86.05 - Señales y Sistemas

Guía 1: Señales en el tiempo

= Python, Julia, MATLAB, OCTAVE, etc.

---

1. Determine los valores en forma rectangular de los siguiente números complejos:

(**a**) $e^{j\pi/2}$

(**b**) $e^{j3\pi/2}$

(**c**) $e^{j\pi}$

(**d**) $e^{j(\pi/2+2\pi m)}$ con $m \in \mathbb{Z}$

(**e**) $e^{j\pi/2+2\pi m}$ con $m \in \mathbb{Z}$

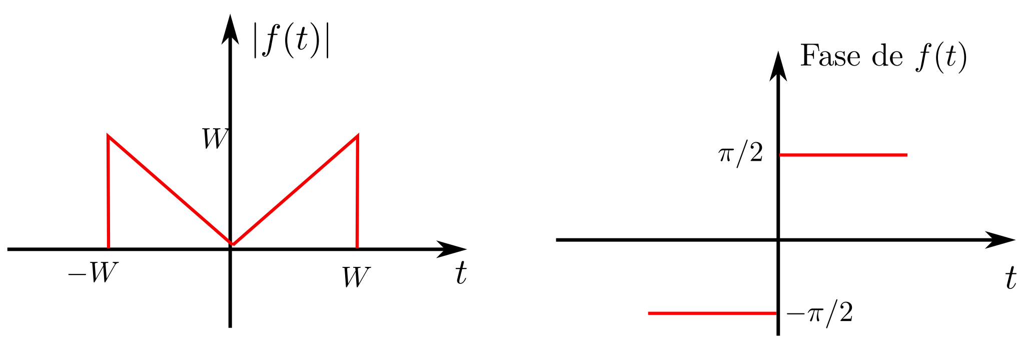
(**f**) j^j

(**g**) $\bar{j}^j$

(**h**) $\frac{3+5j}{1+j}$

---

2. Dado el siguiente gráfico de módulo y fase para la función $f(t)$, encuentre una expresión en forma rectangular para cada valor de t.



---

3. Usando que $\cos(\theta) = \frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2}$ y $\sin(\theta) = \frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j}$ demuestre las siguientes identidades trigonométricas:

(**a**) $\sin(\theta \pm \frac{\pi}{2}) = \pm\cos(\theta)$

(**b**) $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$

(**c**) $\sin(\theta_1+\theta_2) = \sin(\theta_1)\cos(\theta_2)+\sin(\theta_2)\cos(\theta_1)$

(**d**) $\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) = \frac{\cos(\theta_1-\theta_2)+\cos(\theta_1+\theta_2)}{2}$

---

4. Graficar esquemáticamente las siguientes señales de tiempo continuo y determinar si son periódicas o no.

(**a**) $x(t) = \cos(\frac{2\pi}{8}t)$

(**b**) $x(t) = \sin(\pi t) + \sin(\frac{2\pi}{3}t)$

(**c**) $x(t) = u(t-3) - u(t-5)$

(**d**) $x(t) = \int_{-\infty}^{t}(\delta(\tau-4) - \delta(\tau-6))d\tau$

(**e**) Sinc normalizada:

$$x(t) = \mathrm{sinc}(t) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

(**f**) Sinc periódica normalizada con $N = 4$:

$$x(t) = \mathrm{psinc}(t) = \begin{cases} \frac{\sin(N\pi t)}{N\sin(\pi t)} & \text{si } t \notin \mathbb{Z} \\ (-1)^{t(N-1)} & \text{si } t \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

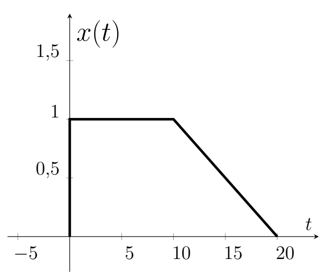
(**g**) Tren de deltas de período $T = 4$:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

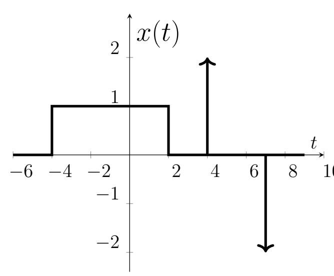
---

5. Sea $d_T(t) = t - T$ la función desplazamiento a derecha ($T > 0$) y $e_a(t) = \frac{t}{a}$ la función expansión ($a > 1$). Para la señal $x(t)$

(**a**)



(**b**)



graficar:

(**i**) $x(d_1(e_2(t)))$ (**ii**) $x(e_2(d_1(t)))$ (**iii**) $x\left(\frac{3}{2}t + 1\right)$

(**iv**) $x\left(-2t - 1\right)$ (**v**) $x\left(\frac{t}{2} - \frac{1}{2}\right)$

---

6. Sea la señal períodica

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ -2 & \text{si } 1 < t < 2 \end{cases}$$

con período $T = 2$ y el tren de impulsos $g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2k)$.

(**a**) Comprobar que

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_1 g(t - t_1) + A_2 g(t - t_2)$$

para algún $t_1, t_2, A_1, A_2 \in \mathbb{R}$ y obtener A_1, A_2, t_1, t_2.

(**b**) Graficar $x(t)$ y $\frac{dx(t)}{dt}$.

---

7. Sea $x(t)$ una señal de tiempo continuo, y sean $y_1(t) = x(2t)$ y $y_2(t) = x(t/2)$.

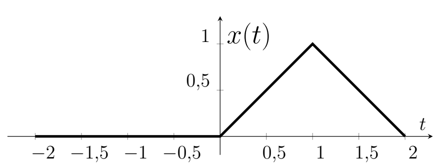
(**a**) Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justificar con demostración o contraejemplo según corresponda.

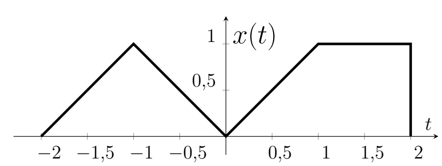
- (**i**) Si $x(t)$ es periódica, entonces $y_1(t)$ es periódica.
- (**ii**) Si $y_1(t)$ es periódica, entonces $x(t)$ es periódica.
- (**iii**) Si $x(t)$ es periódica, entonces $y_2(t)$ es periódica.
- (**iv**) Si $y_2(t)$ es periódica, entonces $x(t)$ es periódica.

(**b**) Determinar, si existe, el período fundamental de $y_1(t)$ y $y_2(t)$.

---

8. Graficar las partes par e impar de las siguientes señales. Implementar en ⌨ una función que obtenga la parte par e impar de una señal en el tiempo cualquiera.

(**a**)


(**b**)


---

9. Para cada una de las siguientes señales determinar la parte par de la señal.

(**a**) $u(n) - u(n-4)$ (**b**) $\sin\left(\frac{1}{2}t\right)$ (**c**) $\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n-3)$ (**d**) $e^{-5t}u(t+2)$

---

10. (****Obligatorio para la carpeta**) Demostrar las siguientes propiedades sobre la paridad las señales en el tiempo continuo:

(**a**) Si $x(t)$ es impar, entonces su valor medio es cero:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, dt = 0$$

(**b**) Si $x(t)$ es par, entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, dt = 2\int_{0}^{\infty} x(t)\, dt = 2\int_{-\infty}^{0} x(t)\, dt$$

(**c**) Si $x_1(t)$ es par y $x_2(t)$ es impar, entonces $x_1(t)x_2(t)$ es impar.

(**d**) Si $x_1(t)$ es par y $x_2(t)$ es par, entonces $x_1(t)x_2(t)$ es par.

(**e**) Si $x_1(t)$ es impar y $x_2(t)$ es impar, entonces $x_1(t)x_2(t)$ es par.

Estos resultados también se extienden para las señales en el tiempo discreto.

---

11. Determinar la energía total, la potencia media y el valor medio de las siguientes señales:

(**a**) $e^{j\frac{2\pi}{8}t}+2$ (**b**) $\sin(\pi t)+\sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right)$ (**c**) $e^{-\frac{t^2}{2}}$

(**d**) $2^{-n}u(n)$ (**e**) $\cos\left(\frac{2\pi}{8}n\right)$

---

12. Graficar en ⌨ las siguientes señales de tiempo discreto y determinar si son periódicas o no:

(**a**) $\cos\left(\frac{2\pi}{12}n\right)$

(**b**) $2^{n}u(n)$

(**c**) $2^{-n}u(-n+2)$

(**d**) $\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)u(n-2)$

(**e**) $\cos\left(\frac{1}{6}n\right)$

(**f**) $x(n)$ definida como las muestras de una senoidal de frecuencia 10Hz muestreada con $T_s=\frac{1}{1000\text{Hz}}$

(**g**) $x(n)=\sum_{k=0}^{50}\cos\left(\frac{\pi k}{32}n\right)$

(**h**) $x(n)=\sum_{k=0}^{50}\mathfrak{Re}\left\{a_k e^{\frac{j\pi k}{32}n}\right\}$ con $a_k=\frac{1}{\pi k}\sin\left(\frac{\pi}{4}k\right)$

(**i**) $x(n)=\sum_{k=0}^{50}\cos\left(\frac{\pi f(k)}{2}n\right)$ con $f(k)=10\tan\left(\frac{3\pi}{400}k\right)$

---

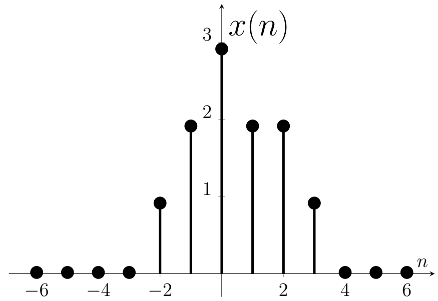
13. Evaluar, si es posible, las siguientes sumas y expresar su respuesta en forma cartesiana y polar. Implementar una función en ⌨ que obtenga la suma geométrica para cualquiera de ellas.

(**a**) $\sum_{n=-2}^{7}e^{j\frac{\pi}{2}n}$ (**b**) $\sum_{n=0}^{9}\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)$ (**c**) $\sum_{n=0}^{9}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}e^{j\frac{\pi}{8}n}$

(**d**) $\sum_{n=0}^{\infty}a^{n}e^{j\frac{\pi}{2}n},\ |a|<1$ (**e**) $\sum_{n=-4}^{\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^{n}e^{j\frac{3\pi}{4}n}$

---

14. Sea la señal discreta $x(n)$



Graficar cada una de las siguientes señales. Implementar en ⌨ una función que grafique cada una de ellas a partir de una $x(n)$ genérica.

(**a**) $x(n)u(2-n)$ (**b**) $x(n-1)\delta(n-3)$ (**c**) $\frac{1}{2}x(n)+\frac{1}{2}(-1)^n x(n)$

(**d**) $x(3n+1)$ (**e**) $x(3-n)$ (**f**) $x\left((n-1)^2\right)$

---

15. Implementar en ⌨ *sin utilizar bucles* una función que, dada una señal $x(n)$ y un $N_0 \in \mathbb{Z}$, obtenga $y_1(n) = x(N_0 n)$ y

$$y_2(n) = \begin{cases} x(n/N_0) & \text{si } n \text{ es múltiplo de } N_0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

---

16. Sea $x(n)$ una señal de tiempo discreta, y sean $y_1(n) = x(2n)$ y

$$y_2(n) = \begin{cases} x(n/2) & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(**a**) Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justificar con demostración o contraejemplo según corresponda.

(i) Si $x(n)$ es periódica, entonces $y_1(n)$ es periódica.

(ii) Si $y_1(n)$ es periódica, entonces $x(n)$ es periódica.

(iii) Si $x(n)$ es periódica, entonces $y_2(n)$ es periódica.

(iv) Si $y_2(n)$ es periódica, entonces $x(n)$ es periódica.

(**b**) Obtener, si existe, el período fundamental de $y_1(n)$ y $y_2(n)$.

---

17. (****Obligatorio para la carpeta**) Sea $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ la señal exponencial compleja en tiempo continuo con período fundamental $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$. Sea la siguiente señal discreta obtenida al tomar muestras de $x(t)$ equiespaciadas:

$$x_d(n) = x(nT_s) = e^{j\omega_0 t}\Big|_{t=nT_s} = e^{j\omega_0 n T_s}$$

(**a**) Demostrar que $x_d(n)$ es periódica si y sólo si $\frac{T_0}{T_s}$ es un número racional.

(**b**) Determinar el período y la frecuencia fundamental de $x_d(n)$ cuando ésta es periódica. Expresar la frecuencia fundamental como una fracción de T_0.

(**c**) ¿Cuántos periodos de T_0 se necesitan para obtener las muestras que forman un solo período de $x_d(n)$ en el caso en que ésta última es periódica?

---

18. Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

(**a**) La suma de dos señales senoidales de tiempo continuo de frecuencias f_1 y f_2 es siempre una señal periódica.

(**b**) La suma de dos señales senoidales de tiempo discreto de frecuencias f_1 y f_2 es siempre una señal periódica.

86.05 - Señales y Sistemas

Guía 2: Caracterización de un Sistema y Sistemas LTI. Convolución

⌨ = Python, Julia, MATLAB, OCTAVE, etc.

---

1. Para los siguientes sistemas de tiempo continuo

(**a**) $y(t) = x(t/3)$ (**b**) $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau + 2)d\tau$ (**c**) $y(t) = 2x(t) + 1$

determinar si cada uno de ellos es lineal, invariante ante desplazamientos, estable, causal y si tiene memoria.

---

2. Para los siguientes sistemas de tiempo discreto

(**a**) $y(n) = x(-n)$ (**b**) $y(n) = \begin{cases} 1 & \text{para } n = 0 \\ \pi x(n) & \text{en otro caso} \end{cases}$

(**c**) $y(n) = nx(n)$ (**d**) $y(n) = \mathfrak{Re}\{x(n)\}$

determinar si cada uno de ellos es lineal, invariante ante desplazamientos, estable, causal y si tiene memoria.

---

3. (****Obligatorio para la carpeta**) Para el sistema en tiempo continuo definido por

(**a**) $y(t) = e^{-t}x(t)$ (**b**) $y(t) = 2x(t) + \cos(2t)$

se pide:

(i) Determinar si el sistema es lineal.

(ii) Encontrar la respuesta del sistema ante $x(t) = \delta(t - t_0)$ para cualquier $t_0 \in \mathbb{R}$. ¿El sistema es invariante en el tiempo?

(iii) Si en lugar de contar con la ecuación que caracteriza al sistema tuviese solo las respuestas obtenidas en el ejercicio anterior, ¿es posible obtener la respuesta del sistema ante cualquier entrada $x(t)$?.

---

4. (****Obligatorio para la carpeta**) Dado un sistema LTI cuya respuesta impulsiva está dada por un pulso triangular $h(n) = \delta(n + 2) + 2\delta(n + 1) + 3\delta(n) + 2\delta(n - 1) + \delta(n - 2)$ al cual se le aplica una entrada $x(n)$ que consiste en un tren de impulsos de período N

(**a**) Calcular analíticamente y graficar la salida $y(n)$ para los siguientes casos:

1)$N = 6$ **2)**$N = 4$ **2)**$N = 2$

(**b**) Implemente en las convoluciones del punto anterior.

---

5. A un sistema LTI cuya respuesta al impulso es $h(t) = u(t) - u(t-1)$ se le aplica una entrada $x(t) = h(t/\alpha)$.

(**a**) Calcular la salida del sistema

(**b**) Si se sabe que la derivada de la salida tiene sólo 3 discontinuidades, obtener el valor de α.

---

6. (****Obligatorio para la carpeta**) Sea un sistema LTI de tiempo continuo con respuesta al impulso $h(t)$ y entrada $x(t)$. Para los siguientes casos especiales calcule la salida $y(t)$ para todo valor de t:

(**a**) $h(t) = e^{-t}u(t)$ y $x(t) = e^{-3t}u(t)$.

(**b**) $h(t) = e^{2t}u(t)$ y $x(t) = e^{j\frac{\pi}{2}t}u(t)$.

(**c**) $h(t) = u(t)$ y $x(t) = e^{t}u(-t)$.

