Casos de PL formulados con LINDO (Miranda)

PROBLEMA No. 03
INDUSTRIA: SERVICIOS ELÉCTRICOS
SECTOR: PRODUCCIÓN
OBJETO: PROGRAMACIÓN

Una compañía de servicios eléctricos, que cuenta con tres generadores, debe decidir qué generadores debe poner en marcha cada día. Por razones operativas y de consumo, el día está dividido en tres períodos. Un generador puesto en marcha en un período se puede usar en un período subsiguiente del mismo día sin incurrir en costo adicional de puesta en marcha. Todos los generadores se apagan al finalizar el día.

	GENERADOR		
	A	B	C
Costo Fijo de arranque (K$)	4	3	2
Costo por MWh ($)	6	5	8
Capacidad Máxima por período (MWh)	2300	2000	3300

El régimen operativo de los generadores A, B y C requiere que trabajen a una capacidad superior a 400 MWh, 300 MWh y 500 MWh respectivamente.

Formular y resolver el problema para un día determinado en donde la demanda es de 2500 MWh, 1800 MWh y 3500 MWh para el primer, segundo y tercer período respectivamente.

Resolución

Definición de variables:

#i: Cantidad de electricidad en MWh producida por el generador # (A,B o C) en el período i del día.

I#: Variable binaria que se activa si en un día determinado se enciende un generador.

Formulación:

- Función objetivo:

MIN Z) 4000 IA + 3000 IB + 2000 IC + 6 A1 + 6 A2 + 6 A3 + 5 B1 + 5 B2 +5 B3 + 8 C1 + 8 C2 + 8 C3

Sujeto a:

- Requerimiento:

R1) A1 + B1 + C1 = 2500
R2) A2 + B2 + C2 = 1800
R3) A3 + B3 + C3 = 3500

- Capacidad

CA1) $A1 - 2300\ IA \leq 0$
CA2) $A2 - 2300\ IA \leq 0$
CA3) $A3 - 2300\ IA \leq 0$

CB1) $B1 - 2000\ IB \leq 0$
CB2) $B2 - 2000\ IB \leq 0$
CB3) $B3 - 2000\ IB \leq 0$

CC1) $C1 - 3300\ IC \leq 0$
CC2) $C2 - 3300\ IC \leq 0$
CC3) $C3 - 3300\ IC \leq 0$

- Generación mínima:

NA1) $A1 - 400\ IA \geq 0$
NA2) $A2 - 400\ IA \geq 0$
NA3) $A3 - 400\ IA \geq 0$

NB1) $B1 - 300\ IB \geq 0$
NB2) $B2 - 300\ IB \geq 0$
NB3) $B3 - 300\ IB \geq 0$

NC1) $C1 - 500\ IC \geq 0$
NC2) $C2 - 500\ IC \geq 0$
NC3) $C3 - 500\ IC \geq 0$

- Condiciones de las variables:

#i no negativas
I# son binarias

Solución:

VALOR DE LA FUNCIÓN OBJETIVO

Z) 50900.00

VARIABLE	VALOR	C.REDUCIDO
IA	1	4400
IB	1	-1000
IC	0	3000
A1	500	0
A2	400	0
A3	1500	0
B1	2000	0
B2	1900	0
B3	2000	0
C1	0	2
C2	0	3
C3	0	0

RESTRICCION	SLACK	P.SOMBRA
R1)	0	-6
R2)	0	-5

R3)	0	-6
CA1)	1800	0
CA2)	1900	0
CA3)	800	0
CB1)	0	1
CB2)	100	0
CB3)	0	1
CC1)	0	0
CC2)	0	0
CC3)	0	0
NA1)	100	0
NA2)	0	-1
NA3)	1100	0
NB1)	1700	0
NB2)	1600	0
NB3)	1700	0
NC1)	0	0
NC2)	0	0
NC3)	0	-2

