

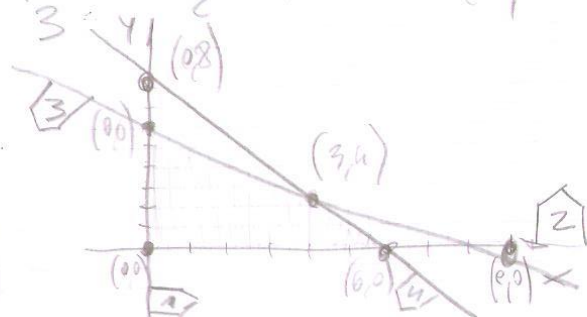
Sistemas de Inecuaciones Lineales

$$x \geq 0 \quad (1)$$

$$y \geq 0 \quad (2)$$

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y \leq 3 \quad (3)$$

$$\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y \leq 4 \quad (4)$$



x : normal $\frac{1}{3}$ carne
 $\frac{2}{3}$ cereal

y : extra $\frac{1}{2}$ carne
 $\frac{1}{2}$ cereal

stock 3 Tm carne

4 Tm cereal

¿Cuál es el objetivo?

Programación Lineal: un problema

Sea

$$x_1 \geq 0 \quad (1)$$

$$x_2 \geq 0 \quad (2)$$

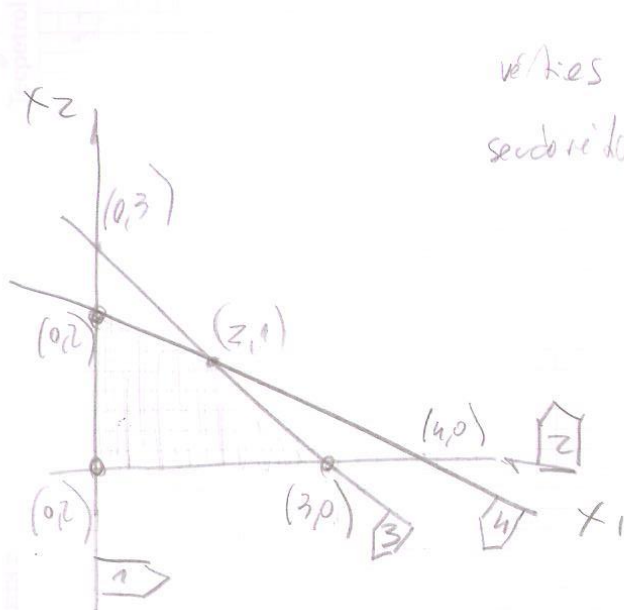
$$x_1 + x_2 \leq 3 \quad (3)$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4 \quad (4)$$

restricciones

$$u = 5x_1 + 8x_2 - 7 \quad (5) \quad \text{función objetivo}$$

maximizar u



vertices $(0,0)$ $(3,0)$ $(2,1)$ $(0,2)$
 secondary $(4,0)$ $(0,3)$

Vertex	$u = 5x_1 + 8x_2 - 7$
$(0,0)$	-7
$(3,0)$	8
$(2,1)$	11 (max)
$(0,2)$	9

$\text{Si } x_1 + x_2 \leq 3 \Rightarrow -x_1 - x_2 + 3 \geq 0$
 $\text{Si } x_1 + 2x_2 \leq 4 \Rightarrow -x_1 - 2x_2 + 4 \geq 0$

$x_3 = -x_1 - x_2 + 3$
 $x_4 = -x_1 - 2x_2 + 4$

$$\left\{ \begin{array}{l} -x_1 - x_2 + 3 = x_3 \\ -x_1 - 2x_2 + 4 = x_4 \\ 5x_1 + 8x_2 - 7 = u \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0 \\ \text{maximiser } u \end{array} \right.$$

e.g. $x_2 = 0 \neq x_3 = 0$

$-x_1 + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 3; x_4 = 1$
 $-x_1 + 4 = x_4$

$(x_1; x_2) = (0, 3)$ est un vertex admissible

$$x_1 = 0 \text{ y } x_3 = 0 \Rightarrow x_2 \text{ y } x_4$$

$$x_2 = 3; x_4 = -2$$

$$(x_1; x_2) = (0; 3) \text{ no es admisible}$$

$(x_1; x_2)$	x_1	x_2	x_3	x_4	Adm?	M
$(0, 0)$	0	0	3	4	Sí	-7
$(0, 3)$	0	3	0	-2	No	-
$(0, 2)$	0	2	1	0	Sí	9
$(3, 0)$	3	0	0	1	Sí	8
$(4, 0)$	4	0	-1	0	No	-
$(2, 1)$	2	1	0	0	Sí	11 (max)