(**d**) $h(t) = u(t)$ y $x(t) = e^{-t}u(-t)$. **Mirar con cuidado!**

(**e**) $h(t) = u(t+3) - u(t-3)$ y $x(t) = e^{-2t}[u(t) - u(t-5)] + e^{-(t-5)}u(t-5)$.

---

7. (****Obligatorio para la carpeta**) Sea un sistema LTI de tiempo discreto con respuesta al impulso $h(n)$ y entrada $x(n)$. Para los siguientes casos especiales calcule la salida $y[n]$ para todo valor de n.

(**a**) $h(n) = (1/2)^n u(n)$ y $x(n) = (1/3)^n u(n)$.

(**b**) $h(n) = 2^n u(n)$ y $x(n) = e^{j\frac{\pi}{2}n}u(n)$.

(**c**) $h(n) = u(n)$ y $x(n) = (1/2)^{-n}u(-n-1)$.

(**d**) $h(n) = u(n)$ y $x(n) = (1/2)^n u(-n-1)$. **Mirar con cuidado!**

(**e**) $h(n) = u(n+3) - u(n-3)$ y $x(n) = (1/2)^n[u(n) - u(n-5)] + (1/3)^{n-6}u(n-6)$.

---

8. Resolver en sus variantes discreta y continua los siguientes enunciados:

(**a**) Dado un sistema LTI en tiempo discreto con una respuesta al impulso $h(n) = \alpha^n u(n)$ con $\alpha < 1$, encontrar la salida del sistema para cada una de las siguientes entradas:

- (**i**) $x(n) = \delta(n) - \delta(n-1)$
- (**ii**) $x(n) = u(n) - u(n-5)$

(**b**) Dado un sistema LTI en tiempo continuo, encontrar la salida del sistema cuando la entrada es $x(t) = u(t-1)\sin(t)$ si la respuesta al impulso es:

- (**i**) $h(t) = u(t)$
- (**ii**) $h(t) = u(t) - 2u(t-2) + u(t-5)$

---

9. (****Obligatorio para la carpeta**) Sobre un único sistema invariante en el tiempo se conocen los siguientes pares entrada-salida:

$$x_1(n) = \delta(n) + 2\delta(n-2) \quad \longrightarrow \quad y_1(n) = \delta(n-1) + 2\delta(n-2)$$
$$x_2(n) = 3\delta(n-2) \quad \longrightarrow \quad y_2(n) = \delta(n-1) + 2\delta(n-3)$$
$$x_3(n) = \delta(n-3) \quad \longrightarrow \quad y_3(n) = \delta(n+1) + 2\delta(n) + \delta(n-1)$$

(**a**) ¿Se puede afirmar algo sobre la linearidad del sistema?

(**b**) ¿Es posible hallar la respuesta del sistema $y_4(n)$ cuando la entrada es $x_4(n) = \delta(n)$ con los datos disponibles? En tal caso, obtenerla.

(**c**) ¿Es posible hallar la respuesta del sistema $y_5(n)$ cuando la entrada es $x_5(n) = 5\delta(n-2)$ con los datos disponibles? En tal caso, obtenerla.

---

10. Considere un sistema LTI de tiempo discreto con respuesta al escalón dada por:

$$\mathcal{T}\left[u[n]\right] = u[n] - u[n-5]$$

(**a**) Encuentre la respuesta al impulso. Qué características presenta el sistema?

(**b**) Existe una ecuación en diferencias para este sistema? Si es así encuentre una expresión para la misma.

---

11. Determinar si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos.

(**a**) La conexión en cascada de sistemas LTI resulta en un sistema total que también es LTI.

(**b**) La conexión en cascada de sistemas no lineales es un sistema no lineal.

(**c**) La conexión en cascada de sistemas no invariantes en el tiempo es un sistema no invariante en el tiempo.

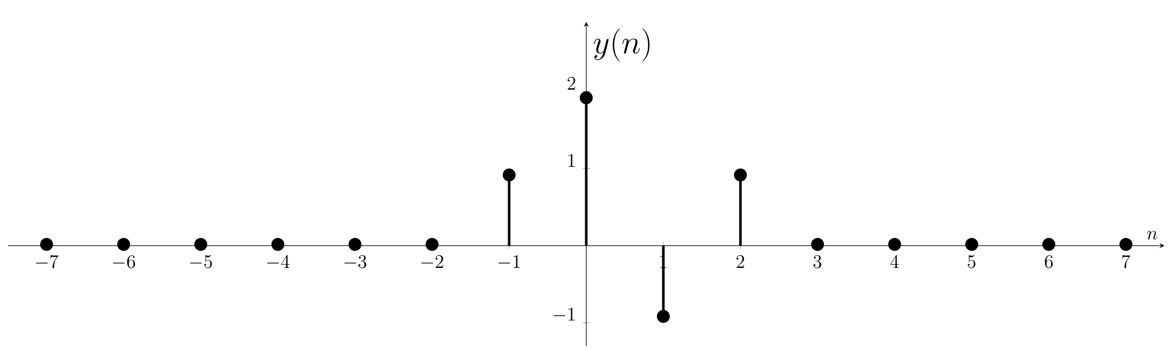
(**d**) La conexión en cascada de sistemas causales con sistemas causales es siempre no causal.

(**e**) El orden de conexión de sistemas no invariantes en el tiempo no altera la salida para una misma entrada.

(**f**) En un sistema LTI si la entrada es periódica entonces la salida también lo es.

---

12. (****Obligatorio para la carpeta**) Dos sistemas LTI en tiempo discreto con respuesta al impulso $h_1(n)$ y $h_2(n)$ son conectados en cascada en ese orden. La entrada no se conoce pero la salida $y(n)$ es como se muestra en la siguiente figura:



(**a**) Si los dos sistemas son causales, ¿qué se puede decir acerca del momento en que la entrada podría haber empezado? ¿Se puede establecer el momento exacto de comienzo?

(**b**) La entrada $x(n)$ que produjo la salida $y(n)$ anterior es aplicada a un nuevo par de sistemas conectados en cascada donde el primero tiene una respuesta impulsiva $h_a(n) = h_1(n+1)$ y el segundo $h_b(n) = 2h_2(n)$. Graficar la salida.

---

13. Sea un sistema LTI causal cuyas salidas obedecen a la siguiente relación:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-\alpha(t-\tau)} \left\{ x(\tau) - \frac{1}{2}x(\tau - 1) \right\} d\tau$$

donde $\alpha > 0$. Determine:

(**a**) La respuesta al impulso del sistema. Es estable el sistema?

(**b**) El valor de α sabiendo que si $x(t) = 1, \forall t$ entonces $y(t) = 1, \forall t$.

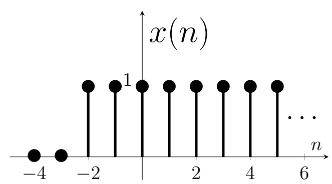
---

14. Sea un sistema LTI descrito por $y(n) = \frac{3}{4}x(n) + \frac{1}{4}x(n-1)$.

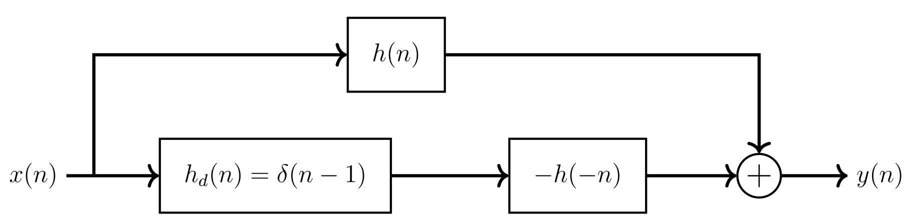
(**a**) Calcular y graficar la respuesta al impulso $h(n)$ del sistema.

(**b**) Determinar si el sistema es causal y si es estable.

(**c**) Calcular y graficar la salida del sistema cuando la señal de entrada $x(n)$ es:



(**d**) Sea el siguiente sistema LTI, donde $h(n)$ es la respuesta al impulso estimada anteriormente:



Calcular y graficar la respuesta al impulso del sistema total.

(**e**) Calcular y graficar la salida del sistema de la parte (**d**) cuando la señal de entrada $x(n)$ es como la entrada del punto (**c**). ¿Qué se puede decir acerca de la causalidad del sistema?

(**f**) Implemente el punto **c**) y **e**) en .

---

15. (****Obligatorio para la carpeta**) Dado un sistema LTI con $h(t) = u(t+T/2) - u(t-T/2)$ donde $T > 0$, se desea analizar cómo el sistema opera sobre señales periódicas.

(**a**) Demostrar que para cualquier señal periódica de período T la salida es constante para todo t.

(**b**) Determinar el valor de la constante si se sabe que la señal periódica es impar.

(**c**) Determinar si existen señales periódicas de período $T' \neq T$ para las cuales los resultados anteriores siguen siendo ciertos.

---

16. Considere un sistema LTI de tiempo continuo con respuesta al impulso dada por:

$$h(t) = \frac{1}{t}u(t-1)$$

(**a**) Encuentre la respuesta al escalón.

(**b**) Analice la estabilidad del sistema. Si el sistema no es estable encuentre una señal de entrada acotada que dé lugar a una salida que no es acotada.

---

17. (****Obligatorio para la carpeta**) Obtener la respuesta al impulso para el sistema definido por la ecuación diferencial

$$y(n) = x(n+1) + x(n) + x(n-1) + \frac{3}{4}y(n-1)$$

en condiciones inciales de reposo.

---

18. Dado un sistema en tiempo discreto definido por la ecuación en diferencias

$$y(n) = x(n) + \frac{1}{2}y(n-1)$$

con condiciones

(**a**) iniciales de reposo

(**b**) finales de reposo

se pide:

- Determinar si ambos sistemas son lineales, invariantes ante desplazamientos, estables y causales. Establecer cómo se relacionan las condiciones de contorno con cada una de las propiedades del sistema.
- Calcular el valor de la respuesta a las señales $\delta(n-1)$ y $\delta(n+1)$ del sistema en el intervalo $-5 \leq n \leq 5$.
- Obtener una expresión cerrada de la respuesta a las señales $\delta(n-1)$ y $\delta(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

---

19. (****Obligatorio para la carpeta**) Implementar en ⌨ una función que permita obtener la respuesta al impulso de una ecuación en diferencias para condiciones iniciales o finales de reposo.

86.05 - Señales y Sistemas

Guía 3: Series de Fourier

⌨ = Python, Julia, MATLAB, OCTAVE, etc.

---

1. Obtener la representación en serie de Fourier de tiempo continuo de las siguientes señales de tiempo continuo y determinar su período fundamental:

(**a**) $1 + e^{j\frac{\pi}{4}t} + 4e^{-j\frac{2\pi}{5}t} + e^{j\frac{4\pi}{5}t}$ (**b**) $2 + \cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right) + 3\sin\left(\frac{5\pi}{3}t\right)$

---

2. Una señal periódica $x(t)$ real de tiempo continuo tiene período $T = 8$ y sus coeficientes de la serie de Fourier no nulos son:

$$a_1 = a_{-1} = 2, a_3 = a_{-3}^* = 4j$$

Hallar A_k, ϕ_k con $k \in \mathbb{Z}$ de manera que el desarrollo en serie de Fourier de $x(t)$ puede ser expresado como

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t + \phi_k\right)$$

---

3. Sea $x(t)$ un tren de pulsos de período T definido en el intervalo $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ como

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in (-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}) \\ 0 & \text{si } t \in [-\frac{T}{2}, -\frac{T_0}{2}) \cup (\frac{T_0}{2}, \frac{T}{2}) \end{cases}$$

con $T > T_0 > 0$.

(**a**) Calcular utilizando la ecuación de síntesis los coeficientes $\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ de la Serie de Fourier de tiempo continuo de $x(t)$ y escriba los 6 primeros términos de la serie.

(**b**) Graficar el espectro de amplitudes y de fase.

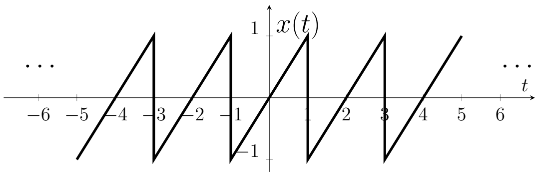
(**c**) Obtener los coeficientes $\{b_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ de la Serie de Fourier de tiempo continuo de $x_1(t) = x(t-\frac{\pi}{6})$.

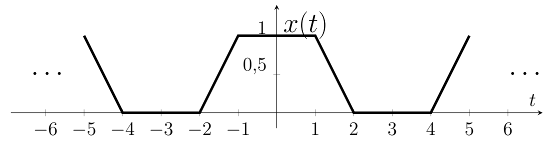
(**d**) Obtener los coeficientes $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ de la Serie de Fourier de tiempo continuo de $x_2(t) = x(t)+1$.

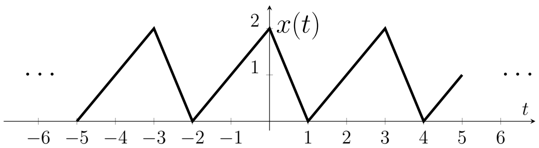
(**e**) Calcular utilizando la ecuación de síntesis la representación en serie de Fourier de un tren de impulsos de período T y obtener los coeficientes $\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ de la Serie de Fourier de tiempo continuo de $x(t)$ a partir de la combinación de dos trenes de impulsos de período T desplazados.

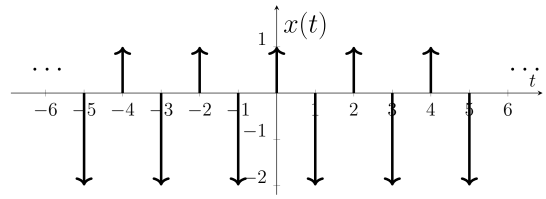
---

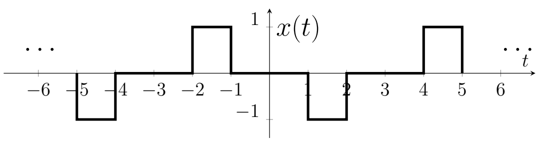
4. Utilizando las propiedades de la serie de Fourier de tiempo continuo, calcular los coeficientes $\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ de la señal periódica $x(t)$. Para todos los casos, con la excepción del (**d**), grafique en las señales que resultan de usar $N = 5, 10$ y 50 para las series de Fourier truncadas.

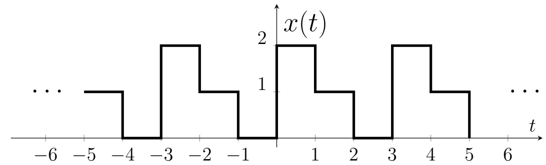
(a)


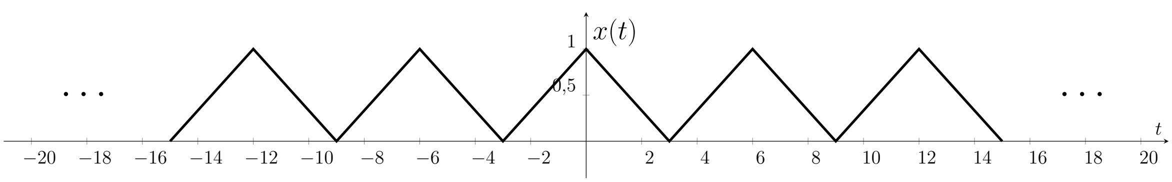
(b)


(c)


(d)


(e)


(f)


(g)


---

5. Calcular los coeficientes de la serie de Fourier de tiempo continuo de la señal $x(t)$ de período $T = 3$ sabiendo que en el intervalo $[-1{,}5, 1{,}5)$ se define como

(**a**) $x(t) = \cos(20\pi t) w_1(t)$ con

$$w_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in (-1, 1) \\ 0 & \text{si } t \in [-1{,}5,\ -1) \cup (1, 1{,}5) \end{cases}$$

(**b**) $x(t) = \cos(20\pi t) w_2(t)$ con

$$w_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in (-1{,}5, -1) \\ 0 & \text{si } t \in [-1, 0) \\ 2 & \text{si } t \in (0, 1) \\ 1 & \text{si } t \in (1, 1{,}5) \end{cases}$$

(**c**) $x(t) = \cos(20\pi t) w_3(t)$ con

$$w_3(t) = \begin{cases} e^{-|t|} & \text{si } t \in (-1, 1) \\ 0 & \text{si } t \in [-1{,}5, -1) \cup (1, 1{,}5) \end{cases}$$

---

6. (****Obligatorio para la carpeta**) Obtener dos señales de tiempo continuo que satisfagan simultáneamente las siguientes condiciones:

1. $x(t)$ es real e impar.