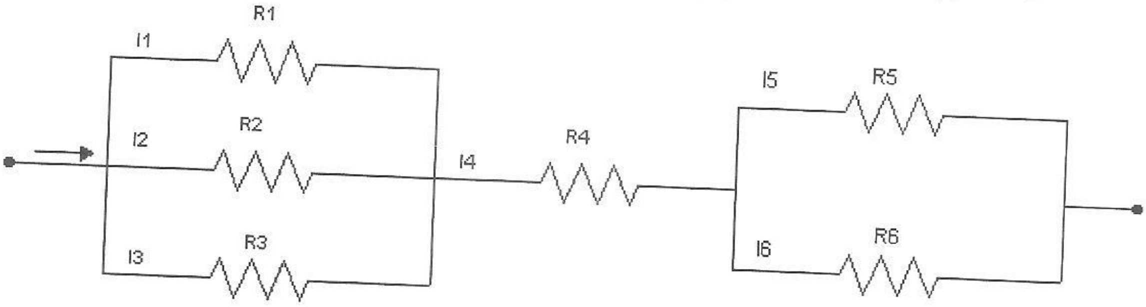
PROBLEMA No. 09
INDUSTRIA: ELECTRÓNICA
SECTOR: INGENIERÍA
OBJETO: CÁLCULO

En el circuito eléctrico de la figura se tiene:

I_i = *corriente (en amperes que circula por la resistencia i)*
V_i = *caída de potencial (en volts sobre la resistencia i)*
R_i = *resistencia (en ohms de la resistencia i)*

1) *Suponiendo que la caída de potencial en cada resistencia debe estar entre 2 y 10 volts, y sabiendo que $I_1 = 4$, $I_2 = 6$, $I_3 = 8$ e $I_5 = 10$, formular un modelo que permita minimizar la potencia total disipada.* Calcular las resistencias

2) *Suponiendo que la corriente que pasa por cada resistencia debe estar entre 1 y 6 amperes, y sabiendo que la caída de potencial es $V_1 = V_2 = V_3 = 6$, $V_4 = 4$ y $V_5 = V_6 = 5$, formular un modelo que permita minimizar la potencia total disipada.* Idem



<u>Resolución</u>

<u>Consideraciones:</u>

Aplicando las leyes de Kirchoff, tendremos que

$\mathbf{V_1 = V_2 = V_3 = V_A}$

$\mathbf{V_5 = V_6 = V_B}$

y que

$\mathbf{I_1 + I_2 + I_3 = I_4 = 18}$

$\mathbf{I_5 + I_6 = I_4 = 18}$

Además, la ley de Ohm establece que $V_i = \mathbf{I_i\ R_i}$

La potencia total disipada que pasa por la resistencia i es igual a $\mathbf{I_i^2\ R_i}$.

Formulación:

- Funcional:

  MIN: 16 R1 + 36 R2 + 64 R3 + 324 R4 + 100 R5 + 64 R6

- Sujeto a las siguientes restricciones:

  VA – 4 R1 = 0
  VA – 6 R2 = 0
  VA – 8 R3 = 0
  V4 – 18 R4 = 0
  VB – 10 R5 = 0
  VB – 8 R6 = 0
  VA ≤ 10
  VA ≥ 2
  V4 ≤ 10
  V4 ≥ 2
  VB ≤ 10
  VB ≥ 2

- Condiciones de las variables:

  Todas continuas no negativas

Solución:

Resolviendo el modelo con el sistema LINDO, el informe de salida es el siguiente:

```
VALOR DE LA FUNCIÓN OBJETIVO

  Z)        108.00

VARIABLE        VALOR        COSTO REDUC.
    R1        0.500000        0.000000
    R2        0.333333        0.000000
    R3        0.250000        0.000000
    R4        0.111111        0.000000
    R5        0.200000        0.000000
    R6        0.250000        0.000000
    VA        2.000000        0.000000
    V4        2.000000        0.000000
    VB        2.000000        0.000000
```

FILA	SLACK	V. MARGINAL
2)	0.000000	4.000000
3)	0.000000	6.000000
4)	0.000000	8.000000
5)	0.000000	18.00000
6)	0.000000	10.00000
7)	0.000000	8.000000
8)	8.000000	0.000000
9)	0.000000	-18.0000
10)	8.000000	0.000000
11)	0.000000	-18.0000
12)	8.000000	0.000000
13)	0.000000	-18.0000

NO. DE ITERACIONES = 3

Para la segunda pregunta, a fin de formular el problema en forma lineal se definen variables Xi como inversas de las respectivas resistencias Ri.

$$X_i = \frac{1}{R_i}$$

De manera que la expresión de la ley de Ohm aplicada a cada resistencia quedará:

$$V_i = i_i.R_i \quad \therefore \quad V_i.\frac{1}{R_i} = i_i \quad \therefore \quad V_i.x_i = i_i \quad \therefore \quad V_i.x_i - i_i = 0$$

