Facultad de Ingeniería **UBA**

Probabilidad y Estadística

Guía de Ejercicios

Primer Cuatrimestre del 2021

Versión 1.4

Glosario de símbolos

: El ejercicio requiere simulación con computadora.

: Alto. Estos ejercicios son importantes, pudiendo ser o no difíciles de resolver. Se recomienda fuertemente resolverlos.

: "Siga siga". Lea detenidamente el enunciado. Si cree entender qué es lo que hay que hacer (ya ha resuelto un ejercicio previamente de espíritu similar), pase al siguiente. Ante la duda, resuélvalo.

: Curva peligrosa. Estos ejercicios pueden ser más difíciles de lo que parecen a simple vista, o por el contrario, si se miran bien resultan más fáciles de lo que parecen. Ante la duda, consulte a los docentes del curso o en el maratón de consultas.

: Ejercicios muy difíciles.

: Sólo para audaces. Viaje de ida al paraíso o al infierno.

Guía 1

1.1 Sea $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

(**a**) Hallar la menor álgebra de subconjuntos de Ω tal que el subconjunto $\{1, 2, 3\}$ pertenezca a ella.

(**b**) Hallar la menor álgebra de subconjuntos de Ω tal que los subconjuntos $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$, $\{5, 6\}$ pertenezcan a ella.

1.2 [*DeGroot, pp. 38-42*] En un grupo de 200 estudiantes de Ingeniería Industrial, 137 cursan Álgebra II, 60 Probabilidad y 124 Materiales Industriales. Además, 33 cursan Álgebra II y Probabilidad; 29 Probabilidad y Materiales Industriales; y 92 Álgebra II y Materiales industriales. Finalmente, 18 cursan las tres materias. Se elige un estudiante al azar en ese grupo. Calcular la probabilidad de que

(**a**) curse Álgebra II o Probabilidad.

(**b**) no curse ni Álgebra II ni Probabilidad.

(**c**) curse alguna de las tres materias.

(**d**) curse solo una de las tres materias.

(**e**) no curse ninguna de las tres materias.
Para cada caso representar los eventos en un diagrama de Venn.

1.3 Sea $\Omega = \{a, b, c\}$. Definimos en los subconjuntos $A \subset \Omega$ una probabilidad $\mathbf{P}$ mediante $\mathbf{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$, donde $p(a) = \frac{1}{2}, p(b) = \frac{1}{3}, p(c) = \frac{1}{6}$. Calcular las probabilidades de los 8 subconjuntos de Ω.

1.4 Un dado equilibrado se arroja dos veces. Hallar la probabilidad de que

(**a**) la suma de los resultados sea 7.

(**b**) el primer resultado sea mayor que el segundo.

(**c**) los dos resultados sean distintos y su suma no supere 7.

(**d**) el módulo de la diferencia de los resultados sea mayor que 1.

1.5 Se tienen dos urnas a y b. En a hay 5 bolas rojas y 3 blancas, y en b hay 2 rojas y 3 blancas. Si se extraen al azar una bola de cada urna, hallar la probabilidad de que

(**a**) ambas sean rojas.

(**b**) ambas sean del mismo color.

(**c**) sean de distinto color.

(**d**) la bola extraída de la urna b sea blanca.

1.6 Cada noche, después de cenar, el matrimonio Galíndez tira 4 dados. Si no sale ningún 1, le toca al Sr. Galíndez lavar los platos. En caso contrario, a su esposo. En promedio, ¿quién lava los platos más seguido?

1.7 Se realiza el experimento de tirar un dado hasta que sale el primer 6, anotando el número N de tiradas necesarias.

(**a**) Describir un posible espacio muestral para este experimento.

(**b**) Sea A_n el evento descrito por $N = n$. Hallar $\mathbf{P}(A_1), \mathbf{P}(A_8), \mathbf{P}(A_{2016})$.

(**c**) Sea B_n el evento descrito por $N > n$. Hallar $\mathbf{P}(B_1), \mathbf{P}(B_8)$. ¿Cómo se describiría en términos de lo que pasa con el dado el evento B_{2016}?

(**d**) Mostrar que para cualquier n, $B_{n+1} \subset B_n$.

(**e**) Sea $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$. ¿Cómo se describiría en términos de lo que pasa con el dado el evento B? Hallar $\mathbf{P}(B)$.

1.8 Sea $\Omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Definimos en los subconjuntos $A \subset \Omega$ una probabilidad $\mathbf{P}$ mediante $\mathbf{P}(A) = \sum_{n \in A} p(n)$, donde $p(n) = c/n!$. Hallar el valor de c y calcular $\mathbf{P}(\{0, 2, 4, 6, \dots\})$.

1.9 [*Feller, pág. 18 y 24*] Juan, Pedro y María juegan al ping-pong. El que gana un partido sigue jugando, mientras que el que lo pierde es reemplazado por el que no jugaba. Se gana una cerveza el primero que gana dos partidos seguidos, completando así un juego. El primer partido es entre Juan y Pedro. La probabilidad de que Juan gane el primer partido es 5/9.

Para cada k, asignamos a cada juego posible que dura exactamente k partidos, la probabilidad $\frac{1}{3 \cdot 2^{k-1}}$. Si describimos un juego indicando la secuencia de ganadores mediante la de sus iniciales, el juego $JMPP$ tendrá probabilidad 1/24, el juego $(PMJ)^6PMM$ (dejamos a cargo del lector la interpretación de la notación) probabilidad $\frac{1}{3 \cdot 2^{20}}$.

(**a**) Describir un espacio muestral para los resultados del juego. (*sugerencia*: analizar las secuencias posibles usando la notación ya introducida.)

(**b**) Hallar las probabilidades de que cada uno de los jugadores Juan, Pedro o María se tome la cerveza.

(**c**) Hallar la probabilidad de que Juan gane el primer partido y el juego dure para siempre sin que nadie se gane la cerveza.

(**d**) Hallar la probabilidad de que el juego dure para siempre sin que nadie se gane la cerveza.

1.10 Se sortea un número al azar dentro del intervalo $[0, 1]$.

(**a**) Hallar la probabilidad de que los primeros tres dígitos sean 3, 1, 4 (es decir, $0.314\dots$).

(**b**) Hallar la probabilidad de que el 0 no esté entre los primeros 4 dígitos.

(**c**) Hallar la probabilidad de que el 0 no sea uno de sus dígitos.

1.11 *Simulación de experimentos aleatorios.* Sea $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ el espacio muestral correspondiente a un experimento aleatorio. Cada punto $\omega_k \in \Omega$ tiene asignada la probabilidad p_k. Definimos el siguiente mecanismo para *simular el experimento.*

- Sean $a_0 = 0$, $a_i = \sum_{k=1}^{i} p_k$. Subdividimos el intervalo $(0,1]$ en los n intervalos $I_i = (a_{i-1}, a_i]$, $i = 1, \dots, n$. Notar que $\bigcup_{i=1}^{n} I_i = (0,1]$, y que la longitud de I_i es p_i.
- Dado un número aleatorio $U \in (0,1]$, determinamos a cuál de los intervalos I_i pertenece, y consideramos que el resultado simulado de la realización del experimento ha sido ω_i.

Si queremos simular m realizaciones del experimento, usaremos m veces el mecanismo anterior, cada vez con un nuevo número aleatorio U.

(**a**) Dados los números aleatorios $0.2, 0.7, 0.9, 0.1$, simular el resultado de 4 tiradas sucesivas de un dado equilibrado.

(**b**) Mediante diez mil simulaciones estimar la probabilidad de que al arrojar 2 dados equilibrados la suma de los resultados sea menor que 11. Comparar la estimación obtenida con el valor verdadero de la probabilidad.

1.12 Mediante 20 simulaciones estimar las siguientes probabilidades

(**a**) Obtener al menos un as en seis tiros de un dado.

(**b**) Obtener al menos dos ases en doce tiros de un dado.

(**c**) De acuerdo con los resultados, si se quiere apostar a uno de los resultados, ¿cuál de las dos apuestas es más conveniente?

(**d**) Repetir los incisos anteriores mediante 10000 simulaciones.

1.13 Una urna contiene 10 bolas numeradas del 0 al 9.

(**a**) Se extraen al azar *con reposición* cinco bolas. Calcular la probabilidad de que

1. las cinco sean iguales.
2. según el orden de extracción se observen los números 1,3,5,7,9.
3. se observen los cinco números impares.
4. las cinco sean distintas.

(**b**) Calcular las probabilidades del inciso anterior, suponiendo que las extracciones se hacen *sin reposición.*

1.14 [*Feller, pág. 56*] La encargada del edificio donde viven otras 29 personas echa a rodar un rumor. A la mañana temprano se lo dice a una vecina, quien a su vez lo repite a una tercera, etcétera. En cada paso el emisor del rumor elige al azar al receptor entre los restantes 29 habitantes del edificio.

(**a**) Hallar la probabilidad de que el rumor se transmita 12 veces sin retornar a la encargada que lo originó.

(**b**) Hallar la probabilidad de que el rumor se transmita 12 veces sin que ninguna persona lo reciba más de una vez.

1.15 Una fragata parte de Jamaica con 13 piratas para atacar 3 puertos. Cada pirata elige al azar el puerto en que desembarcará.

(**a**) Calcular la probabilidad de que cuatro piratas desembarquen en Portobelo, cuatro en Maracaibo y cinco en Gibraltar.

(**b**) Calcular la probabilidad de que exactamente 6 piratas desembarquen en Portobelo y seis o más desembarquen en Maracaibo.

(**c**) Calcular la probabilidad de que en algún puerto desembarquen exactamente cinco piratas y en algún otro exactamente cuatro.

(**d**) Calcular la probabilidad de que Morgan se encuentre entre los 13 piratas.

1.16 Se colocarán 7 gatos en 5 cajas. Suponiendo que los gatos son indistinguibles y que todas las configuraciones distintas son equiprobables.

(**a**) Calcular la probabilidad de que la primera caja contenga exactamente dos gatos y la última caja quede vacía.

(**b**) Calcular la probabilidad de que la cuarta caja contenga más de 3 gatos.

1.17 Una planta de ensamblaje recibe una partida de 25 piezas de precisión que incluye exactamente k defectuosas. La división de control de calidad elige 5 piezas al azar para controlarlas y rechaza la partida si encuentra al menos 1 defectuosa.

(**a**) Si $k = 3$, ¿cuál es la probabilidad de que la partida pase la inspección?

(**b**) ¿Cómo se comporta la probabilidad $p(k)$ de que la partida pase la inspección?

(**c**) ¿Cuál es la máxima probabilidad de aceptar una partida que contenga más de 5 piezas defectuosas?

1.18 Se elige al azar una permutación de las letras A, T, C, G. Mostrar que

(**a**) Los eventos "A precede a T" y "C precede a G" son independientes.

(**b**) Los eventos "A precede *inmediatamente* a T" y "C precede *inmediatamente* a G" *no* son independientes.

1.19 Se elige un número al azar en el intervalo $(0, 1)$

(**a**) Probar que los eventos "el primer dígito es 0" y "el segundo dígito es 1" son independientes.

(**b**) Probar que los eventos "el primer dígito es 0" y "el segundo dígito no es 1" son independientes.

1.20 Un dado equilibrado se arroja dos veces.

(**a**) Sea A el evento "el primer resultado es par", B el evento "el segundo resultado es par" y C el evento "la suma de los resultados es par". Mostrar que los eventos A, B, C son dos a dos independientes, pero los eventos A, B, C no son independientes.

(**b**) Sea A el evento “el primer resultado es 1,2 o 3”, B el evento “el primer resultado es 3,4 o 5” y C el evento “la suma de los resultados es 9”. Mostrar que aunque $\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C)$, los eventos A, B, C no son independientes.

1.21 El motor de un automóvil consta de 300 componentes individuales. Cada uno de estos es entregado independientemente por un proveedor diferente. Los 300 proveedores garantizan que la probabilidad de entregar un componente defectuoso es 0.01 o menor. Se considera aceptable el motor sólo cuando ninguno de sus componentes es defectuoso.

(**a**) Calcular la probabilidad de que el motor sea aceptable.

(**b**) ¿Qué nivel de calidad debe exigirse a cada proveedor (es decir, qué probabilidad de componente defectuoso) si se desea que al menos el 98 % de los motores armados sea aceptable?

1.22 Se tienen 3 urnas a, b, c. En a hay dos bolas rojas y una blanca, en b tres rojas y dos blancas, en c cinco rojas y tres blancas. Se extrae una bola de a: si es roja, se extrae una bola de b, en caso contrario se extrae una bola de c. Indiquemos $R_i, i = 1, 2$ el evento de que la bola en la extracción i fue roja, y $B_i, i = 1, 2$ el evento de que la bola en la extracción i fue blanca.

(**a**) Calcular $\mathbf{P}(B_1)$.

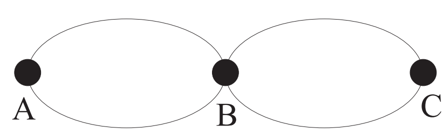
(**b**) Calcular $\mathbf{P}(B_2)$.

(**c**) Describir mediante la notación detallada antes y calcular la probabilidad de que la primer bola extraída haya sido blanca sabiendo que la segunda fue roja.

(**d**) Calcular la probabilidad de que alguna de las bolas extraídas sea roja.

(**e**) Suponiendo ahora que en a hay 200 bolas rojas y 100 blancas, en b 150 rojas y 100 blancas, y en c 125 rojas y 75 blancas, resolver en estas nuevas condiciones los incisos anteriores. Si se obtienen los mismos resultados, explicar por qué.

1.23 Existen dos caminos de A hasta B y dos caminos de B hasta C.



Cada uno de estos caminos está bloqueado con probabilidad 0.25 independientemente de los demás. Hallar la probabilidad de que exista un camino abierto desde B hasta C sabiendo que no hay ninguna trayectoria abierta desde A hasta C.

1.24 Un canal de comunicación binario simple transporta mensajes usando sólo dos señales (bits): 0 y 1. Supongamos que en un canal de comunicación binario dado el 55 % de las señales emitidas son 1, que si se emitió un 0 la probabilidad de que se reciba un 0 es 0.95, y que si se emitió un 1 la probabilidad de que se reciba un 1 es 0.99. Calcular

(**a**) la probabilidad de que una señal recibida sea 1.

(**b**) dado que se recibió un 1, la probabilidad de que la señal correspondiente emitida haya sido un 1.

1.25 El 5 % de los bits transmitidos por un canal de comunicación binario es 0. El programa receptor indica que hay un 0 en el mensaje cuando efectivamente el 0 ha sido emitido, con probabilidad 0.9. ¿Cuál debe ser la probabilidad de que el receptor indique que hay un 1 cuando efectivamente el 1 ha sido emitido, para que la probabilidad de que haya sido emitido un 0 cuando el receptor indica que hay un 0 sea 0.99?

1.26 Harvey "*dos caras*" tiene una moneda de dos caras y dos monedas con cara y ceca equilibradas.

(**a**) Elige una moneda al azar y la arroja al aire dos veces consecutivas. Si el primer resultado fue cara, ¿cuál es la probabilidad de que el segundo también sea cara?

(**b**) Elige una moneda al azar, la arroja al aire y sale cara. ¿Cuál es la probabilidad de que sea una de las monedas que tiene ceca?

(**c**) Harvey arroja la misma moneda por segunda vez y de nuevo sale cara. ¿Cuál es la probabilidad de que sea una de las monedas que tiene ceca?

(**d**) Harvey arroja la misma moneda por tercera vez y de nuevo sale cara. ¿Cuál es la probabilidad de que sea una de las monedas que tiene ceca?

1.27 La urna a contiene 3 bolas blancas y 7 rojas. La urna b contiene 12 blancas y 8 rojas. Se elige una urna al azar y se extrae una bola; esta bola se reintegra a la misma urna y se vuelve a extraer una bola de ella.

(**a**) Si la primer bola extraída fue blanca, ¿cuál es la probabilidad de que la segunda también lo sea?

(**b**) ¿Son independientes los sucesos "primera bola es blanca" y "segunda bola es blanca"?

1.28

(**a**) Se tienen dos monedas, a y b, de probabilidades $1/2$ y $1/3$ de cara, respectivamente. Se elige una moneda al azar y se la tira dos veces. Considere los eventos $A_i =$"salió cara en el i-ésimo tiro", $i = 1, 2$, y $B =$ "se eligió la moneda a". ¿Dado B, A_1 y A_2 son independientes? ¿A_1 y A_2 son independientes?

(**b**) Se tira una moneda equilibrada dos veces. Considere los eventos $A_i =$ "salió cara en el i-ésimo tiro", $i = 1, 2$, y $B =$ "salió al menos una ceca". ¿A_1 y A_2 son independientes? ¿Dado B, A_1 y A_2 son independientes?

