

SISTEMAS DE DESIGUALDADES LINEALES

Una empresa productora de comida para perros produce dos tipos de alimentos, normal y extra. Una libra de normal consta de $1/3$ libra de carne y $2/3$ libras de cereales. Una libra de extra consta de igual cantidad de carne que de cereales. Supongamos que la empresa tiene un stock de 3 toneladas de carne y 4 toneladas de cereales. Deseamos encontrar el conjunto de todas las posibles combinaciones de normal y extra que pueden producirse con dicho stock disponible. Sean x e y el número de toneladas de normal y extra respectivamente que se producirán. Puesto que no puede producirse una cantidad negativa tenemos las hipótesis:

$$x \geq 0, \quad (1)$$

$$y \geq 0. \quad (2)$$

Las cantidades limitadas de carne y cereal imponen una restricción a la cantidad de comida para perro que se puede producir. Si se producen x toneladas de normal se necesitan $(1/3)x$ toneladas de carne; si se producen y toneladas de extra se necesitan $(1/2)y$ toneladas de carne. Puesto que se dispone de 3 toneladas de carne tenemos que

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y \leq 3. \quad (3)$$

Análogamente, necesitamos $(2/3)x + 1/2y$ toneladas de cereal para producir x e y toneladas de normal y extra respectivamente. Puesto que se dispone de 4 toneladas tenemos que

$$\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y \leq 4. \quad (4)$$

Por tanto nuestro vector producido (x, y) debe satisfacer (1), (2), (3) y (4). Intentemos dibujar el conjunto solución del sistema de desigualdades lineales:

$$x \geq 0, \quad (1)$$

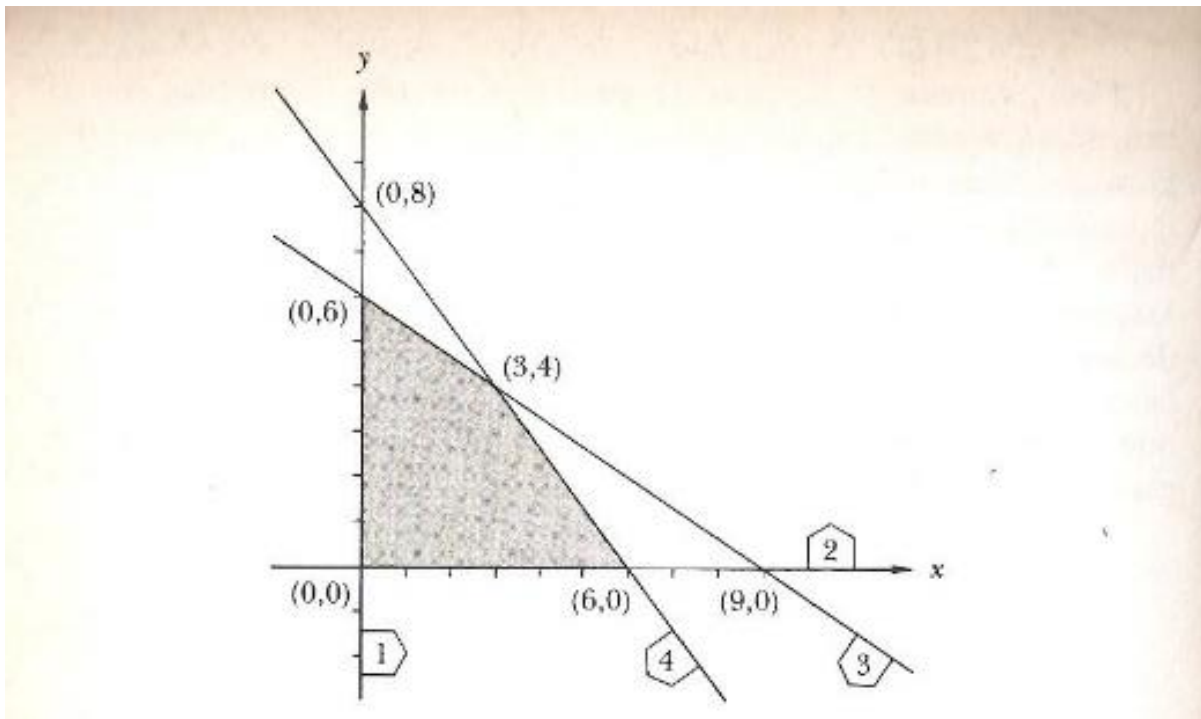
$$y \geq 0, \quad (2)$$

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y \leq 3, \quad (3)$$

$$\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y \leq 4. \quad (4)$$

Un punto (x,y) pertenece a la solución si y sólo si satisface todas las desigualdades.