Por su parte, el funcional tendrá la siguiente expresión:

$$Z = \sum i_i^2.R_i = \sum \frac{V_i^2}{R_i^2} R_i = \sum V_i^2.X_i$$

En consecuencia, el problema queda entonces formulado como sigue:

- Funcional

  MIN: 36 X1 + 36 X2 + 36 X3 + 16 X4 +25 X5 +25 X6

- Restricciones:

  - I4 + I1 +I2 + I3 = 0

  - I4 + I5 +I6 = 0

  I1 ≥ 1

  I1 ≤ 6

  I2 ≥ 1

  I2 ≤ 6

  I3 ≥ 1

  I3 ≤ 6

  I4 ≥ 1

  I4 ≤ 6

  I5 ≥ 1

  I5 ≤ 6

  I6 ≥ 1

$I6 \leq 6$

$6\ X1 - I1 = 0$

$6\ X2 - I2 = 0$

$6\ X3 - I3 = 0$

$4\ X4 - I4 = 0$

$5\ X5 - I5 = 0$

$5\ X6 - I6 = 0$

siendo todas las variables continuas y no negativas.

Solución:

VALOR DE LA FUNCIÓN OBJETIVO

1) 45.00000

VARIABLE	VALOR	COSTO REDUC.
X1	0.166667	0.000000
X2	0.166667	0.000000
X3	0.166667	0.000000
X4	0.750000	0.000000
X5	0.200000	0.000000
X6	0.400000	0.000000
I4	3.000000	0.000000
I1	1.000000	0.000000
I2	1.000000	0.000000
I3	1.000000	0.000000
I5	1.000000	0.000000
I6	2.000000	0.000000

FILA	SLACK	V. MARGINAL
2)	0.000000	9.000000
3)	0.000000	-5.00000
4)	0.000000	-15.0000
5)	5.000000	0.000000
6)	0.000000	-15.0000
7)	5.000000	0.000000
8)	0.000000	-15.0000
9)	5.000000	0.000000
10)	2.000000	0.000000
11)	3.000000	0.000000
12)	0.000000	0.000000
13)	5.000000	0.000000
14)	1.000000	0.000000
15)	4.000000	0.000000
16)	0.000000	-6.00000
17)	0.000000	-6.00000
18)	0.000000	-6.00000
19)	0.000000	-4.00000
20)	0.000000	-5.00000
21)	0.000000	-5.00000

NÚMERO DE ITERACIONES = 7

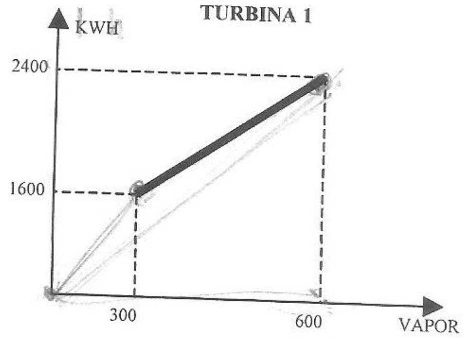
En consecuencia, $R_1 = R_2 = R_3 = 6$, $R_4 = 1.33$; $R_5 = 5$; y $R_6 = 2.5$

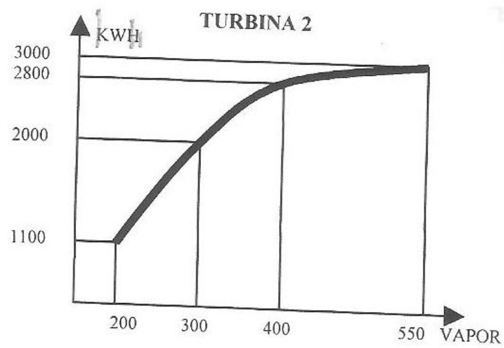
PROBLEMA No. 16
INDUSTRIA: ENERGÍA
SECTOR: GENERACIÓN
OBJETO: SELECCIÓN

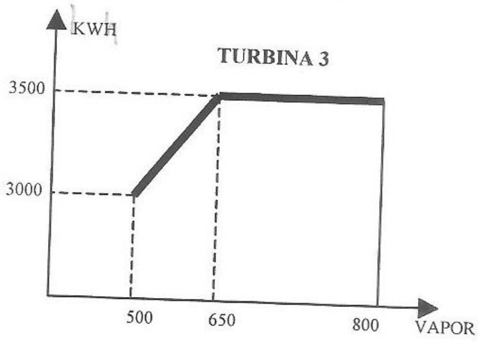
Una central eléctrica tiene cuatro calderas. Si se usa una caldera dada, se podrá producir una cantidad de vapor (dada en toneladas) que varía entre el mínimo y el máximo indicado en la tabla. Se indica también el costo para producir una tonelada de vapor en cada caldera y el costo de puesta en marcha para un día determinado.

