SISTEMA de DESIGUALDADES LINEALES

Una empresa productora de comida para perros produce dos tipos de alimentos, normal y extra. Una libra de normal consta de 1/3 libra de carne y 2/3 libras de cereales. Una libra de extra consta de igual cantidad de carne que de cereales. Supongamos que la empresa tiene un stock de 3 toneladas de carne y 4 toneladas de cereales. Deseamos encontrar el conjunto de todas las posibles combinaciones de normal y extra que pueden producirse con dicho stock disponible. Sean x e y el número de toneladas de normal y extra respectivamente que se producirán. Puesto que no puede producirse una cantidad negativa tenemos las hipótesis:

$$x \geq 0, \qquad (1)$$

$$y \geq 0. \qquad (2)$$

Las cantidades limitadas de carne y cereal imponen una restricción a la cantidad de comida para perro que se puede producir. Si se producen x toneladas de normal se necesitan $(1/3)x$ toneladas de carne; si se producen y toneladas de extra se necesitan $(1/2)y$ toneladas de carne. Puesto que se dispone de 3 toneladas de carne tenemos que

$$\tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{2}y \leq 3. \qquad (3)$$

Análogamente, necesitamos $(2/3)x + 1/2y$ toneladas de cereal para producir x e y toneladas de normal y extra respectivamente. Puesto que se dispone de 4 toneladas tenemos que

$$\tfrac{2}{3}x + \tfrac{1}{2}y \leq 4. \qquad (4)$$

Por tanto nuestro vector producido (x, y) debe satisfacer (1), (2), (3) y (4). Intentemos dibujar el conjunto solución del sistema de desigualdades lineales:

$$x \geq 0, \qquad (1)$$

$$y \geq 0, \qquad (2)$$

$$\tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{2}y \leq 3, \qquad (3)$$

$$\tfrac{2}{3}x + \tfrac{1}{2}y \leq 4. \qquad (4)$$

Cada desigualdad da lugar a un semiplano cerrado como se indica de la manera habitual en la figura 6.3. Hemos hallado las seis intersecciones de las cuatro rectas frontera. Por ejemplo el punto (0, 6) se obtiene al resolver (1) y (3) como ecuaciones.

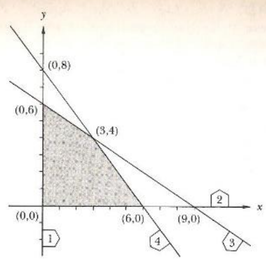

FIG. 6.3. Conjunto solución del sistema de desigualdades lineales estudiado en la sección 4.

Un punto con coordenadas (x, y) pertenece al grafo del sistema (1), (2), (3), (4), si y sólo si sus coordenadas satisfacen todas las desigualdades simultáneamente. El conjunto solución del sistema deberá ser pues la *intersección* de los cuatro semiplanos cerrados, es decir, los puntos que pertenecen a los cuatro semiplanos cerrados. Por tanto las desigualdades restringen (x, y) a la región encerrada en los segmentos que unen los vértices (0, 0), (0, 6), (3, 4) y (6, 0). Esta región aparece sombreada en la figura 6.3. Tal región se denomina un conjunto poliédrico convexo.

DEFINICION 6.13. Un *conjunto poliédrico convexo* es la intersección de un número finito de semiespacios cerrados. En otras palabras, es el conjunto solución de un sistema de desigualdades lineales.

La gráfica de la figura 6.3 expone convenientemente las posibles proporciones de normal y extra. Vemos a partir de la gráfica que fabricando 3 toneladas de normal y 4 toneladas de extra se agotará toda la carne y el cereal. La razón está en que el punto (3, 4) pertenece a la intersección de las rectas frontera de (3) y (4) y satisface por tanto estas desigualdades como ecuaciones.

Análogamente, el vértice (0, 6) satisface las desigualdades (1) y (3) como ecuaciones, pero dado que $(2/3)(0) + (1/2)(6) = 3 < 4$, la desigualdad (4) se satisface como una desigualdad estricta con un *margen* de 1 ($= 4 - 3$). Puesto que la desigualdad (4) surge al considerar la cantidad disponible de cereal, vemos que en la producción de 6 toneladas de extra queda por utilizar 1 tonelada de cereal.

Si la empresa fabrica solamente 2 toneladas de normal y 1 tonelada de extra, las cuatro desigualdades se satisfacen como desigualdades estrictas.

$$2 > 0,$$

$$1 > 0,$$

$$(1/3)(2) + (1/2)(1) = 7/6 < 3,$$

$$(2/3)(2) + (1/2)(1) = 11/6 < 4.$$

El punto (2, 1) no es obviamente un vértice del conjunto solución, no pertenece a ninguna recta frontera. Se denomina *interior* al conjunto solución.

En general, los vértices de conjuntos poliédricos bidimensionales se encuentran analizando pares de desigualdades y resolviéndolas como ecuaciones, si es posible. El vértice (3, 4) se halló de este modo. Por otra parte, el punto (0, 8) satisface las desigualdades (1) y (4) como ecuaciones, y (2) como desigualdad estricta, pero no satisface a (3). Por tanto (0, 8) no es un vértice del conjunto poliédrico convexo, puesto que ni tan sólo pertenece al conjunto. Análogamente (9, 0) no es tampoco un vértice a pesar de que pertenece a la intersección de dos rectas frontera. Por tanto, en particular si tres rectas frontera intersectan en tres puntos debe verificarse que las coordenadas de un punto que pertenece a dos rectas frontera satisfacen efectivamente todas las desigualdades restantes para poder asegurar que dicho punto es un vértice.

Tener cierta práctica en buscar vértices de conjuntos poliédricos convexos en el plano será útil para resolver gráficamente programas lineales. En el ejemplo anterior, el conjunto poliédrico convexo determinado por las desigualdades (1), (2), (3) y (4) es *acotado* (es decir, puede incluirse en un cuadrado suficientemente grande). En general ello no tiene por qué ocurrir. Por ejemplo, el primer cuadrante del plano tridimensional consta de todos los puntos cuyas coordenadas son no negativas. Es la intersección de los conjuntos solución de las desigualdades (1) y (2) de antes; por tanto será por definición un conjunto poliédrico convexo. Sin embargo, es obvio que no está acotado.

Encontraremos también sistemas de desigualdades lineales que tienen un conjunto de las soluciones vacío. Denominaremos a tales sistemas *incompatibles*, o bien diremos que las desigualdades son *incompatibles*.

En el capítulo siguiente nos ocuparemos de otro modelo lineal importante íntimamente relacionado con los juegos matriciales, a

PROGRAMACIÓN LINEAL

CAPÍTULO VIII

Transformaciones pivote y el algoritmo del símplex

1. INTRODUCCION

Con el fin de preparar la técnica que usaremos para operar con sistemas lineales de desigualdades y resolver programas lineales, examinamos ahora de cerca el método que se introdujo en el capítulo VII, sección 5.

Consideramos el programa lineal siguiente:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &\geq 0, && (1)\\ x_2 &\geq 0, && (2)\\ x_1 + x_2 &\leq 3, && (3)\\ x_1 + 2x_2 &\leq 4, && (4)\\ u &= 5x_1 + 8x_2 - 7, && (5) \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{I})$$

maximizar u.

En el ejercicio 15 del capítulo VI se pidió al lector que construyera la gráfica de la región admisible para las restricciones del programa (I). Debería haber obtenido el gráfico de la figura 8.1, usando el convenio que se ha establecido para indicar semiplanos cerrados.