El conjunto solución es la intersección de los cuatro semiplanos.



Los vértices se encuentran analizando pares de desigualdades y resolviéndolas como ecuaciones.

PROGRAMACIÓN LINEAL: UN PROBLEMA

$$\begin{array}{ll}
 x_1 \geq 0, & (1) \\
 x_2 \geq 0, & (2) \\
 x_1 + x_2 \leq 3, & (3) \quad (I) \\
 x_1 + 2x_2 \leq 4, & (4) \\
 u = 5x_1 + 8x_2 - 7, & (5) \\
 \text{maximizar } u. &
 \end{array}$$

Hay cuatro vértices y dos pseudovértices no admisibles.

Como es lineal, la solución óptima del programa puede hallarse en uno de los cuatro vértices.

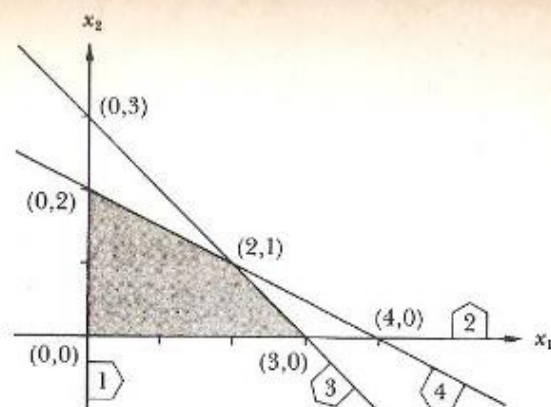


FIG. 8.1. Región admisible del programa (I).

más sistemático y útil, tal como hicimos en los programas (I) y (II) del capítulo VII. En primer lugar usamos las reglas de las desigualdades para escribir (3) y (4) en la forma equivalente

$$-x_1 - x_2 + 3 \geq 0, \quad (3)$$

$$-x_1 - 2x_2 + 4 \geq 0, \quad (4)$$

y posteriormente introducimos las variables de holgura $x_3 = -x_1 - x_2 + 3$ y $x_4 = -x_1 - 2x_2 + 4$. Volvemos ahora a escribir el programa (I) en la forma equivalente

$$-x_1 - x_2 + 3 = x_3, \quad (6)$$

$$-x_1 - 2x_2 + 4 = x_4, \quad (7) \quad (II)$$

$$5x_1 + 8x_2 - 7 = u, \quad (8)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0,$$

maximizar u .

TABLA 8.1

Coordenadas de vértice	$u = 5x_1 + 8x_2 - 7$
(0,0)	-7
(3,0)	8
(2,1)	11 (máx)
(0,2)	9

Podemos ahora obtener todos los seudovértices igualando a cero dos de las cuatro x y resolviendo el sistema resultante. Si hacemos,

por ejemplo, $x_2 = 0$ y $x_3 = 0$ y resolvemos

$$\begin{aligned} -x_1 + 3 &= 0, \\ -x_1 + 4 &= x_4, \end{aligned}$$

se obtiene $x_1 = 3$ y $x_4 = 1$. Las coordenadas $(x_1, x_2) = (3, 0)$ describen un pseudovértice admisible. Obsérvese que $x_3 = 0$, pues $(3, 0)$ pertenece a la recta frontera de la restricción (3) y $x_1 > 0$, ya que $(3, 0)$ está contenido en el semiplano cerrado (4). De modo análogo, si tomamos $x_1 = 0$ y $x_3 = 0$ y resolvemos (II) para x_2 y x_4 , obtenemos $x_2 = 3$ y $x_4 = -2$. El pseudovértice así obtenido con $(x_1, x_2) = (0, 3)$ no es admisible (ver fig. 8.1).

Llegados a este punto, reemplazamos el nombre pseudovértice, de inspiración geométrica, por el término algebraico de «solución básica».

Y así sucesivamente vamos hallando todas las soluciones básicas hasta llegar a la tabla:

TABLA 8.2. Soluciones básicas del programa (II).