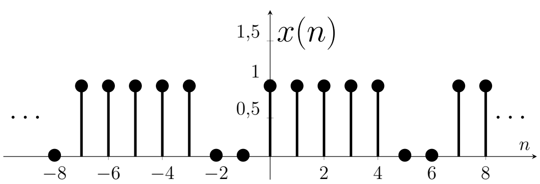
2. $x(t)$ es periódica con período $T = 2$.

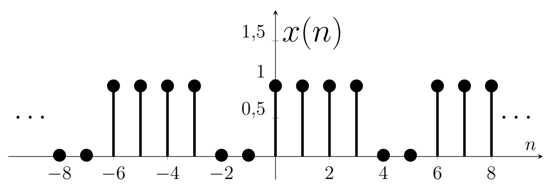
3. Los coeficientes de Fourier de $x(t)$ son $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ con $a_k = 0, |k| > 1$.

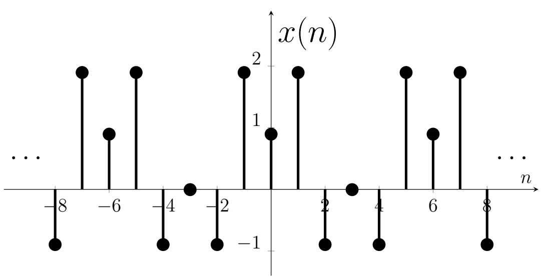
4. $\frac{1}{2} \int_0^2 |x(t)|^2 \, dt = 1$.

---

7. (****Obligatorio para la carpeta**) Utilizando las propiedades de la serie de Fourier de tiempo discreto, calcular los coeficientes $\{a_k\}_{k=0}^{N}$ de la señal periódica $x(n)$:

(**a**) 

(**b**) 

(**c**) 

(**d**) $x(n) = \sin(2\pi n/3)\cos(\pi n/2)$

(**e**) $x(n)$ periódica con período 4, siendo $x(n) = 1 - \sin(\pi n/4)$ para $0 \leq n \leq 3$

(**f**) $x(n)$ periódica con período 12, siendo $x(n) = 1 - \sin(\pi n/4)$ para $0 \leq n \leq 11$

---

8. (****Obligatorio para la carpeta**) Sea $x(n)$ una señal periódica de período N, con sus coeficientes de serie de Fourier $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Hallar los coeficientes de las siguientes señales periódicas de período N:

(**a**) $x(n - n_0),\ n_0 \in \mathbb{Z}$ (**b**) $x(n) - x(n-1)$ (**c**) $x(n) - x\left(n - \dfrac{N}{2}\right),\ N$ par

(**d**) $x(n) + x\left(n - \dfrac{N}{2}\right),\ N$ par (**e**) $x^*(-n)$ (**f**) $(-1)^n x(n),\ N$ par

(**g**) $(-1)^n x(n),\ N$ impar (**h**) $y(n) = \begin{cases} x(n) & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

---

9. (****Obligatorio para la carpeta**) Sea un sistema LTI de tiempo continuo con respuesta al impulso $h(t) = e^{-4|t|}$. Hallar la salida $y(t)$ del sistema para las siguientes entradas:

(**a**) $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ con $\omega_0 \in \mathbb{R}$ ¿Es $x(t)$ una autofunción del sistema?

(**b**) $x(t) = e^{j\omega_0 t} u(t)$ con $\omega_0 \in \mathbb{R}$. ¿Es $x(t)$ una autofunción del sistema?

(**c**) $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \delta(t - k)$

(**d**) $x(t)$ de período 1 tal que $x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1/4 \leq t < 1/4 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$ para $-1/2 \leq t < 1/2$.

---

10. Sea una señal de tiempo continuo $x_c(t)$ periódica, real y par. La misma tiene un período de $T = 1$ seg.. Además verifica que $\int_{0,2}^{1,2} x_c(t)dt = 1$. Dicha señal es la entrada de un filtro $H_c(j\omega)$ con las siguientes características:

$$H_c(j\omega) = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & |\omega| \leq 3\pi \\ 0 & \text{en otro caso} \end{array} \right.$$

La señal de salida $y_c(t)$ verifica que $\int_2^3 |y_c(t)|^2 dt = 3$. Determine $y_c(t)$.

---

11. (****Obligatorio para la carpeta**) Considere la señal periódica $x(t)$ con $T = 2$ y tal que cuando $t \in [0, 2)$ es igual $1 - t$. Se pide:

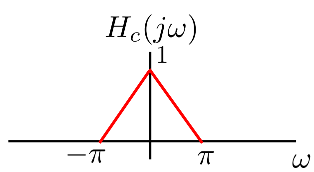
(**a**) Los coeficientes de Fourier de $x(t)$.

(**b**) Usando los coeficientes de Fourier del punto anterior muestre que es posible escribir:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} 2 \frac{\sin(k\pi t)}{k\pi}$$

.

(**c**) Determine la señal $y(t)$ que es el resultado de ingresar $x(t)$ a un sistema LTI con la siguiente respuesta en frecuencia:



---

12. (****Obligatorio para la carpeta**) Sea el sistema LTI de tiempo discreto cuya respuesta en frecuencia es:

$$H(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\Omega| \leq \frac{\pi}{8} \\ 0 & \text{si } \frac{\pi}{8} < |\Omega| \leq \pi \end{cases}$$

Mostrar que si la entrada $x(n)$ al sistema tiene período $N = 3$, entonces la salida $y(n)$ tiene un único valor no nulo por período.

---

13. Para cada uno de los siguientes pares de señales $x(n)$ e $y(n)$, determinar si existe un sistema LTI discreto cuya salida $y(n)$ pueda corresponder efectivamente a la entrada $x(n)$. En el caso de que exista, determinar si es único y qué codiciones debe cumplir la respuesta al impulso.

(**a**) $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ e $y(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n$

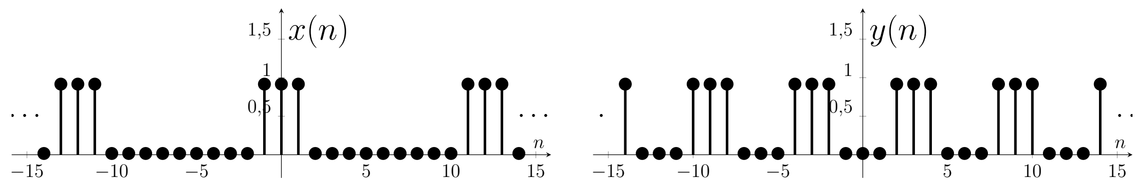
(**b**) $x(n) = e^{jn/8}$ e $y(n) = e^{j2n/8}$

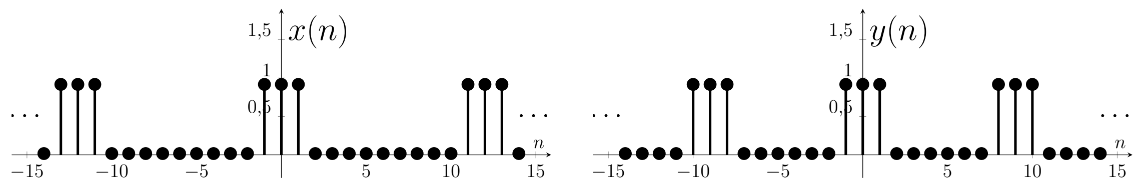
(**c**) $x(n) = e^{j\pi n/3}$ e $y(n) = \cos(\pi n/3)$

(**d**) $x(n) = \cos(\pi n/3)$ e $y(n) = \cos(\pi n/3) + \sqrt{3}\sin(\pi n/3)$

---

14. Decidir si existe un sistema LTI discreto que cumpla con que si $x(n)$ es la entrada, entonces $y(n)$ es una salida posible.

(**a**) 

(**b**) 

En caso de que se cumpla, decidir si es posible asegurar que todos los sistemas que cumplan con esta condición son realmente LTI.

---

15. (****Obligatorio para la carpeta**) Cuando un tren de impulsos

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n - 4k)$$

pasa por un sistema LTI con una respuesta en frecuencia $H\left(e^{j\omega}\right)$, la salida es

$$y(n) = \cos\left(\frac{5\pi}{2}n + \frac{\pi}{4}\right)$$

Determinar el valor de $H\left(e^{j\frac{k\pi}{2}}\right)$ para $k = 0, 1, 2, 3$.

86.05 - Señales y Sistemas

Guía 4: Transformada de Fourier

⌨ = Python, Julia, MATLAB, OCTAVE, etc.

---

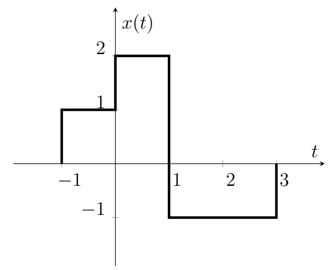
1. Hallar, utilizando propiedades, la transformada de Fourier de las siguientes señales:

(**a**) $x(t) = \begin{cases} 1+\cos(\pi t) & |t| \leq 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases}$

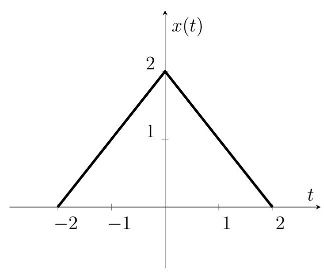
(**b**) $x(t) = \dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t}\dfrac{\sin(2\pi(t-1))}{\pi(t-1)}$

(**c**) $x(t) = \begin{cases} e^{-t} & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

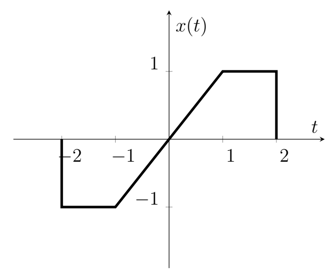
(**d**)



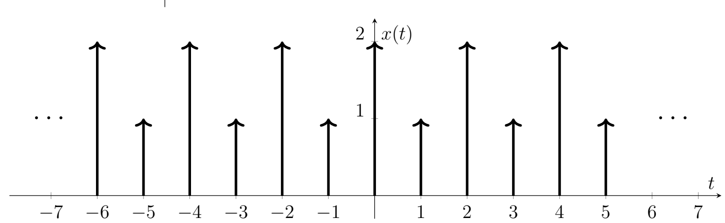
(**e**)



(**f**)

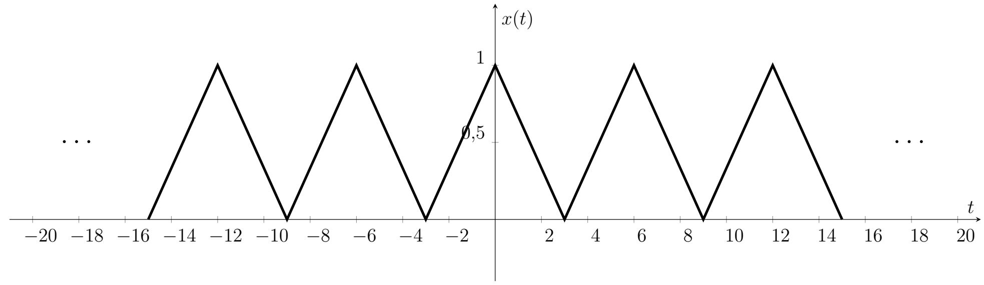


(**g**)



---

2. (****Obligatorio para la carpeta**) Sea $x(t)$ la siguiente función:



(**a**) Calcular la transformada de $x(t)$.

(**b**) ¿Qué relación existe entre la transformada de Fourier de una señal periódica y los coeficientes de su serie de Fourier?

(**c**) ¿Qué característica distintiva tiene una Transformada de Fourier de una señal periódica?

---

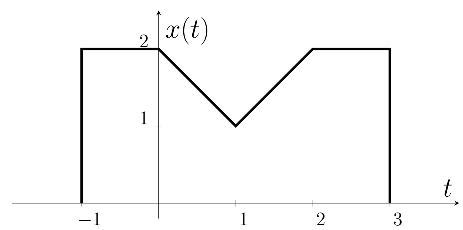
3. Hallar, utilizando propiedades, la antitransformada de Fourier de las siguientes funciones:

(**a**) $X(\omega) = \cos(4\omega + \pi/3)$ (**b**) $X(\omega) = \dfrac{2\sin(3(\omega - 2\pi))}{\omega - 2\pi}$

(**c**) $X(\omega)$ tal que $|X(\omega)| = \begin{cases} |\omega| & \text{si } \omega \in [-1, 1) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$ y $\arg(X(\omega)) = -3\omega$

---

4. (****Obligatorio para la carpeta**) Sea $X(\omega)$ la transformada de $x(t)$:



Hallar los siguientes valores sin obtener en forma explícita la función $X(\omega)$:

(**a**) $\angle X(\omega)$ (**b**) $X(0)$ (**c**) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)d\omega$

(**d**) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\frac{2\sin(\omega)}{\omega}e^{j2\omega}d\omega$ (**e**) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$

---

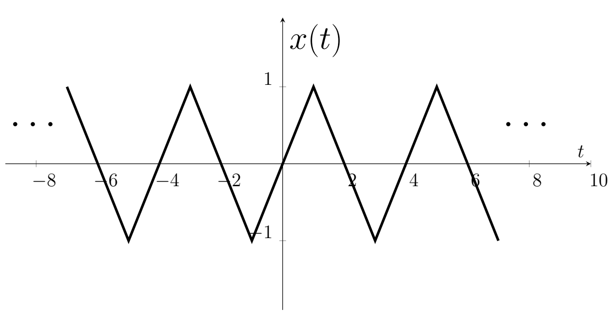
5. (****Obligatorio para la carpeta**) Sea $x(t) = e^{-t}(u(t) - u(t-1))$. Graficar las siguientes funciones y hallar la transformada de Fourier de todas ellas:

(**a**) $x_1 = x(-t) + x(t)$ (**b**) $x_2 = -x(-t) + x(t)$ (**c**) $x_3 = x(t+1) + x(t)$ (**d**) $x_4 = tx(t)$

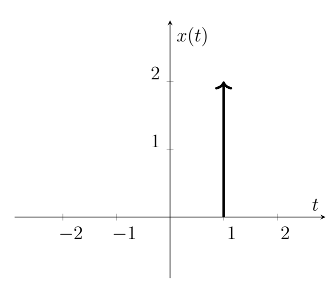
---

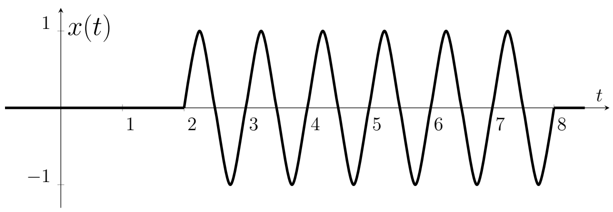
6. Para cada una de las siguientes funciones

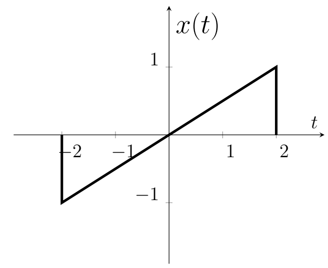
(**a**)

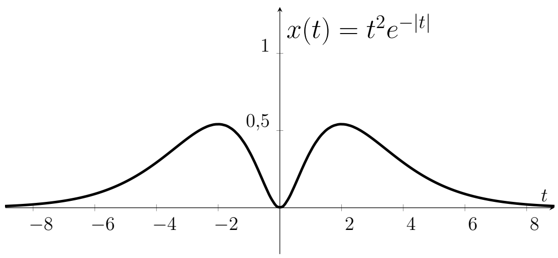


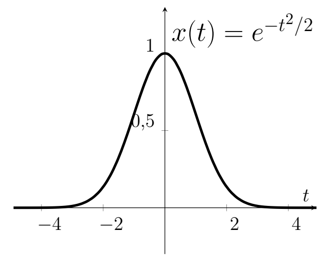
(**b**)



(**c**) 

(**d**) 

(**e**) 

(**f**) 

indicar si cumplen algunas de estas condiciones:

(i) $\mathfrak{Re}\{X(\omega)\} = 0$ (ii) $\mathfrak{Im}\{X(\omega)\} = 0$ (iii) $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tal que $e^{j\omega\alpha}X(\omega)$ es una función real

(iv) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)d\omega = 0$ (v) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \omega X(\omega)d\omega = 0$ (vi) $X(\omega)$ es periódica

---

7. Sea una señal de tiempo continuo $x_c(t)$ con período $T = 1$. La misma en el intervalo $[0, T)$ es igual a αt donde α es un número real desconocido.