Ejercicios Complementarios

1.29 Sea $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Definimos en los subconjuntos $A \subset \Omega$ una probabilidad $\mathbf{P}$ mediante $\mathbf{P}(A) = \sum_{i \in A} p_i$, donde $p_1 = 0.2, p_2 = 0.1, p_3 = 0.35, p_4 = 0.05, p_5 = 0.3$. Sea $A = \{2, 3\}$.

(**a**) Calcular $\mathbf{P}(A)$.

(**b**) Hallar, si existe, un evento $B \subset \Omega$ tal que $A \subset B$ y $\mathbf{P}(B) = 0.65$.

(**c**) Hallar todos los eventos C tales que $\mathbf{P}(A \cap C) = 0$ y $\mathbf{P}(C) = 0.3$.

(**d**) Hallar todos los eventos D tales que $A \cap D = \varnothing$ y $\mathbf{P}(A \cup D) \geqslant 0.6$.

(**e**) Repetir los incisos anteriores si $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, con $p_6 = 0$, y $A = \{2, 3, 6\}$.

1.30 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espacio de probabilidad tal que $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ es la menor álgebra tal que $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$ pertenecen a ella, y $\mathbf{P}(\{1\}) = \frac{1}{6}$, $\mathbf{P}(\{2\}) = \frac{1}{6}$, $P(\{3\}) = \frac{1}{12}$. Calcular las probabilidades de todos los eventos aleatorios.

1.31 [*Abramson*] Dado un experimento aleatorio $\mathcal{E}$ con $r_1, r_2, \ldots, r_n$ resultados posibles, que tienen probabilidades respectivas $p_1, p_2, \ldots, p_n$, se llama *entropía* del experimento $\mathcal{E}$ al valor

$$H(\mathcal{E}) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log(p_i).$$

Demostrar que la entropía es máxima cuando los resultados son equiprobables.

1.32 Sea $\Omega = [0, 10] \times [0, 10]$. Supongamos que $\mathbf{P}$ es una probabilidad definida en una familia de subconjuntos de Ω que incluye todos los rectángulos R, y satisface que si R es un rectángulo:

$$\mathbf{P}(R) = \begin{cases} |R| \cdot \frac{6}{300} & \text{si } R \subset [0,5] \times [0,5] \\ |R| \cdot \frac{1}{300} & \text{si } R \subset [0,5] \times [5,10] \\ |R| \cdot \frac{5}{300} & \text{si } R \subset [5,10] \times [0,5] \\ 0 & \text{si } R \subset [5,10] \times [5,10] \end{cases}$$

(**a**) Calcular $\mathbf{P}\left([3, 6] \times ([1, 4] \cup [6, 7])\right)$.

(**b**) Calcular $\mathbf{P}(\{(x, y) \in \Omega : x + y \leqslant 2\})$.

(**c**) Calcular $\mathbf{P}(\{(x, y) \in \Omega : 2 \leqslant x + y \leqslant 13\})$.

(**d**) Calcular $\mathbf{P}(\{(x, y) \in \Omega : (x - 5)^2 + (y - 5)^2 < 10\})$.

1.33 Sea $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ el cuadrado unitario. Consideraremos eventos a los subconjuntos $\Lambda \subset \Omega$ que admiten área $|\Lambda|$, y definimos $\mathbf{P}(\Lambda) = |\Lambda|$.

(**a**) Sea $A = \{(x, y) \in \Omega : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$. Hallar $\mathbf{P}(A)$.

(**b**) Sean, para $k = 1, 2, \ldots$, $B_k = \{(x, y) \in \Omega : x + y \leqslant 1/2 + 1/k\}$. Hallar $\mathbf{P}(B_k)$ y $\mathbf{P}(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k)$.

(**c**) Sean, para $k = 1, 2, \ldots$, $C_k = \{(x, y) \in \Omega : (x - 1/2)^2 + (y - 1/2)^2 \leqslant 1/k^2\}$ y $C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$. Hallar $\mathbf{P}(C_k)$ y $\mathbf{P}(C)$.

(**d**) Suponer que Ω modela un blanco cuadrado al que se dispara un dardo, y $\mathbf{P}(\Lambda)$ es la probabilidad de que el dardo se clave en la zona del blanco descrita por Λ. ¿Cómo se describirían en términos de lo que pasa con el dardo los eventos C_k y C del inciso anterior?

1.34 *Método de Monte Carlo.* Sea $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ una función continua y sea $M = \text{máx}\{f(x) : x \in [a, b]\}$.

(**a**) Se elige un punto de coordenadas (X, Y) al azar en el rectángulo $[a, b] \times [0, M]$. Relacionar la probabilidad del evento $A = \{Y \leqslant f(X)\}$ con el valor de la integral $\int_a^b f(x)dx$.

(**b**) Obtener un método para estimar el valor de la integral $\int_a^b f(x)dx$ basado en los resultados de n simulaciones del experimento descrito en el inciso anterior.

(**c**) Utilizar el método obtenido en el inciso anterior para estimar el valor de la integral $\int_0^2 e^{-x^2} dx$ basándose en los resultados de 10.000 simulaciones.

1.35 Se elige un número al azar en el intervalo $(0, 1)$.

(**a**) Probar que los eventos "el primer dígito es 2", "el segundo dígito es 3", el "tercer dígito es 5" y el "cuarto dígito es 8 y el 1 aparece alguna vez después del décimo dígito" son independientes.

(**b**) Analizar la independencia de los eventos: "el primer dígito no es 2", "el segundo dígito es 3 y el tercero es 5".

(**c**) Analizar la independencia de los eventos: "el primer dígito es 1 o el tercero no es 5", "el segundo dígito es 3 y el cuarto es 8 y el 1 aparece alguna vez después del décimo dígito".

1.36 Una materia se aprueba con un examen *multiple choice* de 5 preguntas, con 3 opciones de respuesta en cada pregunta. Se asume que los eventos $A_i =$"el alumno contesta correctamente la pregunta i" son independientes y tienen todos la misma probabilidad p.

(**a**) ¿Cómo debería establecerse un criterio de aprobación (cantidad de respuestas correctas) para asegurar que sean reprobados al menos el 95 % los alumnos que no saben nada de la materia y responden totalmente al azar?

(**b**) Fijado el criterio anterior, si un alumno estudió lo suficiente como para que la probabilidad de responder bien cada una de las preguntas sea $p = 0.8$, ¿con qué probabilidad aprobará el examen?

(**c**) Graficar la probabilidad de aprobar en función de p. ¿Para qué valor de p se aprueba el examen con probabilidad mayor a 0.95?

1.37 Una empresa compra una gran de cantidad de bulones a un mismo proveedor. Cada vez que se recibe un envío, se realiza un control de calidad por muestreo: se prueban 80 bulones seleccionados al azar del total; si se encuentra más de un bulón defectuoso se rechaza el envío. En caso contrario, se lo acepta. Sea p la probabilidad de producir un bulón defectuoso en el proceso de fabricación. De acuerdo a los estándares de calidad, se desea satisfacer la condición $p < 0.005$. Los defectos de los bulones son independientes entre sí.

(**a**) Hallar la probabilidad de rechazar un lote fabricado bajo la condición $p = 0.004$.

(**b**) Hallar la probabilidad de aceptar un lote fabricado bajo la condición $p = 0.05$.

(**c**) Graficar la probabilidad de aceptar un envío en función de p (*Curva característica del plan de muestreo*).

(**d**) Si se sabe que el lote cumple los estándares de calidad, ¿cuál es la máxima probabilidad de tomar una decisión errónea sobre el mismo?

1.38 Se tienen dos bolas. Cada una se pinta de rojo o de verde, independientemente y con probabilidad $1/2$ para cada color. Luego ambas son colocadas en una urna.

(**a**) Si se extrae una bola de la urna y es roja, ¿cuál es la probabilidad de que la otra bola sea roja?

(**b**) Si se sabe que en la urna hay una bola roja, ¿cuál es la probabilidad de que la otra sea roja?

1.39 En el contexto del **Ejercicio 1.9**:

(**a**) Hallar la probabilidad de que Juan gane la primera partida.

(**b**) Hallar la probabilidad de que María gane la segunda partida.

(**c**) Hallar la probabilidad de que María gane la duodécima partida.

(**d**) Hallar la probabilidad de que Pedro haya ganado la primera partida sabiendo que ganó la cerveza.

(**e**) Hallar la probabilidad de que Juan haya ganado la cerveza sabiendo que el juego duró 25 partidos.

1.40 Sea $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ el cuadrado unitario. Consideraremos eventos a los subconjuntos $\Lambda \subset \Omega$ que admiten área $|\Lambda|$, y definimos $\mathbf{P}(\Lambda) = |\Lambda|$.

$$\begin{aligned}
A &= \{(x,y) \in \Omega : |x - 1/2| + |y - 1/2| \leqslant 1/3\},\\
B &= \{(x,y) \in \Omega : \text{máx}\{|x - 1/2|, |y - 1/2|\} \leqslant 1/3\},\\
C &= \{(x,y) \in \Omega : x \leqslant 2/3\},\\
D &= \{(x,y) \in \Omega : y \geqslant 2/3\}.
\end{aligned}$$

(**a**) Dado A, ¿son C y D independientes?

(**b**) Dado B, ¿son C y D independientes?

1.41 Juan y María juegan a cara o ceca con una moneda equilibrada. Inicialmente Juan tiene cinco monedas y María tres. Cuando sale cara Juan le da una moneda a María, cuando sale ceca María le da una moneda a Juan. Arrojan sucesivamente la moneda hasta que alguno se queda sin monedas. Hallar la probabilidad de que Juan sea el primero en quedarse sin monedas. (*sugerencia*: si entre los dos tienen 8 monedas, sea p_n la probabilidad de que Juan sea el primero en quedarse sin monedas *si inicialmente tiene* n, con $n = 0, \dots, 8$. Hallar p_0 y p_8. Mostrar que $p_{n+1} - p_n = p_n - p_{n-1}$ y resolver ecuaciones. Aplicar al caso $n = 5$).

1.42 Pedro vive en Corrientes al 3400. Una noche de sábado, después de tomar una copa de más con Juan en "La Giralda" (Corrientes 1453), trata de volver caminando por Corrientes a su casa, pero elige la dirección al azar, y como sabe que está borracho, en cada esquina vacila y vuelve a elegir la dirección al azar. En un rapto de lucidez, decide que si llega antes a Alem que al Abasto, se echará a dormir en La Recova. Hallar la probabilidad de que Pedro duerma en su cama. (*sugerencia*: comparar con **Ejercicio 1.41**)

Guía 2

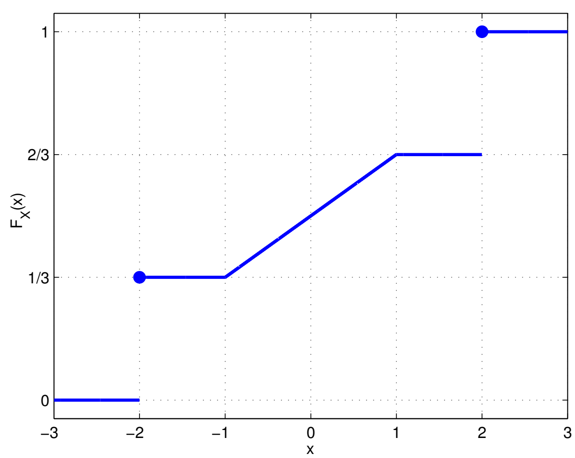
2.1 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espacio de probabilidad en el que $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $\mathcal{A} = \{\varnothing, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \Omega\}$. Determinar cuáles de las siguientes funciones $X : \Omega \to \mathbb{R}$ son variables aleatorias:

(**a**) $X(\omega) = \omega$.

(**b**) $X(\omega) = \mathbf{1}\{\omega \text{ es par}\}$.

(**c**) $X(\omega) = \mathbf{1}\{\omega \in \{1, 4\}\}$.

2.2 Sea X una variable aleatoria cuya función de distribución $F_X(x) = \mathbf{P}(X \leqslant x)$ tiene gráfico de forma



(**a**) ¿En qué puntos de $\mathbb{R}$ la variable X concentra masa positiva?

(**b**) Calcular $\mathbf{P}(-2 < X \leqslant 2)$, $\mathbf{P}(-2 \leqslant X \leqslant 2)$, $\mathbf{P}(-2 \leqslant X < 2)$ y $\mathbf{P}(-2 < X < 2)$.

(**c**) Calcular $\mathbf{P}(X \in (-2, -1))$, $\mathbf{P}(|X| \leqslant 1)$ y $\mathbf{P}(X \in (1, 2))$.

(**d**) Calcular $\mathbf{P}(X \leqslant 1.5 | X < 2)$ y $\mathbf{P}(X \leqslant 1.5 | X \leqslant 2)$.

(**e**) Calcular $\mathbf{P}(X = -2 | \, |X| = 2)$.

2.3 En una urna hay 3 bolas verdes y 5 bolas rojas.

(**a**) Se realizan 4 extracciones con reposición. Hallar y graficar la función de probabilidad de la cantidad de bolas verdes observadas.

(**b**) Se realizan 4 extracciones sin reposición. Hallar y graficar la función de probabilidad de la cantidad de bolas verdes observadas.

2.4 Se tiene una moneda cargada con probabilidad $p = 5/8$ de salir “cara”.

(**a**) Hallar, para cada $k \in \mathbb{N}$, la función de probabilidad de la cantidad N_k de lanzamientos necesarios de dicha moneda hasta observar k-ésima cara.

(**b**) Calcular la probabilidad de que N_1 sea par.

(**c**) Calcular $\mathbf{P}(N_1 = 3)$ y $\mathbf{P}(N_2 = 5|N_1 = 2)$.

(**d**) Calcular $\mathbf{P}(N_1 > 3)$ y $\mathbf{P}(N_1 > 5|N_1 > 2)$.

(**e**) Calcular $\mathbf{P}(N_2 > 3)$ y $\mathbf{P}(N_2 > 5|N_2 > 2)$.

2.5 La cantidad N de partículas alfa emitidas (por segundo) por una fuente de polonio es una variable aleatoria con distribución Poisson de parámetro $1/2$. Calcular la probabilidad de que la fuente

(**a**) Emita más de tres partículas alfa en un segundo.

(**b**) Emita una cantidad impar de partículas en un segundo.

2.6 Se quiebra una vara en un punto al azar. Calcular la probabilidad de que la longitud de la pieza más larga sea mayor que el triple de la longitud de la pieza más corta.

2.7 Sea X una variable aleatoria con función densidad

$$f_X(x) = 2x\,\mathbf{1}\{0 \leqslant x \leqslant 1\}$$

. Sabiendo que la suma de los primeros dos dígitos decimales de X es 3, calcular la probabilidad de que el primer dígito de X sea 2.

2.8 [*ver* **Ejercicio 2.4**] El tiempo en segundos que tarda una fuente de polonio en emitir k partículas alfa es una variable aleatoria T_k con función densidad

$$f_{T_k}(t) = \frac{(1/2)^k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{-t/2}\,\mathbf{1}\{t > 0\}.$$

(**a**) Calcular $\mathbf{P}(T_1 > 3)$ y $\mathbf{P}(T_1 > 5|T_1 > 2)$.

(**b**) Calcular $\mathbf{P}(T_3 > 3)$ y $\mathbf{P}(T_3 > 5|T_3 > 2)$.

2.9 Mostrar que existe una variable aleatoria Z tal que su función de distribución es de la forma

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx.$$

Usando una tabla (o un software adecuado):

(**a**) calcular los valores de $\Phi(z)$ para $z = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

(**b**) para cada $\alpha \in \{0.5, 0.75, 0.9, 0.95, 0.99, 0.995, 0.999\}$ hallar todos los valores $z_\alpha \in \mathbb{R}$ tales que $\Phi(z_\alpha) = \alpha$.

(**c**) calcular $\mathbf{P}(-0.43 < Z < 1.32)$, $\mathbf{P}(1.28 < Z < 1.64)$ y $\mathbf{P}(|Z| < 1.64)$.

(**d**) hallar las constantes que satisfacen las siguientes ecuaciones $\mathbf{P}(Z < a) = 0.05$, $\mathbf{P}(Z > b) = 0.1$, $\mathbf{P}(|Z| < c) = 0.95$.

2.10 Sea Z una variable normal estándar y sea $X = Z^2$.

(**a**) Expresar la función de distribución de X usando la función Φ.

(**b**) Hallar la función densidad de X.

(**c**) Calcular $\Gamma(1/2) := \int_0^\infty x^{-1/2} e^{-x} dx$.

2.11 Para estimar el precio (en dólares) del kilo de asado se examinaron los precios en las pizarras de 24 carnicerías elegidas al azar. Se obtuvieron los siguentes resultados:

8.59	8.77	8.29	7.50	9.18	8.53	10.03	8.97	8.47	9.98	9.00	9.44
8.02	10.35	7.15	9.00	9.15	9.11	7.63	9.66	10.20	9.01	8.73	10.54.