La región admisible del programa (I) tiene cuatro vértices, (0, 0), (3, 0), (2, 1) y (0, 2), y hay dos seudovértices no admisibles, (4, 0) y (0, 3). Siendo acotada la región admisible, sabemos que la solución óptima del programa (I) puede hallarse en uno de los cuatro vértices. En la tabla 8.1 está tabulado el valor de la función objetivo u en cada vértice. Se indica el valor máximo.

Así puede obtenerse fácilmente la solución por métodos gráficos. Sin embargo, dado que el objetivo que perseguimos es desarrollar una técnica algebraica general para resolver programas lineales, transformamos, a continuación, el programa (I) y lo formulamos de un modo

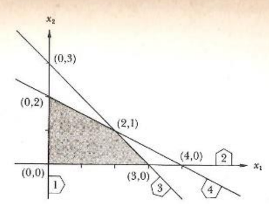

FIG. 8.1. Región admisible del programa (I).

más sistemático y útil, tal como hicimos en los programas (I) y (II) del capítulo VII. En primer lugar usamos las reglas de las desigualdades para escribir (3) y (4) en la forma equivalente

$$-x_1 - x_2 + 3 \geq 0, \qquad (3)$$

$$-x_1 - 2x_2 + 4 \geq 0, \qquad (4)$$

y posteriormente introducimos las variables de holgura $x_3 = -x_1 - x_2 + 3$ y $x_4 = -x_1 - 2x_2 + 4$. Volvemos ahora a escribir el programa (I) en la forma equivalente

$$\left.\begin{aligned} -x_1 - x_2 + 3 &= x_3, && (6)\\ -x_1 - 2x_2 + 4 &= x_4, && (7)\\ 5x_1 + 8x_2 - 7 &= u, && (8) \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{II})$$

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0, \qquad x_3 \geq 0, \qquad x_4 \geq 0,$$

maximizar u.

TABLA 8.1

Coordenadas de vértice	$u = 5x_1 + 8x_2 - 7$
(0, 0)	−7
(3, 0)	8
(2, 1)	11 (máx)
(0, 2)	9

Podemos ahora obtener todos los seudovértices igualando a cero dos de las cuatro x y resolviendo el sistema resultante. Si hacemos,

por ejemplo, $x_2 = 0$ y $x_3 = 0$ y resolvemos

$$-x_1 + 3 = 0,$$
$$-x_1 + 4 = x_4,$$

se obtiene $x_1 = 3$ y $x_4 = 1$. Las coordenadas $(x_1, x_2) = (3, 0)$ describen un seudovértice admisible. Obsérvese que $x_3 = 0$, pues (3, 0) pertenece a la recta frontera de la restricción (3) y $x_4 > 0$, ya que (3, 0) está contenido en el semiplano cerrado (4). De modo análogo, si tomamos $x_1 = 0$ y $x_3 = 0$ y resolvemos (II) para x_2 y x_4, obtenemos $x_2 = 3$ y $x_4 = -2$. El seudovértice así obtenido con $(x_1, x_2) = (0, 3)$ no es admisible (ver fig. 8.1).

Llegados a este punto, reemplazamos el nombre seudovértice, de inspiración geométrica, por el término algebraico de «solución básica». Por ejemplo, diremos que $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3, 0, 0, 1)$ o $(0, 3, 0, -2)$ son *soluciones básicas* de (II). Estas dos soluciones básicas corresponden, desde luego, a los seudovértices con $(x_1, x_2 = 3, 0)$ y $(0, 3)$ respectivamente. La palabra «solución» en «solución básica» es una elección desafortunada, puesto que se ha usado «solución» para describir soluciones admisibles u óptimas de programas lineales. No obstante, esta terminología es de uso común, y es más fácil adaptarse a ella que tratar de cambiarla. Nótese que una solución básica puede perfectamente ser no admisible; caso de que lo sea, se denominará *solución básica admisible*.

Recordamos que en la solución algebraica del modelo del capítulo VII era necesario determinar todas las soluciones básicas (llamadas allí seudovértices) antes de estar en condiciones de obtener la solución óptima. Esta necesidad nos forzó a hallar la tabla 7.1 del capítulo VII por métodos laboriosos. Aquí queremos describir cómo se determinan todas las soluciones básicas de modo más conveniente. En primer lugar, centrémonos en las igualdades del programa (II), no considerando de momento las condiciones de no negatividad. Observando el sistema lineal de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} -x_1 - x_2 + 3 &= x_3, && (6)\\ -x_1 - 2x_2 + 4 &= x_4, && (7)\\ 5x_1 + 8x_2 - 7 &= u, && (8) \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{III})$$

se aprecia que es particularmente fácil resolver (III) para las variables dependientes x_3, x_4 y u si se dan valores a las variables independientes x_1 y x_2. Pero consideremos cómo intentamos hallar una solución básica de (III). Igualamos a cero dos de las cuatro x. Así si $x_1 = x_2 = 0$, es inmediato resolver (III) para las restantes variables, simplemente despejando: $x_3 = 3$, $x_4 = 4$ y $u = 7$. ¡Esta es la clave, que puede parecer bien elemental, que nos permitirá simplificar el problema algebraico!

Para terminar, veamos cómo se podría haber encontrado la solución básica (3, 0, 0, 1) que corresponde a $x_2 = 0$ y $x_3 = 0$, usando la idea clave del párrafo anterior. La idea es *obtener un sistema de ecuaciones equivalente a (III) de tal forma que dos de las* x *que deben igualarse a cero sean las variables independientes del sistema.* En el sistema (III) las variables independientes son x_1 y x_2. Para obtener la solución básica (3, 0, 0, 1) imponemos que las variables independientes sean x_2 y x_3. Esto puede hacerse fácilmente cambiando x_3 por x_1 en (III). En el capítulo VI, sección 3, se consideró tal operación de substitución y se vio que efectuada en un sistema lineal de ecuaciones daba lugar a un sistema equivalente.

Substituyamos ahora x_3 por x_1 en (III). Puede hacerse puesto que el coeficiente de x_1 es no nulo en la ecuación (6), que expresa x_3 en términos de x_1 y x_2. Despejamos en primer lugar x_1 de (6), obteniendo:

$$-x_3 - x_2 + 3 = x_1.$$

Entonces, substituimos esta expresión de x_1 en (7) y (8) y obtenemos

$$\begin{aligned} x_3 - x_2 + 1 &= x_4, \\ -5x_3 + 3x_2 + 8 &= u. \end{aligned}$$

Así (III) se transforma en el sistema equivalente:

$$\begin{aligned} -x_3 - x_2 + 3 &= x_1, \\ x_3 - x_2 + 1 &= x_4, \\ -5x_3 + 3x_2 + 8 &= u. \end{aligned} \tag{IV}$$

Anulando las dos nuevas variables independientes x_2 y x_3, podemos obtener inmediatamente $x_1 = 3$, $x_4 = 1$, $u = 8$. Así se obtiene una solución básica $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3, 0, 0, 1)$ con su valor correspondiente $u = 8$, que es la que deseábamos. Análogamente, la solución básica (0, 3, 0, —2) que corresponde a $x_1 = 0$ y $x_3 = 0$ podría haberse obtenido substituyendo x_3 por x_2 en (III), obteniendo

$$\begin{aligned} -x_1 - x_3 + 3 &= x_2, \\ x_1 + 2x_3 - 2 &= x_4, \\ -3x_1 - 8x_3 + 17 &= u. \end{aligned}$$

para $x_1 = x_3 = 0$, fácilmente despejamos $x_2 = 3$, $x_4 = -2$ y $u = 17$.

En el programa ejemplo (II) hay $(4 \times 3)/2 = 6$ soluciones básicas potenciales. De hecho, se pueden obtener todas las seis. Animamos al lector para que adquiera algo más de experiencia usando la opera-

TABLA 8.2. Soluciones básicas del programa (II).