Solución básica	(x_1, x_2) Coordenadas de la solución básica	x_1 x_2 x_3 x_4				¿Admi- sible?	u admi- sible
		x_1	x_2	x_3	x_4		
(1, 2)	(0, 0)	0	0	3	4	Sí	-7
(1, 3)	(0, 3)	0	3	0	-2	No	—
(1, 4)	(0, 2)	0	2	1	0	Sí	9
(2, 3)	(3, 0)	3	0	0	1	Sí	8
(2, 4)	(4, 0)	4	0	-1	0	No	—
(3, 4)	(2, 1)	2	1	0	0	Sí	11

Es bastante trabajo ¿no?

REPRESENTACIÓN ESQUEMÁTICA Y MÉTODO DEL PIVOTE

Teníamos el problema escrito en filas

$$\begin{aligned}
 -x_1 - x_2 + 3 &= x_3, \\
 -x_1 - 2x_2 + 4 &= x_4, \\
 5x_1 + 8x_2 - 7 &= u.
 \end{aligned} \tag{III}$$

Apelando a la indulgencia del lector, volvemos a escribir las ecuaciones de (III) en *columna*

$$\begin{array}{rcl}
 \begin{array}{l} (-1)x_1 \\ (-1)x_2 \\ (+3)(1) \end{array} & \begin{array}{l} (-1)x_1 \\ (-2)x_2 \\ (+4)(1) \end{array} & \begin{array}{l} (5)x_1 \\ (+8)x_2 \\ (-7)(1) \end{array} \\
 \hline
 = x_3 & = x_4 & = u
 \end{array}$$

De esta forma es evidente que la columna que contiene a x_1 , x_2 y 1 es común a las tres ecuaciones. Lo que nos conduce a abreviar el sistema:

$$\begin{array}{rcl}
 x_1: & -1 & -1 & 5 \\
 x_2: & -1 & -2 & 8 \\
 1: & 3 & 4 & -7 \\
 \hline
 & = x_3 & = x_4 & = u
 \end{array}$$

$$(x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4) \quad \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & -1 & 5 \\ \hline -1 & -2 & 8 \\ \hline 3 & 4 & -7 \\ \hline \end{array} \tag{12}$$

$$= x_3 \quad = x_4 \quad = u \text{ (máx)}$$

La fila distinguida corresponde a la línea 1 de la tabla.

Además, la solución básica es admisible porque todas las componentes son no negativas.

Siguiendo el procedimiento que se usó para armar la tabla, y reescribiendo:

$$\begin{array}{c} x_3 \\ x_2 \\ 1 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & 1 & -5 \\ \hline -1 & -1 & 3 \\ \hline 3 & 1 & 8 \\ \hline \end{array} \tag{23}$$

$$= x_1 \quad = x_4 \quad = u$$

¿Cuál sería la utilidad si hay que operar igual que para la tabla?

Que es posible esquematizar el procedimiento mediante la Transformación Pivote.

Sea (S) el sistema

$$\begin{aligned} ax + by + c &= z \\ dx + ey + f &= w. \end{aligned} \quad (S)$$

En forma esquemática, (S) se puede escribir

$$\begin{array}{cc} x & \begin{array}{|cc|} \hline a & d \\ \hline \end{array} \\ y & \begin{array}{|cc|} \hline b & e \\ \hline \end{array} \\ 1 & \begin{array}{|cc|} \hline c & f \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (xy)$$

$$\qquad \qquad \qquad = z \qquad = w$$

Como hemos visto, la operación que substituye z por x se efectúa resolviendo la primera ecuación en x y substituyendo dicha expresión de x en la segunda. (Por supuesto, suponemos que $a \neq 0$, por lo que lo anterior es correcto.)