(**a**) Encuentre los coeficientes de Fourier de $x_c(t)$ en función de α. Cómo se relacionan estos coeficientes de Fourier con la transformada de Fourier de la señal **no periódica y de longitud finita** $w_c(t) = \alpha t[u(t) - u(t - T)]$.

(**b**) La señal $x_c(t)$ ingresa a un sistema LTI con respuesta al impulso dada por $h(t) = \frac{\sin(3\pi t)}{\pi t}$. Determine la señal de salida $y_c(t)$ y el valor de α sabiendo que $y_c(1/2) = 1$.

---

8. Hallar y graficar la transformada de Fourier de tiempo discreto de las siguientes secuencias:

(**a**) $x(n) = u(n) - u(n - 20)$ (**b**) $x(n) = \delta(n) - \delta(n - 1)$

(**c**) $x(n) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-n} u(-n - 1)$ (**d**) $x(n) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}n\right) + \cos(n)$

---

9. Hallar la antitransformada de Fourier en tiempo discreto de las siguientes funciones:

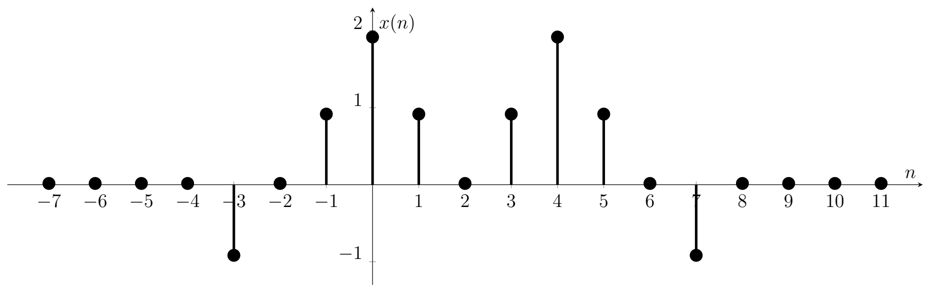
(**a**) $X(e^{j\Omega}) = 1 + 3e^{-j2\Omega} - 4e^{-j10\Omega}$

(**b**) $X(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\delta(\Omega - \frac{\pi}{2}k)$

(**c**) $X(e^{j\Omega}) = \frac{e^{-j\Omega} - 1/5}{1 - 1/5e^{-j\Omega}}$

---

10. (****Obligatorio para la carpeta**) Sea $X(e^{j\Omega})$ la antitransformada de Fourier de la secuencia $x(n)$:



Hallar los siguientes valores sin obtener explícitamente la función $X(e^{j\Omega})$:

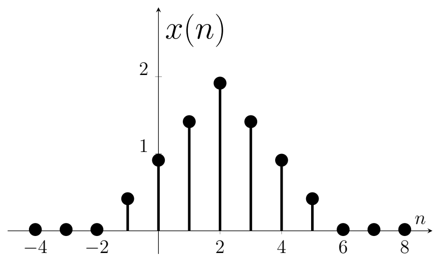
(**a**) $X(0)$ (**b**) $\angle X(e^{j\Omega})$ (**c**) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega})d\Omega$

(**d**) $X(e^{j\pi})$ (**e**) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{dX(e^{j\Omega})}{d\Omega}\right|^2 d\Omega$

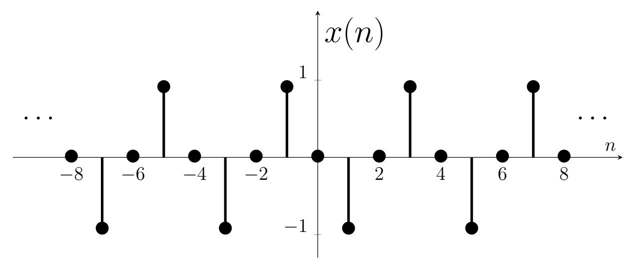
---

11. (****Obligatorio para la carpeta**) Para cada una de las siguientes funciones

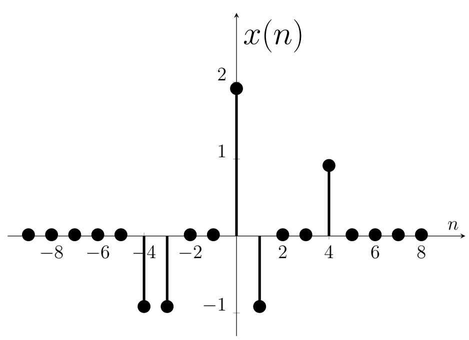
(**a**)



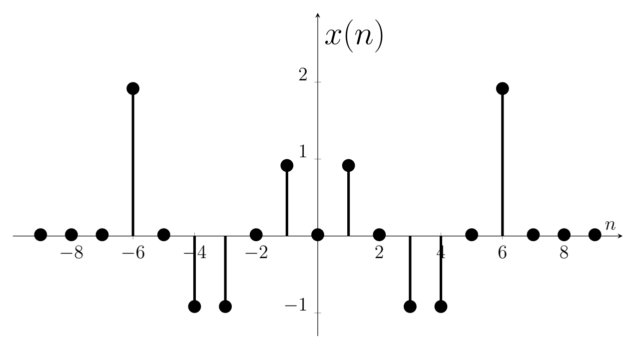
(**b**)



(**c**)



(**d**)



indicar si cumplen algunas de estas condiciones:

(**i**) $\mathfrak{Re}\left\{X(e^{j\Omega})\right\} = 0$ (**ii**) $\mathfrak{Im}\left\{X(e^{j\Omega})\right\} = 0$ (**iii**) $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tal que $e^{j\Omega\alpha}X(e^{j\Omega})$ es una función real

(**iv**) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega})d\Omega = 0$ (**v**) $X(e^{j\Omega})$ es periódica (**vi**) $X(e^{j\Omega})|_{\Omega=0} = 0$

---

12. Sea un sistema LTI discreto cuya respuesta al impulso es $h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$. Usando la transformada de Fourier de tiempo discreto hallar la salida $y(n)$ del sistema para las siguientes entradas:

(**a**) $x(n) = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n u(n)$ (**b**) $x(n) = (-1)^n u(n)$

(**c**) $x(n) = Ae^{j\frac{\pi}{2}n}$, con $A \in \mathbb{R}$ (**d**) $x(n) = 10 - 5\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) + 20\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$

---

13. Considere un sistema LTI de tiempo continuo estable que obedece a la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \alpha x(t) + \frac{dx(t)}{dt}$$

(**a**) Encuentre la respuesta al impulso y al escalón.

(**b**) Determine el valor de α sabiendo que si la entrada es e^{jt} la salida es Ae^{jt} donde $|A| = \sqrt{2}$ (A puede ser complejo pero la única información a usar es la del módulo). Es el valor único?

---

14. (****Obligatorio para la carpeta**) Utilizando la transformada de Fourier, decidir si existe un sistema LTI que cumpla con que, si $x(n)$ es la entrada, entonces $y(n)$ es la salida:

(**a**) $x(n) = e^{j\pi n/3}$ e $y(n) = \cos(\pi n/3)$

(**b**) $x(n) = \cos(\pi n/3)$ e $y(n) = \cos(\pi n/3) + \sqrt{3}\sin(\pi n/3)$

---

15. (****Obligatorio para la carpeta**) Sea un sistema LTI estable que verifica las siguientes propiedades:

- Si la entrada es $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ entonces la salida es $y[n] = \alpha\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + \beta\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$
- Si la entrada es $x[n] = 1 + (-1)^n$ la salida es $y[n] = 1 - (-1)^n$.

Determine los valores de α y β y determine una ecuación en diferencias para el sistema. Analice el resultado.

---

16. (****Obligatorio para la carpeta**) Sea un sistema LTI cuya entrada es $x(n)$ y salida es $y(n)$. La relación entre la entrada y salida es:

$$y(n) - \alpha y(n-1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z(n-k) - x(n)$$

donde $z(n)$ es una secuencia cuya transformada de Fourier existe.

(**a**) Encontrar la respuesta en frecuencia del sistema con $\alpha = \frac{1}{2}$.

(**b**) Asumiendo que $z(n) = \beta^n u(n) + \delta(n)$ con $\beta = \frac{1}{3}$, encontrar la respuesta al impulso del sistema.

---

17. (****Obligatorio para la carpeta**) Considere el sistema LTI descripto de tiempo continuo **estableycausal** cuya respuesta al impulso es $h(t)$. Calcule:

(**a**) La salida $y_1(t)$ al sistema cuando la entrada es $x_1(t) = Ae^{j\omega t}$ donde $\omega \in \mathbb{R}$ y A es una constante arbitraria.

(**b**) La salida $y_2(t)$ al sistema cuando la entrada es $x_2(t) = Ae^{j\omega t}u(t)$ para los mismos valores de A y ω.

(**c**) Mostrar que para el caso anterior la salida $y_2(t) = y_1(t) + z(t)$ donde $z(t)$ es una señal que verifica $\lim_{t\to\infty} z(t) = 0$. Este resultado muestra que cuando el sistema LTI es estable y causal, y se lo excita con una exponencial que comienza en $t = 0$, la salida a medida que avanza el tiempo, **olvida las condiciones iniciales** y se parece a la salida cuando donde no hay condiciones iniciales (la exponencial empieza en $t = -\infty$). Es por esta razón que $y_1(t)$ se conoce como **salida de estado permanente** y $z(t)$ es la **salida transitoria**.

Ayuda: Exprese la convolución entre $x_2(t)$ y $h(t)$, trabaje matemáticamente las expresiones y use las condiciones sobre $h(t)$ para encontrar una expresión general para $z(t)$.

(**d**) Extienda el resultado para un sistema LTI de tiempo discreto causal y estable.

---

18. En muchas ocasiones se tienen señales cuyas características varían sustancialmente dependiendo de la región temporal que estamos analizando. En esas situaciones trabajar con la transformada de Fourier tradicional (en cuya definición consideramos la duración completa de la señal) puede 'esconder" algunas características relevantes de la señal. Por eso en ocasiones es útil considerar la *Transformada de Fourier de corto tiempo (STFT)*:

$$X(j\omega, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)w(t-\tau)e^{-j\omega t}dt$$

La señal $w(t)$ es la "ventana" que enfatiza cierta región temporal de la señal original antes de calcular la transformada de Fourier. De esta forma la STFT es una señal de alguna forma cuantifica el contenido frecuencial de la señal original $x(t)$ cuando observamos su características temporal en un intervalo de tiempo centrado en en τ y con tamaño igual al tamaño de la ventana. La ventana juega un papel fundamental y la elección más sencilla es la ventana rectangular:

$$w(t) = u(t + L/2) - u(t - L/2)$$

donde L es el largo de la ventana.

(**a**) Considere una señal $x(t)$ con un espectro arbitrario y la STFT usando la ventana rectangular. En forma esquemática (puede ayudarse con gráficos) muestre como se relaciona $X(j\omega, \tau)$ para un valor de τ arbitrario, con el espectro $X(j\omega)$, el espectro de la ventana $w(t)$ y la influencia del largo L. Para mayor facilidad descarte cuestiones relacionadas con la fase.

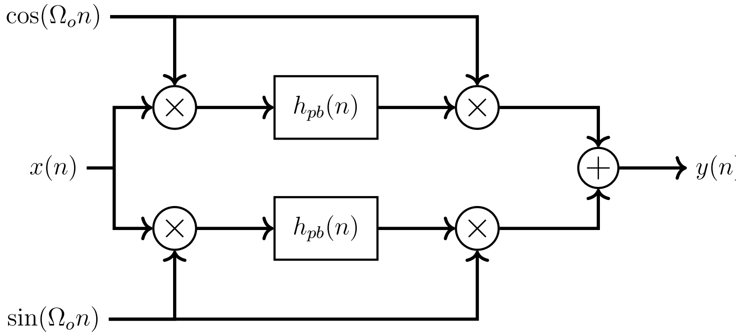
(**b**) Considere una señal

$$x(t) = \begin{cases} \cos(2\pi 10t) & 0 \leq t \leq 5 \\ \cos(2\pi 20t) & 5 < t \leq 10 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y $w(t)$ la ventana rectangular. En un gráfico de 3 ejes, donde un eje es el tiempo τ, otro eje es ω y el tercer eje es la amplitud, grafique aproximadamente $|X(j\omega, \tau)|$. Considere un valor de L pequeño y un valor de L grande. Saque conclusiones. (Ayuda: puede ayudarse de . Por ejemplo, considere el comando *spectrogram* del paquete de Python SciPy, `https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.signal.spectrogram.html`.)

---

19. Sea el siguiente sistema, donde $h_{pb}(n)$ es LTI:



(**a**) Determinar la respuesta al impulso del sistema.

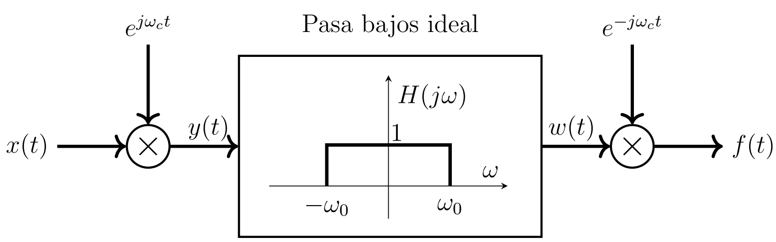
(**b**) Demostrar que el sistema es lineal.

(**c**) Demostrar que el sistema es invariante en el tiempo. *Ayuda:* $\cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) = \cos(a-b)$.

(**d**) Si $\Omega_0 = \frac{\pi}{2}$ y el sistema $h_{pb}(n)$ es un filtro pasabajos ideal con frecuencia de corte $\Omega_c = \frac{\pi}{4}$, determinar la respuesta en frecuencia del sistema.

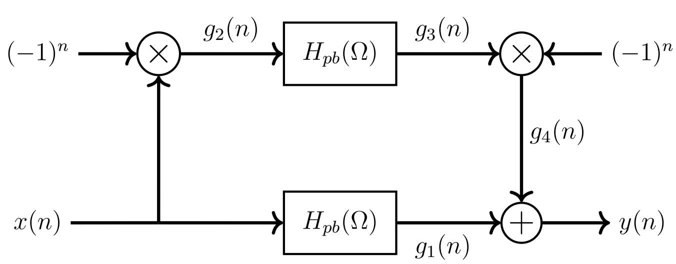
---

20. Obtener la respuesta en frecuencia del siguiente sistema y compararlo con la del ejercicio anterior:

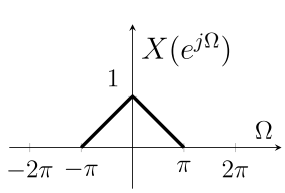


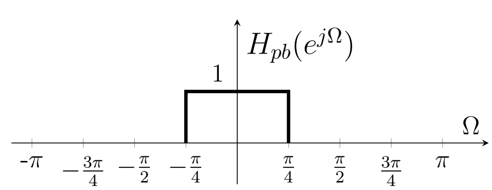
---

21. (****Obligatorio para la carpeta**) Sea el sistema de la figura:



donde





Graficar los espectros en frecuencias de las señales $g_1(n)$, $g_2(n)$, $g_3(n)$, $g_4(n)$ y $y(n)$.