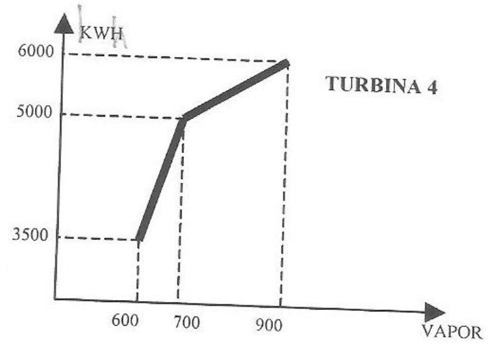
Caldera	Cantidad mínima de vapor	Cantidad máxima de vapor	Costo de encendido	Costo por tonelada
1	500	1000	$ 3000	$10
2	300	900	$ 3400	$8
3	400	800	$ 3900	$6
4	500	700	$ 2900	$11

Todo el vapor de las calderas se usa para producir energía en cuatro turbinas. En los siguientes gráficos se indican la producción de energía en KWH para cada turbina en las condiciones de operación de cada una de ellas.









El costo de encendido de las ~~*calderas*~~ turbinas *y el costo de operación por tonelada de alimentación es el siguiente:*

Turbina	Costo de encendido	Costo por tonelada de vapor
1	$4000	2.9
2	$2000	3.2
3	$4500	4.2
4	$500	4.0

Suponiendo que las calderas y las turbinas están apagadas al comenzar el día, formular un programa matemático que permita determinar qué calderas y qué turbinas deberían encenderse para producir como mínimo 8000 KWH de energía en un día determinado, cuáles para 10000 y cuáles para 12000.

Resolución

Definición de variables:

VCi:	Vapor generado en la caldera i
ICi:	Variable binaria para permitir la activación de la caldera i
VC:	Vapor generado en todas las calderas y utilizado en las turbinas
VTj:	Vapor utilizado en la turbina j
ITj:	Variable binaria para permitir la activación de la turbina j
Ak:	Variables continuas entre 0 y 1 de una familia de vectores para representar el régimen de trabajo de la turbina 1
Bk:	Variables continuas entre 0 y 1 de una familia de vectores para la turbina 2
Ck:	Variables continuas entre 0 y 1 de una familia de vectores para la turbina 3
Dk:	Variables continuas entre 0 y 1 de una familia de vectores para la turbina 4
ETj:	Energía producida en la turbina j

Formulación:

- Función objetivo:

MIN 3000 IC1 + 3400 IC2 + 3900 IC3 + 2900 IC4 + 4000 IT1
+ 2000 IT2 + 4500 IT3 + 500 IT4 + 10 VC1 + 8 VC2 + 6 VC3
+ 11 VC3 + 2.9 VT1 + 3.2 VT2 + 4.2 VT3 + 4 VT4

Sujeto a:

- Generación de vapor en las calderas:

VC1 - 500 IC1 $\geq$ 0
VC1 - 1000 IC1 $\leq$ 0
VC2 - 300 IC2 $\geq$ 0
VC2 - 900 IC2 $\leq$ 0
VC3 - 400 IC3 $\geq$ 0
VC3 - 800 IC3 $\leq$ 0
VC4 - 500 IC4 $\geq$ 0
VC4 - 700 IC4 $\leq$ 0
VC1 + VC2 + VC3 + VC4 - VC = 0
VT1 + VT2 + VT3 + VT4 - VC = 0

- Turbina 1

  $- VT1 + 300\ A1 + 600\ A2 = 0$
  $- ET1 + 1600\ A1 + 2400\ A2 = 0$
  $A1 + A2 - IT1 = 0$ (esta ecuación asegura la combinación lineal de los Aj y permite, además, activar o no la turbina 1)

- Turbina 2

  $- VT2 + 200\ B1 + 300\ B2 + 400\ B3 + 550\ B4 = 0$
  $- ET2 + 1100\ B1 + 2000\ B2 + 2800\ B3 + 3000\ B4 = 0$
  $B1 + B2 + B3 + B4 - IT2 = 0$ (esta ecuación asegura la combinación lineal de los Bj y permite, además, activar o no la turbina 2)