(**a**) Graficar la función de distribución empírica basada en esa muestra y estimar, usándola, la probabilidad de que el precio de un kilo de asado supere los 9.5 dólares.

(**b**) Usando los intervalos con extremos 7.1, 7.85, 8.35, 9.65, 10.15, 10.90 hallar la función histograma basada en la muestra observada y estimar, usándola, la probabilidad de que el precio de un kilo de asado supere los 9.5 dólares.

2.12 Sea T la duración en años del tiempo de trabajo sin fallas de un sistema electrónico cuya función de distribución es $F_T(t) = (1 - e^{-t})\ \mathbf{1}\{t > 0\}$.

(**a**) Hallar y graficar la función de distribución de $T^* = \text{mín}(T, 1)$.

(**b**) Calcular $\mathbf{P}(T^* = 1)$.

2.13 Sea X una variable aleatoria continua con función de distribución $F_X(x) = \mathbf{P}(X \leqslant x)$ estrictamente creciente en el soporte de X. Hallar expresiones para las funciones de distribución de las siguientes variables aleatorias:

(**a**) $T = G(X)$, donde $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua estrictamente creciente;

(**b**) $U = F_X(X)$;

(**c**) $V = G^{-1}(F_X(X))$, donde $G : \mathbb{R} \to (0, 1)$ es una función continua estrictamente creciente.

2.14 Se desea generar muestras de una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el intervalo $[0, 1]$. Para ello se dispone de un radioisótopo que emite partículas alfa cada tiempos exponenciales de intensidad 2 por hora. ¿Cómo deben transformarse los tiempos entre emisiones de partículas alfa para generar las muestras deseadas? Generar una muestra de tamaño 3 usando que a partir de las 0:00 el radioisótopo emitió partículas alfa a las 1:45, 1:51, y 2:17.

2.15 Sea U una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el intervalo $[0, 1]$. Hallar una función h tal que la variable aleatoria $h(U)$ tenga la función de distribución dada en **Ejercicio 2.2**. Simular una muestra de 10.000 valores de dicha variable aleatoria, graficar la función de distribución empírica y comparar con la original.

2.16 Sea X una variable aleatoria con distribución exponencial de intensidad $1/2$. Hallar una función h tal que la variable aleatoria $h(X)$ tenga la función de distribución de la variable aleatoria T^* definida en el **Ejercicio 2.12**.

2.17 Sea T el tiempo hasta que ocurre la primera falla en un producto industrial, con función intensidad de fallas $\lambda(t)$ de la forma

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1} \mathbf{1}\{t > 0\},$$

donde $\alpha, \beta > 0$.

(**a**) Hallar la función de distribución y la función densidad de T.

(**b**) Si $\beta < 1$ se dice que el producto tiene *fallas tempranas*, si $\beta = 1$ se dice que tiene *fallas casuales o con falta de memoria*, y si $\beta > 1$ se dice que tiene *fallas por desgaste*. Indicar en cuál de estas tres categorías clasificaría usted a los siguientes productos según su modo de falla

- Producto: un neumático; T: tiempo hasta una pinchadura causada por objetos punzantes en las calles.
- Producto: un neumático; T: tiempo hasta que se desgasta el surco y pierde agarre.
- Producto: un neumático; T: tiempo hasta que revienta como consecuencia de una falla de fábrica.
- Producto: una heladera; T: tiempo hasta que el usuario se da cuenta que salió fallada de fábrica.
- Producto: una heladera; T: tiempo hasta que falla el sistema de enfriamiento.
- Producto: una heladera; T: tiempo hasta que el motor se quema por un brusco cambio de tensión.

(**c**) Comparar e interpretar probabilísticamente los gráficos de las densidades que se obtienen cuando $\alpha = 1$ y $\beta = 0.5, 1, 1.5$.

(**d**) Para cada caso del **Inciso** (**c**), calcular $\mathbf{P}(T > 1)$ y $\mathbf{P}(T > 4|T > 3)$.

2.18 La función de distribución del tiempo T (en días) hasta que ocurre la primera falla en un producto industrial es

$$F_T(t) = \left(1 - e^{-\sqrt{t/60}}\right) \mathbf{1}\{t > 0\}.$$

El producto tiene una garantía de 30 días. Debido a la gran cantidad de reclamos se decidió someter todos los productos a una prueba de 30 días y descartar los que fallan. Hallar la probabilidad de que un producto no descartado falle antes de los siguientes 30 días.

2.19 El diámetro X (en mm.) de las arandelas fabricadas por una máquina tiene como función de densidad a

$$f_X(x) = \frac{2x}{225} \mathbf{1}\{0 < x < 15\}.$$

Un sistema de control descarta las arandelas cuyo diámetro es inferior a 3 o superior a 12.

(**a**) Hallar la densidad del diámetro de las arandelas no descartadas.

(**b**) Hallar la densidad del diámetro de las arandelas descartadas.

2.20 Sea X, la distancia (en decímetros) del punto de impacto al centro de un blanco circular, una variable aleatoria continua con función de densidad

$$f_X(x) = \frac{2}{7}\,\mathbf{1}\{0 \leqslant x < 2\} + \frac{10-2x}{21}\,\mathbf{1}\{2 \leqslant x < 5\}.$$

(**a**) Hallar la función de densidad de las distancias de impacto menores que 30 cm.

(**b**) Hallar la función de densidad de las distancias de impacto mayores que 30 cm.

2.21 Una urna contiene 3 bolas verdes, 2 amarillas y 3 rojas.

(**a**) Se seleccionan 4 bolas al azar (sin reposición). Sean X la cantidad de bolas verdes observadas e Y la cantidad de bolas amarillas observadas. Hallar la función de probabilidad conjunta y las funciones de probabilidad marginales. ¿Cuál es la probabilidad de que la cantidad total de bolas verdes o amarillas observadas no supere a 2?

(**b**) Repetir el inciso anterior para extracciones con reposición.

2.22 Sea (X, Y) un punto con distribución uniforme sobre el semicírculo $\Lambda = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 4,\ x \geqslant 0\}$.

(**a**) Calcular $\mathbf{P}(|Y| < X)$.

(**b**) Hallar las densidades marginales de X y de Y.

(**c**) ¿X e Y son variables aleatorias independientes?

2.23 Sean X e Y dos variables aleatorias con función de densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = 8xy\,\mathbf{1}\{0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1\}.$$

(**a**) Calcular $\mathbf{P}(X + 1 > 2Y)$.

(**b**) Hallar las densidades marginales de X y de Y.

(**c**) ¿X e Y son variables aleatorias independientes?

2.24 Sean X e Y dos variables aleatorias con densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}} e^{-\frac{2}{3}\left(x^2 - xy + y^2\right)}, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

(**a**) Hallar las densidades marginales de X y de Y.

(**b**) ¿X e Y son variables aleatorias independientes?

2.25 Una fábrica textil produce rollos de tela con dos tipos de fallas: de tejido y de teñido. En cada rollo, la cantidad de fallas de tejido tiene distribución Poisson de parámetro 2 y la cantidad de fallas de teñido tiene distribución Poisson de parámetro 4. Ambas cantidades son independientes.

(**a**) Calcular la probabilidad de que un rollo de tela no tenga fallas.

(**b**) Calcular la probabilidad de que un rollo de tela tenga exactamente una falla.

(**c**) Dado que un rollo de tela tiene exactamente una falla, ¿cuál es la probabilidad de que esta sea una falla de tejido?

2.26 Lucas y Monk quedaron en encontrarse en el bar del CEI a las 18:00. El horario de llegada de Lucas, L, es uniforme entre las 18:00 y las 18:15. Lucas espera 15 min. a Monk y si no llega se va. El horario de llegada de Monk, M, es independiente del de Lucas y se distribuye uniformemente entre las 18:05 y 18:20. Monk es más impaciente que Lucas y espera como máximo 5 min. antes de irse. Calcular la probabilidad de que Lucas y Monk se encuentren.

Ejercicios Complementarios

2.27 [*Maronna, pág. 56 y 57*] Para la variable aleatoria X con función de distribución $F_X(x) = \mathbf{P}(X \leqslant x)$ dada en el **Ejercicio 2.2** hacer lo siguiente:

(**a**) Para cada $\alpha \in \{1/5, 1/3, 3/5, 2/3\}$ hallar todos los valores $x_\alpha \in \mathbb{R}$ tales que

$$\mathbf{P}(X < x_\alpha) \leqslant \alpha \qquad \text{y} \qquad \mathbf{P}(X \leqslant x_\alpha) \geqslant \alpha.$$

(**b**) Para cada $\alpha \in (0, 1)$ hallar todos los valores $x_\alpha \in \mathbb{R}$ tales que

$$F(x_\alpha) = \alpha.$$

(**c**) Calcular el primer cuartil, la mediana y el tercer cuartil.

2.28 Sea X una variable aleatoria con la función de distribución del **Ejercicio 2.2**. Hallar las expresiones de las funciones de distribución de

$$X^+ = \text{máx}(0, X), \qquad X^- = -\text{mín}(0, X), \qquad |X| = X^+ + X^-, \qquad -X,$$

en términos de la función de distribución de X.

2.29 La demanda de aceite pesado en cientos de litros durante una temporada tiene la siguiente función de densidad:

$$f_X(x) = \frac{1}{3}(4x + 1)\,\mathbf{1}\{0 \leqslant x \leqslant 1\}.$$

(**a**) Hallar la función de distribución de X.

(**b**) Calcular $\mathbf{P}\left(\frac{1}{3} < X \leqslant \frac{2}{3}\right)$ y $\mathbf{P}\left(\frac{1}{3} < X \leqslant \frac{2}{3} | X < \frac{1}{2}\right)$.

(**c**) Hallar el valor de k tal que $\mathbf{P}(X \leqslant k) = 0.04$.

(**d**) Simular 1000 valores de la variable aleatoria X. Graficar la función de distribución empírica y construir un histograma.

2.30 [*ver* **Ejercicio 2.17**] Sea T la duración en horas del tiempo de trabajo sin fallas de un sistema con función intensidad de fallas $\lambda(t)$. Calcular $\mathbf{P}(T > 4)$ y $\mathbf{P}(T > 12 | T > 8)$, cuando $\lambda(t)$ está descrita por

(**a**) $\lambda(t) = \frac{1}{8}\,\mathbf{1}\{t > 0\}$.

(**b**) $\lambda(t) = \frac{t}{8}\,\mathbf{1}\{t > 0\}$.

(**c**) En cada caso, determinar si hay *pérdida de memoria*.

2.31 [*ver* **Ejercicio 2.17**] Sea $t_0 > 0$. Mostrar que si $\lambda(t)$ es la función de intensidad de fallas de la variable aleatoria positiva T, la variable aleatoria $\tilde{T} = (T|T > t_0) - t_0$ tendrá una función de intensidad de fallas $\tilde{\lambda}(t) = \lambda(t + t_0)$, para $t > 0$.

2.32 Sean X e Y variables aleatorias independientes con distribución uniforme sobre el intervalo $[0, 1]$. Una vara de longitud 1 se quiebra en dos puntos cuyas distancias a una de sus puntas son X e Y. Calcular la probabilidad que las tres piezas puedan usarse para construir un triángulo.

2.33 Para ir todos los días al trabajo, Dana se dirige en auto hasta la estación de tren y luego sigue su camino en tren. Dana sale de su casa en un intervalo distribuido uniformemente entre las 7:30 y las 7:50. El tiempo de viaje hasta la estación es también uniforme entre 20 y 40 minutos. Hay un tren que sale a las 8:12 y otro que sale a las 8:26.

(**a**) ¿Cuál es la probabilidad de que Dana pierda ambos trenes?

(**b**) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga que esperar más de 8 minutos en la estación hasta que sale el tren?

(**c**) Si se sabe que salió de su casa después de las 7:38 y que no llegó a tomar el tren de las 8:12, ¿cuál es la probabilidad de que haya llegado al otro tren?

(**d**) Si se sabe que salió de su casa después de las 7:38 y que logró tomar el tren de las 8:26, hallar y graficar la función densidad del tiempo de viaje hasta la estación.

2.34 [*ver* **Ejercicio 1.19**] Sean X_1 y X_2 variables aleatorias con distribución Bernoulli. Para $i = 1, 2$ sea $A_i = \{X_i = 1\}$. Mostrar que si los eventos A_1 y A_2 son independientes, entonces la variables aleatorias X_1 y X_2 son independientes.

2.35 Se arrojan dos dados piramidales equilibrados con los números $1, 2, 3, 4$ en sus caras. Sea X el mayor de los resultados observados e Y la suma. Hallar la distribución conjunta de X e Y y sus distribuciones marginales. ¿X e Y son independientes?

2.36 Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = kx(x - y)\,\mathbf{1}\{0 < x < 2, |y| < x\}.$$

(**a**) Hallar las densidades marginales de X y de Y.

(**b**) ¿X e Y son variables aleatorias independientes?

2.37 En una urna hay 3 bolas de distinto color. El experimento aleatorio consiste en lo siguiente: se extrae una bola, se registra el color observado y se repone la bola en la urna. Se realizan 3 experimentos. Sean X_i, $i = 1, 2, 3$ las variables aleatorias definidas por

$$X_i = \mathbf{1}\{\text{ si el color } i \text{ está en la muestra observada}\}.$$

(**a**) Hallar la función de probabilidad conjunta de las variables X_1 y X_2 y las funciones de probabilidad marginales.

(**b**) ¿X_1 y X_2 son independientes?

(**c**) ¿Cuál es el significado de la variable $N = X_1 + X_2 + X_3$?

(**d**) Hallar la función de probabilidad conjunta de las variables X_1 y N.

(**e**) ¿X_1 y N son independientes?

2.38 ☣ Sea $U = 0.X_1X_2X_3\dots$ el desarrollo decimal de un número al azar sobre el intervalo $(0, 1]$.

(**a**) Para cada $i = 1, 2, \dots,$ hallar la distribución del i-ésimo dígito de U.

(**b**) Mostrar que los dígitos de U son independientes entre sí.

2.39 ⚓ Se realiza repetidas veces un experimento, en forma independiente una de la otra. Cada vez que se realiza cierto evento B puede suceder, con probabilidad p, o no, con probabilidad $1 - p$. Notaremos B_n al evento "sucedió B en la n-ésima realización del experimento".

Llamamos N a la variable aleatoria "cantidad de realizaciones del experimento hasta que por primera vez B sucede en dos realizaciones consecutivas".

(**a**) Mostrar que $\mathbf{P}(N = 1) = 0, \mathbf{P}(N = 2) = p^2, \mathbf{P}(N = 3) = (1 - p)p^2$.

(**b**) Sean los eventos $A_1 = \bar{B}_1$, $A_2 = B_1 \cap \bar{B}_2$, $A_3 = \bar{B}_1 \cap \bar{B}_2$. Mostrar que forman una partición, y por aplicación del teorema de probabilidades totales deducir que:

$$\mathbf{P}(N = n + 2) = \mathbf{P}(N = n + 1)\mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(N = n)\mathbf{P}(A_2) \text{ para } n \geqslant 1$$

y que $\mathbf{P}(N = 2|A_3) = 1$.

(**c**) Notando $p_n = \mathbf{P}(N = n), n \geqslant 1$ tenemos entonces: $p_1 = 0$, $p_2 = p^2$, $p_{n+2} = (1 - p)p_{n+1} + (1 - p)pp_n, n \geqslant 1$. Resolviendo la ecuación en diferencias, hallar la expresión general de p_n.

2.40 ⚓ Se arroja repetidas veces una moneda equilibrada. Llamamos N a la variable aleatoria "cantidad de tiradas hasta que por primera se obtiene cara en dos tiradas consecutivas". Hallar la función de probabilidad de N. ¿Cuál es la relación de estas probabilidades con los números de Fibonacci?

Guía 3

3.1 Sea X un variable aleatoria con función de distribución

$$F_X(x) = \frac{x^3}{3}\,\mathbf{1}\{0 \leqslant x < 1\} + \frac{2x+1}{6}\,\mathbf{1}\{1 \leqslant x < 2\} + \,\mathbf{1}\{x \geqslant 2\}.$$

(**a**) Calcular $\mathbf{E}[X]$.

(**b**) Calcular $\mathbf{E}[X|X < 1]$ y $\mathbf{E}[X|X \leqslant 1]$.

3.2 Sea X una variable aleatoria con la función de distribución definida en el **Ejercicio 2.2**.

(**a**) Calcular $\mathbf{E}[X]$.

(**b**) Calcular $\mathbf{E}[X|\,|X| = 2]$.

3.3 Hallar la media de las variables aleatorias definidas en el **Ejercicio 2.4**.

3.4 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espacio de probabilidad en el que $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{A} = \{\varnothing, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 5, 6\}, \{3, 4, 5, 6\}, \Omega\}$ y $\mathbf{P}(\{1, 2\}) = 1/6$, $\mathbf{P}(\{3, 4\}) = 1/3$, $\mathbf{P}(\{5, 6\}) = 1/2$.

