativas les definirá el camino a seguir.

Ejemplo 2

En este juego, Xérez dispone de las acciones/estrategias $\{a, b, c, d\}$, Yérez de $\{s, t, u, v\}$ y los pagos son los siguientes:

	s	t	u	v
a	-1	0	-1	4
b	1	0	3	1
c	3	1	2	2
d	5	-3	-2	-1

Según se puede comprobar, ninguna de las estrategias de Xérez está dominada. Por ejemplo, a paga menos que las restantes si Yérez juega su acción s, pero paga más si Yérez juega v. También b paga menos que c y que d si Yérez juega s, pero paga más si Yérez juega u. Del mismo modo, para c y d podemos ver que ninguna estrategia domina a la otra, considerando los casos en que Yérez juega s y t.

En cambio, sí es posible encontrar una estrategia dominada para Yérez: t domina a v, pues pagar 0 es mejor que pagar 4 o 1, pagar 1 es mejor que pagar 2 y pagar -3 es mejor que pagar -1. Se puede ver que no hay otra estrategia dominada para Yérez y el juego se reduce, eliminando v, a uno más simple:

	s	t	u
a	-1	0	-1
b	1	0	3
c	3	1	2
d	5	-3	-2

Ahora bien, en este nuevo juego vemos que a Xérez no le conviene jugar *a*, cuyos pagos son menores que los de *c*. Así que... ¡a simplificar! Queda entonces:

	s	t	u
b	1	0	3
c	3	1	2
d	5	-3	-2

¿Se puede continuar? Como el lector puede verificar, ahora para Yérez, la estrategia *s* está dominada por *t*, lo que determina una nueva y gloriosa matriz:

	t	u
b	0	3
c	1	2
d	-3	-2

Con las cosas simplificadas hasta este punto, vemos que a Xérez no le conviene jugar *d*, de pagos visiblemente más feos que los otros. A tachar una vez más, pues:

	t	u
b	0	3
c	1	2

Si Yérez observa ahora este juego, no tardará mucho en eliminar su estrategia *u*, dominada por *t*. Ya no dispone de alternativas como para hacerse el misterioso y juega inevitablemente su acción *t*:

	t
b	0
c	1

Xérez jugará entonces *c*, pues domina a *b*. Podemos intentar ponerle algo de emoción y anunciar el resultado al modo de los premios Óscar:

Y el ganador es… ¡Xérez!

Sin embargo, debemos convenir que el resultado no ofrece demasiada sorpresa. La técnica de las estrategias dominadas lleva a la conclusión, al cabo de unos pocos pasos, de que Xérez gana 1 cada vez que jueguen.[2]

Pero volvamos ahora a la matriz original e imaginemos que Xérez tiene una personalidad un tanto ansiosa y no dispone, por lo tanto, de suficiente paciencia como para encarar el anterior análisis. Puede entonces decidir quedarse con una de sus estrategias, siguiendo quizás el consejo de algún amigo más o menos ducho en estas lides. Eso sí, debería cerciorarse de que no se trata del consejero malo mencionado en la Introducción; en tal caso, lo puede convencer de jugar *c* con el siguiente argumento:

—Fíjate, Xérez: te conviene jugar *c*. De todas las opciones, es la única que te garantiza una ganancia de por lo menos 1.

	s	*t*	*u*	*v*
c	3	1	2	2

[2] Vale la pena observar que el camino no es necesariamente único: en el ejemplo, se podría haber eliminado antes la estrategia *u*, pues una vez eliminada la fila *a* también se encuentra dominada por *t*.

Si Xérez juega de esta forma, la mejor opción de Yérez es jugar *t*: no le conviene cambiarse a otra estrategia porque tendría que pagar más.

Pero también podría haber ocurrido, antes de comenzar, que otro amigo igualmente sensato (o el mismo, nunca se sabe) aconseje a Yérez:

—Vea, Sr. Yérez: le recomiendo jugar *t* y así se verá obligado a pagar 1 como máximo.

	t
a	0
b	0
c	1
d	−3

Como antes: si Yérez sigue el consejo, la mejor opción para su rival es jugar *c*. En resumen:

- Si Xérez juega *c* entonces a Yérez le conviene jugar *t*, que es la *mejor respuesta* a *c*.
- Si Yérez juega *t*, a Xérez le conviene jugar *c*, que es su *mejor respuesta* a *t*.