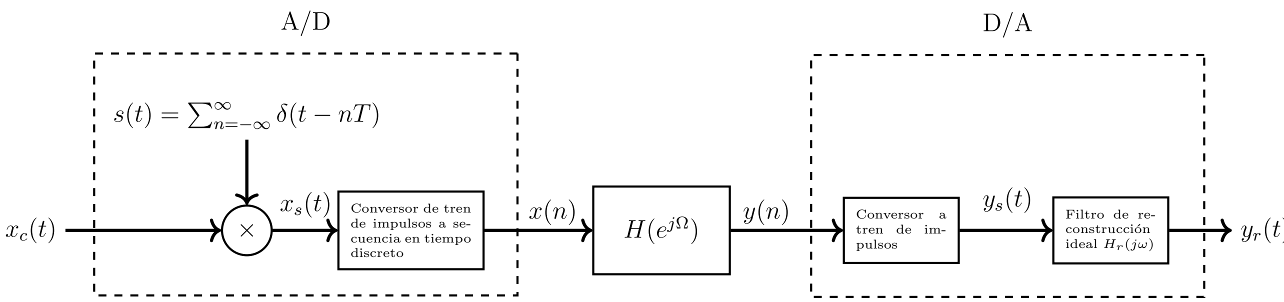
86.05 - Señales y Sistemas

Guía 6: Muestreo e Interpolación

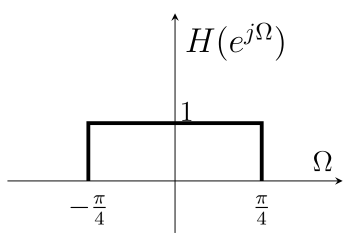
⌨ = Python, Julia, MATLAB, OCTAVE, etc.

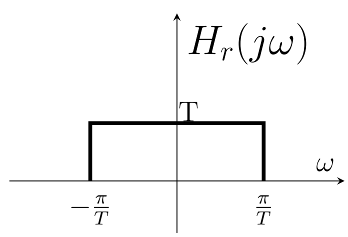
---

1. A continuación se muestra el sistema global para filtrar una señal en tiempo continuo utilizando un filtro en tiempo discreto.



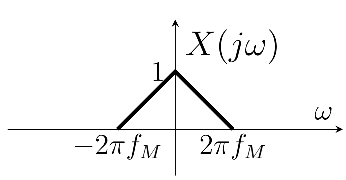
Asumiendo que $H(e^{j\Omega})$ y $H_r(j\omega)$ tienen la forma





se pide:

(**a**) Para el caso en que $\frac{1}{T} = 20$ kHz y la transformada $X_c(j\omega)$ de $x_c(t)$ es



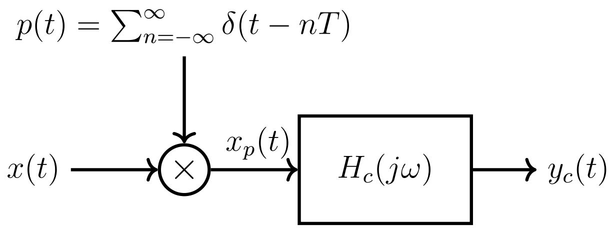
con $f_M = 10$ kHz graficar las transformadas $X_s(j\omega)$ y $X(e^{j\Omega})$ de $x_s(t)$ y $x(n)$ respectivamente.

(**b**) Determinar para qué rango de valores de T, el sistema completo con entrada $x_c(t)$ de banda limitada ($2\pi f_M$ = frecuencia máxima de la señal) y salida $y_r(t)$ es equivalente al sistema LTI con respuesta en frecuencia $H_{eff}(j\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in (-\omega_c, \omega_c) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$. Determinar el valor de ω_c en función de T.

---

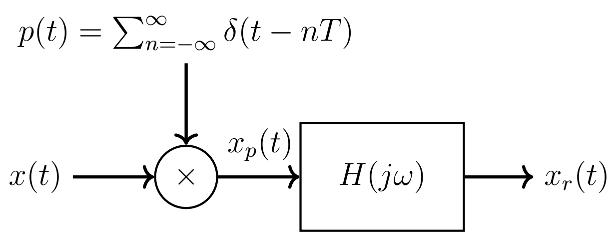
2. La señal discreta $x_d(n) = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$ con $n \in \mathbb{Z}$ se obtuvo del muestreo de la señal continua $x_c(n) = \cos(\omega_0 t)$ con $t \in \mathbb{R}$ a una frecuencia de muestreo $F_S = 1000$ Hz. ¿Qué valores de ω_0 positivos resultarían en obtención de la secuencia $x_d(n)$?

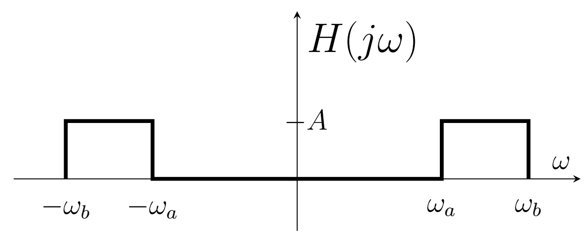
3. (****Obligatorio para la carpeta**) Sea el siguiente sistema de muestreo



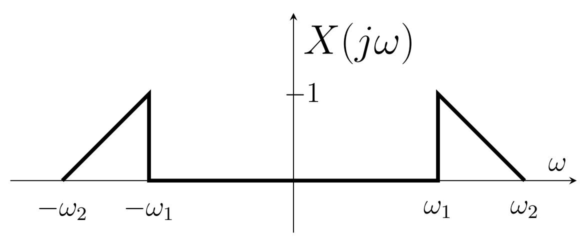
donde $H_c(j\omega)$ es un pasabajos ideal con frecuencia de corte $\frac{\omega_s}{2}$ y ganancia T y donde $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$. En este sistema, cuando la entrada vale $x_c(t) = \cos(\omega_0 t)$ la salida es $y_c(t) = \cos(\omega_0 t)$. Por otro lado, cuando $x_c(t) = \cos(10\omega_0 t)$ la salida es $y_c(t) = \cos(2\omega_0 t)$. Determinar un valor de ω_s compatible con esta situación y graficar los espectros de $x_p(t)$ para los dos casos, explicando clararmente la situación en cada uno de ellos.

4. Dado el siguiente sistema de muestreo

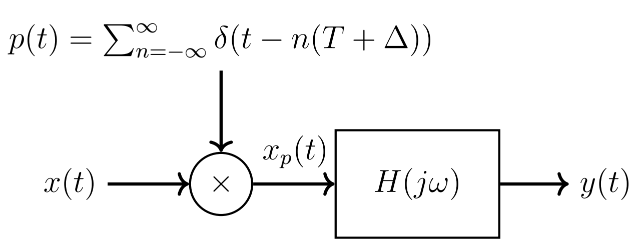


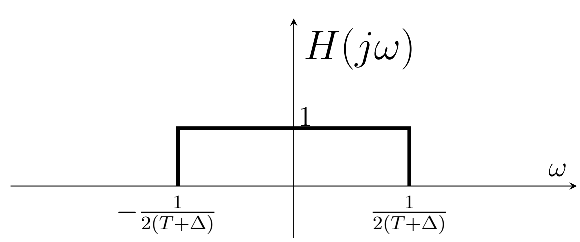


y considerando que $\omega_1 > \omega_2 - \omega_1$, encontrar el máximo valor de T y los valores de las constantes A, ω_a, ω_b tales que $x(t) = x_r(t)$ cuando la señal $x(t)$ tiene un espectro como se muestra a continuación



5. Sea el sistema de muestreo como se muestra a continuación:

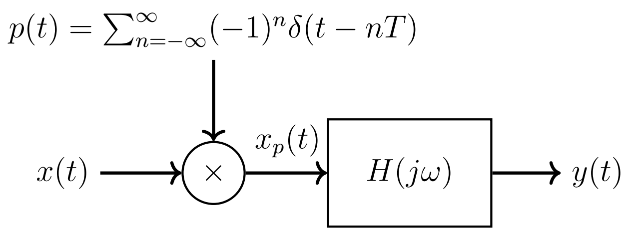


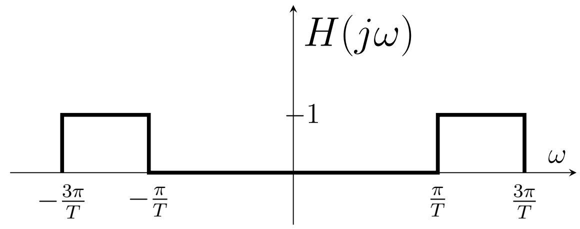


Para $x(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ encontrar el intervalo de valores de Δ de manera que $y(t)$ sea proporcional a $x(at)$ para algún $a \in (0,1)$. Determinar el valor de a en términos de T y de Δ.

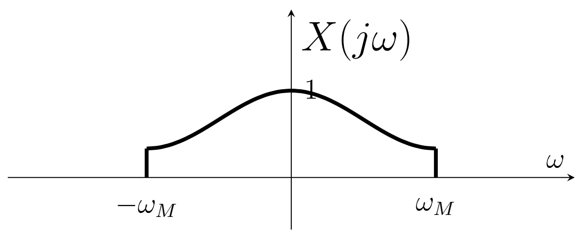
---

6. Sea el siguiente sistema de muestreo





Dada una señal $x(t)$ cuya transformada de Fourier es como se muestra a continuación:



se pide:

(**a**) Para $T = \frac{\pi}{2\omega_M}$ dibujar la transformada de Fourier de $x_p(t)$ e $y(t)$.

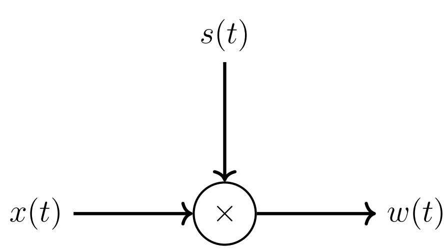
(**b**) Para $T = \frac{\pi}{2\omega_M}$ determinar un sistema con el cual se pueda recuperar $x(t)$ a partir de $x_p(t)$.

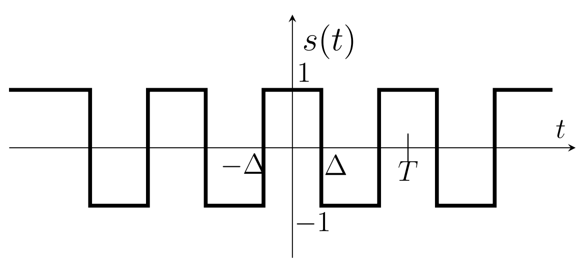
(**c**) Para $T = \frac{\pi}{2\omega_M}$ determinar un sistema con el cual se pueda recuperar $x(t)$ a partir de $y(t)$.

(**d**) Determinar el valor *máximo* de T en relación a ω_M para el cual $x(t)$ puede recuperarse a partir de $x_p(t)$ o de $y(t)$.

---

7. En la siguiente figura se muestra un sistema en el cual la señal de entrada es multiplicada por una onda cuadrada periódica $s(t)$ de período T.





Suponiendo que la entrada es de banda limitada ($X(j\omega) = 0 \; \forall \omega > \omega_M$

(**a**) Para $\Delta = \frac{T}{3}$ determinar en términos de ω_M el valor máximo de T para el cual no hay traslape entre las réplicas de $X(j\omega)$ en $W(j\omega)$.

(**b**) Para $\Delta = \frac{T}{4}$ determinar en términos de ω_M el valor máximo de T para el cual no hay traslape entre las réplicas de $X(j\omega)$ en $W(j\omega)$

---

8. Escribir las ecuaciones en diferencias de un interpolador de orden cero y otro de orden uno, en su versión discreta.

(**a**) Implementar las ecuaciones en

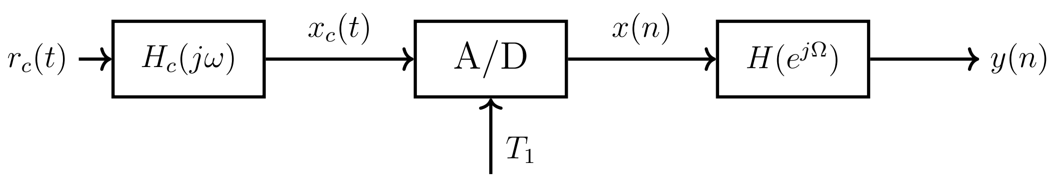
(**b**) Interpolar la señal $x_e(n)$ definida como

$$x_e(n) = \begin{cases} \cos(\frac{2\pi 100}{L}) & \text{para } n = kL,\ k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(**c**) ¿Es posible implementar realmente una interpolación ideal? ¿Qué aproximaciones se podrían hacer para obtenerlo y cómo se altera el espectro de la señal al hacerlas?

---

9. (****Obligatorio para la carpeta**) Sea el siguiente sistema:



donde se sabe que el sistema $H_c(j\omega)$ es LTI, causal y se describe mediante:

$$\frac{dx_c(t)}{dt} + \alpha x_c(t) = r_c(t),\ \alpha > 0,\ \text{con condición de reposo incial}$$

Sea, además, la señal $r_c(t) = u(t) - u(t - T_1)$, donde T_1 es también el período de muestreo del conversor A/D ideal de la figura.

(**a**) Obtener la señal $x_c(t)$.

(**b**) Encontrar el sistema LTI de tiempo discreto $H(e^{j\Omega})$ tal que $y(n) = \delta(n) - 2\delta(n-1) + \delta(n-2)$. De ser posible, obtener una ecuación en diferencias para dicho sistema.

---

10. (****Obligatorio para la carpeta**) Sea la señal $z(t) = x(t) + y(t)$ donde

$$x(t) = \frac{\sin^2\left(\frac{W}{2}t\right)}{\pi^2 t^2} \qquad\qquad y(t) = 2\frac{\sin\left(\frac{W}{2}t\right)}{\pi t}\cos\left(\frac{5W}{2}t\right)$$

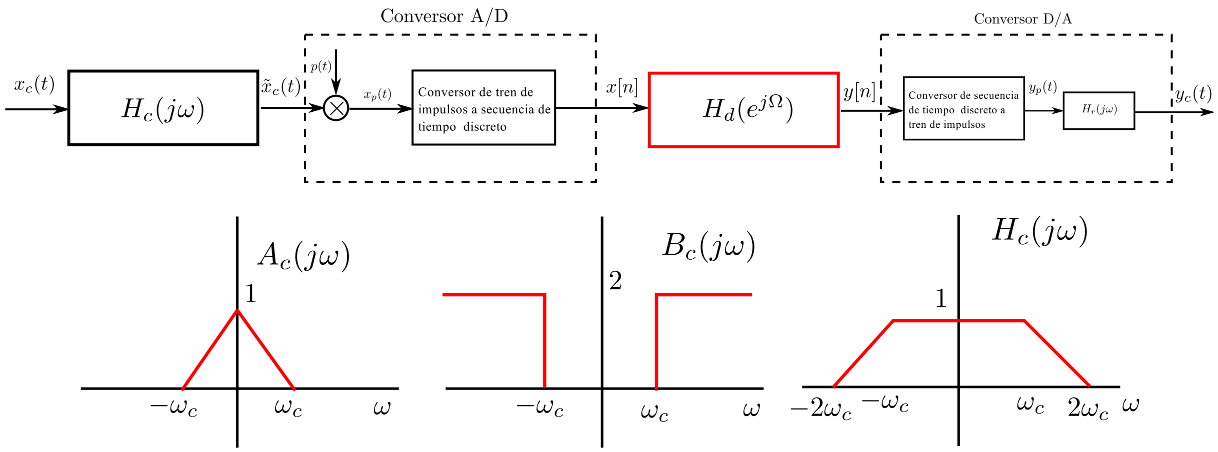
La señal $z(t)$ ingresa a un conversor A/D ideal con frecuencia de muestreo ω_s.

(**a**) Calcular la frecuencia de Nyquist para esta señal.

(**b**) Diseñar un sistema que permita, con la mínima frecuencia de muestreo posible, recuperar la señal $y(t)$ usando las muestras $z(n)$ que se obtienen a la salida del conversor A/D. El sistema puede contener partes en tiempo discreto y tiempo continuo.