Así obtenemos el sistema equivalente (S'):

$$\begin{aligned} \frac{1}{a}z + \left(-\frac{b}{a}\right)y + \left(-\frac{c}{a}\right) &= x \\ \frac{d}{a}z + \left(e - \frac{bd}{a}\right)y + \left(f - \frac{cd}{a}\right) &= w \end{aligned} \quad (S')$$

Esquemáticamente, (S') se escribe:

$$\begin{array}{cc|cc} z & 1/a & d/a & \\ y & -b/a & e - bd/a & \\ 1 & -c/a & f - cd/a & \end{array} \quad (zy)$$

$= x \qquad = w$

Puesto que se han intercambiado los papeles de x y z , el elemento a del esquema (xy) , que pertenece a la fila etiquetada con x y a la columna denominada z , se denomina *pivote*. Para describir la *transformación pivote* que convierte el esquema (xy) en el esquema (zy) , observamos que los elementos y las etiquetas del extremo se cambiaban de acuerdo con las reglas siguientes:

1. Reemplazar el pivote (no nulo) por su recíproco.
2. Dividir cada uno de los elementos de la fila del pivote por dicho pivote.
3. Dividir por el pivote (y cambiar de signo) los elementos restantes de la columna del mismo.
4. De cualquier otro elemento del esquema sustraer el producto de
 - a) el elemento de la misma columna que esté en la fila del pivote;
 - b) el elemento de la misma fila que esté en la columna del pivote, y
 - c) el recíproco del pivote.
5. Intercambiar entre sí las etiquetas al margen de la columna y de la fila del pivote, dejando las demás intactas.

Estas reglas se memorizan con gran facilidad estudiando la transformación pivote que se indica a continuación.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & \vdots & & \vdots \\ & & \vdots & & \vdots \\ x_k & \dots & p^* & \dots & q & \dots \\ & & \vdots & & \vdots \\ & & \vdots & & \vdots \\ x_l & \dots & r & \dots & s & \dots \\ & & \vdots & & \vdots \\ & & \vdots & & \vdots \end{array} & \xrightarrow[\text{ sobre } p^*]{\text{ por } p^*} & \begin{array}{ccccc} & & \vdots & & \vdots \\ & & \vdots & & \vdots \\ x_j & \dots & 1/p & \dots & q/p & \dots \\ & & \vdots & & \vdots \\ & & \vdots & & \vdots \\ x_i & \dots & -r/p & \dots & s - qr/p & \dots \\ & & \vdots & & \vdots \\ & & \vdots & & \vdots \end{array} \\ \dots = x_j \quad \dots = x_k \quad \dots & & \dots = x_h \quad \dots = x_l \quad \dots \end{array}$$

El pivote se indica por un asterisco (*).

Hagamos el ejemplo:

(12)				(23)			
x_1	-1*	-1	5	x_3	-1	1	-5
x_2	-1	-2	8	x_2	-1	-1	3
1	3	4	-7	1	3	1	8
$= x_3 \quad = x_4 \quad = u$				$= x_1 \quad = x_4 \quad = u$			

Empezando por el esquema (12) vemos que mediante una sucesión de transformaciones pivote es posible obtener los seis esquemas que dan las seis soluciones básicas del programa (II). Esto se lleva a cabo en la tabla 8.3. El pivote se indica por medio de un asterisco.

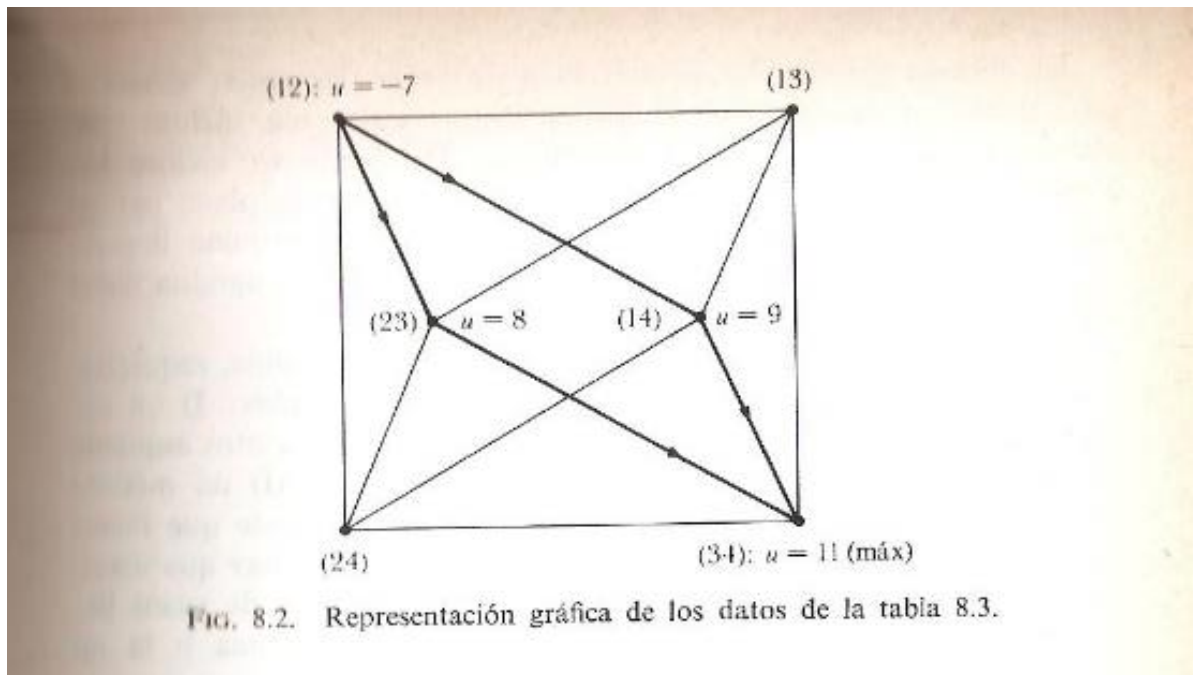
TABLA 8.3. Esquema del programa ejemplo (II) ($x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4, u = \max.$).