Vale la pena confrontar estas conclusiones con la matriz original: de nada le sirve a Xérez dejarse tentar por resultados quiméricos como el 5 y jugar la fila inferior, pues saldrá perdiendo si Yérez (con toda lógica) juega *t*. Del mismo modo, tampoco Yérez debe ilusionarse y pensar que puede ganar 3 al jugar *t*, porque la jugada correcta de Xérez no es *d* sino *c*.

En el sencillo ejemplo previo aparecieron varios conceptos centrales de la teoría, algunos de los cuales se generalizan para juegos arbitrarios.

El primero se refiere al hecho de garantizarse una *ganancia mínima* (o una *pérdida máxima*). Para los juegos de suma cero, en caso de que los valores obtenidos por ambos jugadores coincidan, se tratará justamente del *valor* del juego.

Otro concepto importante es el de *mejor respuesta*, que significa: dado que mi rival hace tal cosa, lo mejor que yo puedo hacer es esta otra. Cuando este razonamiento es mutuo, a ninguno le convendrá desviarse de lo que está haciendo y, nuevamente, obtenemos el valor del juego. En las próximas secciones veremos cómo utilizar estas ideas para resolver los juegos de suma cero.

Minimaximizando, o maximinimizando

El teorema fundamental de la teoría de juegos de suma cero es el mencionado *teorema minimax*, que fue demostrado por von Neumann en 1928. Antes de verlo en detalle, repasemos el ejemplo anterior desde una nueva óptica.

Según vimos, descartando estrategias dominadas, la manera apropiada de jugar consiste en que Xérez juegue la acción c y Yérez la acción t. De esta forma concluimos que el valor del juego es 1.

	s	t	u	v
a	−1	0	−1	4
b	1	0	3	1
c	3	1	2	2
d	5	−3	−2	−1

Pero (alentados por sus respectivos amigos) los jugadores podrían plantearse el problema de otro modo. Para cada acción, Xérez tiene garantizado un pago mínimo: se trata, simplemente, de lo peor que le podría ir en caso de elegir dicha acción. Su cálculo no requiere grandes destrezas, pues no consiste en otra cosa que en buscar el mínimo de cada fila. Pero ahora puede quedarse con el máximo de esos mínimos, como una forma de decirse:

Si me va a ir siempre de la peor manera posible,
elijamos entonces el mejor de esos "peores".

Así, el pago mínimo de la alternativa *a* es -1, el de *b* es 0, el de *c* es 1 y el de *d* es -3. El mayor de estos cuatro valores es 1, que resulta de jugar la acción *c*. En este ejemplo, el "mejor de los peores" no está mal, pues se asegura de ganar 1: a este valor podemos llamar su *nivel de seguridad*. Si Xérez juega la estrategia *c*, se garantiza obtener en el juego un pago mayor o igual que su nivel de seguridad.

A su vez, Yérez buscará pagar lo menos posible. Para ello, razona al revés que Xérez: en cada columna se fija cuánto es lo máximo que le podría costar jugar esa estrategia, y luego busca el mínimo de los máximos.[3] En el ejemplo, el pago máximo correspondiente a la acción *s* es 5, el de *t* es 1, el de *u* es 3 y el de *v* es 4. Minimizando, la acción elegida es *t*, que le asegura un pago, como máximo, de 1.

Hemos llegado a una situación interesante: Xérez tiene una estrategia que le permite ganar al menos 1, mientras que Yérez tiene una estrategia que le permite perder a lo sumo 1.

[3] En realidad, razona *igual* que Xérez, en el sentido de suponer para cada alternativa el "peor de los mundos posibles". Lo que ocurre es que los pagos reflejan el punto de vista del primer jugador: lo que para Xérez es ganancia, para Yérez es pérdida. Pero ambos persiguen el mismo objetivo: Xérez quiere maximizar sus ganancias y Yérez quiere minimizar sus pérdidas.

Queda determinado un equilibrio, en el que ninguno de los dos puede modificar la situación: el valor del juego es 1, y las estrategias óptimas son c para Xérez y t para Yérez, tal como habíamos obtenido antes.

Tenemos entonces (una vez más, y van…) resuelto el juego: Xérez debe jugar c, Yérez debe jugar t, y el valor del juego es 1. El resultado es exactamente el mismo de antes, aunque el enfoque ha cambiado: ahora hemos encontrado cierto lugar de la matriz que es el mínimo de su fila y el máximo de su columna. A un lugar tan privilegiado se lo denomina punto de ensilladura o simplemente *punto silla*. La denominación se inspira, claro está, en la forma de una silla de montar, en cuyo centro encontramos un mínimo si la recorremos desde la cabeza hasta la grupa, pero un máximo si ahora nos movemos, para gran desconcierto del caballo, de un flanco al otro.