Solución básica	(x_1, x_2) *Coordenadas de la solución básica*	x_1	x_2	x_3	x_4	*¿Admisible?*	*u admisible*
[1, 2]	(0, 0)	0	0	3	4	Sí	—7
[1, 3]	(0, 3)	0	3	0	−2	No	—
[1, 4]	(0, 2)	0	2	1	0	Sí	9
[2, 3]	(3, 0)	3	0	0	1	Sí	8
[2, 4]	(4, 0)	4	0	−1	0	No	—
[3, 4]	(2, 1)	2	1	0	0	Sí	11

ción de substitución, expresando todos los seis pares posibles de x en términos de las dos restantes. La solución básica que corresponde a cada elección particular de un par de variables independientes se obtiene con facilidad, junto con el valor de u correspondiente. En la tabla 8.2 aparecen consignados los resultados. Indicamos encerrando entre corchetes al par de variables independientes que dan lugar a las soluciones básicas. Sólo en el caso de soluciones básicas admisibles indicamos los valores de u.

El lector deberá volver a la figura 8.1 y observar la correspondencia entre las seis soluciones básicas y los seis seudovértices, reseñados a lo largo de la primera y segunda columnas de la tabla 8.2. En esta tabla puede verse de nuevo que la solución del programa lineal es $(x_1, x_2) = (2, 1)$ y que max $u = 11$, pues 11 es el valor de u más elevado que aparece en la lista.

2. REPRESENTACION ESQUEMATICA Y METODO DEL PIVOTE

Si el lector se entretuvo en efectuar las operaciones de substitución conducentes a la información que se requiere para la elaboración de la tabla 8.2, habrá sentido el deseo de reducir el trabajo calculístico. Introducimos a continuación una forma esquemática de programas lineales, junto con una transformación pivote que se usa para pasar de una forma a otra equivalente. Estas formalizaciones no sólo reducirán el trabajo necesario para construir tablas como la 8.2, sino que sugerirán un camino para resolver programas lineales sin necesidad de tener que hallar *todas* las soluciones básicas.

Empezamos analizando de nuevo el sistema de ecuaciones lineales (III), de la sección 1, sin tener en cuenta por el momento las condiciones de no negatividad de (II). Por razones de conveniencia repetimos aquí (III):

$$\begin{aligned} -x_1 - x_2 + 3 &= x_3, \\ -x_1 - 2x_2 + 4 &= x_4, \\ 5x_1 + 8x_2 - 7 &= u. \end{aligned} \tag{III}$$

Apelando a la indulgencia del lector, volvemos a escribir las ecuaciones de (III) en *columna*

$$\begin{array}{ccc} (-1)x_1 & (-1)x_1 & (5)x_1 \\ (-1)x_2 & (-2)x_2 & (+8)x_2 \\ (+3)(1) & (+4)(1) & (-7)(1) \\ \hline = x_3 & = x_4 & = u \end{array}$$

De esta forma es evidente que la columna que contiene a x_1, x_2 y 1 es común a las tres ecuaciones. Lo que nos conduce a abreviar el sistema:

$$\begin{array}{rrrr} x_1: & -1 & -1 & 5 \\ x_2: & -1 & -2 & 8 \\ 1: & 3 & 4 & -7 \\ \hline & = x_3 & = x_4 & = u \end{array}$$

Podemos todavía expresar las ecuaciones de (III) simplemente con tomar el *producto escalar* del vector $(x_1, x_2, 1)$ por la columna correspondiente. Así, por ejemplo, la primera ecuación de (III) se puede escribir como $(x_1, x_2, 1) \cdot (-1, -1, 4) = x_3$.

Esto sugiere la siguiente *forma esquemática* del sistema de ecuaciones lineales (III):

$$\begin{array}{c|cc|c|} \cline{2-4} x_1 & -1 & -1 & 5 \\ x_2 & -1 & -2 & 8 \\ \cline{2-4} 1 & 3 & 4 & -7 \\ \cline{2-4} \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{= x_3} & \multicolumn{1}{c}{= x_4} & \multicolumn{1}{c}{= u} \end{array} \tag{12}$$

Indicamos el *esquema* por (12), ya que 1 y 2 son los subíndices de las *variables independientes* x_1 y x_2, que aparecen en el lado izquierdo. Por razones obvias, las variables x_3, x_4 y u, que aparecen abajo, se llaman *variables dependientes.* Dada la forma en que hemos construido el esquema, diremos que (12) representa el sistema (III) como *sistema en columnas.*

Aparte de las ecuaciones (III), el programa (II) incluye condicio-

nes sobre la no negatividad de las variables y la instrucción de maximizar la función objetivo. Se pueden introducir en el esquema como sigue

$$(x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3, 4) \quad \begin{array}{c|cc|c|} \cline{2-4} x_1 & -1 & -1 & 5 \\ x_2 & -1 & -2 & 8 \\ \cline{2-4} 1 & 3 & 4 & -7 \\ \cline{2-4} \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{= x_3} & \multicolumn{1}{c}{= x_4} & \multicolumn{1}{c}{= u\ (\text{máx})} \end{array} \tag{12}$$

Ahora el esquema, que seguimos denominando (12), representa el programa (II) como *programa en columnas.* Cuando queramos referirnos únicamente a las ecuaciones lineales, como haremos en el resto de la sección, se omitirá la información entre paréntesis. Cuando nos refiramos al programa lineal deberá incluirse la información entre paréntesis.

Recuérdese que el sistema (III), representado en (12), es tal que los valores de las variables dependientes x_3, x_4 y u pueden obtenerse con facilidad cuando se igualan a cero las variables independientes x_1 y x_2. Los valores $x_3 = 3$, $x_4 = 4$ y $u = -7$ así obtenidos se colocan ahora en la *fila distinguida* de (12), es decir, la fila que se designa por 1, a la izquierda. De este modo vemos que el esquema (12) indica de forma conveniente tanto la solución básica (0, 0, 3, 4), designada por [1, 2] en la tabla 8.2, como el valor $u = -7$ de la función objetivo que corresponde a esta solución básica. Desde luego, el valor de la función objetivo es el elemento de la esquina inferior derecha de (12). Obsérvese que (0, 0, 3, 4) es una solución básica *admisible*, ya que todas las componentes son no negativas. Diremos que un esquema es *admisible por columnas* si todos los elementos de la fila distinguida (salvo quizás el de la derecha) son no negativos. De ahí que un esquema admisible por columnas proporcione una solución básica admisible del programa maximizante (II).

El sistema (IV) de la sección 1, obtenido a partir del sistmea (III) cambiando x_3 por x_1, podría representarse asimismo en forma esquemática mediante

$$\begin{array}{c|cc|c|} \cline{2-4} x_3 & -1 & 1 & -5 \\ x_2 & -1 & -1 & 3 \\ \cline{2-4} 1 & 3 & 1 & 8 \\ \cline{2-4} \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{= x_1} & \multicolumn{1}{c}{= x_4} & \multicolumn{1}{c}{= u} \end{array} \tag{23}$$

El lector comprobará que el esquema (23) representa realmente al sistema (IV). Como antes, la solución básica $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3, 0, 0, 1)$ se obtiene trivialmente de (23) anulando x_1 y x_2. El valor correspondiente $u = 8$ se calcula también con facilidad.