(12)				(23)			
x_1	-1*	-1	5	x_3	-1	1	-5
x_2	-1	-2	8	x_2	-1*	-1	3
1	3	4	-7	1	3	1	8
$= x_3 \quad = x_4 \quad = u$				$= x_1 \quad = x_4 \quad = u$			
(13)				(34)			
x_3	-1	2	-8	x_3	1*	-2	-2
x_1	-1	1*	-3	x_4	-1	1	-3
1	3	-2	17	1	1	2	11
$= x_2 \quad = x_4 \quad = u$				$= x_2 \quad = x_1 \quad = u$			
(24)				(14)			
x_2	1	-2*	-2	x_1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
x_4	1	-1	-5	x_4	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-4
1	-1	4	13	1	1	2	9
$= x_3 \quad = x_1 \quad = u$				$= x_3 \quad = x_2 \quad = u$			

Lo interesante es que, además, existe un método que permite evitar hacer todos los esquemas y llegar igual al óptimo: Es el método del SIMPLEX.

MÉTODO DEL SIMPLEX (Dantzig, 1947)

Hagamos un grafo de la tabla del ejemplo:



Cada nodo representa un esquema. Una línea une dos nodos sólo si son esquemas adyacentes (se puede pasar de un esquema a otro con una sola transformación pivote)

Si hubiese una manera de hacer el recorrido sin conocerlo de antemano, podríamos resolver con sólo dos transformaciones pivote...

Necesitaríamos:

- I) Un camino para pasar de admisible a admisible
- II) Que incremente u

Para ver qué necesitaremos en general, observemos qué ocurre cuando pivotamos sobre un esquema que sea admisible por columnas.

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ x_c \dots a^* \dots b \dots c \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \dots d \dots e \dots f \end{array} \xrightarrow[\text{sobre } a^* \neq 0]{\text{Pivótese}} \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ x_d \dots a' \dots b' \dots c' \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \dots d' \dots e' \dots f' \end{array}$$

$\dots = x_d \dots = x_c \dots = u(\text{máx}) \qquad \dots = x_c \dots = x_c \dots = u(\text{máx})$

Puesto que estamos suponiendo que el esquema de la izquierda es admisible por columnas, todos los elementos de la fila distinguida (salvo la f) son no negativos. Por consiguiente, $d \geq 0$ y $e \geq 0$, en particular. Suponemos que el pivote es $a \neq 0$.