Estrategias mixtas

Los métodos que vimos hasta ahora no nos permiten resolver cualquier juego. En la Introducción vimos el juego de par o impar explicado por Edgar Allan Poe:

> Este juego es sencillo y se juega con bolas. Uno de los participantes tiene en la mano cierto número de esas bolas y le pregunta a otro si ese número es par o impar. Si éste lo adivina con exactitud, el adivinador gana una; si yerra, pierde una.

La matriz de pagos del juego es

	P	I
P	1	-1
I	-1	1

y un rápido análisis nos convencerá de que no hay estrategias dominadas para eliminar.

Tampoco existen puntos de ensilladura, ya que el mínimo de cada fila no es el máximo de su correspondiente columna. Por tal motivo, se ve que los niveles de seguridad de ambos jugadores no coinciden.

Llegó el momento, señores, de hacer intervenir al azar. Cuando no sabemos cuál de todas (en este ejemplo son solo dos) las acciones debemos seguir —pues cada una resulta o no conveniente según lo que juegue nuestro rival—, el secreto será ampliar el *nivel de seguridad*. No vamos a observar ahora las ganancias concretas que obtendremos, sino las ganancias *esperadas*, en el sentido probabilístico que vimos en la Introducción, suponiendo que elegimos nuestras acciones al azar. En el ejemplo, imaginemos que elegimos P con probabilidad p y elegimos I con probabilidad $1 - p$, para un valor de p que todavía no conocemos. Si nuestro rival elige su alternativa P, el pago esperado para nosotros será

$$p \cdot 1 + (1 - p) \cdot (-1) = 2p - 1,$$

mientras que, si elige jugar I, nuestro pago esperado será

$$p \cdot (-1) + (1 - p) \cdot 1 = 1 - 2p.$$

La primera impresión, acaso algo triste, es que no hemos conseguido nada, pues cada resultado es el inverso del otro: si uno de los dos valores esperados es positivo, el otro será negativo. Sin embargo, hay un valor especial, $p = 1/2$, que hace iguales a ambos pagos esperados. Así, si elegimos P o I con probabilidad $1/2$, no importa qué haga nuestro rival, nuestro pago esperado es cero. El mismo análisis hecho desde el lado de nuestro rival nos muestra que si juega *P* o *I* con probabilidad ½, su pago esperado también es cero.

Hay un punto que no es importante aquí, pero lo será en el próximo capítulo: estamos jugando al azar, y elegimos la probabilidad que asignamos a cada acción de manera de cobrar lo mismo —en promedio— sin importar qué acción elija nuestro rival. Notemos que también pudimos haber dicho, equivalentemente, "de manera que nuestro rival pague lo mismo" (como antes, en promedio): esto es así porque lo que un jugador gana es exactamente lo mismo que el otro jugador pierde. Si nos resulta indiferente qué acción elige nuestro rival, también él se mostrará indiferente respecto a qué acción utilizar.

Ahora, el valor del juego es este pago esperado que gana un jugador y que paga el otro. Este valor es en realidad un valor esperado; puede no coincidir con ninguno de los pagos, pero es lo que ocurriría en promedio si el juego se jugase repetidamente.

El ejemplo de *par* o *impar* es claro al respecto: el valor es 0, pero los pagos posibles cada vez que jugamos son 1 o -1. Esto no debe confundirnos: es apenas otra versión del problema de los pollos y la estadística de Shaw (véase la Introducción, p. 55).

Cuando el jugador asigna a cada una de sus acciones una probabilidad, y luego sortea de alguna manera cuál jugará, decimos que está jugando con una *estrategia mixta*. El concepto fue introducido por el mencionado Émile Borel, quien analizando el póker concluyó que aumentar las apuestas solo cuando se tenían buenas cartas no era muy inteligente. Hay que tratar de confundir al rival: a veces, dice Borel, conviene apostar fuerte teniendo una buena mano, pero a veces conviene quedarse en silencio y dejar que el rival apueste. Y lo mismo en caso de tener cartas malas.[4]

Aunque suene extraño, estas estrategias engloban a las anteriores en algún sentido: cada acción de un jugador se puede pensar también como una estrategia mixta muy particular, en la que asignamos probabilidad 1 a la acción correspondiente y 0 a cada una de las otras. En los ejemplos anteriores, se dice que se llega a *equilibrios en estrategias puras*, mientras que en problemas como el último, lo que se obtiene es un *equilibrio en estrategias mixtas*.

Vale la pena aclarar que el procedimiento no es tan sencillo de utilizar cuando se tienen más de dos acciones; más adelante volveremos sobre este punto.