Llegados a este punto, el lector podría, con razón, poner en cuestión la utilidad de representar sistemas de ecuaciones y programas mediante esquemas. La gran utilidad de esta notación se basa en la observación de que no sólo los *sistemas* (III) y (IV) pueden representarse de modo esquemático, sino que la *operación de substitución* que transforma el sistema (III) en el (IV) puede describirse esquemáticamente también como una *transformación pivote*, la cual convierte el esquema (12) en el esquema (23).

Para describir esta operación esencial sobre los esquemas volvemos al pequeño ejemplo que se ha usado antes (cap. VI, sec. 3) en la demostración del teorema de equivalencia para operaciones de substitución.

Sea (S) el sistema

$$\begin{aligned} ax + by + c &= z \\ dx + ey + f &= w. \end{aligned} \qquad (S)$$

En forma esquemática, (S) se puede escribir

$$\begin{array}{c|cc|} \hline x & a & d \\ y & b & e \\ 1 & c & f \\ \hline & = z & = w \end{array} \qquad (xy)$$

Como hemos visto, la operación que substituye z por x se efectúa resolviendo la primera ecuación en x y substituyendo dicha expresión de x en la segunda. (Por supuesto, suponemos que $a \neq 0$, por lo que lo anterior es correcto.)

Así obtenemos el sistema equivalente (S'):

$$\begin{aligned} \frac{1}{a}z + \left(-\frac{b}{a}\right)y + \left(-\frac{c}{a}\right) &= x \\ \frac{d}{a}z + \left(e - \frac{bd}{a}\right)y + \left(f - \frac{cd}{a}\right) &= w \end{aligned} \qquad (S')$$

Esquemáticamente, (S') se escribe:

$$\begin{array}{c|cc|} \hline z & 1/a & d/a \\ y & -b/a & e - bd/a \\ 1 & -c/a & f - cd/a \\ \hline & = x & = w \end{array} \qquad (zy)$$

Puesto que se han intercambiado los papeles de x y z, el elemento a del esquema (xy), que pertenece a la fila etiquetada con x y a la columna denominada z, se denomina *pivote*. Para describir la *transformación pivote* que convierte el esquema (xy) en el esquema (zy), observamos que los elementos y las etiquetas del extremo se cambiaban de acuerdo con las reglas siguientes:

1. Reemplazar el pivote (no nulo) por su recíproco.
2. Dividir cada uno de los elementos de la fila del pivote por dicho pivote.
3. Dividir por el pivote (y cambiar de signo) los elementos restantes de la columna del mismo.
4. De cualquier otro elemento del esquema sustraer el producto de
   a) el elemento de la misma columna que esté en la fila del pivote;
   b) el elemento de la misma fila que esté en la columna del pivote, y
   c) el recíproco del pivote.
5. Intercambiar entre sí las etiquetas al margen de la columna y de la fila del pivote, dejando las demás intactas.

Estas reglas se memorizan con gran facilidad estudiando la transformación pivote que se indica a continuación.

$$\begin{array}{c|ccccc|} \hline & & \vdots & & \vdots & \\ x_k & \cdots & p^* & \cdots & q & \cdots \\ & & \vdots & & \vdots & \\ x_i & \cdots & r & \cdots & s & \cdots \\ & & \vdots & & \vdots & \\ \hline \cdots & & = x_j & \cdots & = x_k & \cdots \end{array} \xrightarrow[\text{sobre } p \neq 0]{\text{Pivótese}} \begin{array}{c|ccccc|} \hline \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ x_j & \cdots & 1/p & \cdots & q/p & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ x_i & \cdots & -r/p & \cdots & s - qr/p & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \hline & \cdots & = x_h & \cdots & = x_k & \cdots \end{array}$$

El pivote se indica por un asterisco (*).

Vemos como ejemplo que el esquema (12) se transforma en el esquema (23) pivotando sobre —1 indicado de acuerdo con las reglas 1, 2, 3, 4 y 5.

$$\overset{(12)}{\begin{array}{c|cc|c|} \hline x_1 & -1^* & -1 & 5 \\ x_2 & -1 & -2 & 8 \\ \hline 1 & 3 & 4 & -7 \\ \hline & = x_3 & = x_4 & = u \end{array}} \longrightarrow \overset{(23)}{\begin{array}{c|cc|c|} \hline x_3 & -1 & 1 & -5 \\ x_2 & -1 & -1 & 3 \\ \hline 1 & 3 & 1 & 8 \\ \hline & = x_1 & = x_4 & = u \end{array}}$$

Empezando por el esquema (12) vemos que mediante una sucesión de transformaciones pivote es posible obtener los seis esquemas que dan las seis soluciones básicas del programa (II). Esto se lleva a cabo en la tabla 8.3. El pivote se indica por medio de un asterisco.

TABLA 8.3. Esquema del programa ejemplo (II) ($x_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, $u = \max.$).

$$\overset{(12)}{\begin{array}{c|cc|c|} \hline x_1 & -1^* & -1 & 5 \\ x_2 & -1 & -2 & 8 \\ \hline 1 & 3 & 4 & -7 \\ \hline & = x_3 & = x_4 & = u \end{array}} \longrightarrow \overset{(23)}{\begin{array}{c|cc|c|} \hline x_3 & -1 & 1 & -5 \\ x_2 & -1^* & -1 & 3 \\ \hline 1 & 3 & 1 & 8 \\ \hline & = x_1 & = x_4 & = u \end{array}}$$

$$\swarrow$$

$$\overset{(13)}{\begin{array}{c|cc|c|} \hline x_3 & -1 & 2 & -8 \\ x_1 & -1 & 1^* & -3 \\ \hline 1 & 3 & -2 & 17 \\ \hline & = x_2 & = x_4 & = u \end{array}} \longrightarrow \overset{(34)}{\begin{array}{c|cc|c|} \hline x_3 & 1^* & -2 & -2 \\ x_4 & -1 & 1 & -3 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 11 \\ \hline & = x_2 & = x_1 & = u \end{array}}$$

$$\swarrow$$

$$\overset{(24)}{\begin{array}{c|cc|c|} \hline x_2 & 1 & -2^* & -2 \\ x_4 & 1 & -1 & -5 \\ \hline 1 & -1 & 4 & 13 \\ \hline & = x_3 & = x_1 & = u \end{array}} \longrightarrow \overset{(14)}{\begin{array}{c|cc|c|} \hline x_1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ x_4 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -4 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 9 \\ \hline & = x_3 & = x_2 & = u \end{array}}$$

(Para adquirir soltura en el método del pivote, se recomienda al lector que copie *alguno* de los esquemas de la tabla 8.3, cierre el libro, y reproduzca por sí mismo los esquemas de la tabla 8.3. Puede comprobarse fácilmente el trabajo realizado comparándolo con la tabla 8.3.)

Obsérvese que desde el punto de vista aritmético es más simple pivotar sobre una unidad (es decir, 1 o —1). Por esta razón, pospondremos al máximo el pivotaje sobre elementos no unitarios. Nótese también cuán fácil es obtener los datos de la tabla 8.2 a partir de la tabla 8.3, simplemente, anulando las variables independientes y despejando los valores correspondientes de las dependientes.

La línea horizontal (dejando aparte la *fila distinguida*, etiquetada por 1) y la vertical (salvo la *columna distinguida* etiquetada con una u) se incluyen en cada esquema para recordar que no deseamos pivotar sobre esta fila o columna. La razón de esto es que queremos conservar el 1 «independiente» y la u «dependiente». (Más tarde veremos otras razones para dejar de lado esta columna y esta fila.)

Es importante observar que una transformación pivote organiza convenientemente la aritmética necesaria para efectuar una operación de substitución sobre el sistema lineal de ecuaciones representado por un esquema. Puesto que una operación de substitución no altera el conjunto solución de un sistema, tampoco lo hace una transformación pivote. Por este motivo decimos que todos los esquemas de la tabla 8.3 son equivalentes, representan simplemente el mismo sistema de formas diferentes.