(**a**) Definir una variable aleatoria $X : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $\left\{-1, \frac{1}{2}\right\} \subset X(\Omega)$ y $\mathbf{E}[X] = 0$. ¿Es única?

(**b**) Calcular $\mathbf{E}[X|X > -1]$ para la variable aleatoria definida en el **Inciso** (**a**)

(**c**) Repetir el **Inciso** (**a**) y el **Inciso** (**b**) para el caso en que $\{-1, 1\} \subset X(\Omega)$.

3.5 La cantidad de moscas que arriban a la mesa de un asado tiene una distribución Poisson de media 10. Calcular la media de la cantidad de moscas que podrán arribar a la mesa del asado si se sabe que no podrán arribar más de 4.

3.6 Sea T una variable aleatoria con distribución exponencial de media 3. Calcular $\mathbf{E}[T|T \leqslant 2]$.

3.7 Sea X un variable aleatoria con función de densidad $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(**a**) Si $f_X(x) = \frac{9!}{3!5!}x^3(1-x)^5\,\mathbf{1}\{0 < x < 1\}$, calcular $\mathbf{E}[X]$.

(**b**) Si $f_X(x) = \frac{1}{6}x^3 e^{-x}\,\mathbf{1}\{x > 0\}$, hallar $\mathbf{E}[X]$.

(**c**) Hallar $\mathbf{E}[X|X > 1/2]$ con los datos del **Inciso** (**b**).

3.8 Sea Z una variable normal estándar, φ su función de densidad, y sea $z_0 > 0$.

(**a**) Hallar la media de $Z|Z > z_0$ (en función de z_0).

(**b**) Deducir que $1 - \Phi(z_0) \leqslant \frac{\varphi(z_0)}{z_0}$.

(**c**) Comparar la estimación que brinda el inciso anterior para $\mathbf{P}(Z > 3)$ con el valor tabulado.

(**d**) Si $X = \sigma Z + \mu$ y $x_0 > \mu$, hallar la media de $X|X > x_0$ (en función de x_0, μ y σ).

3.9 Sean Z_1 y Z_2 dos variables aleatorias normales estándar (no necesariamente independientes). Demostrar que

$$\mathbf{P}(\text{máx}(Z_1, Z_2) > 5) \leqslant \frac{2e^{-\frac{25}{2}}}{5\sqrt{2\pi}}.$$

3.10 Se construye un círculo uniendo los extremos de un alambre.

(**a**) Si la longitud del alambre L es una variable aleatoria con distribución exponencial de media 60 cm., calcular la media del área del círculo.

(**b**) Si el área del círculo A es una variable aleatoria con distribución exponencial de media 15 cm^2, calcular la media del perímetro del círculo.

3.11 Sea T^* la variable aleatoria definida en el **Ejercicio 2.12**. Calcular $\mathbf{E}[T^*]$ y $\mathbf{var}[T^*]$.

3.12 Sean X e Y dos variables aleatorias independientes uniformes sobre el intervalo $(0, \pi)$. Calcular $\mathbf{E}[X \operatorname{sen}(XY)]$.

3.13 Sea (X, Y) un vector aleatorio con distribución uniforme sobre el triángulo de vértices $(1, 1), (6, 2), (2, 9)$. Calcular $\mathbf{E}[X]$ y $\mathbf{E}[Y]$.

3.14 Sea X una variable aleatoria a valores en $\{2, 3, 4\}$ tal que $\mathbf{P}(X = x) = p_x$, $x \in \{2, 3, 4\}$, de media 3.

(**a**) Hallar p_2, p_3, p_4 para que $\mathbf{var}[X]$ sea la máxima posible.

(**b**) Hallar p_2, p_3, p_4 para que $\mathbf{var}[X]$ sea la mínima posible.

3.15 Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el intervalo $(8, 10)$.

(**a**) Calcular la media y la varianza de $Y = 2(X - 1)$.

(**b**) Calcular la media de $Y = 2X^2 + 1$.

(**c**) Calcular la media de $Y = 2(X - 1)(X - 3)$.

(**d**) Hallar $\text{mín}_{c \in \mathbb{R}} \mathbf{E}[(X - c)^2]$.

(**e**) Hallar a y b tales que $aX + b$ tenga media 0 y desvío 1.

3.16 La potencia W disipada por una resistencia es proporcional al cuadrado del voltaje V (*i.e.*, $W = rV^2$, donde r es una constante). Calcular $\mathbf{E}[W]$ cuando $r = 3$ y el voltaje tiene distribución normal de media 6 y varianza 1.

3.17 [*ver* **Ejercicio 2.34**] Sean X_1 y X_2 variables de Bernoulli, de parámetros p_1 y p_2.

(**a**) Mostrar que si $\mathbf{cov}(X_1, X_2) = 0$, entonces X_1 y X_2 son independientes.

(**b**) Si $p_1 = p_2 = 0.7$ y $\mathbf{cov}(X_1, X_2) = 0.1$, hallar $\rho(Y_1, Y_2)$, siendo $Y_1 = X_1(1 - X_2)$, $Y_2 = X_2(1 - X_1)$.

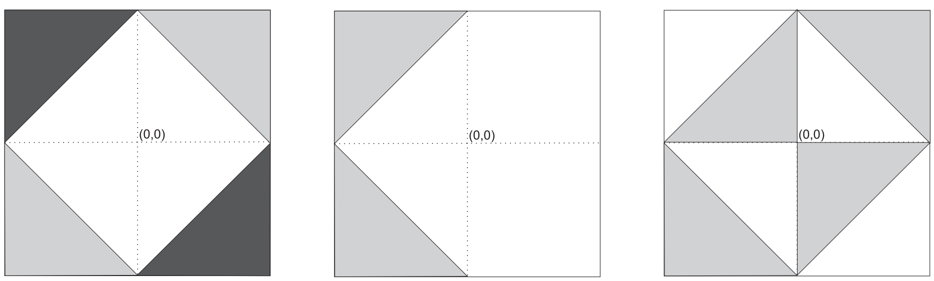
3.18 [*ver* **Ejercicio 2.37**] Se colocan 3 bolas en 3 urnas c_1, c_2, c_3 eligiendo al azar, para cada bola, la urna en que se coloca. Sea X_i la cantidad de bolas en c_i y sea N la cantidad de urnas que contienen alguna bola.

(**a**) Calcular $\mathbf{E}[N]$, $\mathbf{var}[N]$ y $\mathbf{cov}(N, X_1)$.

(**b**) Mostrar que N y X_1 no son independientes.

(**c**) Calcular $\mathbf{cov}(X_i, X_j)$, $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 3$.

3.19 En cada uno de los casos que se ilustran en las siguientes figuras se define una distribución conjunta para las variables X e Y.



(a) (b) (c)

(a) La densidad vale 1 en la región blanca, 1/2 en la región gris clara y 3/2 en la región gris oscura. (b) y (c) La distribución es uniforme en la región grisada.

Hallar en cada caso el signo de la covarianza *sin escribir cuentas*.

3.20 Sea (X, Y) un vector aleatorio con distribución uniforme sobre el triángulo de vértices $(0,0), (2,2), (0,2)$.

(**a**) Calcular $\mathbf{cov}(X, Y)$.

(**b**) Calcular $\mathbf{var}[X + Y]$

(**c**) Calcular $\mathbf{cov}(3X - Y + 2, X + Y)$.

3.21 Juan y María hacen una prueba para comparar sus reflejos. Cada uno tiene un pulsador y, cuando una luz se enciende, el que presiona primero gana el duelo. Los tiempos de reacción (en segundos) de cada uno son variables aleatorias independientes uniformes sobre el intervalo $U(0, 2)$. Considerar las variables W: "tiempo de reacción del ganador" y L: "tiempo de reacción del perdedor".

(**a**) Hallar la ecuación de la recta de regresión de L dado W.

(**b**) Calcular el tiempo medio de reacción del ganador si se sabe que el perdedor reaccionó en más de 1 segundo.

3.22 Sean X e Y dos variables aleatorias con densidad conjunta $f_{X,Y}(x,y) = \frac{5}{8\pi}e^{-\frac{25}{32}\left(x^2-\frac{6}{5}xy+y^2\right)}$. Hallar la ecuación de la recta de regresión de Y dada X.

3.23 Sea X una variable aleatoria positiva de media 15. Demostrar que $\mathbf{P}(X \geqslant 60) \leqslant 0.25$.

3.24 Sea X una variable aleatoria de media 10 y varianza 15. Demostrar que $\mathbf{P}(5 < X < 15) \geqslant 0.4$.

3.25 Los pesos de ciertos paquetes de café son variables aleatorias independientes con distribución normal de media 500 g. y desvío estándar σ. ¿Cómo deben ser los valores de σ para tener una seguridad del 99 % de que el peso promedio de 100 paquetes no se desviará en más de 10 g. de 500 g.?

3.26 Se quiere saber la proporción de fumadores en una población. Para ello se eligen n individuos al azar y se halla la proporción de los que fuman. ¿Qué valor debe tener n para que esta proporción no difiera de la real en más de 0.01, con probabilidad mayor o igual que 0.95?

Ejercicios Complementarios

3.27 La Gorda (110 kg.) y El Flaco (60 kg.) quieren poner un subibaja en su jardín. Tienen un tablón de tres metros, pero no se deciden acerca de en que punto apoyarlo para que resulte equilibrado cuando ambos se sientan, y ya se han golpeado bastante haciendo pruebas. ¿Podría ayudarlos?

3.28 Sea X una variable aleatoria discreta con distribución equiprobable sobre los valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Hallar expresiones para $\mathbf{E}[X]$ y $\mathbf{var}(X)$.

3.29 [ver **Ejercicio 2.40**] Se arroja repetidas veces una moneda equilibrada. Llamamos N a la variable aleatoria "cantidad de tiradas hasta que por primera se obtiene cara en dos tiradas consecutivas". Calcular $\mathbf{E}[N]$.

3.30 Sean X e Y dos variables aleatorias discretas cuya función de probabilidad conjunta $p_{X,Y}(x,y)$ se define por: $p_{X,Y}(-2,-8) = p_{X,Y}(-1,-1) = p_{X,Y}(0,0) = p_{X,Y}(1,1) = p_{X,Y}(2,8) = 1/5$. Sin calcularla, indicar, justificando la respuesta, cuál es el signo de la covarianza entre X e Y.

3.31 Sea B una variable de Bernoulli con parámetro $p = 0.01$.

(**a**) Si $B_1, \ldots, B_{100}$ son $n = 100$ réplicas independientes de B y $\bar{B} = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} B_m$ es su promedio. Estimar por simulación $\mathbf{P}(|\bar{B} - p| < 0.03)$ y $\mathbf{P}(|\bar{B} - p| < 0.01)$.

(**b**) Lo mismo del inciso anterior pero con $n = 10000$.

3.32 Sea X una variable aleatoria, $\mu_X = \mu, \sigma_X^2 = \sigma^2$. Sea $X_1, X_2, \ldots$ una secuencia independiente de réplicas de X, y se definen

$$\begin{aligned}
\bar{X} &= \frac{\sum_{m=1}^{n} X_m}{n} \\
W^2 &= \frac{\sum_{m=1}^{n} (X_m - \mu)^2}{n} \\
T^2 &= \frac{\sum_{m=1}^{n} (X_m - \bar{X})^2}{n}
\end{aligned}$$

(**a**) Hallar $\mathbf{E}\left[\bar{X}\right]$ y $\mathbf{var}\left[\bar{X}\right]$, en función de μ y σ^2.

(**b**) Hallar $\mathbf{E}\left[W^2\right]$, en función de μ y σ^2.

(**c**) Mostrar que $T^2 = W^2 - (\bar{X} - \mu)^2$.

(**d**) Usar los incisos anteriores para mostrar que $\mathbf{E}\left[S^2\right] = \sigma^2$, donde $S^2 = \frac{n}{n-1} T^2$.

3.33 Sea X una variable aleatoria que representa la relación de níquel al resto de los metales en una aleación. Los siguientes datos corresponden a 18 muestras de una aleación: 1.75, 1.80, 1.29, 1.58, 0.95, 1.87, 1.99, 1.49, 1.12, 0.39, 1.62, 1.41, 1.35, 0.83, 0.71, 0.51, 1.19, 1.95.

(**a**) Calcular $\bar{X}$ y S^2 (ver **Ejercicio 3.32**).

(**b**) Según una publicación, la concentración de níquel en dicha aleación puede ser modelada a través de la distribución $f_X(x) = x/2\ \mathbf{1}\{0 < x < 2\}$. Comparar los resultados obtenidos en **Inciso** (**a**) con los valores teóricos de media y varianza asociados al modelo propuesto.

(**c**) Construir un histograma y explorar informalmente si el modelo propuesto podría considerarse correcto.

3.34 Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional, tal que X e Y tienen media y varianza finitas, y sea $c = \mathbf{cov}(X, Y)$.

(**a**) Si $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ son n réplicas independientes de (X, Y) y definimos

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mathbf{E}[X])(Y_i - \mathbf{E}[Y]) \\
B &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})
\end{aligned}$$

(**b**) Hallar (en términos de c) $\mathbf{E}[A]$.

(**c**) Mostrar que $B = A - (\bar{X} - \mathbf{E}[X])(\bar{Y} - \mathbf{E}[Y])$

(**d**) Hallar (en términos de c) $\mathbf{cov}(\bar{X}, \bar{Y})$.

(**e**) Usando los incisos anteriores, hallar (en términos de c) $\mathbf{E}[B]$.

3.35 Sea $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, donde las X_i son un conjunto de variables i.i.d. Sea S_n^* su correspondiente variable estandarizada. En cada uno de los siguientes casos, simular 100000 valores de S_n^*; computar y graficar la función de distribución empírica. Comparar la gráfica obtenida con la de la función de distribución de una variable $N(0,1)$.

(**a**) X_i es uniforme entre 0 y 1. Analizar los casos de $n = 2, 5, 12$.

(**b**) X_i es Bernoulli de parámetro $p = 1/2$. Analizar los casos de $n = 10, 30$.

(**c**) X_i es Bernoulli de parámetro $p = 0.001$. Analizar los casos de $n = 30, 100, 500$.

(**d**) X_i es geométrica de parámetro $p = 0.001$. Analizar los casos de $n = 30, 100, 500$.

(**e**) X_i es exponencial de parámetro $\lambda = 1$. Analizar los casos de $n = 10, 30, 100$.

(**f**) X_i es Poisson de parámetro $\mu = 0.01$. Analizar los casos de $n = 30, 100, 500$.

(**g**) X_i es Poisson de parámetro $\mu = 1$. Analizar los casos de $n = 1, 5$ (comparar con el inciso anterior).

3.36 Dado un vector $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, consideramos $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. Notamos e al vector de $\mathbb{R}^n$ cuyas coordenadas son todas 1.

(**a**) Mostrar que $(x - \bar{x}e) \perp e$. ¿Qué relación geométrica hay entre x y $\bar{x}e$?

(**b**) Dada cualquier constante c, $x - ce = (x - \bar{x}e) + (\bar{x} - c)e$. Mostrar que la relación del **Ejercicio 3.32 Inciso** (**c**) es consecuencia del teorema de Pitágoras.

(**c**) ¿Cuál es la relación con el teorema de Steiner acerca del cambio paralelo de eje en el momento de inercia?

(**d**) Deducir usando propiedades del producto escalar en $\mathbb{R}^n$, la relación del **Ejercicio 3.34 Inciso** (**c**).

Guía 4

4.1 Sea X una variable aleatoria discreta a valores $\left\{\frac{k}{8} : k = 0, 1, \ldots, 8\right\}$ con función de probabilidad $p_X(x) = \frac{2}{9}x$. Hallar y graficar:

(**a**) la función de probabilidad de $Y = 2X - 1$,

(**b**) la función de probabilidad de $Y = 128X^2$,

(**c**) la función de probabilidad de $Y = -64X^2 + 64X + 2$,

(**d**) la función de probabilidad de $Y = 64X^2 - 96X + 128$.

4.2 [*ver* **Ejercicio 2.5**] Sea X una variable aleatoria con distribución Poisson de media 2. Hallar la función de probabilidad de $Y = \left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi X\right)\right|$.

4.3 Sea X una variable aleatoria continua con función densidad

$$f_X(x) = \frac{12x}{\pi^2 (e^x + 1)} \mathbf{1}\{x > 0\}.$$

Hallar y graficar:

(**a**) la densidad de $Y = aX + b$ ($a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$),

(**b**) la densidad de $Y = -X^3$,

(**c**) la densidad de $Y = X + X^{-1}$,

(**d**) la densidad de $Y = X^2 - 3X$.

4.4 La fase ϕ de un generador eléctrico es una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el intervalo $(-\pi, \pi)$.