Centramos la atención en primer lugar sobre la condición I antes indicada. La cual establece que el esquema transformado debe ser también admisible por columnas, de donde exigimos que

$$d' \geq 0 \tag{1}$$

y

$$e' \geq 0. \tag{2}$$

Puesto que, según las reglas para pivotar, $d' = -d/a$, exigiremos que

218

$-d/a \geq 0$ o, equivalentemente, $d/a \leq 0$. Esto se puede garantizar imponiendo que

$$a < 0. \tag{3}$$

Para satisfacer (2) debemos tener $e' = e - bd/a \geq 0$ o, equivalentemente, $e \geq bd/a$. Ahora, si $b \geq 0$, esto se cumplirá si se satisface (3), pues (3) nos asegura que $d/a \leq 0$. De ahí que $bd/a \leq 0 \leq e$, para $b \geq 0$. En caso contrario, si $b < 0$, observamos que $e \geq bd/a$ si y sólo si $e/b \leq d/a$. Así para garantizar en general que el sistema transformado es de nuevo admisible por columnas, debemos tener un pivote *negativo* e imponer que la razón d/a sea la *mayor* de todas las razones e/b en las que el denominador es negativo.

Prestemos ahora atención a la condición II, que especifica una mejora en la función objetivo que hay que maximizar. Esto se puede escribir

$$f' = f - dc/a \geq f \tag{4}$$

219

o, equivalentemente, $dc/a \leq 0$. Puesto que, nuevamente, (3) asegura que $d/a \leq 0$, $dc/a \leq 0$ se satisfarán si $c > 0$. Así, para no disminuir la función objetivo al pivotar sobre un esquema adyacente admisible por columnas, impondremos que el pivote pertenezca a una columna que tenga un elemento c positivo en la columna distinguida. (Obsérvese que si c o d es cero, $f' = f$, en cuyo caso la función objetivo no se mejora.)

Formalizamos seguidamente las afirmaciones de los párrafos anteriores:

Reglas de elección de pivote en el método del simplex por columna

- a) Empezar con un esquema admisible por columnas.
- b) Escoger un elemento (por ejemplo c) positivo de la columna distinguida [si no lo hay, ver e)].
- c) Colocar todos los elementos negativos (tales como $a, b, \dots$) en la fila de c y calcular las razones $d/a, e/b, \dots$. Seleccionar la mayor de dichas razones (supongamos que es d/a). Nota: Puesto que todas las razones son no positivas, la mayor será cero o la más próxima a cero. [Si no hay elementos negativos en la fila de c , ver f).]
- d) Pivotar sobre el a hallado más arriba, y volver de nuevo a b).
- e) Si no hay elementos positivos en la columna distinguida (salvo posiblemente la de abajo), el esquema ya nos da una solución básica óptima.
- f) Si hay una fila (exceptuando la fila distinguida) con un elemento positivo en la columna distinguida y un elemento no negativo en esta fila, entonces el programa maximizante no está acotado superiormente, es decir, no existe solución óptima.

Se puede abreviar con un diagrama de flujo:

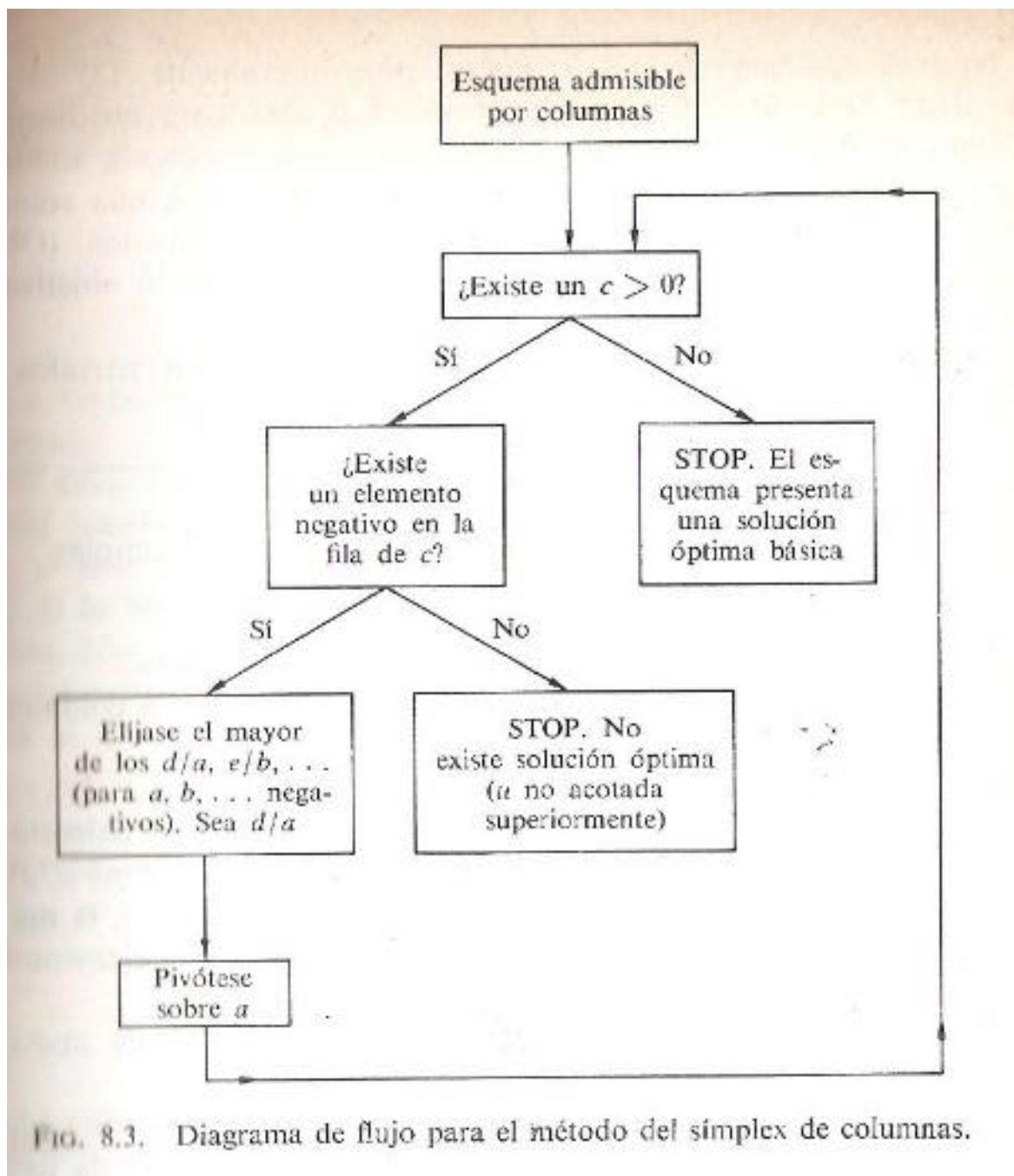


FIG. 8.3. Diagrama de flujo para el método del simplex de columnas.

Pasemos a nuestro ejercicio:

$$(x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4) \quad \begin{array}{c|cc|c} x_1 & -1^* & -1 & 5 \\ x_2 & -1 & -2 & 8 \\ \hline 1 & 3 & 4 & -7 \end{array} \quad (12)$$

$$= x_3 \quad = x_4 \quad = u(\text{máx})$$

La regla *a*) se satisface, puesto que (12) ya es admisible por columnas.

En cuanto a la regla *b*), observamos que tanto 5 como 8 son elementos positivos de la columna distinguida. Debemos elegir uno de ellos al azar. Sea $c = 5$. Ahora bien, los restantes elementos (ambos -1) de la fila de la c son negativos, de modo que calculamos las dos razones $3/-1$ y $4/-1$. Puesto que $-3 > -4$, pivotamos sobre el -1 del extremo superior izquierdo (o sea, en la columna del 3). Se indica el pivote por un asterisco. El resultado es

$$(x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4) \quad \begin{array}{c|cc|c} x_3 & -1 & 1 & -5 \\ x_2 & -1 & -1^* & 3 \\ \hline 1 & 3 & 1 & 8 \end{array} \quad (23)$$

$$= x_1 \quad = x_4 \quad = u(\text{máx})$$

Obsérvese que (23) es nuevamente admisible por columnas y que la u correspondiente se ha incrementado desde -7 a 8 .

Ahora sólo existe un elemento positivo en la columna distinguida (se exceptúa el 8). Así debemos tomar $c = 3$. De nuevo los elementos de la fila de la c (ambos -1) son negativos, de manera que calculamos las razones $3/-1$ y $1/-1$. Dado que $-1 > -3$, debemos tomar como nuevo pivote el -1 con asterisco. Pivotamos para obtener

$$(x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4) \quad \begin{array}{c|cc|c} x_3 & -2 & 1 & -2 \\ x_4 & 1 & -1 & -3 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 11 \end{array} \quad (34)$$

$$= x_1 \quad = x_2 \quad = u(\text{máx})$$

Nótese que el resultado sigue siendo admisible por columnas y que u se ha incrementado hasta 11 .