Las otras dos operaciones que no cambian conjuntos solución de sistemas lineales de ecuaciones tienen también sus equivalencias esquemáticas. Por ejemplo, a la permutación de ecuaciones corresponde la permutación de dos columnas del esquema *junto con las etiquetas*.

Así,

$$\begin{array}{c|cc|c|} \hline x_3 & 1 & -2 & -2 \\ x_4 & -1 & 1 & -3 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 11 \\ \hline & = x_2 & = x_1 & = u \end{array} \quad \text{es equivalente a} \quad \begin{array}{c|cc|c|} \hline x_3 & -2 & 1 & -2 \\ x_4 & 1 & -1 & -3 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 11 \\ \hline & = x_1 & = x_2 & = u \end{array}$$

Cambiar el orden en que están escritos los términos corresponde a cambiar el orden de las filas de un esquema *junto con las etiquetas*.

De este modo

x_3	-1	1	-5
x_2	-1	-1	3
1	3	1	8
	$= x_1$	$= x_4$	$= u$

es equivalente a

x_2	-1	-1	3
x_3	-1	1	-5
1	3	1	8
	$= x_1$	$= x_4$	$= u$

En la sección siguiente veremos cómo las reglas para pivotar sugieren exactamente un modo de llegar a una solución óptima (si la hay) sin tener que encontrar *todos* los esquemas que corresponden a las soluciones básicas.

3. EL METODO DEL SIMPLEX PARA PROGRAMAS EN COLUMNA

La evaluación de las soluciones básicas de un programa razonablemente amplio comportaría usualmente una acumulación de trabajo imposible de realizar. Un programa de n ecuaciones y $m + n$ variables (excluyendo la función objetivo) tiene potencialmente $(m + n)!/m!n!$ soluciones básicas. Incluso con la ayuda de los modernos ordenadores digitales no existe seguridad de poder resolver un programa más extenso empleando un tiempo de ordenador razonable si se tienen que examinar todas las soluciones básicas.

Lo que hace falta es un medio de seleccionar un número mucho más pequeño de soluciones básicas a evaluar de tal forma que conduzcan con toda seguridad a una solución óptima si existe, o que en caso contrario indique que no hay solución. Una posibilidad la constituye el ingenioso método del simplex, que fue ideado por Dantzig en 1947.

Volvamos a analizar la tabla 8.3 con el fin de buscar posibles claves que puedan conducirnos a descubrir el método del simplex.

Cada uno de los seis esquemas equivalentes de la tabla 8.3 muestra una solución básica al programa (II). De los seis, cuatro son admisibles, y dos no lo son. Puede dar más información analizar algunos de los datos de la tabla 8.3 mediante un gráfico (fig. 8.2).

En nuestro gráfico, cada *nodo* representará un esquema. Una *línea* unirá dos nodos si y sólo si es posible ir desde el esquema representado por un nodo al representado por el otro mediante una única transformación pivote. (En tal caso los esquemas y los nodos se llamarán *adyacentes*.) Por supuesto, si se puede pivotar del esquema A

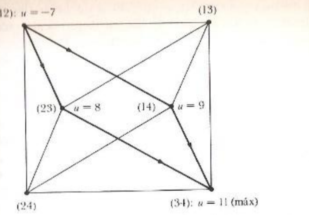

FIG. 8.2. Representación gráfica de los datos de la tabla 8.3.

al esquema B, se puede también hacer otro tanto del esquema B al esquema A. Por ejemplo, los esquemas (12) y (23) son adyacentes, mientras que los esquemas (12) y (34) no lo son. Las posiciones de los nodos del gráfico de la figura 8.2 son totalmente arbitrarios.

En la figura 8.2 los nodos se han designado igual que los esquemas que representan. Los valores de la función objetivo se indican solamente en los nodos admisibles. Se representan con trazo grueso las líneas que unen nodos que representan soluciones básicas admisibles. En las líneas gruesas una flecha indica el sentido creciente de la u. Estas flechas apuntan hacia el valor máximo de u, $u = 11$.

Nótese que empezando por la solución básica admisible (12) dada inicialmente existen dos caminos conducentes a la solución óptima, representada por el nodo (34). Estos caminos, a saber: $(12) \to (14) \to (34)$ y $(12) \to (23) \to (34)$, pasan ambos por nodos que representan esquemas en columna admisibles. Sería desde luego muy agradable si pudiéramos hacer esto en general, es decir, *empezar por un esquema admisible en columna y pasar sólo a través de esquemas admisibles en columna hasta llegar a un esquema que o bien indique una solución óptima o bien nos diga que no la hay*. Si pudiéramos hacer esto en general, podríamos de esta forma eliminar de entrada todos los esquemas no admisibles. Por supuesto, si el ejemplo es estándar (y lo es), un método que nos permitiría empezar en (12) e ir a (14) o a (23), pero no a ambos, haría posible dejar de considerar (23) o (14). De este modo si dispusiéramos de reglas que nos permitieran escoger uno de los dos caminos de trazo grueso que se indican en (12) *sin conocer el gráfico de la figura 8.2*, podríamos reducir nuestro trabajo al simple cálculo de dos esquemas (en vez de los cinco restantes) y llegar todavía a la solución óptima de nuestro ejemplo.

El método del símplex proporciona de hecho las reglas generales para trazar un camino paso a paso en la forma deseada, incluso aunque nuestro «plano» sea muy incompleto. Por supuesto, incluso hablando figurativamente, sólo nos hace falta construir un plano parcial sobre la marcha, conociendo siempre que en último término llegaremos sanos y salvos al destino, a la solución óptima del programa lineal o al conocimiento de que no existe solución.

Dado para empezar un esquema en columna admisible, requeriremos tres cosas a partir de las reglas del método símplex: I) un camino para pasar de un esquema admisible en columna a otro esquema adyacente que también sea admisible por columnas; II) un método para pasar al esquema admisible por columnas adyacente que incremente, si es posible, el valor de la función objetivo que hay que maximizar, y III) una garantía de que en un número finito de pasos llegaremos a un esquema que indique una solución óptima o la no existencia de tal solución.

Para ver qué necesitaremos en general, observemos qué ocurre cuando pivotamos sobre un esquema que sea admisible por columnas.

$$
\begin{array}{c|ccccc|c}
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
x_c & \dots & a^* & \dots & b & \dots & c \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\hline
1 & \dots & d & \dots & e & \dots & f \\
\end{array}
\xrightarrow[\text{sobre } a \neq 0]{\text{Pivótese}}
\begin{array}{c|ccccc|c}
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
x_d & \dots & a' & \dots & b' & \dots & c' \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\hline
1 & \dots & d' & \dots & e' & \dots & f' \\
\end{array}
$$

$$\dots = x_d \; \dots = x_e \dots = u(\text{máx}) \qquad\qquad \dots = x_c \; \dots = x_e \dots = u(\text{máx})$$

Puesto que estamos suponiendo que el esquema de la izquierda es admisible por columnas, todos los elementos de la fila distinguida (salvo la f) son no negativas. Por consiguiente, $d \geq 0$ y $e \geq 0$, en particular. Suponemos que el pivote es $a \neq 0$.