Regresemos al problema de la angustia del portero, y veamos por qué decíamos que, si bien es similar al de par e impar, se trata de un juego diferente.

Memorias de un (angustiado) arquero[5]

El problema, tal como lo hemos planteado, es muy simple. El árbitro ha marcado un penal y el ejecutante se sitúa

[4] Algo similar ha sido expresado, algunas décadas más tarde, en la letra del tango *Cuando me entrés a fallar*, de Celedonio Flores, que hace alusión a un juego de cartas muy popular en Argentina:

> Cuántas veces con un cuatro a un envido dije "quiero"
> y otra vez me fui a baraja y tenía treinta y tres.

[5] A diferencia de España, esta es la denominación más empleada en los países latinoamericanos. Pero hay muchas otras formas de decirlo, como bien aclara el escritor uruguayo Eduardo Galeano en "El Arquero": "También lo llaman portero, guardameta, golero, cancerbero o guardavallas, pero

ante el balón, a los 11 reglamentarios metros del preocupado portero. Para simplificar, podemos dejar de lado algunos sucesos poco probables, al menos si suponemos futbolistas no muy "pataduras": por ejemplo, que la pelota vaya a parar a la tribuna. Vamos a limitarnos únicamente a dos sucesos posibles, palo derecho y palo izquierdo. Entonces puede verse que las chances del portero son muy bajas, ya que el hecho de acertar el palo no garantiza que el penal sea atajado. El (angustiado) portero elige el palo izquierdo; si el ejecutante patea al palo derecho entonces el gol es inexorable. Pero si patea para el lado elegido por el arquero, podemos suponer que las probabilidades de que el penal sea atajado son, por ejemplo, del 60%. En tal caso, el resultado esperado al acertar el palo es de $0.6 \cdot 1 + 0.4 \cdot (-1) = 0.2$, y la matriz (desde el punto de vista del arquero) es la siguiente:

	I	D
I	0.2	−1
D	−1	0.2

En definitiva, la situación es similar a la que se describe en el cuento de Poe; por tal motivo, más de una vez se ve a los arqueros experimentados sacar provecho de algún ejecutante algo "bobalicón" (véase p. 60). Solo que, como anticipamos, el *valor del juego* no es el mismo. En el caso de *par o impar*, la ganancia esperada es claramente 0: es fácil ver que si se juega una sola vez la mejor jugada consiste en elegir al

bien podría ser llamado mártir, paganini, penitente o payaso de las bofetadas. Dicen que donde él pisa, nunca más crece el césped." Existen incluso otros modos, que se emplean especialmente cuando el arquero comete algún error grosero, pero no viene al caso mencionarlos aquí.

azar con iguales probabilidades para ambas opciones. Cada jugador debe arrojar al aire una moneda y jugar par o impar de acuerdo al resultado de cara o cruz: así las chances de ganar o perder se equiparan, y no hay manera de que el rival obtenga un beneficio adicional por el hecho de conocer nuestra estrategia.

Algo similar ocurre en el juego de los penales. Un procedimiento de tales características no parece muy práctico a la hora de patear un penal e iría en claro detrimento del espectáculo: nada más aburrido que contemplar a dos deportistas (uno de ellos provisto de guantes, que no hacen más que dificultar su tarea) arrojar al aire sus respectivas monedas ante la mirada absorta de las hinchadas. Pero es la respuesta que proporciona la teoría de juegos: más aún, puede calcularse que el valor del juego es de -0.4, que corresponde al valor esperado para el arquero en cualquiera de sus dos elecciones posibles. En esta simplificación que hemos efectuado, su angustia puede medirse con precisión matemática. En el juego de par o impar, en cambio, resulta claro que el valor es 0; no hay un jugador que resulte *a priori* más favorecido que el otro.

Más allá del valor diferente que tienen los dos juegos, cabe preguntarse: ¿por qué una moneda? En otras palabras, ¿por qué elegir alguna de las dos alternativas con probabilidad del 50%? Nuevamente, la respuesta es sencilla: si el delantero supiera que elegiremos, por ejemplo, nuestro palo derecho con probabilidad del 70%, entonces seguramente elevaría su probabilidad de elegir el palo izquierdo. Cualquier forma de asignar probabilidades a las alternativas que no sea "*fifty and fifty*" brinda al rival una información adicional, vale decir (para emplear el elegante lenguaje que aprendimos en la Introducción): disminuye la entropía.