Representación Ecuaciones y Método del PIVOTE

$$-x_1 - x_2 + 3 = x_3$$

$$-x_1 - 2x_2 + 4 = x_4$$

$$5x_1 + 8x_2 - 7 = M$$

$(-1) x_1$	$(-1) x_1$	$(5) x_1$
$(-1) x_2$	$(-2) x_2$	$(8) x_2$
$(+3) (1)$	$(+4) (1)$	$(-7) (1)$
x_3	x_4	M

ecuaciones

x_1
 x_2
 1

-1	-1	5
-1	-2	8
3	4	-7

x_3 x_4 M (max)

$$x_i \geq 0, i=1,2,3,4$$

X_3	-1	1	-5
X_2	-1	-1	3
1	3	1	8
	X_1	X_4	M

Transformación Pivote

$$ax + by + c = z$$

$$dx + ey + f = w$$

x	a	d
y	b	e
1	c	f
	z	w

$$a \neq 0$$

$$\frac{1}{a}z + \left(-\frac{b}{a}\right)y + \left(-\frac{c}{a}\right) = x$$

$$\frac{d}{a}z + \left(e - \frac{bd}{a}\right)y + \left(f - \frac{cd}{a}\right) = w$$

Reglas

1. Reemplazar pivote por su inverso
2. Dividir elementos de la fila por el pivote
3. Dividir y multiplicar de x_h elementos de la columna
4. De los otros x_k productos:
 - a) elemento mismo columna de fila pivote
 - b) " " fila "columna"
 - c) inverso pivote
5. Intercambiar el pivote

$\bar{z}$	$1/a$	d/a
y	$-b/a$	$e - \frac{bd}{a}$
1	$-c/a$	$f - \frac{cd}{a}$
	x	w

p	q
r	s
x_j	x_k

x_j	$1/p$	q/p
x_i	$-r/p$	$s - \frac{qr}{p}$
	x_h	x_k

$$\begin{array}{c}
 (12) \\
 \begin{array}{ccc|c}
 x_1 & -1^* & -1 & 5 \\
 x_2 & -1 & -2 & 8 \\
 1 & 3 & 4 & 7 \\
 \hline
 & x_3 & x_4 & M
 \end{array}
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{c}
 (23) \\
 \begin{array}{ccc|c}
 x_3 & -1 & 1 & -5 \\
 x_2 & -1^* & -2 & 3 \\
 1 & 3 & 1 & 8 \\
 \hline
 & x_1 & x_4 & M
 \end{array}
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{c}
 (13) \\
 \begin{array}{ccc|c}
 x_3 & -1 & 2 & -8 \\
 x_1 & -1 & 1^* & -3 \\
 1 & 3 & -2 & 17 \\
 \hline
 & x_2 & x_4 & M
 \end{array}
 \end{array}$$

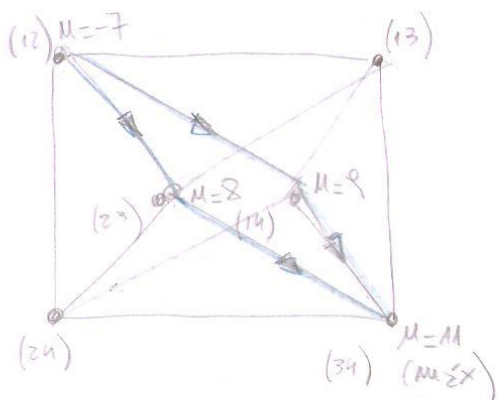
$$\begin{array}{c}
 (34) \\
 \begin{array}{ccc|c}
 x_3 & 1^* & -2 & -2 \\
 x_4 & -1 & 1 & -3 \\
 1 & 1 & 2 & 11 \\
 \hline
 & x_2 & x_1 & M
 \end{array}
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{c}
 (24) \\
 \begin{array}{ccc|c}
 x_2 & 1 & -2^* & -2 \\
 x_4 & 1 & -1 & -5 \\
 1 & -1 & 4 & 13 \\
 \hline
 & x_3 & x_1 & M
 \end{array}
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{c}
 (14) \\
 \begin{array}{ccc|c}
 x_1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\
 x_4 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -4 \\
 1 & 1 & 2 & 9 \\
 \hline
 & x_3 & x_2 & M
 \end{array}
 \end{array}$$

MÉTODO del SIMPLEX Dantzig (1947)

m ecuaciones y $m+n$ variables

$$\frac{(m+n)!}{m! n!}$$

soluciones básicas



I) Un camino pasar admisible $\rightarrow$ admisible

II) que incremente u

$$\begin{array}{c|ccc} & x_c & & \\ \hline & a & b & c \\ \hline 1 & d & e & f \\ \hline & x_d & x_e & u \end{array}$$



$$\begin{array}{c|ccc} & x_d & & \\ \hline & -a' & b' & c' \\ \hline 1 & d' & e' & f' \\ \hline & -x_c & -x_e & -u \end{array}$$

como es admisible

$$d \geq 0$$

$$e \geq 0$$

$$a \neq 0$$

por 1)

$$d' \geq 0$$

$$e' \geq 0$$

$$d' = -d/a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -d/a \geq 0 \text{ o } d/a \leq 0 \Rightarrow a < 0$$

$$e' \geq 0 \Rightarrow e = e - \frac{bd}{a} \geq 0 \Rightarrow e \geq \frac{bd}{a}$$

$$\text{si } b \geq 0 \text{ y como } a < 0 \Rightarrow \frac{bd}{a} \leq 0 \leq e \text{ por } b \geq 0$$