Centramos la atención en primer lugar sobre la condición I antes indicada. La cual establece que el esquema transformado debe ser también admisible por columnas, de donde exigimos que

$$d' \geq 0 \tag{1}$$

y

$$e' \geq 0. \tag{2}$$

Puesto que, según las reglas para pivotar, $d' = -d/a$, exigiremos que

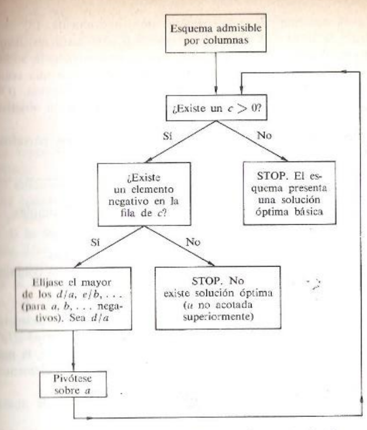

FIG. 8.3. Diagrama de flujo para el método del símplex de columnas.

$-d/a \geq 0$ o, equivalentemente, $d/a \leq 0$. Esto se puede garantizar imponiendo que

$$a < 0. \tag{3}$$

Para satisfacer (2) debemos tener $e' = e - bd/a \geq 0$ o, equivalentemente, $e \geq bd/a$. Ahora, si $b \geq 0$, esto se cumplirá si se satisface (3), pues (3) nos asegura que $d/a \leq 0$. De ahí que $bd/a \leq 0 \leq e$, para $b \geq 0$. En caso contrario, si $b < 0$, observamos que $e \geq bd/a$ si y sólo si $e/b \leq d/a$. Así para garantizar en general que el sistema transformado es de nuevo admisible por columnas, debemos tener un pivote *negativo* e imponer que la razón d/a sea la *mayor* de todas las razones e/b en las que el denominador es negativo.

Prestemos ahora atención a la condición II, que especifica una mejora en la función objetivo que hay que maximizar. Esto se puede escribir

$$f' = f - dc/a \geq f \tag{4}$$

o, equivalentemente, $dc/a \leq 0$. Puesto que, nuevamente, (3) asegura que $d/a \leq 0$, $dc/a \leq 0$ se satisfarán si $c > 0$. Así, para no disminuir la función objetivo al pivotar sobre un esquema adyacente admisible por columnas, impondremos que el pivote pertenezca a una columna que tenga un elemento c *positivo* en la columna distinguida. (Obsérvese que si c o d es cero, $f' = f$, en cuyo caso la función objetivo no se mejora.)

Formalizamos seguidamente las afirmaciones de los párrafos anteriores:

Reglas de elección de pivote en el método del símplex por columna

a) Empezar con un esquema admisible por columnas.

b) Escoger un elemento (por ejemplo *c*) *positivo* de la columna distinguida [si no lo hay, ver *e*)].

c) Colocar todos los elementos *negativos* (tales como $a, b, \ldots$) en la fila de c y calcular las razones $d/a, e/b, \ldots$ Seleccionar la mayor de dichas razones (supongamos que es d/a). Nota: Puesto que todas las razones son no positivas, la mayor será cero o la más próxima a cero. [Si no hay elementos negativos en la fila de c, ver *f*).]

d) Pivotar sobre el a hallado más arriba, y volver de nuevo a *b*).

e) Si no hay elementos positivos en la columna distinguida (salvo posiblemente la de abajo), el esquema ya nos da una solución básica óptima.

f) Si hay una fila (exceptuando la fila distinguida) con un elemento positivo en la columna distinguida y un elemento no negativo en esta fila, entonces el programa maximizante no está acotado superiormente, es decir, no existe solución óptima.

Las reglas indicadas más arriba constituyen un *método del símplex* para la solución de programas maximizantes en la forma de un esquema representando un sistema admisible por columnas con variables no negativas (salvo u). Se podrían abreviar estas reglas mediante el llamado «diagrama de flujo» de la figura 8.3.

Antes de discutir estas reglas, apliquémoslas, a efectos de ilustración, a nuestro programa (II), empezando por el esquema (12) admisible por columnas que se obtuvo inicialmente estableciendo el programa

$(x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3, 4)$ (12)

x_1	-1^*	-1	5
x_2	-1	-2	8
1	3	4	-7
	$= x_3$	$= x_4$	$= u$(máx)

La regla *a*) se satisface, puesto que (12) ya es admisible por columnas.

En cuanto a la regla *b*), observamos que tanto 5 como 8 son elementos positivos de la columna distinguida. Debemos elegir uno de ellos al azar. Sea $c = 5$. Ahora bien, los restantes elementos (ambos -1) de la fila de la c son negativos, de modo que calculamos las dos razones $3/-1$ y $4/-1$. Puesto que $-3 > -4$, pivotamos sobre el -1 del extremo superior izquierdo (o sea, en la columna del 3). Se indica el pivote por un asterisco. El resultado es

$(x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3, 4)$ (23)

x_3	-1	1	-5
x_2	-1	-1^*	3
1	3	1	8
	$= x_1$	$= x_4$	$= u$(máx)

Obsérvese que (23) es nuevamente admisible por columnas y que la u correspondiente se ha incrementado desde -7 a 8.

Ahora sólo existe un elemento positivo en la columna distinguida (se exceptúa el 8). Así debemos tomar $c = 3$. De nuevo los elementos de la fila de la c (ambos -1) son negativos, de manera que calculamos las razones $3/-1$ y $1/-1$. Dado que $-1 > -3$, debemos tomar como nuevo pivote el -1 con asterisco. Pivotamos para obtener

$(x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3, 4)$ (34)

x_3	-2	1	-2
x_4	1	-1	-3
1	2	1	11
	$= x_1$	$= x_2$	$= u$(máx)

Nótese que el resultado sigue siendo admisible por columnas y que u se ha incrementado hasta 11.

Ya que no existe ningún elemento positivo (aparte de 11) en la columna distinguida, la regla *b*) nos dice que vayamos a la regla *e*). Así hemos llegado a la solución básica óptima mediante dos transformaciones pivote siguiendo el método del símplex por columnas.

Comparando el resultado con el gráfico de la figura 8.2, vemos que hemos tomado el camino más pesado $(12) \to (23) \to (34)$ para llegar a la solución óptima. Esto se sigue de la elección hecha al principio aplicando la regla *b*): escogimos arbitrariamente $c = 5$. La otra elección posible habría sido $c = 8$, en cuyo caso la regla *c*) nos dice que tenemos que pivotar sobre -2 (dado que $4/-2 > 3/-1$). El lector debería hacerlo para cerciorarse de que la elección alternativa $c = 8$ conduciría a un camino alternativo que partiría de (12) y llegaría, a través de (14), a (34).

En este pequeño ejemplo no importaba la elección de c inicial ($c = 8$ o $c = 5$). El método del símplex en los dos casos permite llegar en dos pasos exactamente a la solución óptima. En ejemplos más complicados puede haber perfectamente caminos más cortos o más largos para llegar (si existe) a la solución óptima, dependientes en parte de las elecciones que se hacen para c. El lector puede sorprenderse al enterarse de que a pesar de la importancia que tiene en programas largos la elección eficiente de c que conduzca a un número mínimo de pivotajes necesarios para obtener la solución, no se conoce mucho a nivel teórico cómo hacer tales elecciones de forma conveniente. Sin embargo, puesto que todos los ejemplos y ejercicios de este texto son programas pequeños, el lector no se verá demasiado abrumado en decidir cuál c elige en el caso en que sea posible elegir entre varios elementos positivos.

Volvemos ahora al análisis de las reglas del método del símplex por columnas para ver qué hemos conseguido y qué falta todavía por hacer.