---

11. (****Obligatorio para la carpeta**) Considere el sistema de la figura. La señal de entrada es $x_c(t) = a_c(t) + b_c(t)$, y los espectros de $a_c(t)$ y $b_c(t)$ se muestran en la figura. Vemos que se usa antes del muestreo un filtro que limita el espectro de la señal $b_c(t)$ y cuya magnitud de su respuesta en frecuencia se muestra en la figura. El filtro $H_r(j\omega)$ del conversor D/A es el interpolador ideal.

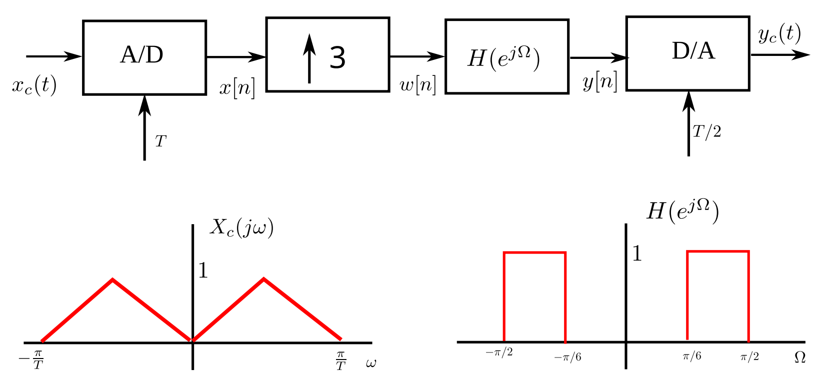


(**a**) Suponga que la frecuencia de muestreo es $\omega_s = 4\omega_c$. Determine $H_d(e^{j\Omega})$ de forma tal que $y_c(t) = a_c(t)$.

(**b**) Determine si es posible que $y_c(t) = a_c(t)$ si $\omega_s < 4\omega_c$. Si ese es el caso determine el mínimo valor de ω_s que permite lograr esto y determine $H_d(e^{j\Omega})$ para ese caso.

---

12. Considere el sistema de la figura. El filtro de tiempo discreto y el espectro de la señal de entrada se muestran también en la figura. El conversor D/A es ideal y el expansor contiene sólo el bloque que agrega los ceros (o sea luego del agregado de ceros no hay filtro pasabajos y la señal resultante es filtrada por $H(e^{j\Omega})$). Determine las transformadas de Fourier de $x[n]$, $w[n]$, $y[n]$ e $y_c(t)$ (puede hacerlo en forma gráfica).



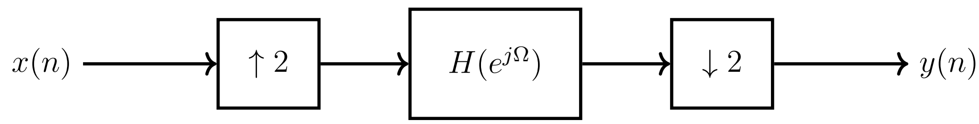
---

13. (****Obligatorio para la carpeta**) Sea $x_c(t)$ una señal real de tiempo continuo cuya frecuencia superior es $\omega_M = 2\pi 250\ Hz$, y la señal $y_c(t)$ definida como $y_c(t) = x_c(t - \frac{1}{1000})$.

(**a**) Determinar si es posible recuperar $x_c(t)$ a partir de $x(n) = x_c(\frac{n}{500})$.

(**b**) Determinar si es posible recuperar $y_c(t)$ a partir de $y(n) = y_c(\frac{n}{500})$.

(**c**) Determinar si es posible obtener un sistema $H(e^{j\Omega})$ de manera que si se implementa en la siguiente estructura en cascada



es posible obtener $y(n)$ a partir de $x(n)$.

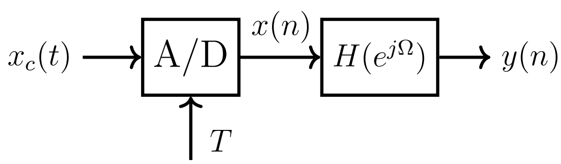
(**d**) Determinar si es posible obtener $y(n)$ a partir de $x(n)$ utilizando un único sistema LTI con respuesta en frecuencia $H_{eff}(e^{j\Omega})$. En caso de que así sea, obtener $H_{eff}(e^{j\Omega})$.

---

14. (****Obligatorio para la carpeta**) Sea la señal

$$x_c(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha(k) g(t - kT_0)$$

donde $\alpha(k)$ es una secuencia de tiempo discreto tal que $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\alpha(k)| < \infty$ y $g(t)$ es una señal de banda limitada con ancho de banda $W = \frac{2\pi}{T_0}$. La señal $x_c(t)$ ingresa al siguiente sistema:



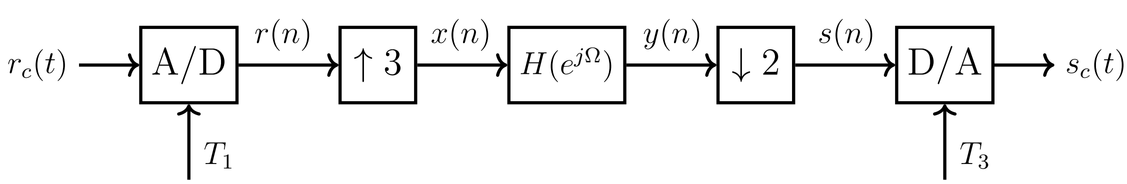
en donde el conversor A/D tiene frecuencia de muestreo igual a la de Nyquist y el sistema $H(e^{j\Omega})$ es un filtro LTI de tiempo discreto.

(**a**) Justificar que $x_c(t)$ es de banda limitada y determinar $Y(e^{j\Omega})$.

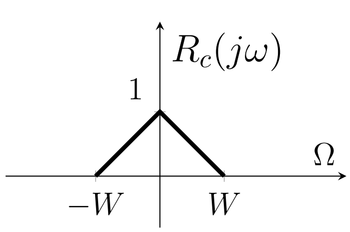
(**b**) Asumiendo que $H(e^{j\Omega}) = \frac{T}{G(j\frac{\Omega}{T})}$ con T el período de muestreo, ¿es posible recuperar la secuencia $\alpha(k)$ a partir de la salida $y(n)$? En caso afirmativo, diseñar un sistema de tiempo discreto que permita recuperar la señal mencionada.

---

15. Sea el siguiente sistema:



donde



$$H(e^{e^{j\Omega}}) = \begin{cases} 1 & |\Omega| \leq \Omega_0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y los conversores A/D y D/A son ideales.

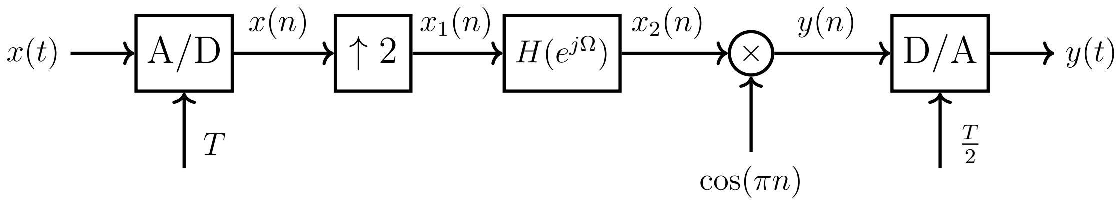
(**a**) Obtener $R(e^{j\Omega})$ y $X(e^{j\Omega})$.

(**b**) Determinar Ω_0, T_2 y α tales que la señal $y(n)$ sea igual a $\alpha r_c(nT_2)$.

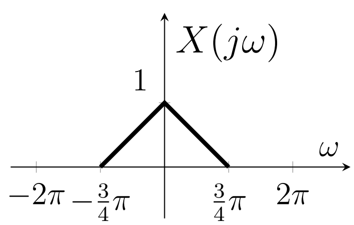
(**c**) Con el valor de Ω_0 hallado en el punto anterior, obtener T_3 y β tales que $s_c(t) = \beta r_c(t)$.

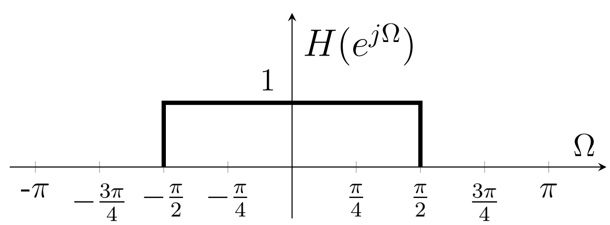
---

16. Sea el sistema de la figura:



Tanto el conversor A/D como el D/A son ideales ($T = \frac{4}{3}$ s). Por otro lado, el espectro en frecuencias de $x(t)$ y la respuesta en frecuencia del sistema $H(e^{j\Omega})$ son los siguientes:

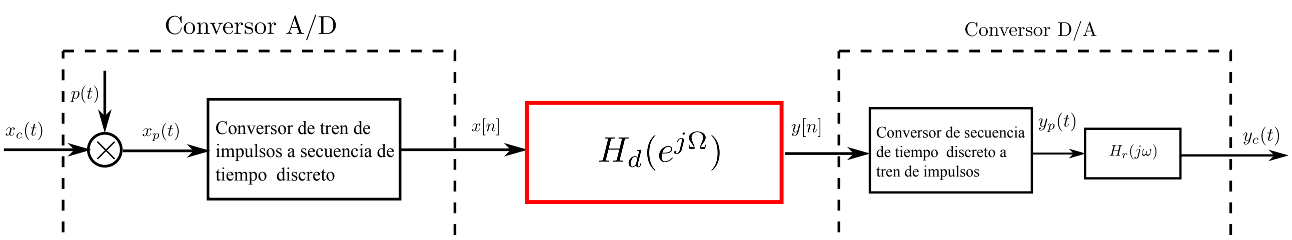




Dibujar los espectros de $x(n)$, $x_1(n)$, $x_2(n)$, $y(n)$ y $y(t)$.

---

17. (****Obligatorio para la carpeta**) Considere una señal de tiempo continuo dada por $x_c(t) = z(t) + \gamma z(t - \beta)$ donde $\beta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ y $|\gamma| < 1$ y donde $Z(j\omega) = 0$ para $|\omega| > W$. Es decir la señal $x_c(t)$ contiene a $z(t)$ y un eco de la misma señal. Se desea implementar un sistema como el de la figura:



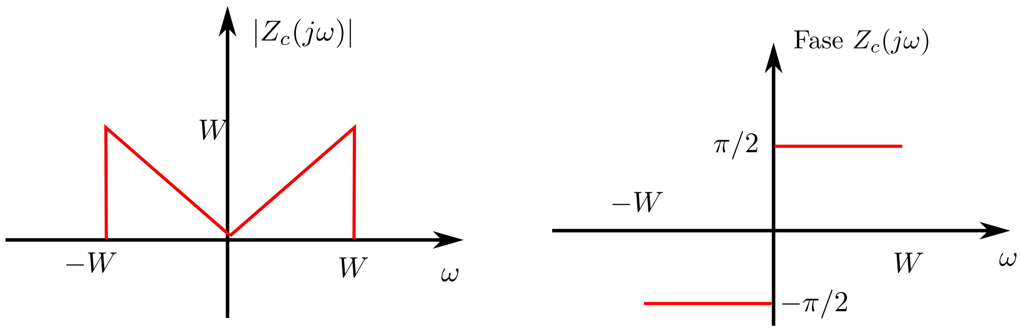
donde $H_r(j\omega)$ es el filtro pasa-bajos ideal con ganancia T (frecuencia de muestreo) y frecuencia de corte igual a $\omega_c = \frac{\pi}{T}$. Se supone que se muestrea con $T = \delta \frac{\pi}{W}$ con $\delta \in (0, 1)$ de forma tal que no existe aliasing.

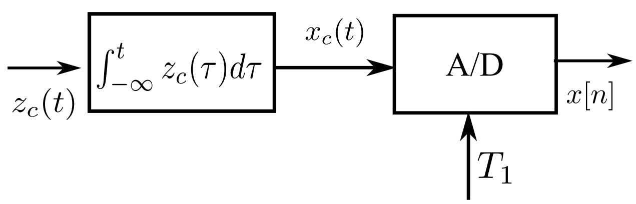
(**a**) Determine un sistema LTI en tiempo continuo (no el de la figura) que permita recuperar $z(t)$ a partir de $x_c(t)$.

(**b**) Determine la respuesta en frecuencia del filtro de tiempo discreto $H_d(e^{j\Omega})$ de la figura de forma tal que el sistema nos permita recuperar $z(t)$.

(**c**) Cómo debería elegir δ para que el filtro de tiempo discreto se pueda implementar a través de una ecuación en diferencias?

18. Sea $z(t)$ una señal cuya transformada de Fourier se puede ver en la figura. La misma es alimentada en el sistema que se muestra también en la figura.





(**a**) Determine la transformada de Fourier la señal $x_c(t)$ a la entrada del conversor A/D. Es la señal resultante de banda limitada?

(**b**) Asumiendo que T_1 se elige tal que la frecuencia de muestreo es exactamente el doble de la frecuencia de Nyquist dibuje cualitativamente la señal $x[n]$.

(**c**) Tomando la señal $x[n]$ del punto b) como entrada a un conversor D/A ideal, determine los parámetros del mismo de forma tal que la señal de tiempo continuo a su salida tenga un ancho de banda de $3W$. Escriba en forma cerrada la forma temporal de dicha señal.

(**d**) Diseñe un sistema de resampleo (usando decimadores y expansores de la forma más eficiente posible) que tome como entrada la señal $x[n]$ del punto **(b)** y entregue una señal $y[n]$ tal que $y[n] = x_c(nT_2)$ con $T_2 = \frac{3\pi}{10W}$. Dibuje esquemáticamente la arquitectura del sistema.

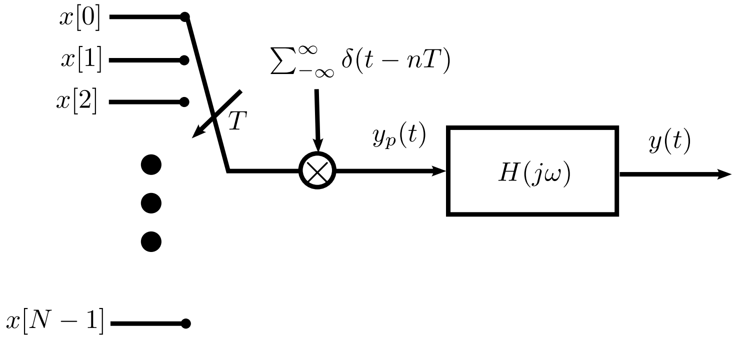
---

19. (****Obligatorio para la carpeta**) Se desea construir un generador de cosenoides. El esquema del mismo se presenta en la figura donde $x[n] = \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$ con $n = 0, 1 \ldots, N-1$ con $N \in \mathbb{N}$. La llave cambia de posición con una tasa T en forma cíclica. La electrónica del dispositivo limita los posibles valores de la tasa T al intervalo $[T_1, T_2]$. Se espera que la salida $y(t)$ del dispositivo sea proporcional a $\cos(\omega_0 t)$. El valor de la frecuencia de corte ω_c del filtro $H(j\omega)$ está fija. Observe que la salida $y_p(t)$ se puede escribir como:

$$y_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right)\delta(t - kT)$$

(**a**) Grafique el espectro de $Y_p(j\omega)$ e $Y(j\omega)$.

(**b**) Dados N, T_1, T_2 determine el intervalo $[\omega_1, \omega_2]$ de los valores ω_0 que el dispositivo puede generar. Qué condición debe cumplir ω_c para que esto sea posible? Determine también el mínimo valor de N necesario.



$$H(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

(**c**) Suponga que tenemos libertad en la elección de la memoria del dispositivo (es decir N, pero respetando el valor mínimo encontrado en el punto anterior), pero T_1 y T_2 permanecen fijos. Proporcione una cota inferior y una cota superior para las frecuencias que podría generar el dispositivo.

86.05 - Señales y Sistemas

Guía 7: Transformada Discreta de Fourier

⌨ = Python, Julia, MATLAB, OCTAVE, etc.

****En esta guía se recomienda fuertemente que, además de realizar los ejercicios analíticamente los verifique, en la medida de lo posible, usando** ⌨

---

1. Calcular analíticamente las siguientes DFT's:

(**a**) $x(n) = [1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$.