(**a**) Hallar la función de densidad del factor de potencia del generador $C = \cos\phi$ (recordar que $\arccos(x)' = -1/\sqrt{1 - x^2}$).

(**b**) Calcular $\mathbf{P}(|C| < 0.5)$.

4.5 Todas las mañanas Lucas llega a la estación del subte entre las 7:05 y las 7:50, con distribución uniforme en dicho intervalo. El subte llega a la estación cada quince minutos comenzando a las 6:00. Hallar la función densidad del tiempo que tiene que esperar Lucas hasta subirse al subte.

4.6 Un voltaje aleatorio V_1 –medido en voltios– con distribución uniforme sobre el intervalo $[180, 220]$ pasa por un limitador no lineal de la forma

$$g(v_1) = \frac{v_1 - 190}{20} \mathbf{1}\{190 \leqslant v_1 \leqslant 210\} + \mathbf{1}\{210 < v_1\}.$$

Hallar la función de distribución del voltaje de salida $V_2 = g(V_1)$.

4.7 La duración de una llamada telefónica es una variable aleatoria con distribución exponencial de media 8 minutos. Si se factura un pulso cada dos minutos o fracción, hallar la función de probabilidad de la cantidad de pulsos facturados por la llamada.

4.8 Sean X e Y dos variables aleatorias con función de probabilidad conjunta dada por la siguiente tabla

	-2	-1	1	2
-2	$1/16$	$1/16$	$1/8$	$1/8$
-1	$1/16$	$1/16$	$1/8$	$1/8$
1	0	0	$1/16$	$1/16$
2	0	0	$1/16$	$1/16$

(Por ejemplo, $\mathbf{P}(X = -2, Y = 2) = 1/8$ y $\mathbf{P}(X = 1, Y = -2) = 0$.) Hallar la función de probabilidad conjunta de U y V cuando

(**a**) $U = X$ y $V = X + Y$.

(**b**) $U = \text{mín}(X, Y)$ y $V = \text{máx}(X, Y)$.

(**c**) $U = X^2 + Y^2$ y $V = Y/X$.

4.9 Sean X e Y dos variables aleatorias con función densidad conjunta $f_{X,Y}(x, y)$. Hallar la expresión de la densidad conjunta de U y V cuando

(**a**) $(U, V) = A(X, Y)^t + B$, donde $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ es una matriz inversible y $B \in \mathbb{R}^2$.

(**b**) $(U, V) = (\text{mín}(X, Y), \text{máx}(X, Y))$.

(**c**) $(U, V) = \big(X^2 + Y^2, Y/X\big)$.

4.10 Sean Z_1 y Z_2 dos variables aleatorias normales estandar independientes.

(**a**) Hallar la densidad conjunta y las densidades marginales de U y V, cuando

1. $U = Z_1 + Z_2$ y $V = Z_1 - Z_2$.
2. $$(U, V) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}, \qquad \theta \in (0, 2\pi).$$
3. $U = Z_1^2 + Z_2^2$ y $V = Z_2/Z_1$.

(**b**) En cada uno de los casos del inciso anterior ¿U y V son independientes?

(**c**) Calcular $\mathbf{P}(Z_1^2 + Z_2^2 > 4)$ y $\mathbf{P}(Z_2 > \sqrt{3} Z_1)$.

4.11 Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias independientes con distribución uniforme sobre el intervalo $[0, 2]$. Sean $U = \text{mín}(X_1, X_2)$ y $V = \text{máx}(X_1, X_2)$.

(**a**) Hallar la densidad conjunta de U y V.

(**b**) Hallar la densidad de $W = V - U$.

(**c**) Calcular $\mathbf{P}(U > 1/2, V < 3/2)$ y $\mathbf{P}(V > 1 + U)$.

4.12 Sea (X, Y) un vector aleatorio con distribución uniforme sobre la región $\Lambda = \{(x, y) : 1 \leqslant x + y \leqslant 3, -1 \leqslant x - y \leqslant 1\}$. Sea $J = \mathbf{1}\{X < Y\}$. ¿Es J independiente de $X + Y$?

4.13 Un objeto se produce en una línea de montaje mediante dos procesos consecutivos que se realizan en tiempos independientes distribuidos uniformemente entre 5 y 10 minutos.

(**a**) Hallar la función densidad del tiempo en que se produce el objeto.

(**b**) Calcular la probabilidad de que el objeto se produzca en menos de 16 minutos.

4.14 Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias independientes con distribuciones exponenciales de intensidades λ_1 y λ_2, respectivamente. Sean $U = \text{mín}(X_1, X_2)$, $V = \text{máx}(X_1, X_2)$, $W = V - U$ y $J = \mathbf{1}\{U = X_1\} + 2\,\mathbf{1}\{U = X_2\}$,

(**a**) Hallar la densidad de U.

(**b**) Hallar la función de probabilidad de J.

(**c**) Hallar la densidad de W.

(**d**) Mostrar que U y J son independientes.

(**e**) Mostrar que U y W son independientes.

4.15 Juan y Pedro han conseguido trabajo en una central telefónica. Juan atiende una línea en que los tiempos entre llamadas consecutivas son exponenciales independientes de intensidad 5 por hora, y Pedro una línea en que los tiempos entre llamadas consecutivas son exponenciales independientes de intensidad 10 por hora. Ambos son fanáticos del ajedrez, y deciden arriesgar su empleo jugando entre llamada y llamada. Se ponen de acuerdo en dejar sin atender las llamadas que suceden antes de los 5 minutos desde que iniciaron el juego o desde la última vez que lo interrumpieron para atender. Inician la partida a las 10.

(**a**) ¿Cuál es la probabilidad de que la primer llamada después de las 10 quede sin atender?

(**b**) ¿Cuál es la probabilidad de que la primer llamada después de las 10 sea en la línea de Juan?

(**c**) ¿Cuál es la probabilidad de que la primer llamada después de las 10 quede sin atender sabiendo que fue en la línea de Juan?

(**d**) ¿Cuál es la probabilidad de que la primer llamada después de las 10 fuera en la línea de Juan sabiendo que fue atendida?

4.16 Sean X e Y variables aleatorias independientes con distribución común exponencial de intensidad $\lambda > 0$. Sean $U = X + Y$ y $V = \frac{X}{X+Y}$.

(**a**) Hallar la densidad conjunta y las densidades marginales de U y V.

(**b**) ¿U y V son independientes?

4.17 Sean U_1 y U_2 variables aleatorias independientes con distribución $U(0, 1)$. Considerar el cambio de variables: $(Z_1, Z_2) = (R\cos\Theta, R\,\text{sen}\,\Theta)$, donde $R = \sqrt{-2\log(U_1)}$ y $\Theta = 2\pi U_2$.

(**a**) Hallar las densidades de R y Θ.

(**b**) Hallar la densidad conjunta de Z_1 y Z_2.

(**c**) ¿Z_1 y Z_2 son independientes? ¿Cómo se distribuyen?

(**d**) Utilizar el cambio de variables para simular 10000 valores de la distribución $N(0,1)$.

(**e**) Usando los valores obtenidos en el inciso anterior estimar el valor de la integral

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx.$$

4.18 Sean X, Y dos variables aleatorias independientes uniformes sobre los conjuntos $\{1, 2, \ldots, 35, 36\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$, respectivamente. Hallar la función de probabilidad de $X + Y$.

4.19 La cantidad L de langostas que arriban a la mesa de un asado tiene una distribución Poisson de media 2 y la cantidad M de moscas tiene una distribución Poisson de media 8. L y M son independientes.

(**a**) Hallar la función de probabilidad de $L + M$.

(**b**) Hallar la función de probabilidad de $M|(L + M = 10)$.

(**c**) Calcular $\mathbf{P}(M > 2|L + M = 10)$.

4.20 Los lados de un rectángulo son variables aleatorias independientes con distribución uniforme sobre el intervalo $(0, 1)$.

(**a**) Hallar la función densidad del área del rectángulo.

(**b**) Calcular la probabilidad de que el área del rectángulo sea mayor que $1/4$.

4.21 Sean X e Y dos variables aleatorias independientes con distribución uniforme sobre el intervalo $(5, 10)$.

(**a**) Sea $U = \frac{X}{2}\,\mathbf{1}\{X \leqslant Y\} + 2Y\,\mathbf{1}\{X > Y\}$. Hallar la función densidad de U.

(**b**) Sea $V = \mathbf{1}\{X + Y \leqslant 10\}$. Hallar la función de probabilidad de V.

(**c**) Hallar la función de densidad de $X_1 + Y_1$ para $(X_1, Y_1) = (X, Y)|X - Y < 0$.

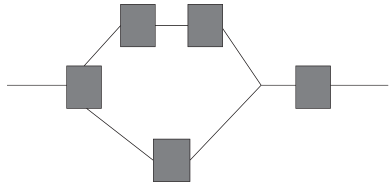
(**d**) Hallar la función densidad de $W = (X - 6)^2 + (Y - 7)^2$ dado que $W < 9/16$.

Ejercicios Complementarios

4.22 La duración de ciertos componentes eléctricos tiene distribución exponencial de media 100 horas. Si los componentes se conectan en serie, la duración del circuito es la del componente de menor duración; mientras que si se conectan en paralelo, es la del de mayor duración. Dado el circuito de 5 componentes conectados según el esquema de la figura,

calcular la probabilidad de que el circuito dure más de 80 horas.

4.23 Los tiempos T_1, T_2 que demoran los cajeros 1 y 2 para atender a un cliente son variables aleatorias independientes exponenciales de media 5 minutos.



(**a**) Hallar la función densidad de T_1/T_2.

(**b**) Lucas y Monk llegan al banco y son atendidos por los cajeros 1 y 2, respectivamente. Calcular la probabilidad de que Lucas demore más del triple del tiempo que demora Monk.

4.24 Sean X e Y dos variables aleatorias independientes con distribución uniforme sobre sobre el intervalo $(0, 1]$. Sea $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$

(**a**) Hallar la función de distribución de R.

(**b**) Calcular $\mathbf{P}(R > 1/2)$.

4.25

(**a**) Sean X e Y dos variables aleatorias independientes con funciones densidad $f_X(x) = 2x\,\mathbf{1}\{0 \leqslant x \leqslant 1\}$ y $f_Y(y) = (2 - 2y)\,\mathbf{1}\{0 \leqslant y \leqslant 1\}$. Hallar la función de distribución de la suma $X + Y$.

(**b**) Sea U una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el intervalo $(0, 1)$. Se definen $X = \sqrt{U}$ e $Y = 1 - \sqrt{U}$.

1. Hallar las densidades de X e Y y la función de distribución de la suma $X+Y$.
2. ¿Existe la densidad conjunta de X e Y?

4.26 Curly, Larry y Moe habían quedado en encontrarse a ensayar un cierto día a las 10 AM. Moe, llega al azar entre las 9:55 y 10:10. Larry es un poco más descuidado y arriba al azar entre las 10 y 10:15. Curly por su parte, aparece una cantidad de minutos T_C luego de las 10, con $f_{T_C}(t) = 2(t-5)/225\;\mathbf{1}\{5 < t < 20\}$. Si cada uno arriba en forma independiente y el ensayo no puede comenzar hasta que lleguen todos, hallar la función de densidad del tiempo de retraso del comienzo del ensayo.

4.27 Sea $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias exponenciales de intensidad $\lambda > 0$. Sea $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de variables aleatorias definida por $S_n = \sum_{k=1}^{n} T_k$.

(**a**) Hallar la densidad conjunta de $S_1, S_2, \dots, S_n$.

(**b**) [*ver* **Ejercicio 2.8**] Hallar la densidad marginal de S_n.

4.28 [*Fragmentación aleatoria.*] Sea $U_1, U_2, U_3, \dots$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribuciones uniformes sobre el intervalo $(0, 1)$.

(**a**) [*ver* **Ejercicio 4.20** y **Ejercicio 2.8**] Hallar la función de distribución de $\varphi_n = \prod_{i=1}^{n} U_i$.

(**b**) Calcular $\mathbf{P}(\varphi_4 \leqslant e^{-2})$.

(**c**) Hallar la expresión general de la sucesión $a_n = \mathbf{P}\left((\varphi_n)^{1/n} \leqslant e^{-1}\right)$ y calcular $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Guía 5

5.1 En una urna hay 4 bolas verdes, 3 amarillas y 3 rojas. Se extraen tres. Sean X la cantidad de bolas verdes extraídas e Y la cantidad de rojas. Hallar las funciones de probabilidad de las variables condicionales $Y|X = x$.

5.2 Sea (X, Y) un vector aleatorio continuo. Hallar la densidad condicional de $Y|X = x$ y la densidad marginal de X cuando

(**a**) (X, Y) tiene distribución uniforme sobre el círculo de centro $(0, 0)$ y radio 1.

(**b**) $f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2x+1} e^{-\left(2x + \frac{y}{4x+2}\right)} \mathbf{1}\{x > 0, y > 0\}$.

(**c**) $f_{X,Y}(x, y) = e^{-x} \mathbf{1}\{0 < y < x\}$.

(**d**) $f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{6} x^4 y^3 e^{-xy} \mathbf{1}\{1 < x < 2, y > 0\}$.

5.3 Al comenzar el día un tanque contiene una cantidad aleatoria Y de miles de litros de leche. Durante el día se vende una cantidad aleatoria X de la leche contenida en el tanque en forma tal que la de densidad conjunta es $f_{X,Y}(x, y) = 0.5 \ \mathbf{1}\{0 < x < y < 2\}$.

(**a**) Hallar $f_{Y|X=1.5}(y)$ y $f_{X|Y=0.8}(x)$.

(**b**) Calcular $\mathbf{P}(1.75 < Y < 2|X = 1.5)$ y $\mathbf{P}(0.5 < X < 0.75|Y = 0.8)$.

(**c**) X e Y, ¿son independientes?

5.4 Sea (X, Y) un vector aleatorio con la densidad conjunta del **Ejercicio 3.22**.

(**a**) Hallar $f_Y(y)$ y $f_{Y|X=x}(y)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. ¿Qué se puede decir respecto a la independencia de X e Y?

(**b**) Calcular $\mathbf{P}(1 < XY < 5|X = \sqrt{5})$.

5.5 Sean X e Y dos variables aleatorias tales que X tiene distribución uniforme sobre el intervalo $(3, 4)$ y para cada $x \in (3, 4)$, $Y|X = x$ tiene distribución normal de media x y varianza 1. Calcular $f_Y(5)$ y $\mathbf{P}(X > 3.5|Y = 5)$.

5.6 Sean T_1 y T_2 variables exponenciales independientes de intensidad λ. Sean $S_1 = T_1$ y $S_2 = T_1 + T_2$.

(**a**) Hallar la densidad conjunta de S_1 y S_2. ¿Son S_1 y S_2 independientes?

(**b**) Calcular $\mathbf{P}(S_1 \in [1/2, 1]|S_2 = 2)$.

5.7 Un viajante tiene tres alternativas de viaje a su trabajo: A, B y C. Se sabe que la proporción de veces que usa estos medios es respectivamente: 0.5, 0.3 y 0.2. El tiempo (en horas) de viaje con el transporte i es una variable aleatoria T_i con densidad: $f_{T_A}(t) = 2t \ \mathbf{1}\{0 \leqslant t \leqslant 1\}$ para el medio A, $f_{T_B}(t) = 0.5t \ \mathbf{1}\{0 \leqslant t \leqslant 2\}$ para el medio B, y $f_{T_C}(t) = 0.125t \ \mathbf{1}\{0 \leqslant t \leqslant 4\}$ para el medio C.

(**a**) Si ha transcurrido media hora de viaje y aun no ha llegado al trabajo, calcular la probabilidad de que llegue por el medio de transporte A.

(**b**) Si tardó exactamente media hora en llegar al trabajo, calcular la probabilidad de que lo haya hecho por el medio de transporte A.

5.8 [*ver* **Ejercicio 4.14**] Drácula y Renfield se dieron cita en una esquina de Mataderos a las 0:00. Drácula llegará a las 0:00+X y Renfield a las 0:00+Y, donde X e Y (en minutos) son variables aleatorias con función de densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{35} e^{-\left(\frac{x}{5}+\frac{y}{7}\right)} \mathbf{1}\{x > 0, y > 0\}.$$

Sabiendo que el primero en llegar a la cita tuvo que esperar exactamente 5 minutos al otro calcular la probabilidad de que el primero en llegar a la cita haya sido Drácula.

5.9 Un receptor recibe una señal de amplitud aleatoria $X = S + N$, donde S es una señal equiprobable sobre el *alfabeto* $\{0.1, 0.2, 0.3\}$ y N es un ruido con distribución normal estándar independiente de S. Si se recibe una señal de amplitud 0.87 ¿cuál es la probabilidad de que contenga la *letra* 0.2?