Pero ahora podemos suponer una situación ligeramente distinta. Imaginemos que por una fuerte presión de los medios televisivos, cuyos camarógrafos son en su mayoría diestros, la FIFA anuncia una reglamentación según la cual los goles que se producen en el palo derecho del arquero valen el doble. En tal caso la matriz (más específicamente, su segunda columna) es otra; si el penal va hacia el palo derecho y el arquero se arroja al palo izquierdo pierde 2, mientras que si adivina el palo entonces el valor esperado es $0.6 \cdot 1 + 0.4 \cdot (-2) = -0.2$:

	I	D
I	0.2	-2
D	-1	-0.2

¿Cómo conviene jugar ahora? Para entenderlo, prestemos atención nuevamente a la estrategia mixta del caso anterior. Jugar I o D con probabilidad ½ hace que la manera de jugar del otro resulte indiferente: no una vez que ya jugamos, por cierto, ya que si elegimos el palo derecho vamos a tener evidentes deseos de que hacia allí se dirija el penal. Pero sí en términos de *valor esperado*, pues así el rival juegue I o D nuestras perspectivas son en ambos casos las mismas: $0.5 \cdot 0.2 + 0.5 \cdot (-1) = 0.5 \cdot (-1) + 0.5 \cdot 0.2 = -0.4$. Como dijimos, este resultado indica el valor del juego.

En esta nueva situación, en la que los goles a la derecha son más valiosos, vamos a elegir la probabilidad p de arrojarnos al lado derecho (y por consiguiente, la probabilidad $1-p$ de arrojarnos al lado izquierdo) calculando en primer lugar el valor esperado bajo las dos posibles elecciones de nuestro rival. Esto puede escribirse de la siguiente manera:

- Valor esperado si el rival juega I:

$$VE/I = p \cdot 0.2 + (1-p) \cdot (-1) = 1.2 \cdot p - 1.$$

- Valor esperado si el rival juega D:

$$VE/D = p \cdot (-2) + (1-p) \cdot (-0.2) = -1.8 \cdot p - 0.2.$$

Como vimos antes, la mejor elección es aquella que nos hace indiferentes ante la elección del rival, lo cual nos lleva a buscar el valor de p tal que

$$1.2 \cdot p - 1 = -1.8 \cdot p - 0.2.$$

Un sencillo cálculo determina entonces que $p = 4/15$, es decir: aproximadamente la cuarta parte de las veces conviene arrojarse a la izquierda, y el resto a la derecha. A todo esto, el rival puede preguntarse: "Y yo, ¿para dónde pateo?" Para eso, más que un preparador físico le conviene acudir a un "preparador matemático", capaz de efectuar un cálculo análogo al anterior. Si suponemos que patea para la izquierda con probabilidad q y para la derecha con probabilidad $1 - q$, resulta:

- Valor esperado si el rival juega I:

$$VE/I = q \cdot 0.2 + (1-q) \cdot (-2) = 2.2 \cdot q - 2.$$

- Valor esperado si el rival juega D:

$$VE/D = q \cdot (-1) + (1-q) \cdot (-0.2) = -0.8 \cdot q - 0.2.$$

El valor de q se obtiene al igualar ambos valores esperados:

$$2.2 \cdot q - 2 = -0.8 \cdot q - 0.2;$$

de allí se obtiene, en definitiva,

$$q = \frac{3}{5} = 0.6.$$

Finalmente, ¿cuál es el valor del juego? Para el arquero, si juega I con probabilidad $4/15$ el valor esperado es siempre el mismo, no importa hacia dónde vaya la pelota:

$$\frac{4}{15} \cdot 0.2 + \frac{11}{15} \cdot (-1) = \frac{4}{15} \cdot (-2) + \frac{11}{15} \cdot (-0.2) = -0.68.$$

De la misma forma, el delantero hace sus propias cuentas con el valor $q = 0.6$ antes obtenido:

$$0.6 \cdot 0.2 + 0.4 \cdot (-2) = 0.6 \cdot (-1) + 0.4 \cdot (-0.2) = -0.68.$$

Esto no es casualidad: es posible demostrar que para cualquier juego de suma nula estos dos resultados deben coincidir, lo que define el valor (angustioso o no) del juego. A la vista del anterior análisis podemos concluir que quizás convenga pensarlo dos veces antes de cometer un penal.

Mejor respuesta

En determinados juegos, podemos aplicar una idea diferente. Como vimos, cuando existe un equilibrio con dos estrategias puras, cada una era la mejor respuesta que tenía un jugador ante la elección del otro. Si bien podríamos analizar cada par de estrategias y ver si una es la mejor respuesta de la