- Turbina 3

  $- VT3 + 500\ C1 + 650\ C2 + 800\ C3 = 0$
  $- ET3 + 3000\ C1 + 3500\ C2 + 3500\ C3 = 0$
  $C1 + C2 + C3 - IT3 = 0$ (esta ecuación asegura la combinación lineal de los Cj y permite, además, activar o no la turbina 3)

- Turbina 4

  $- VT4 + 600\ D1 + 700\ D2 + 900\ D3 = 0$
  $- ET4 + 3500\ D1 + 5000\ D2 + 6000\ D3 = 0$
  $D1 + D2 + D3 - IT4 = 0$ (esta ecuación asegura la combinación lineal de los Dj y permite, además, activar o no la turbina 4)

- Requerimiento

  $ET1 + ET2 + ET3 + ET4 \geq 8000$

Resolución:

En la tabla siguiente se indican los resultados obtenidos para los tres casos.

Si, al observar alguna de las soluciones encontradas, hubiera habido algún vector *mesh* B1 y B4 no vecinos (no ocurrió en ninguno de los casos), se habría planteado un recinto no convexo, y la solución sería incorrecta.

	8000	**12.000**	**14.000**
Z	16560	33812	42963.75
IC1	0	1	1
IC2	1	1	1
IC3	0	0	0
IC4	1	1	1
IT1	0	0	1
IT2	1	1	1
IT3	0	1	1
IT4	1	1	1
VC1	0	500	687.50
VC2	440	660	900
VC3	0	0	0
VT1	0	0	337.50
VT2	400	400	400

VT3	0	560	650
VT4	740	900	900
VC4	700	700	700
VC	1140	1860	2287.50
A1	0	0	0.875
A2	0	0	0.125
ET1	0	0	1700
B1	0	0	0
B2	0	0	0
B3	1	1	1
B4	0	0	0
ET2	2800	2800	2800
C1	0	0.60	0
C2	0	0.40	1
C3	0	0	0
ET3	0	3200	3500
D1	0	0	0
D2	0.80	0	0
D3	0.20	1	1
ET4	5200	6000	6000

A fin de permitir que se activen sólo vectores *mesh* adyacentes se deberían plantear restricciones como las que se indican a continuación.

$$B1 - U1 \leq 0$$
$$B2 - U2 \leq 0$$
$$B3 - U3 \leq 0$$
$$B4 - U4 \leq 0$$
$$U1 + U3 \leq 1$$
$$U1 + U4 \leq 1$$
$$U2 + U4 \leq 1$$

(pero además, creo, cuando B4 [illegible] poder ser menor a 1) B2 no puede ser 1 porque [illegible].

en donde los vectores Ui son variables binarias.

De hecho, como generalmente no se puede saber *a priori* si una función no lineal es convexa o no, siempre se deberían formular restricciones como las indicadas a fin de permitir sólo la habilitación de vectores vecinos.

OK. lo hace en cada tabla

Excel con Solver para resolver PL (Hillier & Lieberman)

Por último, el valor de la función objetivo se introduce en la celda E8. Como los otros valores de la columna E, se trata de una suma de productos. La ecuación para la celda E8 es =SUMAPRODUCTO(C8:D8,C9:D9). La esquina inferior derecha de la figura 3.14 muestra las fórmulas que deben introducirse en la columna de "totales" (columna E) para el problema de la Wyndor.

Una vez que se introduce el modelo en la hoja de cálculo, es sencillo analizar las soluciones potenciales. Cuando se dan valores a las variables de decisión, la columna de "totales" calcula de inmediato la cantidad total usada de cada recurso y la ganancia total. Así, al comparar la columna E con la G, se puede ver en seguida si la solución potencial es factible. Si lo es, la celda E8 muestra la ganancia que generará. Un enfoque para intentar resolver un problema de programación lineal sería por prueba y error, en la hoja de cálculo para analizar una variedad de soluciones. Sin embargo, a continuación se presenta cómo usar Excel para encontrar rápido una *solución óptima*.

Uso de Excel Solver para resolver el modelo

Excel incluye una herramienta llamada Solver que aplica el método símplex para encontrar una solución óptima. (Una versión más poderosa de Solver, llamada *Premium Solver*, está disponible en el OR Courseware.) Antes de usar Solver, deben incluirse las siguientes componentes del modelo en la hoja de cálculo:

1. Cada variable de decisión
2. La función objetivo y su valor
3. Cada restricción funcional

La hoja mostrada en la figura 3.14 incluye estas componentes. Los parámetros para las restricciones funcionales están en las filas 5, 6 y 7, y los coeficientes para la función objetivo están en la fila 8. Los valores de las variables de decisión están en las celdas C9 y D9, y el valor de la función objetivo en la celda E8. Como no se sabe cuáles deben ser los valores de las variables de decisión, sólo se escriben ceros. El Solver cambiará éstos por los valores óptimos al resolver el problema.