(**b**) $x(n) = [0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0]$.
Determine la relación analíticamente la relación entre las 2 DFT's anteriores.

---

2. Calcule analíticamente las siguientes DFT's con longitud 10:

(**a**) $x(n) = [1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0]$.

(**b**) $x(n) = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$.

(**c**) $x(n) = [1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1]$.

(**d**) $x(n) = \frac{\sin(\pi n L/N)}{\sin(\pi n/N)}$ para $n = 0, \ldots, 9$ y $L = 5$

---

3. (****Obligatorio para la carpeta**) Dada una secuencia $x(n)$ arbitraria de longitud $N = 10$ calcular su DFT y compararla con la DFT de la secuencia generada como

$$x_e(n) = \begin{cases} x(n/L) & \text{para } n = kL \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

de longitud $N_e = 10L$. Encuentre además la relación entre ambas DFT's teóricamente, utilizando la definición de la DFT.

---

4. (****Obligatorio para la carpeta**) La DFT puede considerarse un cambio de base y por lo tanto puede escribirse como el producto de un vector fila por una matriz.

(**a**) A partir de la expresión de la DFT determine esa matriz. Determine también la matriz definida por la IDFT y analice las dos matrices obtenidas. Observa alguna relación inmediata entre ambas? Explique.

(**b**) Los vectores columna de esa matriz forman una base ortogonal. Cuál es la expresión analítica de estos vectores?

(**c**) Cuál es la DFT de cada uno de estos vectores columnas y cuál es su IDFT? Relacione su respuesta con algunas de las DFT's obtenidas en los ejercicio 1 y 2.

---

5. Sea la señal discreta de duración infinita $s(n) = A\cos(2\pi f_0 n/N)$, de la cual se disponen sólo de los N puntos correspondientes a $n = 0, \ldots, N-1$. Con esos puntos formamos una secuencia discreta de duración finita que denominaremos $x(n)$, que podemos asimilar a una señal de duración infinita igual a $s(n)$ en los puntos mencionados, y cero fuera de ellos. Una manera de expresar este hecho es decir que $x(n) = s(n)w(n)$, donde $w(n)$ es el pulso rectangular, que vale 1 si $n = 0, \ldots, N-1$ y cero en el resto. Este ejercicio intenta demostrar la utilidad de la DFT para encontrar la frecuencia de la (o las) señal. Se pide:

(**a**) Suponiendo que f_0 es entero, grafique la señal $x(n)$ y su DFT de N puntos. Cómo puede leerse f_0 del gráfico de la DFT? Justifique su respuesta analíticamente. Justificar este cálculo desde el punto de vista del ejercicio 3. Puede leerse el valor de A del gráfico?

(**b**) Suponga ahora que f_0 es un número no entero, y grafique la señal $x(n)$ y su DFT. Explique las diferencias con el caso anterior analíticamente. Pueden leerse f_0 y A en el gráfico de la DFT de N puntos? Podrían leerse en el gráfico si usáramos otra cantidad de puntos de DFT? Especifique qué condiciones debería cumplir f_0 para que sea posible.

(**c**) Repetir los puntos anteriores si $s(n) = A\cos(2\pi f_0 n/N) + B\cos(2\pi f_1 n/N)$. En qué cambia esto respecto al caso de una sola componente de frecuencia? Discuta la utilidad de la multiplicación previa de la señal por una ventana (distinta de la rectangular).

---

6. Dada una secuencia de 64 valores definida por

$$x(n) = \cos\left(\frac{2\pi n}{64}\right) + \cos\left(\frac{16\pi n}{64}\right), n = 0, \ldots, 63$$

y su DFT de 64 puntos $X(k)$, se forma una nueva secuencia $X_1(k)$ de 32 muestras definida por el submuestreo en 2 de su DFT:

$$X_1(k) = X(2k), n = 0, \ldots, 31$$

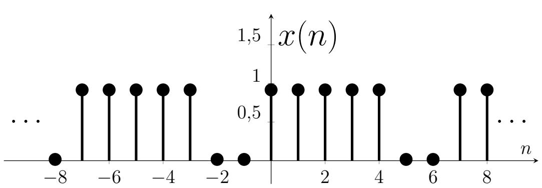
(**a**) Hallar $x_1(n)$, la IDFT de $X_1(k)$. Verifique lo obtenido en .

(**b**) Hallar otras dos secuencias $x(n)$ que por el mismo proceso también den la misma señal $x_1(n)$.

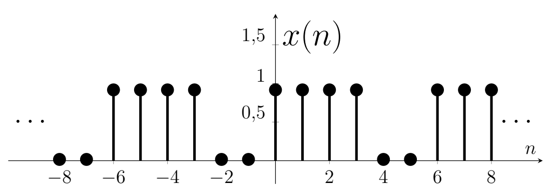
---

7. Para las señales:

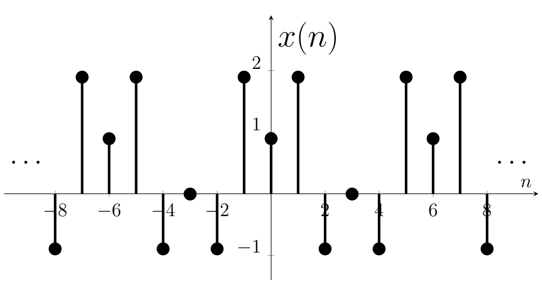
(**a**)



(**b**)



(**c**)



(**d**) $x(n) = \sin(2\pi n/3)\cos(\pi n/2)$

calcular y graficar los coeficientes de la serie de Fourier utilizando la DFT. Justificar el procedimiento. Contrastar los resultados con los obtenidos en el punto 8 de la práctica de Series de Fourier.

8. (****Obligatorio para la carpeta**) Considere la señal $x[n] = \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)$ con $-\infty < n < \infty$ donde N es un entero arbitrario y k también es un entero menor a N. Considere también $\hat{x}[n] = \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)$ con $n = 0, \ldots, N-1$.

(**a**) Determine las transformadas de Fourier de tiempo discreto de ambas señales y grafíquelas.

(**b**) Calcular la DFT de tamaño N de $\hat{x}[n]$ y graficarla esquemáticamente.

(**c**) Razonar y explicar conceptualmente por qué la DFT de tamaño N de $\hat{x}[n]$ no es el muestreo de la transformada de Fourier de $x[n]$ pero si de $\hat{x}[n]$. Tiene sentido hablar del DFT de tamaño N de $x[n]$?

---

9. La DFT y la transformada de Fourier de tiempo discreto están relacionadas. Se pide:

(**a**) Encuentre la relación entre $X(k)$, la DFT de una señal discreta y de duración finita $x(n)$, y la transformada Fourier de tiempo discreto $X(\Omega)$ de la misma señal, a partir de las fórmulas de ambas transformadas.

(**b**) Conociendo la relación entre la DFT y la transformada de Fourier de tiempo discreto se desea obtener 100 muestras del espectro de la señal $x(n) = \sin(n\pi/32)/n$. Cuál es el procedimiento a seguir?

---

10. Sea la señal $x_c(t) = \cos(2\pi \times 100t)$. La misma se muestrea con período de muestreo T que verifica el teorema del muestreo. Se juntan $N = 1500$ muestras de la señal $x[n] = x_c(nT)$ con $n = 0, \ldots, N-1$ y se procede a calcular la DFT $X[k]$ de 1500 puntos de dicha secuencia con $k = 0, \ldots, 1499$. Se desea que la DFT tenga la siguiente forma:

$$X[k] = \begin{cases} A & k = k_1 \\ A & k = k_2 \\ 0 & \text{para otros valores de } k \end{cases}$$

(**a**) Determine el valor de T para que $k_1 = 150$.

(**b**) En base a lo determinado en el punto anterior determine k_2 y el valor de A.

---

11. Sea $x(n) = 0$ para $n < 0$ y $n > N-1$ y sea $X(e^{j\omega})$ su transformada de Fourier. Sea $\tilde{X}(k) = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi k}{32}}$ para $k = 0, \ldots, 31$. Se sabe que $\tilde{X}(16) = 1$ y cero para otros valores de k.

(**a**) Si $N = 32$ determine una secuencia $x(n)$ consistente con la información dada. Es única la respuesta? Si no lo es indique otra secuencia posible. Si lo es, justifique adecuadamente.

(**b**) Repita el punto anterior, pero ahora considere que $N = 96$.

---

12. (****Obligatorio para la carpeta**) Considere una señal $x_1(n)$ cuya transformada de Fourier de tiempo discreto vale:

$$X_1(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

Sea $x_2()n)$ una señal de longitud finita N tal que su DFT de N puntos vale:

$$X_2(k) = X_1(e^{j\Omega})\Big|_{\Omega=\frac{2\pi k}{N}}$$

Determine $x_2[n]$. (Ayuda: piense que sucede en tiempo discreto cuando muestrea la transformada de Fourier $X_1(e^{j\Omega})$ y tenga presente que la duración de $x_1[n]$ es infinita)

---

13. Sea una señal analógica $x_c(t)$ que es tiene un ancho de banda de 30 Hz a la que se le toman 100 muestras por segundo durante 10 segundos. A la señal de tiempo discreto resultante se le toma la DFT de 1000 puntos.

(**a**) Determine los índices de la DFT que aproximadamente corresponden al intervalo de frecuencia de tiempo continuo $[-30, 30\text{ Hz}]$.

(**b**) La persona que analiza la DFT resultante esperaba que los valores de la DFT para los índices que corresponden a frecuencias fuera del intervalo $[-30, 30\text{ Hz}]$ fueran cero. Sin embargo esto no es así. Explique por qué sucede esto.

---

14. Considere la señal $x_c(t) = \cos(2\pi \times 300t) + \cos(2\pi \times 400t)$. Esta señal se muestrea con $T = 1/1000$ seg. durante un tiempo igual $0,25$ seg. obteniendose una señal de tiempo discreto $x[n]$ de longitud N y a la cual se le calcula una DFT $X[k]$ del mismo tamaño con $k = 0, 1, \ldots N$.

(**a**) Determine los índices k en donde deberían verse las componentes espectrales distintas de cero de la señal original $x_c(t)$. Dibuje esquemáticamente la DFT.

(**b**) Suponga que la señal $x_c(t)$ antes de ser muestreada retrasada en $\Delta = 0{,}1$ seg, esto es $y_c(t) = x_c(t - \Delta)$. Esta señal es nuevamente muestreada con $T = 1/1000$ seg. durante un tiempo igual $0,25$ seg. obteniéndose la señal $y[n]$. En base al punto anterior determine la DFT $Y[k]$ de $y[n]$ para todo k justificando detalladamente.

---

15. Una señal analógica de banda limitada es muestreada sin aliasing a 400 Hz durante un tiempo tal que 900 muestras con colectadas. A la señal de tiempo discreto obtenida se le aplica una DFT de tamaño 900. Se sabe que en la señal muestreada se encuentra presente un coseno de frecuencia 111 Hz.

(**a**) Cuáles son los índices de la DFT más cercanos a las componentes del dicho coseno. A qué frecuencias de tiempo continuo exactas corresponden dichos índices?

(**b**) Cuántos ceros se deberían agregar a la señal de tiempo continuo para que la DFT del nuevo tamaño tenga índices que coincidan exactamente con las componentes de tiempo continuo del coseno de 111 Hz? Cuáles son dichos índices?

---

16. (****Obligatorio para la carpeta**) Se tiene una señal $x(t)$ cuyo ancho de banda es $W = 2\pi 300$ rad/seg.. Se desea hacer un análisis de Fourier de esta señal usando DFT. Para ello tenemos que determinar el largo N de dicha DFT y el valor del período de muestreo T. Nuestro requerimento es que la resolución espectral objetivo (en términos de frecuencias de tiempo continuo) que nos otorga el análisis con la DFT tiene que ser menor a $2\pi 0{,}5$ rad/seg..

(**a**) Determine el largo del intervalo tiempo mínimo durante el cual debe muestrear a la señal de tiempo continuo ($T \times$ número de muestras tomadas).

(**b**) Si T se elige igual al mayor valor posible para no tener aliasing, determine el mínimo valor de N que satisface la resolución espectral objetivo.

---

17. (****Obligatorio para la carpeta**) Considere la señal:

$$x(t) = \cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t)$$

Esta señal se muestrea con $T = 1/100$ seg. durante 1 seg., resultando en la señal $x[n]$ de duración $N = 100$. Usando , calcule la DFT de tamaño N_f de esta señal en los siguientes casos y grafique el valor absoluto de la misma. Extraiga conclusiones sobre la resolución espectral de la DFT, el tamaño N_f de la misma, la cantidad de muestras N de la señal $x(t)$ y el hecho de que las frecuencias componentes de la señal caigan o no sobre la grilla de la DFT.

(**a**) $N_f = N,\ f_1 = 30,\ f_2 = f_1 + \frac{\alpha}{NT}$ con $\alpha = 0{,}5, 1, 5$

(**b**) $N_f = N,\ f_1 = 30{,}5,\ f_2 = f_1 + \frac{\alpha}{NT}$ con $\alpha = 0{,}5, 1, 5$

(**c**) $N_f = 10N,\ f_1 = 30,\ f_2 = f_1 + \frac{\alpha}{NT}$ con $\alpha = 0{,}5, 1, 5$

(**d**) $N_f = 10N,\ f_1 = 30{,}5,\ f_2 = f_1 + \frac{\alpha}{NT}$ con $\alpha = 0{,}5, 1, 5$

---

18. Sea una señal de tiempo discreto $x[n]$ cuya transformada de Fourier es:

$$X(e^{j\Omega}) = 5e^{-j\Omega} + 3e^{-j2\Omega} - 8e^{-j4\Omega}$$

(**a**) Escriba la DFT de 10 puntos de $x[n]$.

(**b**) Considere la DFT $X[k]$ de longitud 10 del punto anterior. Considere $Y[k] = e^{-j\frac{6\pi k}{5}} X[k]$. Determine y dibuje la señal $y[n]$.

(**c**) Sea $z[n]$ una señal de 10 puntos cuya DFT de longitud 10 es:

$$Z[k] = 1 + e^{-j\frac{6\pi k}{10}}, k = 0, \ldots, 9$$

Considere $W[k] = Z[k]X[k]$. Determine $w[n]$.

---

19. Se la siguiente señal de tiempo discreto:

$$x[n] = \delta[n-1] + \delta[n-2] - 2\delta[n-3]$$

(**a**) Encontrar la señal $y[n]$ cuya DFT de 8 puntos vale $Y[k] = e^{-j\frac{4\pi k}{8}} X[k]$.

(**b**) Sea $Y[k] = X[k]H[k]$ donde $H[k]$ es la DFT de 6 puntos de

$$h[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 7 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Determine $y[n]$.

---

20. (****Obligatorio para la carpeta**) Usando , compute y grafique los espectogramas [1]de las siguientes señales:

(**a**) $x(t) = \cos(2\pi 100 t),\ 0 \leq t \leq 1$

(**b**) $x(t) = [1 + \cos(2\pi 10 t)] \cos(2\pi 100 t),\ 0 \leq t \leq 1$

(**c**) $x(t) = \cos(2\pi 100 t^2),\ 0 \leq t \leq 1$

Considere en todos los casos que el período de muestreo es $T = 1/400$ seg.. Explore las distintas opciones de la función (ej: solapamiento, ventana, etc).

---

21. Hallar utilizando la DFT la respuesta en frecuencia de un sistema cuya respuesta impulsiva es:

(**a**) $h(n) = u(n) - u(n-20)$.

(**b**) $h(n) = \delta(n) - \delta(n-1)$

(**c**) Calcular mediante DFT la salida de los sistemas de los puntos anteriores si su entrada es $x(n) = e^{j\frac{2\pi}{100} f_0 n}$, con $f_0 = 3$ y $f_0 = 1{,}5$.

---

22. (****Obligatorio para la carpeta**) Dados dos pulsos discretos de duración N = 8 y amplitud unitaria se pide:

(**a**) Hallar analíticamente su convolución lineal. Simular el resultado usando .

(**b**) Hallar analíticamente su convolución circular de 8 puntos. Cómo obtendría este resultado usando .