En primer lugar notamos que *a*) exige empezar con un esquema admisible por columnas. (Esto es algo análogo a la instrucción inicial en una receta clásica de pavo asado, «Primero vaya usted a cazar y mate un pavo...».) Veremos que la formulación de un programa maximizante conduce con frecuencia a un esquema que es inicialmente admisible por columnas. Esto es lo que ocurría en el esquema (12) de nuestro programa ejemplo, y así será para la mayoría de ejercicios del final del capítulo. En el próximo capítulo discutiremos brevemente qué se puede hacer si el esquema inicial que representa el programa maximizante *no* es admisible por columnas. También en el próximo capítulo trataremos el caso de un programa minimizante. Hasta aquí hemos considerado un método del símplex sólo para programas maximizantes.

En segundo lugar, observamos que las reglas *a*), *b*), *c*) y *d*) se cons-

truyeron para cumplir las condiciones I y II anteriores. De ahí que empiecen de hecho con un esquema admisible por columnas y pivoteen hacia un esquema adyacente admisible por columnas, sin que decrezca el valor de la función objetivo que corresponde a las dos soluciones básicas presentadas por los dos esquemas adyacentes.

Finalmente, debemos ocuparnos de la condición III. Si ninguno de los elementos de la fila distinguida (excepto posiblemente el elemento de la derecha) puede pasar a valer cero al pivotar, es fácil probar que el algoritmo finaliza al cabo de un número finito de pasos. Es decir, se alcanza el «fin» en el diagrama de flujo después de atravesar el circuito externo sólo un número finito de veces (véase fig. 8.3). Por otra parte, si aparece un cero al pivotar, podría ocurrir que no se incrementara el valor de la función objetivo, y surgiría el peligro de que una elección sistemática de pivotes condujera a un «ciclo» sin fin, dando vueltas al circuito externo de la figura 8.3, sin parar. Esta posibilidad, debida a lo que se conoce con el nombre de *degeneración*, será examinada más adelante. Afortunadamente, en la práctica se pueden evitar estos ciclos sin fin evitando una elección *sistemática* del pivote en el caso de degeneración o, en programas pequeños, manteniéndose en los esquemas ya probados, y sin efectuar repeticiones.

La puesta a punto de un algoritmo para resolver programas lineales, junto con las afirmaciones no justificadas de *e*) y *f*), se establecerá rigurosamente en el capítulo X.

EJERCICIOS DEL CAPITULO VIII

1. Transformar el esquema (24) de la tabla 8.3 en el esquema que tiene a x_3 y a x_4 como etiquetas independientes. Comparar el resultado con el esquema (34) de la tabla 8.3.

2. Efectúese una transformación pivote en el esquema (12) de la tabla 8.3 para obtener el esquema (14), y compruébese el resultado mediante la tabla 8.3.

3. En la tabla 8.3 el esquema (13) se transforma en el esquema (34) con un paso pivote. Efectúese la transformación pivote que convierte (34) en (13).

4. Sea A el esquema

x_1	a^*	b	c	d
x_2	e	f	g	h
1	i	j	k	l
	$=x_3$	$=x_4$	$=x_5$	$=u$

, $a \neq 0$,

y sea B el esquema transformado de A mediante la transformación pivote indicada. Demuéstrese que existe una única transformación pivote que convierte B en A.

DUALIDAD

EL METODO DEL SIMPLEX PARA PROGRAMAS EN FILAS

Para hallar una solución óptima al programa dual (*) de la sección anterior estamos motivados, por analogía, a emplear operaciones de substitución en las ecuaciones del sistema lineal de (*). No es sorprendente que una operación de substitución en el sistema lineal de (*) sea representada por una transformación pivote apropiada en el programa en filas del esquema (12), que representa (*).

Con el fin de ver cómo se transforman los coeficientes de un sistema en filas mediante una operación de substitución, consideremos primero un ejemplo con coeficientes literales en lugar de numéricos. El esquema siguiente muestra un programa en filas sencillo, junto con su correspondiente programa dual en columnas.

$$
\begin{array}{ccc|cc|cl}
 & & y_3 & y_4 & 1 & & \\
\hline
(x_i \geq 0, & x_1 & a & b & c & = -y_1 & (y_i \geq 0, \\
i = 1, 2, 3, 4) & x_2 & d & e & f & = -y_2 & i = 1, 2, 3, 4) \\
\hline
 & 1 & g & h & k & = v\,(\text{mín}) & \\
\hline
 & & = x_3 & = x_4 & = u\,(\text{máx}) & &
\end{array}
$$

Si $a \neq 0$ el sistema en filas (R)

$$
\begin{aligned}
ay_3 + by_4 + c &= -y_1, \\
dy_3 + ey_4 + f &= -y_2, \\
gy_3 + hy_4 + k &= v,
\end{aligned}
\tag{R}
$$

puede transformarse en el siguiente sistema en filas equivalente (R′) despejando y_3 en función de y_1 del modo habitual (se despeja y_3 de la primera ecuación y se substituye la expresión obtenida en las demás ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{a}\right)y_1 + \left(\frac{b}{a}\right)y_4 + \left(\frac{c}{a}\right) &= -y_3, \\
\left(-\frac{d}{a}\right)y_1 + \left(e - \frac{db}{a}\right)y_4 + \left(f - \frac{dc}{a}\right) &= -y_2, \\
\left(-\frac{g}{a}\right)y_1 + \left(h - \frac{gb}{a}\right)y_4 + \left(k - \frac{gc}{a}\right) &= v.
\end{aligned}
\tag{R′}
$$

Analizando los coeficientes del sistema (R′) vemos que se han transformado exactamente siguiendo las reglas ya conocidas de la transformación pivote que convierte un sistema en columnas en otro equivalente.

Por tanto la transformación pivote elemental (con pivote $a \neq 0$) convierte el esquema anterior en el

$$
\begin{array}{ccc|cc|cl}
 & & y_1 & y_4 & 1 & & \\
\hline
(x_i \geq 0, & x_3 & \frac{1}{a} & \frac{b}{a} & \frac{c}{a} & = -y_3 & (y_i \geq 0, \\
i = 1, 2, 3, 4) & x_2 & -\frac{d}{a} & e - db/a & f - dc/a & = -y_2 & i = 1, 2, 3, 4) \\
\hline
 & 1 & -\frac{g}{a} & h - gb/a & k - gc/a & = v\,(\text{mín}) & \\
\hline
 & & = x_1 & = x_4 & = u\,(\text{máx}) & &
\end{array}
$$

de tal modo que tanto los programas en filas como en columnas del esquema transformado son equivalentes a los programas en filas y en columnas del esquema original. Esta es otra razón por la que podemos escribir las ecuaciones del sistema en filas con signo menos precediendo a las variables dependientes.

Al realizar una transformación pivote en un esquema que represente programas lineales duales se deben seguir las reglas establecidas anteriormente para los programas en columnas y cambiar también las etiquetas de los programas en filas de acuerdo con la regla:

> Intercámbiense las etiquetas en la fila y columna pivotes, *dejando el signo menos de la derecha;* las etiquetas situadas en la primera fila y en los márgenes derechos permanecen iguales.