Para correr el Solver se elige "Solver" en el menú Herramientas. El cuadro de diálogo de Solver se muestra en la figura 3.15. La "celda objetivo" contiene el valor de la función objetivo, mientras que las "celdas que cambian" contienen los valores de las variables de decisión.

Antes de que Solver pueda aplicar el método símplex, necesita conocer con exactitud dónde se localizan las componentes del modelo en la hoja de cálculo. Es posible escribir las direcciones de las celdas o hacer clic en ellas. Como la celda objetivo es E8 y las que cambian están en el rango C9:D9, se introducen estas direcciones en el cuadro de diálogo de Solver como se muestra en la figura 3.15. (Excel pone de manera automática los signos de pesos mostrados en la figura al dar las direcciones.) Como se trata de maximizar la función objetivo, se selecciona "máximo".

Después, deben añadirse las direcciones de las restricciones funcionales. Esto se hace con un clic en el botón "agregar" en el cuadro de diálogo de Solver, con lo que aparece el cuadro de diálogo de "agregar restricción", mostrado en la figura 3.16. En este cuadro se especifica la localización de los valores en el lado izquierdo y el lado derecho de las restricciones funcionales. Las celdas E5 a E7 deben ser menores o iguales que las celdas correspondientes G5 a G7. También existe un menú para elegir entre los signos <=, = o >=, en el que se ha elegido <= para estas restricciones. (Esta selección es necesaria aun cuando antes se hayan escrito los signos en

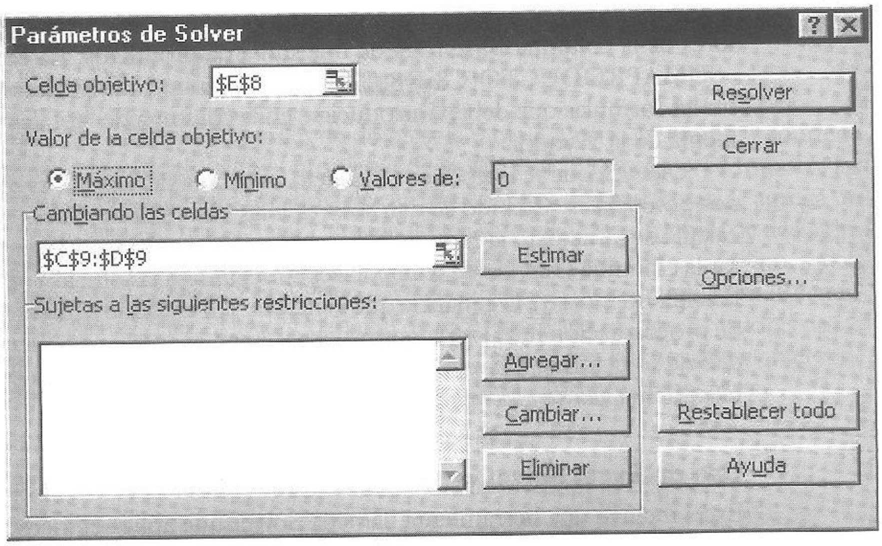


FIGURA 3.15
Cuadro de diálogo de Solver después de especificar qué celdas en la figura 3.14 contienen los valores de la función objetivo y las variables de decisión y de indicar que la función objetivo se maximizará.

la columna F de la hoja de cálculo, porque Solver usa sólo las restricciones funcionales que se especifican en el cuadro de diálogo de "agregar restricción".)

Si hubiera más restricciones funcionales que añadir, se haría clic en "agregar" para que aparezca de nuevo el cuadro de diálogo. Sin embargo, como no hay más en este ejemplo, el siguiente paso es hacer clic en "aceptar" para regresar al cuadro de diálogo de Solver.