5.10 La corporación *Cobani Products* produjo 6 RoboCops, cada uno de los cuales está fallado con probabilidad 1/4. Cada RoboCop es sometido a una prueba tal que si el Robocop está fallado se detecta la falla con probabilidad 4/5. Sea X la cantidad de RoboCops fallados y sea Y la cantidad detectada de RoboCops fallados.

(**a**) Hallar una expresión de la función de regresión $\varphi(x) = \mathbf{E}[Y|X = x]$.

(**b**) Hallar una expresión de la función de regresión $\varphi(y) = \mathbf{E}[X|Y = y]$.

5.11 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espacio de probabilidad en el que $\Omega = \{1, 2, \dots, 11, 12\}$, $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$ y $\mathbf{P}(\{\omega\}) = 1/12$ para todo $\omega \in \Omega$. Sea $X : \Omega \to \mathbb{R}$ la variable aleatoria definida por

$$X(\omega) = \mathbf{1}\{\omega \in \{1, 2\}\} + 2\,\mathbf{1}\{\omega \in \{3, 4, 5, 6\}\} + 3\,\mathbf{1}\{\omega \in \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}\}.$$

(**a**) Hallar la expresión de $\mathbf{E}[Y|X]$ para la variable aleatoria $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ definida por

1. $Y(\omega) = \omega$.
2. $Y(\omega) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\omega - \frac{\pi}{4}\right)$.

5.12 Se arroja un dado 36 veces. Sean X e Y las cantidades de resultados pares e impares respectivamente. Hallar la esperanza condicional $\mathbf{E}[Y|X]$ y el valor de $\mathbf{cov}(X, Y)$.

5.13 Una rata está atrapada en un laberinto. Inicialmente puede elegir una de tres sendas. Si elige la primera se perderá en el laberinto y luego de 12 minutos volverá a su posición inicial; si elige la segunda volverá a su posición inicial luego de 14 minutos; si elige la tercera saldrá del laberinto luego de 9 minutos. En cada intento, la rata elige con igual probabilidad cualquiera de las tres sendas. Calcular la esperanza del tiempo que demora en salir del laberinto.

5.14 Una rata está atrapada en un laberinto. Inicialmente elige al azar una de tres sendas. Cada vez que vuelve a su posición inicial elige al azar entre las dos sendas que no eligió la vez anterior. Por la primera senda, retorna a la posición inicial en 8 horas, por la segunda retorna a la posición inicial en 13 horas, por la tercera sale del laberinto en 5 horas. Calcular la esperanza del tiempo que tardará en salir del laberinto.

5.15 Sea X una variable aleatoria con distribución normal estándar y sea Y una variable aleatoria tal que $\mathbf{E}[Y|X] = X^2$. Calcular $\mathbf{cov}(X,Y)$.

5.16 Sea (X,Y) un vector aleatorio tal que X tiene distribución exponencial de media 2, $\mathbf{E}[Y|X] = X$ y $\mathbf{var}[Y|X] = X$. Usando el Teorema de Pitágoras calcular el valor de $\mathbf{var}[Y]$.

5.17 En el contexto del **Ejercicio 5.1**.

(**a**) Hallar y graficar la función de regresión $\varphi(x) = \mathbf{E}[Y|X = x]$ y la función $\phi(x) = \mathbf{var}[Y|X = x]$.

(**b**) Hallar la esperanza y varianza condicional de Y dada X.

5.18 Sea (X,Y) el vector aleatorio considerado en el **Inciso** (**b**) del **Ejercicio 5.2**.

(**a**)

1. Hallar la distribución de las variables condicionales $Y|X = x$.
2. Hallar y graficar la función de regresión $\varphi(x) = \mathbf{E}[Y|X = x]$.
3. Hallar la esperanza condicional de Y dada X.
4. Hallar y graficar la función de distribución de la esperanza condicional de Y dada X.
5. Calcular $\mathbf{P}(1 < \mathbf{E}[Y|X] < 2)$.
6. Hallar y graficar la "varianza de regresión" $\phi(x) = \mathbf{var}(Y|X = x)$.
7. Hallar la varianza condicional de Y dada X.
8. Hallar y graficar la función de distribución de la varianza condicional de Y dada X.
9. Calcular $\mathbf{P}(\mathbf{var}(Y|X) > 1)$.
10. Calcular $\mathbf{var}(Y)$.

(**b**) Repetir el inciso anterior para los restantes incisos del **Ejercicio 5.2**

5.19 Sean X e Y variables aleatorias con densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{13}{48\pi}\exp\left(-\frac{169}{288}\left(\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{5(x-1)y}{13} + y^2\right)\right).$$

(**a**) Hallar $\mathbf{E}[Y|X]$.

(**b**) Hallar la ecuación de la recta de regresión de Y dada X.

5.20 Sea (X,Y) un vector aleatorio con distribución uniforme sobre la región $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 3/4, 0 < y < 3/4\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3/4 < x < 1, 3/4 < y < 1\}$.

Hallar la función de distribución de $\mathbf{E}[Y|X]$ y $\mathbf{var}[Y|X]$. ¿Cuál es la probabilidad de que esta varianza condicional tome un valor inferior a $1/32$?

5.21 La longitud de los rollos de tela producidos por cierta máquina obedece a una distribución uniforme entre 20 y 30 metros. Un buen día un cliente requiere un rollo con por lo menos 28 metros, de los que no hay ninguno en stock.

(**a**) Calcular la cantidad media de rollos que será necesario producir para satisfacer la demanda del cliente.

(**b**) Calcular la longitud total media de tela producida para satisfacer esa demanda.

(**c**) Calcular la longitud total media de tela de los rollos que irán a stock (es decir sin incluir el vendido al cliente).

5.22 Una partícula suspendida en agua es bombardeada por moléculas en movimiento térmico y recibe (por segundo) una cantidad de impactos con distribución Poisson de media 2. Por cada impacto la partícula se mueve un milímetro hacia la derecha con probabilidad $3/5$ o un milímetro hacia la izquierda con probabilidad $2/5$. Hallar la posición media de la partícula al cabo de un segundo.

5.23 El peso de ciertas bolsas de naranjas es una variable aleatoria uniforme entre 3 y 6 kilos. Se van agregando bolsas en una balanza hasta que el peso supere 5 kilos. Hallar la media y la varianza del peso final así obtenido.

5.24 En el contexto del **Ejercicio 5.9** hallar la media y la varianza de la señal recibida.

Ejercicios Complementarios

5.25 [*Grimmett, pág. 111*] Sean T_1 y T_2 variables exponenciales independientes de media 1. Sean $X_1 = T_1 + T_2$, $X_2 = T_1 - T_2$ y $X_3 = T_1/T_2$.

(**a**) Hallar la densidad conjunta de X_1 y X_2. ¿Son X_1 y X_2 independientes?

(**b**) Hallar la densidad conjunta de X_1 y X_3. ¿Son X_1 y X_3 independientes?

(**c**) Hallar las densidades condicionales $f_{X_1|X_2=0}(x_1)$, $f_{X_1|X_3=1}(x_1)$.

(**d**) Calcular $p_1 = \mathbf{P}(X_1 > 1|X_2 = 0)$ y $p_2 = \mathbf{P}(X_1 > 1|X_3 = 1)$. Observe que $X_2 = 0$ y $X_3 = 1$ son eventos equivalentes. ¿Cómo se explica que $p_1 < p_2$?

(**e**) Estimar por simulación las probabilidades del inciso anterior. Para ello simular 100000 pares (T_1, T_2) y usarlos para estimar las probabilidades $\mathbf{P}(X_1 > 1|\,|X_2| < 0.01)$ y $\mathbf{P}(X_1 > 1|\,|X_3 - 1| < 0.01)$. Hacer un gráfico representando las diversas zonas de integración involucradas, y explicar por qué la segunda probabilidad es aproximadamente el doble de la primera.

5.26 Sea (X, Y) una variable bidimensional con la densidad conjunta del **??**. Encuentrar la densidad de $Z = XY$ sabiendo que $Y = 0.25$.

5.27 Sean X e Y variables aleatorias independientes tal que $X \sim U(0,1)$ y $f_Y(y) = 2y\ \mathbf{1}\{0 < y < 1\}$. Se desea calcular $\mathbf{P}(X+Y<1|X=Y)$. Jekyll propone:

$$\mathbf{P}(X+Y<1|X=Y) = \mathbf{P}(2X<1) = \mathbf{P}(X<1/2) = 1/2.$$

Pero Hyde no está de acuerdo y dice:

$$\mathbf{P}(X+Y<1|X=Y) = \mathbf{P}(2Y<1) = \mathbf{P}(Y<1/2) = 1/4.$$

Si ambos hubieran razonado correctamente, ¿convenimos que $1/2 = 1/4$? Explicar lo sucedido.

5.28 [*ver* **Ejercicio 5.10**] La corporación *Cobani Products* produjo n RoboCops, cada uno de los cuales está fallado con probabilidad ϕ. Cada RoboCop es sometido a una prueba tal que si el Robocop está fallado se detecta la falla con probabilidad δ. Sea X la cantidad de RoboCops fallados y sea Y la cantidad detectada de RoboCops fallados.

(**a**) Hallar una expresión de la función de regresión $\varphi(y) = \mathbf{E}[X|Y=y]$.

(**b**) Mostrar que

$$\mathbf{E}[X|Y] = \frac{n\phi(1-\delta) + (1-\phi)Y}{1-\phi\delta}.$$

5.29 Sean X e Y variables aleatorias con distribución uniforme sobre la región del plano Λ. Hallar $\mathbf{E}[Y|X]$ cuando:

(**a**) Λ es el cuadrado de vértices $(1,-1)$, $(1,1)$, $(-1,1)$ y $(-1,-1)$.

(**b**) Λ es el cuadrado de vértices $(\sqrt{2},0)$, $(0,\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2},0)$ y $(0,-\sqrt{2})$. ¿X e Y son independientes?

5.30 [*ver* **Ejercicio 3.29** y **Ejercicio 5.13**] Se arroja sucesivas veces un dado equilibrado. Sea K el número de tiradas hasta obtener por primera vez un resultado distinto de as, y sea, para cada entero $m > 1$, X_m el número de tiradas hasta obtener por primera vez m ases seguidos (por ejemplo si las primeras 9 tiradas resultan $1,1,2,1,4,5,1,1,1$ sería $K = 3$ $X_2 = 2$, $X_3 = 9$).

(**a**) ¿Qué distribución tiene K? Hallar $\mathbf{E}[K]$.

(**b**) Se sabe que $\mathbf{E}[X_2] = 42$. Describir la variable aleatoria $\mathbf{E}[X_2|K]$. Comprobar la consistencia de esta descripción con el dato $\mathbf{E}[X_2] = 42$.

(**c**) Describir la expresión general de $\mathbf{E}[X_m|K]$ en términos de $\mathbf{E}[X_m]$. Deducir una expresión general para $\mathbf{E}[X_m]$.

(**d**) Calcular $\mathbf{E}[X_5]$.

(**e**) Si cada tirada del dado insumiera un segundo, estimar (en años) el tiempo medio necesario hasta obtener 20 ases seguidos.

5.31 Juan y Roberto concursan por un trabajo en IBM. Mientras esperan a ser atendidos por el Examinador, Juan descubre desesperado que olvidó su calculadora. Cuando el Examinador los atiende, Juan le pide una, pero el Examinador (que no cursó esta materia ni leyó la columna de Adrián Paenza en la contratapa de Página

12 del domingo 18 de julio del 2010), se la niega y le dice que piensa que no le será necesaria.

Uno de los enunciados de la prueba dice: "Escriba una secuencia de 200 bits elegidos al azar en $\{0,1\}$.".

El Examinador saca copia de los exámenes, identificando las copias, y se los entrega al Corrector (que cursó esta materia el primer cuatrimestre del 2010) que no puede identificarlos, pero sabe que su amigo Juan olvidó la calculadora. El Corrector mira las pruebas y sin dudarlo sabe cuál es la de su amigo Juan.

Uno:

```
0100111011100100001110101011001001111011010110111001101001100101011O
```

Otro:

¿Podría, a la luz del **Ejercicio 5.30**, explicar cómo hizo, y cuál de las dos secuencias pertenecía a Juan?

5.32 Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional. Sabiendo que $X \sim N(0,2)$ y $\mathbf{E}[Y|X] = 2X^2+1$.

(**a**) Hallar $\mathbf{E}[Y]$ y $\mathbf{cov}(X,Y)$.

(**b**) Hallar una ecuación de la recta de regresión de Y dado X.

5.33 ☣ Dado un vector $(x_1,\ldots,x_n) \in R^n$, sea $T(x_1,\ldots,x_n)$ la variable aleatoria discreta con rango $\{x_1,\ldots,x_n\}$ definida por $P(T=x_i)=1/n$. Consideramos además n réplicas independientes $X_1,\ldots,X_n$ de una variable aleatoria X con media μ y varianza σ^2.

(**a**) Hallar $\mathbf{E}[T]$.

(**b**) Hallar $\mathbf{var}[T]$.

(**c**) Describir la variable aleatoria $\mathbf{E}[T(X_1,\ldots,X_n)|(X_1,\ldots,X_n)]$. Comparar con **Ejercicio 3.32**. Hallar $\mathbf{E}[T(X_1,\ldots,X_n)]$ (en términos de μ).

(**d**) Describir la variable aleatoria $\mathbf{var}[T(X_1,\ldots,X_n)|(X_1,\ldots,X_n)]$. Comparar con **Ejercicio 3.32**. Hallar $\mathbf{E}[\mathbf{var}[T(X_1,\ldots,X_n)]]$ (en términos de σ^2).

Guía 6

6.1 Una empresa produce discos que son defectuosos con probabilidad 0.01 y los vende en paquetes de 10. Ofrece una garantía de que como máximo 1 de los 10 discos del paquete es defectuoso, en caso contrario devolverá el dinero de la compra. ¿Qué proporción de los paquetes no satisface la garantía? Si Lucas compra tres paquetes, ¿cuál es la probabilidad de que le devuelvan el dinero de la compra de exactamente uno de ellos?

6.2 Un tirador tiene probabilidad p de dar en el blanco. Se le ofrecen dos alternativas para ganar un premio: a) hacer 3 disparos con la condición de dar por lo menos 2 veces en el blanco; b) hacer 5 disparos con la condición de dar por lo menos 3 veces en el blanco. ¿Para qué valores de p es más favorable la primera alternativa?

6.3 Se arroja una moneda equilibrada 18 veces.

(**a**) Calcular la probabilidad de obtener exactamente 13 caras.

(**b**) Hallar el número más probable de caras y calcular la probabilidad de que se obtenga ese número.

6.4 La probabilidad de que un pasajero que reserva un asiento no se presente al vuelo es 0.04, de manera independiente unos de otros. En consecuencia, la política de una empresa es vender 100 reservas en un avión que tiene solo 98 asientos. Estimar la probabilidad de que todas las personas que se presentan para un vuelo en particular encuentren asientos disponibles.

6.5 ¿Cuántas veces hay que lanzar un dado equilibrado para que, con probabilidad mayor o igual que 0.95, la frecuencia relativa con que salga el 5 difiera de 1/6 en no más de 0.01?

6.6 Se lanza un dado equilibrado sucesivas veces.

(**a**) Calcular la probabilidad de que el primer 2 ocurra después del tercer lanzamiento.

(**b**) Calcular la probabilidad de que el primer 2 ocurra después del sexto lanzamiento, dado que no ocurrió en los primeros 3 lanzamientos.

6.7 ¿Cuán larga debe ser una sucesión de dígitos decimales equiprobables para que la probabilidad de que aparezca el dígito 6 sea por lo menos 0.99?

6.8 [*ver* **Ejercicio 4.7**] Una lámpara se mantendrá encendida durante un tiempo exponencial de media 3 horas. Lucas enciende la lámpara y, mientras la lámpara está encendida, lanza un dado equilibrado de veinte en veinte segundos (el primero cuando enciende la lámpara). Hallar el número esperado de 3's observados hasta que se apague la lámpara.

6.9 Lucas y Monk lanzan monedas simultáneamente hasta obtener en un lanzamiento dos resultados iguales. Si los dos obtienen cara gana Lucas; si ambos obtienen ceca gana Monk. La moneda de Lucas es equilibrada, pero la moneda de

Monk tiene probabilidad 1/3 de cara. Calcular la probabilidad de que Monk gane el juego.

6.10 Chocolatines Jack lanza una colección de muñequitos con las figuras de los personajes de *Kung Fu Panda*: Panda, Tigre, Mono, Grulla y Mantis. Cada vez que Lucas compra un chocolatín es igualmente probable que obtenga alguno de los personajes. Sea N la cantidad de chocolatines que Lucas debe comprar hasta completar la colección, hallar $\mathbf{E}[N]$ y $\mathbf{var}(N)$. Interpretar los resultados.

6.11 Un dado equilibrado tiene pintadas sus seis caras de la siguiente forma: rojo, amarillo, amarillo, verde, verde, verde. Calcular la esperanza de la cantidad de lanzamientos del dado que deberán realizarse para observar sus tres colores.