A modo de ilustración pivotamos en el -1 del esquema (12) para obtener el esquema (13)

$$
\begin{array}{ccc|cc|cll}
 & & y_3 & y_4 & 1 & & & \\
\hline
(x_i \geq 0, & x_1 & -1 & -1 & 5 & = -y_1 & (y_i \geq 0, & \\
i = 1, 2, 3, 4) & x_2 & -1^* & -2 & 8 & = -y_2 & i = 1, 2, 3, 4) & (12) \\
\hline
 & 1 & 3 & 4 & -7 & = v\,(\text{mín}) & & \\
\hline
 & & = x_3 & = x_4 & = u\,(\text{máx}) & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc|cc|cll}
 & & y_2 & y_4 & 1 & & & \\
\hline
(x_i \geq 0, & x_1 & -1 & 1 & -3 & = -y_1 & (y_i \geq 0, & \\
i = 1, 2, 3, 4) & x_3 & -1 & 2 & -8 & = -y_3 & i = 1, 2, 3, 4) & (13) \\
\hline
 & 1 & 3 & -2 & 17 & = v\,(\text{mín}) & & \\
\hline
 & & = x_2 & = x_4 & = u\,(\text{máx}) & & &
\end{array}
$$

Este esquema es admisible por filas (puesto que $-3 \leq 0$ y $-8 \leq 0$), pero no es admisible por columnas (puesto que $-2 \ngeq 0$). La solución básica admisible correspondiente al programa en filas se obtiene haciendo $y_2 = y_4 = 0$, y obteniendo $y_1 = 3$, $y_3 = 8$ y $v = 17$. Sin embargo, esto no es todavía una solución óptima.

Deseamos desarrollar un algoritmo-símplex, apropiado para la solución de un programa en filas, parecido al explicado en el esquema (13). Al igual que en el caso del método del símplex para programas en columna, buscamos una sucesión de pivotes que mantengan la admisibilidad por filas y disminuya (o por lo menos no incremente) el valor de la función objetivo v que ha de ser minimizada. Mediante un análisis análogo al efectuado en el capítulo VIII, sección 3, obtenemos lo siguiente:

Reglas de elección del pivote en el método del símplex de filas

- *a′*) Partir de un esquema admisible por filas.
- *b′*) Elegir un elemento negativo en la fila distinguida (excluyendo el elemento de la derecha). Si no existe ninguno, véase *e′*).
- *c′*) Localícense todos los elementos positivos en la columna que contiene el elemento negativo elegido en *b′*) y divídase a cada uno por el correspondiente elemento de la columna distinguida. Elíjase el mayor de estos cocientes. [Si no existe ninguno de tales elementos positivos, véase *f′*).]
- *d′*) Pivotar sobre el elemento positivo (denominador) de la fracción que dé el cociente máximo hallado en *c′*) y volver al punto *b′*).
- *e′*) Si la elección requerida en *b′*) no es posible es que el esquema ya presenta una solución óptima básica.
- *f′*) Si no existe ningún elemento positivo como se requiere en *c′*) el programa minimizante no está acotado superiormente, no tiene solución óptima.

Ilustramos estas reglas aplicándolas al programa en filas del esquema (13). Puesto que (13) es admisible por filas, buscamos un elemento negativo en la fila distinguida; el único es -2. Puesto que los dos elementos de esta columna no son positivos calculamos los cocientes $-3/1$ y $-8/2$. El mayor de estos cocientes es $-3/1$ y tiene a 1 por denominador. Pivotamos por tanto sobre este elemento y obtenemos

$$\begin{array}{c c|c c|c|l l}
 & & y_2 & y_1 & 1 & & \\
\hline
(x_i \geq 0, & x_4 & -1 & 1 & -3 & = -y_4 & (y_i \geq 0, \\
i = 1, 2, 3, 4) & x_3 & 1 & -2 & -2 & = -y_3 & i = 1, 2, 3, 4) \quad (34) \\
\hline
 & 1 & 1 & 2 & 11 & = v\,(\text{mín}) & \\
\hline
 & & = x_2 & = x_1 & = u\,(\text{máx}) & &
\end{array}$$

La elección del pivote ha dado otro esquema admisible por filas con valor de la función objetivo menor que antes, $v = 11$. Puesto que no existen ahora elementos negativos en la fila distinguida, la regla e') nos dice que la solución óptima ha sido alcanzada, es decir, $y_1 = y_2 = 0$, $y_3 = 2$, $y_4 = 3$ y $v = 11$.

Existen aquí dos hechos dignos de mención. El esquema (34) nos da las soluciones óptimas de *ambos* programas simultáneamente. Además, el mínimo de v iguala al máximo de u. Ambas cosas son consecuencia de las reglas e) y e') de los dos métodos símplex.

Más adelante, en el capítulo X, justificaremos las reglas establecidas tanto en el método símplex de filas como de columnas. Sin embargo, por el momento, volvemos al esquema construido para representar los objetivos opuestos de los jugadores del juego matricial considerado en la sección 1. Cara a la interpretación de estos programas duales según la teoría de juegos, los dos hechos que hemos mencionado en el parágrafo anterior ya no nos parecerán sorprendentes.

El esquema que construimos (repetido a continuación)

$$\begin{array}{c c|c c|c|l l}
 & & y_2 & y_3 & 1 & & \\
\hline
(x_i \geq 0, & x_1 & -1 & 7 & -5 & = -y_1 & (y_i \geq 0, \\
i = 1, 2, 3, 4) & x_4 & 0 & 1 & -1 & = -y_4 & i = 1, 2, 3, 4) \\
\hline
 & 1 & 1 & -4 & 3 & = v\,(\text{mín}) & \\
\hline
 & & = x_2 & = x_3 & = u\,(\text{máx}) & &
\end{array}$$

representa los programas lineales duales que confrontan a los dos jugadores del juego cuya matriz de pagos es

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

siendo (x_1, x_2) e (y_3, y_4) las estrategias mixtas de los jugadores de filas y de columnas respectivamente. Obsérvese que el esquema no es admisible por columnas, pero al ser admisible por filas podemos aplicar el método del símplex de filas. Siendo -4 el único elemento negativo en la fila distinguida calculamos $-5/7$ y $-1/1$. Y puesto que $-5/7 > -1/1$, el pivote deseado es 7. Utilizando dicho número como pivote obtenemos el siguiente esquema:

$$\begin{array}{c c|c c|c|l l}
 & & y_2 & y_1 & 1 & & \\
\hline
(x_i \geq 0, & x_3 & -1/7 & 1/7 & -5/7 & = -y_3 & (y_i \geq 0, \\
i = 1, 2, 3, 4) & x_4 & 1/7 & -1/7 & -2/7 & = -y_4 & i = 1, 2, 3, 4) \\
\hline
 & 1 & 3/7 & 4/7 & 1/7 & = v\,(\text{mín}) & \\
\hline
 & & = x_2 & = x_1 & = u\,(\text{máx}) & &
\end{array}$$

De acuerdo con las reglas e) y e') este esquema da ahora las soluciones óptimas básicas de ambos programas lineales y max $u =$ $=$ min $v = 1/7$. Por tanto $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (4/7, 3/7, 0, 0)$, $u = 1/7$ es solución del programa en columnas e $(y_1, y_2, y_3, y_4) = (0, 0, 5/7, 2/7)$, $v = 1/7$ es solución del programa en filas.

Si todo ha ido bien, ello nos indica que la estrategia óptima del jugador de filas es $(4/7, 3/7)$ y la cota inferior de sus ganancias esperadas es $u = 1/7$, mientras que la estrategia óptima del jugador de columnas es $(5/7, 2/7)$ y la cota superior de sus pérdidas esperadas es $v = 1/7$. Por tanto el valor de este juego es $1/7$. Se comprueba fácilmente del modo usual.

		5/7 BI	2/7 BII	Pérdidas de B
4/7	AI	1	−2	1/7
3/7	AII	−1	3	1/7
Ganancias de A		1/7	1/7	$V = 1/7$

Existen otros métodos, además del SIMPLEX: e.g. Puntos Interiores (IP)

Frisch (1955) no publicado

Fiacco and MacCormak (1968) era para NLP; no servía para LP

Kachiyan (1979) andaba pero que Simplex

Karmarkar (1984) finalmente anda mejor (a veces)

Meggido (1989) Logarithmic-barrier Method anduco mejor que los primeros IP