Como no hay positivos en la columna pasamos a la regla *e*) llegamos al óptimo.

Elegimos uno de los dos caminos cuando seleccionamos al azar $c=5$ en lugar de 8, al principio. Eso se puede mejorar.

Queda por ver cómo hacer cuando hay que minimizar u . Se puede apelar a la dualidad.

DUALIDAD

Es posible escribir un problema en filas

$$\begin{array}{rcccl}
 & & y_3 & y_4 & 1 \\
 (x_i \geq 0, & x_1 & a & b & c = -y_1 \\
 i = 1, 2, 3, 4) & x_2 & d & e & f = -y_2 \\
 & 1 & g & h & k = v(\text{mín})
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 (y_i \geq 0, \\
 i = 1, 2, 3, 4)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 = x_3 & = x_4 & = u(\text{máx})
 \end{array}$$

y existe un método simplex para llegar al mínimo de v pivotenado y minimizando la cantidad de pasos que son reglas:

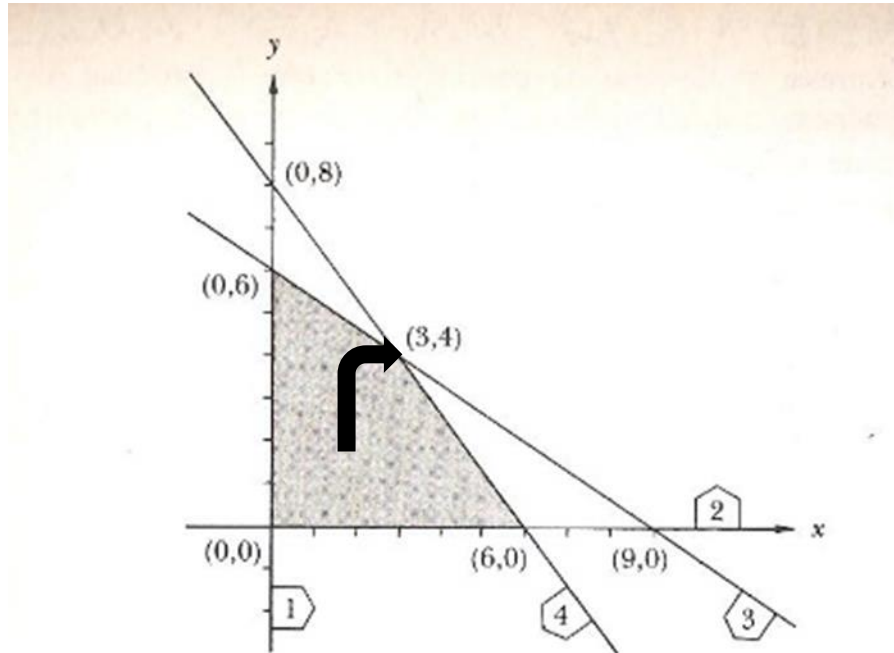
Reglas de elección del pivote en el método del simplex de filas

- a') Partir de un esquema admisible por filas.
- b') Elegir un elemento negativo en la fila distinguida (excluyendo el elemento de la derecha). Si no existe ninguno, véase e').
- c') Localicéense todos los elementos positivos en la columna que contiene el elemento negativo elegido en b') y divídase a cada uno por el correspondiente elemento de la columna distinguida. Elijase el mayor de estos cocientes. [Si no existe ninguno de tales elementos positivos, véase f').]
- d') Pivotar sobre el elemento positivo (denominador) de la fracción que dé el cociente máximo hallado en c') y volver al punto b').
- e') Si la elección requerida en b') no es posible es que el esquema ya presenta una solución óptima básica.
- f') Si no existe ningún elemento positivo como se requiere en c') el programa minimizante no está acotado superiormente, no tiene solución óptima.

El mínimo de v es el máximo de u .

Existen otros métodos, además del SIMPLEX.

PUNTOS INTERIORES (IP)



- Frisch (1955) no publicado
- Fiacco and MacCormak (1968) era para NLP; no servía para LP
- Kachiyan (1979) andaba peor que Simplex
- Karmarkar (1984) finalmente anda mejor (a veces)
- Meggido (1989) Logarithmic-barrier Method anduvo mejor que los primeros IP