6.12 Un estacionamiento, al abrir, tiene capacidad para tres coches. Cada minuto pasa un coche por allí y la probabilidad de que quiera estacionarse es 0.8. Calcular la probabilidad de que se llene en exactamente 10 minutos.

6.13 [*ver* **Ejercicio 5.6**] Se consideran dos variables N_1 y N_2 geométricas e independientes tales que $\mathbf{P}(N_i = 1) = p$. Sean $S_1 = N_1$ y $S_2 = N_1 + N_2$. Hallar

(**a**) la función de probabilidad conjunta de S_1 y S_2.

(**b**) la distribución de $S_1 | S_2 = m$ y calcular $\mathbf{P}(3 \leqslant S_1 \leqslant 5 | S_2 = 8)$.

6.14 En una fábrica hay cuatro máquinas A, B, C y D que producen el 40 %, 30 %, 20 % y 10 % de la producción total, respectivamente.

(**a**) Se eligen al azar 14 artículos de la producción. Calcular la probabilidad de que exactamente 5 provengan de la máquina A, 4 de la máquina B, 3 de la máquina C y 2 de la máquina D.

(**b**) Si se sabe que en 14 artículos tomados al azar de la producción, exactamente 5 provienen de la máquina A, ¿cuál es la probabilidad de que haya exactamente tres provenientes de la máquina C?

6.15 Un proceso de producción produce piezas con dos tipos de defectos independientes: por rotura con probabilidad 0.1 y por abolladura con probabilidad 0.2. Calcular la probabilidad de que al elegir 8 piezas,

(**a**) 1 tenga ambos defectos, 2 estén abolladas solamente, 3 estén rotas solamente, y el resto sean buenas.

(**b**) a lo sumo 1 tenga ambos defectos.

(**c**) menos de 5 tengan algún defecto.

(**d**) por lo menos 3 no tengan defectos.

6.16 Una máquina produce piezas con dos tipos de defectos independientes: de tipo I con probabilidad $1/3$ y de tipo II con probabilidad $1/4$. La máquina produce piezas hasta obtener una con los dos defectos. Sabiendo que se produjeron exactamente 12 piezas, calcular la esperanza de la cantidad de piezas producidas sin defectos.

6.17 Se arroja un dado piramidal 144 veces. El dado tiene las caras numeradas $1, 2, 3, 4$ y están cargadas con probabilidades $0.4, 0.3, 0.2, 0.1$, respectivamente. Sean X_1, X_2, X_3, X_4 la cantidad de lanzamientos en los que el dado cae en la cara $1, 2, 3, 4$, respectivamente. Hallar la matriz de covarianzas $(\mathbf{cov}(X_i, X_j))_{1\leqslant i\leqslant 4, 1\leqslant j\leqslant 4}$.

6.18 Se tirará un dado equilibrado hasta que salga el dos. Sea N la cantidad de tiradas necesarias y sea M la cantidad de cuatros obtenidos.

(**a**) Hallar la ecuación de la recta de regresión de M dada N.

(**b**) Calcular $\mathbf{E}[M]$, $\mathbf{cov}(M, N)$ y $\mathbf{var}(M)$.

6.19 Un motoquero transita por una avenida. Las probabilidades de que al momento de llegar a un semáforo este se encuentre en rojo, amarillo o verde son 0.45, 0.05 y 0.5 respectivamente. Los estados de los semáforos son independientes y el motoquero sólo se detiene al encontrar un semáforo en rojo. Sea N la cantidad de luces verdes que atravesó hasta detenerse.

(**a**) Hallar la función de probabilidad de N.

(**b**) Calcular $\mathbf{P}(N > 2)$.

Ejercicios Complementarios

6.20 Se trata de que un proceso de fabricación no produzca más del 5 % de artículos defectuosos. A tal efecto se lo controla periódicamente examinando n artículos y si alguno de ellos es defectuoso, se detiene el proceso para revisarlo.

(**a**) Si el proceso de fabricación realmente está trabajando al 5 % de artículos defectuosos y se examinan $n = 20$ artículos, ¿cuál es la probabilidad de detener el proceso innecesariamente?

(**b**) Hallar la cantidad mínima de artículos que deberán examinarse si se desea que la probabilidad de detener el proceso cuando realmente está trabajando al 6 % de defectuosos sea por lo menos 0.99. Con ese tamaño de muestra, ¿cuál es la probabilidad de detener el proceso innecesariamente?

6.21 En un proceso de producción en serie las piezas tienen dos tipos de defectos: de forma o de color. La probabilidad de que una pieza tenga un defecto de forma es 0.1; la probabilidad de que tenga un defecto de color es de 0.72 si tiene defecto de forma, y de 0.08 cuando no tiene defecto de forma. Cuando se detecta una pieza con ambos defectos se suspende la producción formando un lote con las piezas producidas hasta ese momento, incluyendo la pieza con ambos defectos. ¿Cuál es la cantidad media de piezas defectuosas por lote?

6.22 ☣ Sea $X_1, X_2, \ldots$ una secuencia de variables aleatorias, todas de media 2, y N una variable geométrica$(p = 2/3)$, independiente de las X_i. Calcular $\mathbf{E}[X_1 + \cdots + X_N | N \geqslant 2]$.

6.23 De los 25 jugadores de fútbol de un club se elige al azar un equipo de 11. Si 8 de los jugadores del club son federados, hallar la probabilidad de encontrar

(**a**) ningún jugador federado en el equipo.

(**b**) exactamente 2 jugadores federados en el equipo.

(**c**) al menos 4 jugadores federados en el equipo.

6.24 STOP En una urna hay k bolas blancas y 5 bolas negras, donde $0 \leqslant k \leqslant 6$. El resultado de la extracción de 2 bolas al azar sin reposición fue de 1 blanca y 1 negra. Para cada k hallar la probabilidad de haber observado el mencionado resultado de las 2 extracciones. ¿Qué valor de k da lugar a la mayor probabilidad?

6.25 Una cadena de supermercados compra un lote de 50000 bombitas eléctricas. Un lote se considera bueno cuando a lo sumo 500 bombitas están quemadas, y se considera malo cuando al menos 1500 bombitas lo están. Se elige una muestra de n bombitas para ensayar. Si c o menos de ellas están quemadas, se acepta el lote. En caso contrario, se lo devuelve al proveedor. Se proponen tres planes de muestreo:

1. $n = 200$; $c = 4$.
2. $n = 100$; $c = 2$.
3. $n = 100$; $c = 1$.

(**a**) Expresar en palabras los riesgos del proveedor y del comprador.

(**b**) Graficar las curvas características (ver **Ejercicio 1.37**) de los tres planes de muestreo (utilizar la aproximación binomial de la hipergeométrica).

(**c**) ¿El plan 2 protege similarmente al proveedor que el plan 1? ¿Y al comprador? Justificar.

(**d**) ¿El plan 3 protege más al comprador que el plan 1? ¿Y al proveedor? Justificar.

Guía 7

7.1 Sea $\{N(t),\, t \geqslant 0\}$ el proceso de conteo asociado a un proceso de Poisson de intensidad 2 y sea $N(a,b) = N(b) - N(a)$ el incremento del proceso en el intervalo $(a,b]$. Calcular

(**a**) $\mathbf{P}(N(1) = 0)$.

(**b**) $\mathbf{P}(N(1,2) = 1)$.

(**c**) $\mathbf{P}(N(1) = 0, N(1,2) = 1, N(2,4) = 2)$.

(**d**) $\mathbf{cov}\,(N(1,3), N(2,4)\,)$.

Sea S_3 el tiempo de espera hasta que ocurre el tercer evento del proceso de Poisson. Calcular

(**e**) $\mathbf{P}(S_3 > 1/2)$

(**f**) $\mathbf{P}(N(1/4) = 1 | S_3 = 1/2)$

(**g**) $\mathbf{P}(S_3 > 1/2 | N(1/4) = 1)$.

7.2 En la Ciudad de Buenos Aires ocurren accidentes de tránsito de acuerdo con un proceso de Poisson con intensidad 2 por hora.

(**a**) Calcular la probabilidad de que el tercer accidente después de las 0:00 ocurra después de las 0:30.

(**b**) Calcular la probabilidad de que entre la una y las dos de la mañana ocurra exactamente un accidente.

7.3 Un radioisótopo emite partículas de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad 10 por hora. Las partículas emitidas se registran con un contador. Cuando el contador registra una partícula tarda dos minutos en reacondicionarse y no registra ninguna partícula emitida durante ese intervalo de tiempo. Calcular la probabilidad de que las primeras 5 partículas emitidas sean registradas por el contador.

7.4 Un detector de partículas emite señales de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad 2 por segundo: *tic,tac,tic,tac,tic,tac,...* el contador registra solamente los *tac*'s. Sabiendo que el contador registró exactamente una señal en el primer segundo, calcular la probabilidad de que no registre ninguna señal en el siguiente.

7.5 Los colectivos de la línea 61.09 llegan a la parada de Paseo Colón 850 según un proceso Poisson de intensidad 12 por hora.

(**a**) Andrés llega a la parada del 61.09 a las 19:30. Calcular la probabilidad de que Andrés tenga que esperar más de 5 minutos hasta que llegue el próximo colectivo.

(**b**) Jemina llega a la parada del 61.09 a las 19:31. Calcular la probabilidad de que Jemina tenga que esperar más de 5 minutos hasta que llegue el próximo colectivo.

(**c**) Matías llega a la parada del 61.09 a las 19:3X, donde X es equiprobable sobre el conjunto $\{2, 3, 4, 5\}$ e independiente del proceso de arribos de colectivos. Calcular la probabilidad de que Matías tenga que esperar más de 5 minutos hasta que llegue el próximo colectivo.

(**d**) Magdalena llega a la parada del 61.09 a las 19:00+U, donde U es uniforme sobre el intervalo (0,60) e independiente del proceso de arribos de colectivos. Calcular la probabilidad de que Magdalena tenga que esperar más de 5 minutos hasta que llegue el próximo colectivo.

7.6 El peso de ciertas bolsas de naranjas es una variable aleatoria exponencial de media 3 kilos. Se van agregando bolsas en una balanza hasta que el peso supera 5 kilos. Calcular la probabilidad de que el peso final en la balanza supere los 7 kilos.

7.7 Llamadas arriban a una central telefónica de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad 4 por hora. Sabiendo que entre las 9:00 y las 10:00 arribaron exactamente 3 llamadas, calcular la probabilidad de que

(**a**) la primera llamada después de las 9:00 haya arribado antes de las 9:15.

(**b**) la segunda llamada después de las 9:00 haya arribado antes de las 9:30.

7.8 A una estación de trenes llegan personas de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad 50 por minuto. El tren parte a los 15 minutos. Sea T la cantidad total de tiempo que esperaron los pasajeros. Hallar $\mathbf{E}[T]$ y $\mathbf{var}(T)$. (*sugerencia*: condicionar al valor de $N(15)$ y usar la fórmula de probabilidad total.)

7.9 Un radioisótopo emite partículas de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad 6 por hora. Sabiendo que entre las 0:00 y las 0:30 el radioisótopo emitió exactamente 3 partículas calcular la probabilidad de que la primera partícula emitida después de las 0:00 se haya emitido después de las 0:10 y la cuarta se haya emitido después de las 0:40.

7.10 Una máquina produce rollos de alambre. El alambre tiene fallas distribuidas como un proceso de Poisson de intensidad 1 cada 20 metros. La máquina detecta cada falla con probabilidad 0.75 y corta el alambre en la primer falla detectada.

(**a**) Hallar la media y la varianza de la longitud de los rollos de alambre.

(**b**) Hallar la cantidad media de fallas en los rollos.

7.11 Una máquina produce rollos de alambre. El alambre tiene fallas distribuidas como un proceso de Poisson de intensidad 1 cada 20 metros. La máquina detecta cada falla con probabilidad 0.75 y corta el alambre en la primer falla detectada antes de los 20 metros o a los 20 metros si no se detectan fallas antes.

(**a**) Hallar la media de la longitud de los rollos de alambre.

(**b**) Hallar la cantidad media de fallas en los rollos.

7.12 Lucas emite señales de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad 3 por minuto, mientras que Monk las emite de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad 5 por minuto. Los dos procesos de Poisson son independientes.

(**a**) Hallar la probabilidad de que la primera señal emitida después de las 0:00 haya sido emitida después de las 0:10.

(**b**) Hallar la probabilidad de que la primera señal emitida haya sido emitida por Lucas.

(**c**) Hallar la probabilidad de que la primera señal emitida después de las 0:00 haya sido emitida después de las 0:10 y que haya sido emitida por Lucas.

7.13

(**a**) Sean Π_1 y Π_2 dos procesos de Poisson independientes de intensidad 2. ¿Cuál es la probabilidad de que los dos primeros eventos provengan del proceso Π_1?

(**b**) Sean T_1, T_2, T_3 variables aleatorias independientes exponenciales de media 1/2. Calcular la probabilidad de que T_1 supere a $T_2 + T_3$ (*sugerencia: no es necesario hacer ninguna cuenta*).

7.14 Estando *maduras las brevas* fuerzas patriotas arribarán a la Plaza de la Victoria organizadas en dos fracciones: los Chisperos conducidos por French y Beruti y los Patricios dirigidos por Saavedra. Los Patricios arribarán de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad 60 por hora y los Chisperos de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad 40 por hora. Los dos procesos de Poisson son independientes. Sabiendo que el 25 de mayo entre las 12:00 y las 12:03 arribaron exactamente 2 Chisperos a la Plaza de la Victoria calcular la probabilidad de que entre las 12:01 y las 12:02 hayan arribado por lo menos 2 integrantes de las fuerzas patriotas.

7.15 Clientes arriban a un servidor de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad 4 por hora. El tiempo de trabajo consumido en cada servicio tiene distribución normal de media 5 minutos y desvío estándar 1/2 . Calcular la media y la varianza del tiempo de trabajo consumido por el servidor entre las 11:00 y las 12:00.

7.16 Familias de africanos migran a la Unión Europea de acuerdo con un proceso de Poisson de tasa 3.000 por semana. Si el número de integrantes de cada familia es independiente y puede ser $5, 4, 3$ con probabilidades respectivas 0.1, 0.4, 0.5, calcular la media y la varianza de la cantidad de africanos que migran a la Unión Europea durante un período de 4 semanas.

7.17 Vehículos arriban a un puesto de peaje de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad 10 por minuto de acuerdo con los siguientes porcentajes: 70 % de autos, 10 % de motos, y 20 % de camiones. Los autos transportan en promedio una carga de 400 kg., las motos de 120 kg., y los camiones de 1300 kg.

(**a**) Hallar la probabilidad de que en media hora crucen por el peaje a lo sumo 2 autos.

(**b**) Hallar la probabilidad de que en 1 minuto pasen 7 autos, 1 moto y 2 camiones.

(**c**) Hallar la carga media que transporta un vehículo que pasa por el peaje.

(**d**) Hallar la carga media total que atraviesa el peaje durante 1 hora.

7.18 A una línea de embalaje arriban en forma independiente piezas producidas por las máquinas A y B. Las piezas de la máquina A lo hacen según un proceso Poisson de tasa 2 por minuto, mientras que las de la máquina B también lo hacen en forma Poisson pero con tasa 1 por minuto. Las piezas de ambas máquinas llegan a la línea de embalaje y por orden de arribo son embaladas de a pares. Hallar la media y la varianza del tiempo transcurrido hasta la aparición de un par embalado formado por una pieza proveniente de cada máquina.

Ejercicios Complementarios

7.19 Una fábrica textil produce rollos de tela para una camisería. La tela se teje en una máquina que produce fallas de tejido de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad 2 cada 300 metros. La tela se corta en piezas de 100 metros de largo y cada pieza pasa a la máquina de teñido. Cuando una pieza de tela no tiene fallas de tejido la cantidad de fallas de teñido es una variable aleatoria con distribución Poisson de media 1. En cambio, si la pieza tiene fallas de tejido la cantidad de fallas de teñido una variable aleatoria con distribución Poisson de media 2. Hallar la distribución de la cantidad de fallas en una pieza enrollada.

7.20 La llegada de aviones a un aeropuerto de una determinada ciudad responde a un proceso Poisson con una media de 12 aviones por hora. Un oficial de control llega cada día de la semana y permanece en el aeropuerto el tiempo necesario hasta que llega el décimo avión. Si al cabo de una semana (5 días hábiles) el tiempo que permaneció el oficial en el aeropuerto superó las 4 horas, ¿cuál es la probabilidad de que dicho tiempo haya excedido las 5 horas? Suponer que los tiempos de permanencia de dos días diferentes son independientes.

7.21 Clientes ingresan a un banco según un proceso de Poisson de tasa 10 por hora. El 30 por ciento de los clientes son mujeres. ¿Cuál es la probabilidad de que en el lapso hasta la llegada del sexto hombre hayan ingresado exactamente 2 mujeres?