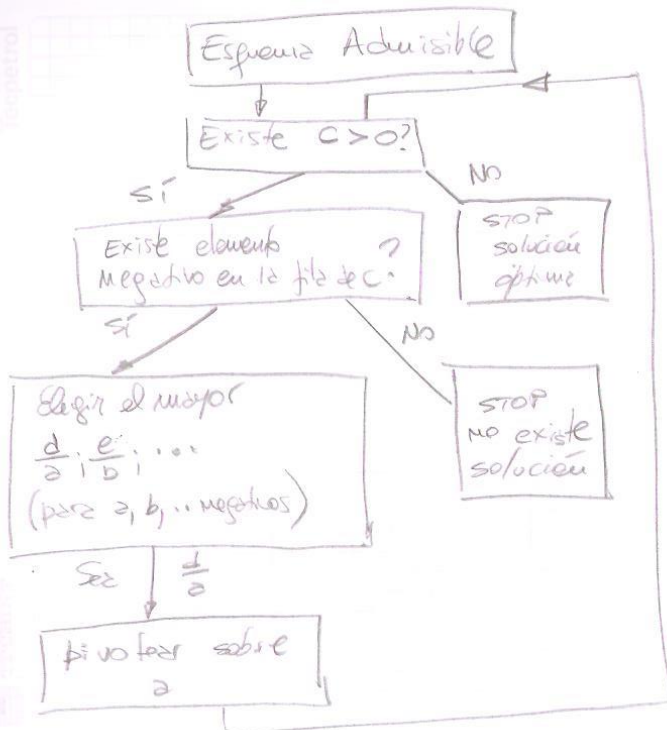
$$\text{si } b < 0 \quad e \geq \frac{bd}{a} \Leftrightarrow \frac{e}{b} \leq \frac{d}{a}$$

i) pivote negativo

ii) $\frac{d}{a}$ mayor a todas las $\frac{e}{b}$ en las que denominador negativo

$$\text{II) } f' = f - \frac{dc}{a} \geq f \text{ o } \frac{dc}{a} \leq 0$$

$$\text{como } \frac{d}{a} \leq 0 \Rightarrow \frac{dc}{a} \leq 0 \text{ si } c > 0$$



- Empieza por un esquema admisible
- Elegir un $C > 0$ de columna distinguida (si no es 0)
- Calcular todos los a, b, c negativos en la fila de C y calcular $d/a, e/b$ y seleccionar el mayor (si no hay negativos d)
- Pivotar sobre a y volver a b)
- Si no hay $C > 0$ en la columna distinguida: solución óptima
- No este método superiormente

x_1	-1*	-1	5
x_2	-1	-2	8
1	3	4	7
	x_3	x_4	M

(12) $\rightarrow$

x_3	-1	1	-5
x_2	-1	-1*	8
1	3	1	8
	x_1	x_4	M

x_3	-2	1	-2
x_4	1	-1	-3
1	2	1	11
	x_1	x_2	M

terminé

Dualidad

problema primal en filas

	y_3	y_4	1	
x_1	a	b	c	$= -y_1$
x_2	d	e	f	$= -y_2$
1	g	h	k	v (máx)
	x_3	x_4	u (máx)	

$$x_i \geq 0$$

$$i = 1, 2, 3, 4$$

$$y_i \geq 0$$

$$i = 1, 2, 3, 4$$

2) Partir de un esquema admisible por filas

b) elegir elemento negativo en la fila distinguida. Si no $\Rightarrow e)$

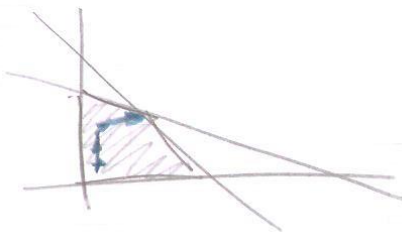
c) Localizar positivos en columna elegida en b) y dividir a cada uno por elemento de la columna distinguída. Elegir el mayor si no hay positivos $\Rightarrow f)$

d) Pivotar sobre denominador del mayor cociente hallado en c) y volver a b)

e) si b) no es posible $\Rightarrow$ solución óptima

f) si c) no es posible $\Rightarrow$ No hay solución óptima

- Puntos interiores (IPM)



- Frisch (1955) no publicado

- Fiacco and McCormick (1968) NLP

- Khachiyan (1978) análisis peor

- Karumkar (1984)

- Megiddo (1989) Logarithmic-barrier Method análisis mejor IPM