Ahora el cuadro de diálogo resume el modelo completo (vea la figura 3.17) en términos de la hoja de cálculo de la figura 3.14. Pero antes de pedir a Solver que resuelva el modelo, se realiza otro paso. Se elige el botón de "opciones" y aparece el cuadro de diálogo mostrado en la figura 3.18. Este cuadro permite especificar cierto número de opciones sobre la manera en que se resolverá el modelo. Las más importantes son las opciones "adoptar modelo lineal" y "asumir no negativos". Asegúrese de elegir los cuadros de ambas opciones como se muestra en la figura. Esto indica a Solver que es un problema de programación *lineal* con restricciones de no negatividad para todas las variables de decisión, y que el método símplex se debe usar

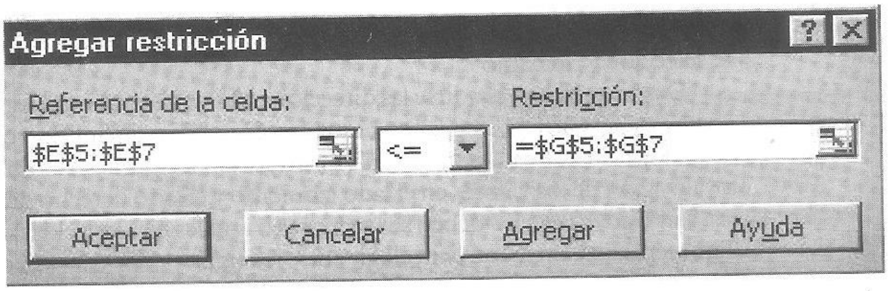


FIGURA 3.16
Cuadro de diálogo de Agregar restricción después de especificar que se requiere que las celdas E5, E6 y E7 en la figura 3.14 sean menores o iguales que las celdas respectivas G5, G6 y G7.

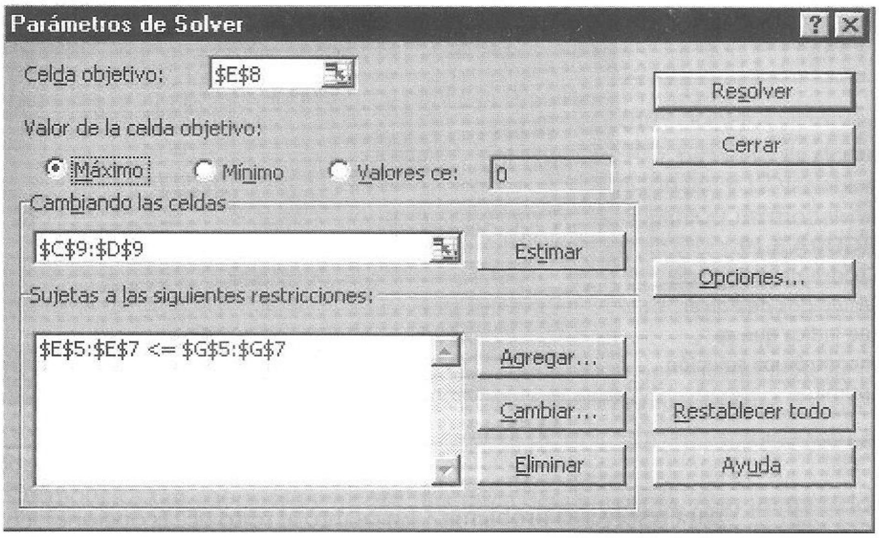
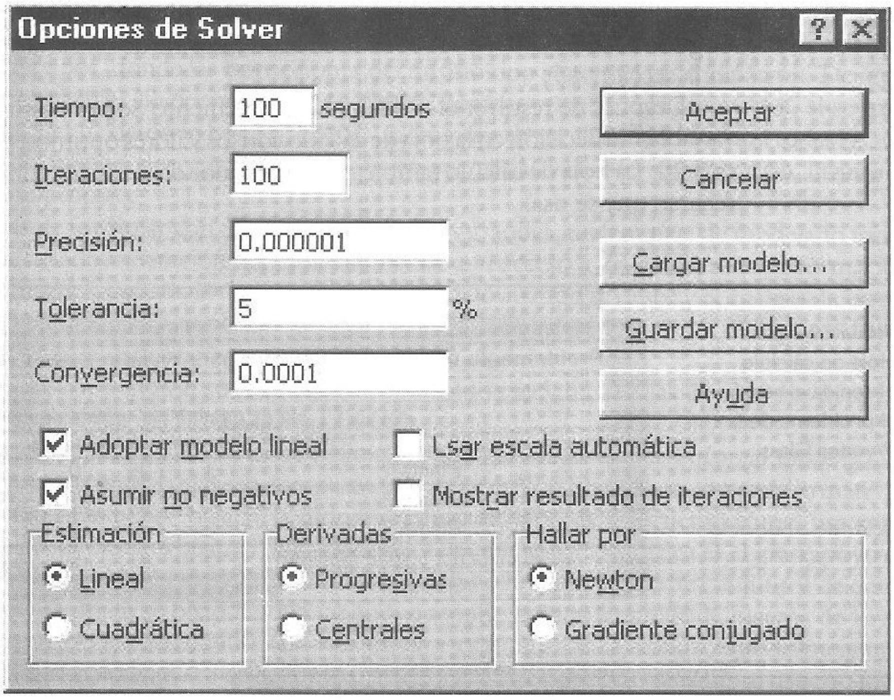