7.22 A un hospital llegan personas de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad 1 cada hora. Cuando una persona ingresa al hospital, la probabilidad de que esté gravemente enferma es 0.4. (cada una en forma independiente de las otras). La jornada de atención del hospital es de 24 horas.

(**a**) El costo de atender a una persona que está gravemente enferma es de \$10 y el de atender a una persona que no esté gravemente enferma es de \$2. Hallar el costo medio de una jornada de atención.

(**b**) Sabiendo que el costo de una jornada de atención fue de \$10, hallar la distribución de la cantidad de personas que llegaron al hospital en esa misma jornada.

7.23 ☣ Una máquina produce rollos de alambre. El alambre tiene fallas distribuidas como un proceso de Poisson de intensidad 1 cada 25 metros. La máquina corta el alambre en la primer falla detectada después de los 50 metros, pero detecta las fallas con probabilidad 0.9. Si entre los 50 y los 150 metros no detecta ninguna falla, la máquina corta el alambre a los 150 metros. Hallar la cantidad media de fallas en los rollos.

7.24 [*ver* **Ejercicio 7.13**] Lucas entra en un banco que tiene dos cajas independientes. Pablo está siendo atendido por el cajero 1 y Pedro por el cajero 2. Lucas será atendido tan pronto como Pedro o Pablo salgan de la caja. El tiempo, en minutos, que demora el cajero i en completar un servicio es una variable aleatoria exponencial de media 2^{3-i}, $i = 1, 2$. Hallar

(**a**) la probabilidad de que Pablo sea el primero en salir;

(**b**) la probabilidad de que Pablo sea el último en salir.

7.25 En hora pico, una autopista recibe tráfico de 3 entradas, A, B y C, en forma independiente, que tienen tasas de 30, 35 y 25 vehículos por minuto, respectivamente. De los vehículos que llegan por A o B, el 30 % se desvía por colectora (o sea, no van por la autopista). En la autopista hay un puesto de peaje (luego de las 3 entradas).

(**a**) ¿Cuál es la probabilidad de que al peaje lleguen 3 autos en menos de 5 segundos?

(**b**) ¿Cuál es la probabilidad de que pasen más de 5 autos hasta que pasa uno proveniente de la entrada A?

(**c**) Se sabe que en un lapso de 15 segundos pasaron por el peaje 20 vehículos. ¿Cuál es la probabilidad de que la mitad de ellos haya pasado en los últimos 5 segundos?

(**d**) En el peaje se instala un contador de vehículos, pero el mismo funciona intermitentemente. Cada vez que funciona, el tiempo durante el cual lo hace no es fijo sino que es una variable $T_i \sim U(10, 15)$ segundos. Sea X_i la cantidad de vehículos registrados la i-ésima vez que funciona el dispositivo. La cantidad de veces que el dispositivo funciona durante un minuto es una variable N_j distribuida uniformemente a valores $\{1, 2, 3, 4\}$. Si cada una de las secuencias $\{T_i\}$, $\{X_i\}$ y $\{N_j\}$ son i.i.d., hallar la cantidad media de vehículos registrados por el dispositivo durante 1 hora.

7.26 ⅄ En la fila de un cajero automático hay personas esperando realizar una operación; cada vez que una persona termina su operación, la siguiente comienza la suya. Las personas son impacientes, e independientemente de lo que hagan las demás, cada una espera solamente un tiempo exponencial de tasa 1; luego del cual si no ha comenzado su operación se retira de la fila. Por otra parte, los tiempos consumidos en cada operación son independientes y exponenciales de tasa 10. Si una persona está utilizando el cajero, hallar la probabilidad de que la octava persona en la fila realice su operación.

Guía 8

8.1 Para modelar el precio del kilo de asado se propone una variable aleatoria con distribución normal de media 3 dólares y varianza 4. A la luz de que los precios suelen ser positivos: ¿qué puede decirse de semejante modelo?; ¿y si la media fuese 8 dólares?; ¿y si la media fuese 14 dólares?

8.2 Un receptor recibe una señal de amplitud aleatoria $X = S + N$, donde S es una variable Bernoulli de parámetro $3/4$ y N es un ruido con distribución normal de media 0 y desvío estándar $1/2$ independiente de S. Cuando S vale 1 la señal contiene información útil y cuando vale 0 no. El detector deja pasar la señal si $X > c$ y no la deja pasar si $X \leqslant c$. Se incurre en error cuando no se deja pasar una señal con información útil o cuando se deja pasar una señal sin información. Determinar el valor de c que garantice la probabilidad mínima de error.

8.3 La duración de cierto tipo de lámparas tiene distribución normal de media 100 horas. Si un comprador exige que por lo menos el 90 % de ellas tenga una duración superior a las 80 horas, ¿cuál es el valor máximo que puede tomar la varianza manteniendo siempre satisfecho al cliente?

8.4 En un establecimiento agropecuario, el 10 % de los novillos que salen a venta pesan más de 500 kg. y el 7 % pesa menos de 410 kg. Si la distribución es normal, hallar

(**a**) a y b tales que $\mathbf{P}(a < X < b) = 0.95$.

(**b**) la probabilidad de que en un potrero de 25 novillos haya alguno con un peso inferior a 400 kg.

8.5 Sean X_1, X_2 y X_3 variables aleatorias independientes con distribución normal de medias 1,2 y 3, respectivamente, y varianzas 1/9, 1/3 y 1/2, respectivamente. Calcular $\mathbf{P}\left(X_1 - \frac{1}{2}X_2 > 2 - \frac{1}{3}X_3\right)$.

8.6 Se construye una varilla conectando tres secciones A, B y C cada una de las cuales se fabrica en una máquina diferente. La longitud de la sección A, en cm., tiene distribución normal de media 50 y varianza 0.25. La longitud de la sección B tiene distribución normal de media 30 y varianza 0.0625. La longitud de la sección C tiene distribución normal de media 65 y varianza 0.25. Las tres secciones se conectan de modo tal que hay una superposición de 5 cm. en cada conexión. Calcular la probabilidad de que la longitud de la varilla se encuentre entre 139 y 141 cm.

8.7 Los pesos de ciertos paquetes de café son variables aleatorias independientes con distribución normal de media 500 gr. y desvío estándar σ. ¿Cómo deben ser los valores de σ para tener una seguridad del 99 % de que el peso promedio de 12 paquetes no se desviará en más de 10 gr. de 500 gr.?

8.8 Sea S_n una variable aleatoria con distribución Binomial(n, p). Calcular $\mathbf{P}(S_n = k)$, $k = 1, 2, \ldots, 25$ con la fórmula exacta y con las siguientes aproximaciones:

1. *Aproximación por la densidad normal:*

$$\mathbf{P}(S_n = k) \sim \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}\,\varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

2. *Corrección por continuidad:*

$$\mathbf{P}(S_n = k) = \mathbf{P}\left(k - \frac{1}{2} < S_n < k + \frac{1}{2}\right) \approx \Phi\left(\frac{k-np+1/2}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{k-np-1/2}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

en los siguientes casos $n = 5, 8, 10, 15, 20, 25, 50, 100, 200$ y $p = (0.05)m$, $m = 1, 2, \dots, 10$. Comparar (por gráficos) cuán buenas son las aproximaciones y cuán necesaria es la corrección por continuidad de acuerdo con los valores de n y p.

8.9 [*Experimento de Galton*] Una bola roja realiza una caminata aleatoria de la siguiente manera: cada 10 segundos se desplaza 3 cm. hacia la derecha o hacia la izquierda, con igual probabilidad, las sucesivas direcciones de la caminata son independientes. Si al cabo de dos minutos se ha desplazado ℓ veces hacia la izquierda va a parar a la urna ℓ, $\ell = 0, 1, 2, \dots, 12$. Usar la *aproximación por la densidad normal* para estimar la probabilidad de que la bola roja vaya a parar a la urna 4. ¿A qué caja es más probable que vaya a parar la bola roja?

8.10 [*ver* **Ejercicio 2.38**] Usar la *corrección por continuidad* para calcular aproximadamente la probabilidad de que entre los primeros 10.000 dígitos decimales de un número escogido al azar del intervalo $(0, 1)$ el 7 aparezca no más que 968 veces.

8.11 Ciertas partículas llegan a un contador según un proceso de Poisson de intensidad 3000 por hora. Sabiendo que entre las 9:00 y las 9:30 llegaron 1500 partículas, estimar la probabilidad de que más de 450 hayan llegado entre las 9:00 y las 9:10.

8.12 Una excursión dispone de 100 plazas. La experiencia indica que cada reserva tiene una probabilidad 0.1 de ser cancelada a último momento. No hay lista de espera. Se supone que los pasajeros hacen sus reservas individualmente, en forma independiente. Se desea que la probabilidad de que queden clientes indignados por haber hecho su reserva y no poder viajar sea $\leqslant 0.01$. Calcular el número máximo de reservas que se pueden aceptar.

8.13 [*ver* **Ejercicio 3.26**] Se quiere saber la proporción de fumadores en una población. Para ello se eligen n individuos al azar y se halla la proporción de los que fuman. ¿Qué valor debe tener n para que esta proporción no difiera de la real en más de 0.01, con probabilidad mayor o igual que 0.95?

8.14 Usando el Teorema Central del Límite demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

(*sugerencia:* considere una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución Poisson de media 1.)

8.15 La longitud de ciertas varillas es una variable aleatoria de media 30 cm. y desvío estándar 2. El precio de venta en $ de cada varilla es igual a su longitud medida en cm. El costo de producción de cada varilla es constante e igual a $20. Calcular aproximadamente la probabilidad de que la ganancia total por vender 50 varillas sea mayor que $460.

8.16 La duración (en minutos) de cada llamada telefónica efectuada por Alucard es una variable aleatoria de media μ y desvío estándar 0.2. Le facturan $2 por minuto. ¿Cómo debe ser μ para que el costo de 100 llamadas de Alucard sea inferior a los $190 con probabilidad mayor o igual que 0.99?

8.17 En un taller de manufactura, la fracción de unidades defectuosas varía diariamente en forma aleatoria con media 0.1 y desvío estándar 0.03. La producción diaria es variable con media 500 unidades y desvío 120 unidades. Todas las variables son independientes. El costo total diario tiene una parte fija de $50 por unidad producida (buena o defectuosa) más $100 por unidad defectuosa. Estimar el costo total para 90 días superado con 0.95 % de probabilidad.

8.18 El peso W (en toneladas) que puede resistir un puente sin sufrir daños estructurales es una variable aleatoria con distribución normal de media 1.400 y desvío 100. El peso (en toneladas) de cada camión de arena es una variable aleatoria de media 20 y desvío 0.25. ¿Cuántos camiones de arena debe haber, como mínimo, sobre el tablero del puente para que la probabilidad de que ocurran daños estructurales supere 0.1?

8.19 En un sistema electrónico se producen fallas de acuerdo con un proceso de Poisson de tasa 2.5 por mes. Por motivos de seguridad se ha decidido cambiarlo cuando ocurran 196 fallas. Calcular (aproximadamente) la probabilidad de que el sistema sea cambiado antes de los 67.2 meses.

8.20 Una máquina selecciona ciruelas y las separa de acuerdo con el diámetro x (medido en cm.) de cada una. Las de diámetro superior a 4 cm. se consideran de clase A y las otras de clase B. El diámetro de cada ciruela es una variable aleatoria uniforme entre 3 y 5 cm. El peso (medido en gramos) de cada ciruela depende de su diámetro y es x^3. Si las cajas vacías pesan 100 gramos, hallar en forma aproximada la probabilidad de que una caja con 100 ciruelas de tipo A pese más de 9.6 kilos.

8.21 [*ver* **Ejercicio 7.8**] A una estación de tren arriban pasajeros de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad 50 por minuto. Los trenes parten de la estación cada 15 minutos a partir de las 4:00. Calcular aproximadamente la probabilidad de que la cantidad total de tiempo que esperaron todos los que viajaron desde la estación y arribaron a la misma entre las 4:00 y las 22:00 haya superado 6.400 horas.

8.22 Lucas y Monk palean arena cargando un volquete. La probabilidad de que una palada sea de Monk es 0.7 y la probabilidad de que sea de Lucas es 0.3. El volumen en decímetros cúbicos de la palada de Lucas es una variable aleatoria uniforme entre 2 y 4, y el de la palada de Monk es una variable aleatoria uniforme entre 1 y 3. ¿Cuántas paladas son necesarias para que la probabilidad de que el volquete tenga más de 4 metros cúbicos de arena supere 0.95?

Ejercicios Complementarios

8.23 Una conserva se venderá envasada en latas. Las distribuciones de los pesos (en gr.) y sus costos (en \$ por gr.) son los siguientes:

Peso neto	X es normal de media 49.8 y desvío 1.2.
Peso del envase	Y es normal de media 8.2 y desvío 0.6.
Costo de la conserva	$C_C = 0.06$.
Costo del envase	$C_E = 0.008$.

(**a**) Calcular la probabilidad de que una unidad terminada tenga un costo inferior a \$3.

(**b**) Hallar la probabilidad de que el costo del producto terminado supere en más del 2 % al costo del peso neto.

8.24 [*Capacidad de procesos*] La calidad de un proceso industrial suele caracterizarse por alguna variable aleatoria X, medible sobre dicho proceso o sobre el producto fabricado por él (por ejemplo, X puede ser el diámetro de piezas torneadas, la corriente eléctrica en un proceso de soldadura, el volumen de llenado de botellas, la dureza de comprimidos farmacéuticos o su concentración de principio activo, etc). Se suelen definir límites superior e inferior de especificación (LSE y LIE) como aquellos valores a partir de los cuales el producto resulta no conforme o defectuoso. Cuando X pertenece al intervalo $[LIE, LSE]$, el producto se considera aceptable. Los sucesivos productos son obtenidos con variaciones aleatorias en X, que se suponen normales. Cuando el proceso es *centrado* (el intervalo se encuentra centrado en μ_X), la capacidad del proceso de elaboración se define como la aptitud para generar productos dentro de los límites, y se cuantifica a través del índice de capacidad

$$C_p = \frac{LSE - LIE}{6\sigma_X}.$$

(**a**) Interpretar el significado de C_p.

(**b**) De un proceso centrado con límites $LIE = 10.90$ mm. y $LSE = 11.10$ mm. se midieron $n = 15$ piezas, obteniendo (en mm.): 10.98, 10.92, 11.01, 11.08, 11.07, 11.10, 10.87, 10.99, 11.07, 10.93, 10.96, 10.90, 10.89, 10.94, 10.95. Estimar con esta muestra σ_X como $\sqrt{S^2}$ (ver **Ejercicio 3.32**). Luego, estimar C_p y el porcentaje de productos defectuosos.

(**c**) Calcular el porcentaje de piezas no conformes para procesos centrados con C_p iguales a 2/3, 1 y 4/3.

(**d**) Un proceso centrado trabaja con un 0.5 % de piezas no conformes. ¿Cuánto vale su C_p?

8.25 Lucas usa su radio portátil un tiempo variable, día a día, de media 2.4 hrs. y desvío estándar 0.8 hrs. La radio usa una pila especial cuya duración también es variable de media 8 hrs. y desvío estándar 1.2 hrs. Lucas efectuará un viaje de 30 días y si se le agotan las pilas no está seguro de conseguirlas. Calcular cuántas pilas debe llevar para que la probabilidad de dicho evento valga 0.05.

8.26 Un buen día Monk decide resolver toda la Guía 1 de Probabilidad y Estadística (incluídos los Ejercicios Complementarios). El tiempo, en horas, que demora en resolver el ejercicio $1.i$ ($i = 1, 2, \ldots, 43$) es una variable aleatoria T_i. La variables T_i son independientes y exponenciales de intensidad 4. Cuando termina de resolver el ejercicio $1.i$ Monk descansa $2e^{T_i}$ minutos. Calcular aproximadamente la probabilidad de que Monk haya descansado más de dos horas mientras resolvía todos los problemas de la Guía 1.

Referencias (por orden alfabético)

Abramson, N. (1986), *Teoría de la Información y Codificación*, Paraninfo, 6^a edición.

DeGroot M.H. (1986), *Probability and Statistics*, Addison Wesley Publishing Company, 2^a edición.

Feller, W. (1970), *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, New York, Volumen 1, 3^a edición.

Grimmett G.R. y Stirzaker D.R. (2001), *Probability and Random Processes*, Oxford University Press, New York, 3^a edición.

Maronna, R. (1995), *Probabilidad y Estadística Elementales para Estudiantes de Ciencias*, Editorial Exacta, La Plata.

Ross, S.M. (2007), *Introduction to Probability Models*, Academic Press, San Diego, 9^a edición.

Soong, T.T. (2004), *Fundamentals of Probability and Statistics for Engineers*, John Wiley & Sons.