(**c**) Utilizando DFT e IDFT describa la manera de obtener la convolución lineal de las dos señales propuestas. Simularlo en y compararlo con el obtenido en el punto **(a)**.

(**d**) Periodizar la secuencia obtenida en el punto **(a)** con período N = 8. Qué relación tiene con la secuencia obtenida en el punto **(b)**? Explique el resultado.

---

23. Dadas las señales:

$$x(n) = \begin{cases} 1 & \text{para } n = 0, \ldots, 7 \\ 0 & \text{para otro } n \end{cases}$$

$$h(n) = \delta(n-8)$$

(**a**) Encuentre analíticamente la señal $y(n) = x(n) * h(n)$.

(**b**) Idem anterior pero utilizando DFT e IDFT. Qué cantidad de puntos tienen que tener dichas transformaciones? Verifique los cálculos utilizando .

---

24. (****Obligatorio para la carpeta**) Dadas dos secuencias de 4 puntos $x(n)$ y $h(n)$ definidas de la siguiente forma:

[1]Por ejemplo, puede usar la función *spectrogram* del paquete de Python SciPy, `https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.signal.spectrogram.html`

$$x(n) = \cos(n\pi/2), n = 0, 1, 2, 3$$
$$h(n) = 2^n, n = 0, 1, 2, 3$$

(**a**) Determinar la DFT de 4 puntos $X(k)$ de la secuencia $x(n)$.

(**b**) Calcular la DFT de 4 puntos $H(k)$ de la secuencia $h(n)$.

(**c**) Calcular $y_1(n)$ como la convolución circular de 4 puntos de $x(n)$ con $h(n)$.

(**d**) Calcular $y_2(n)$ como la IDFT de 4 puntos del producto de las DFTs $X(k)$ y $H(k)$.

(**e**) Calcular la respuesta de un sistema cuya respuesta impulsiva es $h(n)$ cuando se le aplica a la entrada la secuencia $x(n)$. Qué relación guarda esta respuesta con la salida $y_2(n)$ hallada en el punto anterior?

---

25. Suponga que tenemos 1 seg. de una señal que es muestreada a 1 KHz. La señal discreta que surge de este proceso debe ser filtrada por un filtro FIR de 20 coeficientes. Se desea usar la DFT para realizar este procedimiento. Para ello se dispone de una unidad que permite realizar DFTs e IDFTs de tamaños que son potencia de 2.

(**a**) Indique detalladamente como podría realizar el filtrado, cuantas DFTs e IDFTs debería computar y su tamaño.

(**b**) Compare la complejidad computacional de este método y el filtrado directo mediante la operación de convolución tradicional.

86.05 - Señales y Sistemas

Guía 8: Transformada de Laplace y Z, Ecuaciones Diferenciales y en Diferencias (Parte II)

⌨ = Python, Julia, MATLAB, OCTAVE, etc.

****En esta guía se recomienda fuertemente que, además de realizar los ejercicios analíticamente los verifique, en la medida de lo posible, usando ⌨**

---

1. Determinar la transformada de Laplace, la región de convergencia asociada y el diagrama de polos y ceros de cada una de las siguientes funciones del tiempo:

(**a**) $x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-3t}u(t)$.

(**b**) $x(t) = e^{2t}u(-t) + e^{3t}u(-t)$.

(**c**) $x(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq 1 \\ 2-t & 1 < t \leq 2 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$.

---

2. Graficar mediante ⌨ el diagrama de polos y ceros de las siguientes transformadas de Laplace:

(**a**) $\frac{1}{s^2+9}; \mathbb{R}\{s\} > 0$.

(**b**) $\frac{1}{s^2+9}; \mathbb{R}\{s\} < 0$.

(**c**) $\frac{s+1}{(s+1)^2+9}; \mathbb{R}\{s\} < -1$.

(**d**) $\frac{s^2-s+1}{(s+1)^2}; \mathbb{R}\{s\} > -1$.

---

3. Aplique la antitransformada para los casos al ejercicio 2, y halle $x(t)$.

---

4. Considere un sistema LTI continuo en el cual la entrada $x(t)$ y la salida $y(t)$ están relacionadas con la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y(t)}{d^2t} - \frac{dy}{dt} - 2y(t) = x(t)$$

Sean $X(s)$ e $Y(s)$ las transformadas de Laplace de $x(t)$ e $y(t)$, respectivamente, y sea $H(s)$ la transformada de Laplace de $h(t)$ siendo esta última la respuesta al impulso del sistema.

(**a**) Determine $H(s)$ como una relación de polinomios en s. Dibuje el patrón de polos y ceros de $H(s)$.

(**b**) Determine $h(t)$ para cada uno de los siguientes casos:

- El sistema es estable.
- El sistema es causal.

- El sistema no es causal ni estable.

---

5. Considere un sistema LTI causal en tiempo continuo dado por:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t-1} e^{-\alpha(t-\tau)} \left\{ x(\tau - \beta_1) + x(\tau - \beta_2) \right\} d\tau, \ \alpha \in \mathbb{R}, \ \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{Z}, \ \beta_2 > \beta_1$$

(**a**) Determine la transferencia $H(s)$ del mismo y su diagrama de polos y ceros.

(**b**) Determine el rango de valores para α, β_1 y β_2 de manera tal que sea estable.

---

6. Considere la siguiente señal de tiempo continuo

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta} \delta(t - n\beta)$$

donde $\beta > 0$.

(**a**) Determine $X(s)$, su ROC y el diagrama de polos y ceros. Hint: Analice con sumo cuidado el diagrama de polos y ceros ya que tiene una estructura muy particular.

(**b**) Muestre que existe la transformada de Fourier de tiempo continuo (en el sentido distribucional como vimos en clase). Observa algunas propiedades interesante? Justifique.

---

7. (****Obligatorio para la carpeta**) Considere un circuito RC serie, excitado con una señal periódica rectangular de período $T = 1s$, ciclo de servicio 0.5 y de amplitud unitaria, con $RC = 0{,}1$ s;. Considere la salida de tensión sobre el capacitor. Se pide:

(**a**) Calcular los coeficientes de la serie de Fourier de la entrada $x(t)$ y en base a éstos calcular los de la salida $y(t)$, aplicando los conceptos de sistemas LTI vistos hasta el momento. Graficar estos coeficientes, para $k = 0, \ldots, 100$. Se recomienda usar  .

(**b**) Calcular analíticamente utilizando Transformada de Laplace la forma de $y(t)$. Calcular a partir de esta expresión temporal los coeficientes de su representación en serie de Fourier. Comparar estos valores con los obtenidos en el punto anterior.

(**c**) Explicar conceptualmente qué es la respuesta en frecuencia. Graficar esta función para los valores de k mencionados utilizando los datos calculados en el punto anterior y los coeficientes de la señal de entrada. Graficar toda la envolvente superponiéndola a los valores anteriores.

---

8. (****Obligatorio para la carpeta**) Determine la transformada Z de cada una de las siguientes secuencias. Grafique el diagrama de polos y ceros e indique la región de convergencia. Indique además si existe o no la transformada de Fourier en cada caso.

(**a**) $\delta(n+5)$.

(**b**) $\delta(n-5)$.

(**c**) $(-1)^n u(n)$.

(**d**) $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u(n+3)$.

(**e**) $\left(-\frac{1}{3}\right)^n u(-n-2)$.

(**f**) $\left(\frac{1}{4}\right)^n u(3-n)$.

(**g**) $\left(\frac{1}{2}\right)^n (u(n+4)-u(n-5))$.

(**h**) $n\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$.

(**i**) $|n|\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$.

(**j**) $4^n \cos\left(\frac{2\pi}{6}n+\frac{\pi}{4}\right) u(-n-1)$.

---

9. Aplique la antitransformada Z utilizando el método indicado y determine la secuencia $x(n)$ correspondiente:

(**a**) Por fracciones parciales:

$$X(z) = \frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{5}{2}z^{-1}+z^{-2}}$$

siendo $x(n)$ absolutamente sumable.

(**b**) Por división larga:

$$X(z) = \frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

siendo $x(n)$ derecha.

(**c**) Por fracciones parciales:

$$X(z) = \frac{3}{z-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}z^{-1}}$$

siendo $x(n)$ absolutamente sumable.

---

10. (****Obligatorio para la carpeta**) Sean los sistemas descriptos por las siguientes ecuaciones en diferencias:

$$y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) = x(n) - x(n-1)$$
$$y(n) - \frac{3}{2}y(n-1) = x(n)$$

(**a**) Hallar $H(z)$, realizar el diagrama de polos y ceros, y analizar estabilidad y causalidad para cada uno de los sistemas y para el sistema que resulta de conectarlos en cascada.

(**b**) Hallar la respuesta al impulso y al escalón de la cascada de ambos utilizando , para cada uno de los casos que resulta del análisis realizado en el punto anterior.

(**c**) Graficar la respuesta en frecuencia del sistema del punto anterior usando .

(**d**) Realize mediante un muestreo de la transformada Z en el círculo unidad y mediante una IDFT obtenga una función temporal a partir de estas muestras, indicando el significado que esta función tiene. Comparar con las funciones obtenidas en los puntos anteriores. Es igual a alguna de ellas?. Justifique analíticamente su respuesta.

---

11. Una secuencia a derecha $x(n)$ tiene transformada Z dada por

$$X(z) = \frac{3z^{-10} + z^{-7} - 5z^{-2} + 4z^{-1} + 1}{z^{-10} - 5z^{-7} + z^{-3}}$$

Determine $x(n)$ para $n < 0$.

---

12. (****Obligatorio para la carpeta**) Para el sistema LTI descripto por

$$H(z) = 1 - z^{-5}$$

se pide:

(**a**) Dibujar el diagrama de polos y ceros y las posibles ROC, analizando estabilidad y causalidad en cada caso.

(**b**) Para cada una de las posibles ROC encontradas en el ítem anterior, hallar $h(n)$ (antitransformada de $H(z)$) y graficarla.

(**c**) Para cada una de las posibles ROC hallar la ecuación en diferencias equivalente.

(**d**) Determinar $H(\Omega)$ la transformada de Fourier de $h(n)$ y graficarla, indicando la relación con $H(z)$.

(**e**) Para la secuencia $\hat{H}(k)$, correspondiente a muestras de la transformada de Fourier $H(\Omega)$ en $\Omega = \frac{2\pi k}{N}$, determinar su IDFT,$\hat{h}(n)$, para los casos: $N = 10, N = 5, \mathrm{y} N = 2$. Indicar la relación entre $\hat{h}(n)$ y $h(n)$ en cada caso, justificando su respuesta.

---

13. (****Obligatorio para la carpeta**) Sea un sistema LTI cuya entrada es $x[n]$ y salida es $y[n]$. La relación entre la entrada y salida es:

$$y[n] - \frac{7}{2}y[n-1] + \frac{3}{2}y[n-2] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z[n-k]$$

(**a**) Sabiendo que la respuesta al impulso del sistema es causal con $\lim_{n\to\infty} h[n] = 1$ determine α y β.

(**b**) Obtenga el diagrama de polos y ceros del sistema y determine si es estable.

---

14. (****Obligatorio para la carpeta**) Un problema frecuente en la práctica es cuando la señal $x(n)$ ha sido filtrada por un sistema LTI, cuya salida es la señal distorsionada $y(n)$, y se desea recuperar la señal original $x(n)$ procesando $y(n)$. En teoría, $x(n)$ puede ser recuperada de $y(n)$, pasando $y(n)$ por un filtro inverso cuya transferencia es el recíproco de la transferencia del filtro distorsionante. Suponga que la distorsión es causada por un filtro FIR con respuesta al impulso

$$h(n) = \delta(n) - \frac{1}{2}\delta\left(n - n_0\right)$$

donde n_0 es un numero entero positivo, es decir la distorsión es un eco con retardo n_0.

(**a**) Determinar la transformada Z de $h(n)$, que denominaremos $H(z)$, y la DFT de N puntos de $h(n)$, o $H_1(k)$. Qué relación hay entre $H(z)$ y $H_1(k)$?. Asuma que $N = 4n_0$.

(**b**) Determinar $H_i(z)$, la transformada Z del filtro inverso y $h_i(n)$, su respuesta al impulso. Este filtro inverso es FIR o IIR?.

(**c**) Suponga que vamos a usar un filtro FIR de longitud N con objeto de implementar el filtro inverso, y sea la DFT de N puntos de dicho filtro inverso propuesto:

$$G(k) = \frac{1}{H_1(k)}, k = 0, \ldots, N-1$$

Hallar la respuesta al impulso $g(n)$ del filtro inverso propuesto.

(**d**) Es el hecho de que la multiplicación de $G(k)H_1(k) = 1, \forall k$ un argumento válido para asegurar que hemos implementado un filtro inverso? Explique claramente por qué.

---

15. (****Obligatorio para la carpeta**) Sea

$$X(z) = \frac{1 - 4z^{-1}}{1 - \frac{1}{6}z^{-1}}, \quad \text{ROC} = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1/6\}$$

Considere la respuesta al impulso de un sistema LTI dada por $h[n] = \alpha^n x[n]$. Determine el rango de valores de α tal que $h[n]$ corresponda a un sistema cuyo sistema inverso pueda elegirse estable y causal. En función de α escriba la ROC de dicho sistema inverso.

---

16. Considere el siguiente sistema

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2z^{-1} + \frac{4}{3}z^{-2}}$$

(**a**) Analice las distintas ROCs asociadas con esta transferencia y la estabilidad y causalidad de los sistemas asociados a cada una de ellas.

(**b**) Encuentre un sistema $H'(z)$ cuya respuesta en frecuencia tenga la misma magnitud que la de la transferencia anterior pero que se causal y estable. Detalle cuidadosamente el procedimiento utilizado para encontrar dicho sistema.

---

17. (****Obligatorio para la carpeta**) Sea $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ con $n = 0, 1, \ldots, N-1$. Suponiendo que $N = 10$ encuentre expresiones de las DFT de las siguiente señales en función de un muestreo adecuado de $X(z)$.

1.
$$x_1[n] = \begin{cases} x[n] & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & N \leq n \leq 2N-1 \end{cases}$$

2.
$$x_2[n] = x[n] + x[n-N]$$

Verifique los resultados obtenidos con  .

---

18. (****Obligatorio para la carpeta**) Sea un sistema cuya transferencia vale:

$$H(z) = \frac{z^{-2} - \alpha}{(1 - \beta z^{-1})(1 - 3z^{-1})}$$

donde α y β son números desconocidos. Se sabe que cuando la entrada al sistema es $x(n) = 1$ la salida es idénticamente nula y cuando $x(n) = (\frac{1}{2})^n$ la salida es $y(n) = \infty$ para todo n.

(**a**) Determine el diagrama de polos y ceros del sistema.

(**b**) Puede ser el sistema estable y causal? Cuál es la ROC para que sea estable? Y la ROC para que sea causal?

(**c**) Para el caso en que el sistema es estable determine la respuesta al escalón.

---

19. (****Obligatorio para la carpeta**) Sea la señal $x(n)$ con transformada Z dada por $X(z)$. Se sabe que dicha es señal es derecha y además $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$. Dicha señal se pasa por un sistema LTI tal que su salida es

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k x(n - kN),$$

donde N es un entero arbitrario y α es un número complejo arbitrario.

(**a**) Determine $Y(z)$.

(**b**) Determine la transferencia $H(z)$ del sistema. Analice la influencia del valor de α en las características del sistema.

---

20. (****Obligatorio para la carpeta**) Sea un sistema de tiempo continuo causal y estable dado por

$$H_c(s) = \frac{s+3}{(s+1)^2 + 2},$$

(**a**) Encuentre el diagrama de polos y ceros y la ROC del sistema. (**b**) Se desea determinar un sistema de tiempo discreto $H_d(z)$ que responda "aproximadamente" de la misma forma que el sistema $H_c(s)$. Se propone calcularlo de la siguiente forma

$$h_d(n) = h_c(nT), \ T > 0$$

Determine $h_d(n)$, $H_d(z)$, la ROC y el diagrama de polos y ceros del mismo. Es el sistema estable y causal? Dependen la estabilidad y causalidad del valor elegido de T?