FIGURA 3.17
Cuadro de diálogo de Solver después de especificar el modelo en términos de la hoja de cálculo.

FIGURA 3-18
Cuadro de diálogo de Opciones de Solver después de elegir las opciones "adoptar modelo lineal" y "asumir no negativos" para indicar que se trata de un modelo lineal con restricciones de no negatividad que debe resolverse con el método símplex.



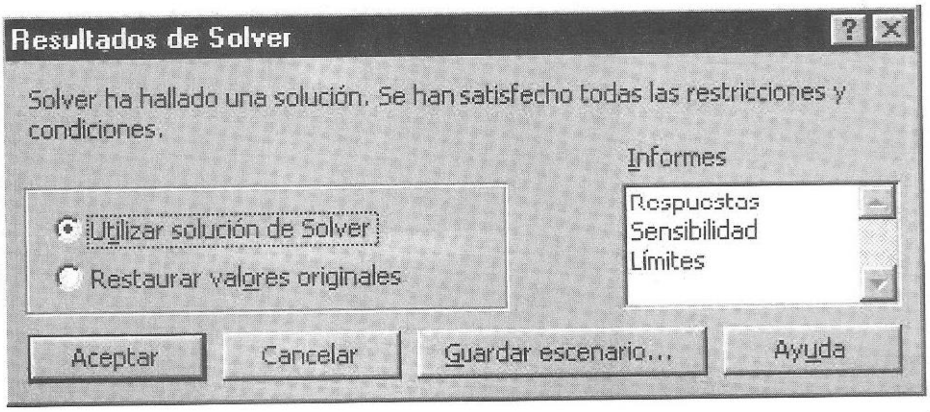


FIGURA 3.19
Cuadro de diálogo de Resultados de Solver que indica que se encontró una solución óptima.

para resolver el problema.[1] En cuanto al resto de las opciones, en general los valores preestablecidos se pueden aceptar para problemas pequeños. Con un clic en aceptar se regresa al cuadro de diálogo de Solver.

Ahora todo está listo para hacer clic en "resolver" en el cuadro de diálogo de Solver, con lo que se ejecutará el método símplex. Después de unos segundos (para un problema pequeño), Solver indicará los resultados. Por lo común indicará que encontró una solución óptima, como se especifica en el cuadro de diálogo de Resultados de Solver mostrado en la figura 3.19. Si el modelo no tiene soluciones factibles o una solución óptima, este cuadro de diálogo lo indicará con un mensaje como "Solver no pudo encontrar una solución factible" o "el conjunto de valores en las celdas no converge". El cuadro de diálogo también presenta la opción de generar varios informes. Uno de ellos (el informe de sensibilidad) se analizará con detalle en la sección 4.7.

Después de resolver el modelo, el complemento Solver sustituye el valor original de las variables de decisión en la hoja de cálculo con los valores óptimos, como se muestra en la figura 3.20. La hoja de cálculo también indica el valor de la función objetivo y la cantidad de cada recurso que se usa.

FIGURA 3.20
Hoja de cálclulo obtenida al resolver el problema de la Wyndor Glass.

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Problema de mezcla de productos para Wyndor Glass Co.**						
2							
3			Horas usadas por unidad producida				Horas
4			Puertas	Ventanas	Totales		disponibles
5		Planta 1	1	0	2	≤	4
6		Planta 2	0	2	12	≤	12
7		Planta 3	3	2	18	≤	18
8		Ganancia por unidad ($miles)	3	5	36		
9		Solución	2	6			

[1]En versiones de Excel anteriores a Excel 97, no se dispone de la opción de no negatividad, por lo que las restricciones de no negatividad deben añadirse en el cuadro de diálogo de Agregar restricción.