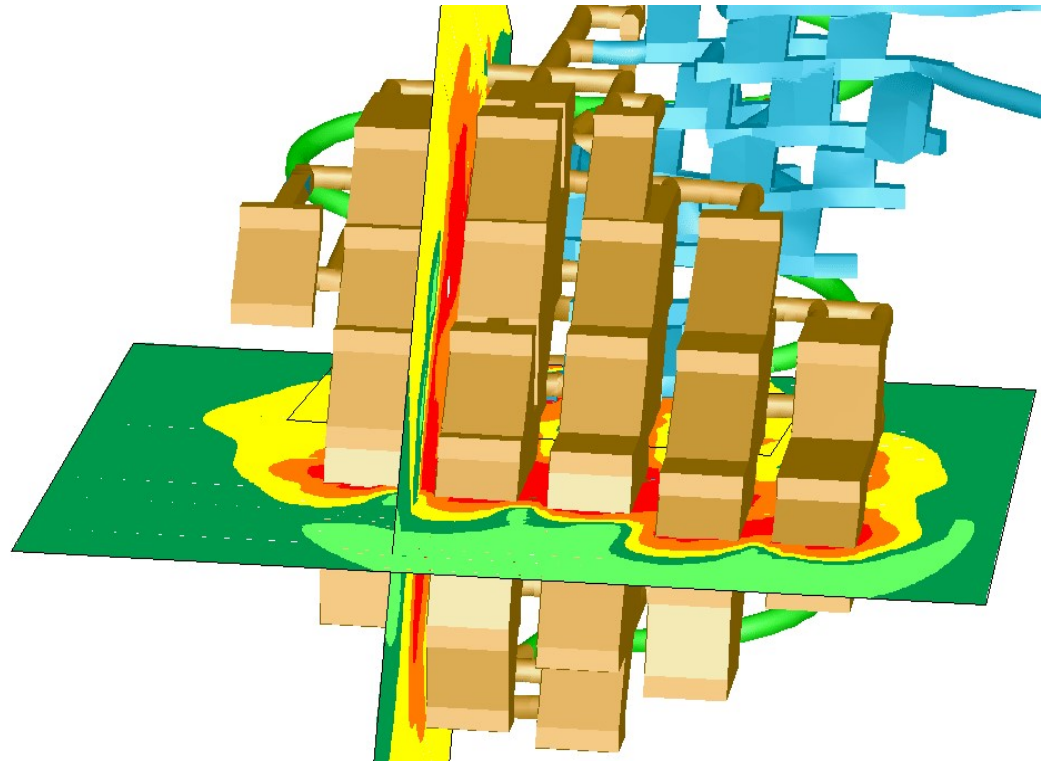




# Elasticidad aplicada a geotecnia



Mecánica de Suelos y Geología  
Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires



# Índice

- Elasticidad aplicada a geomateriales
- El problema de Boussinesq
- Presión de contacto y asiento de zapatas
- Coeficiente de reacción de la subrasante



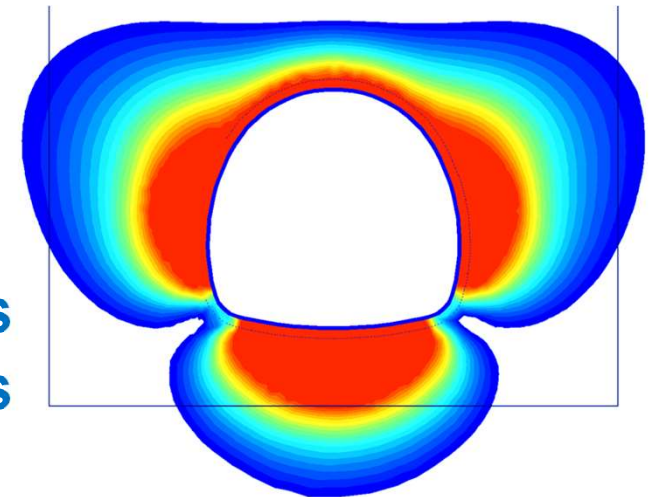
# Problemas “elásticos” en geotecnia y determinación de parámetros

## Cuando el suelo está lejos de “falla”

- Propagación de ondas
- Fundaciones con cargas de servicio
- Vibraciones de máquinas
- Carga lateral en pilotes
- Tensiones alrededor de túneles
- Minería subterránea a gran escala

Los parámetros elásticos dependen del rango de deformación del problema

**Las concentraciones de tensiones locales se resuelven con modelos elastoplásticos**

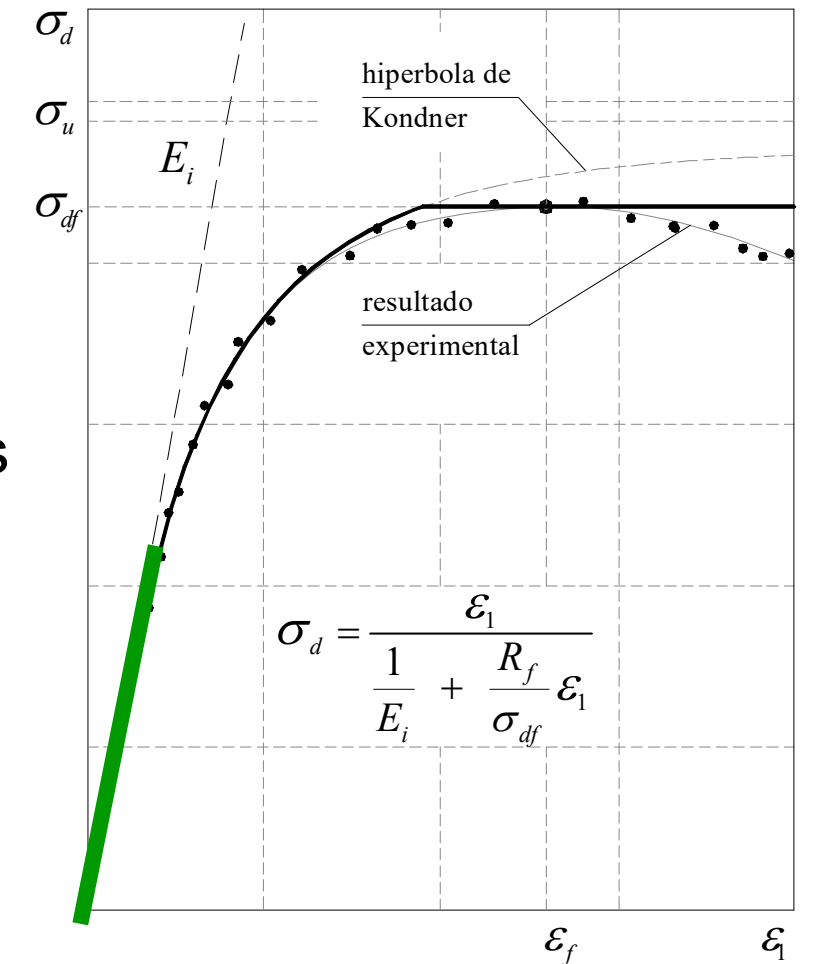


# Elasticidad aplicada a problemas geotécnicos



## Condiciones necesarias

- Las tensiones inducidas en el terreno son menores a su resistencia  
(no hay plasticidad por corte)
- Los suelos están sobreconsolidados  
(no hay plasticidad por compresión)





# La idea de la elasticidad lineal (1D)

El material elástico lineal tiene un **comportamiento lineal y reversible para cualquier tensión aplicada**

Parámetros necesarios de un modelo elástico

- Módulo de Young

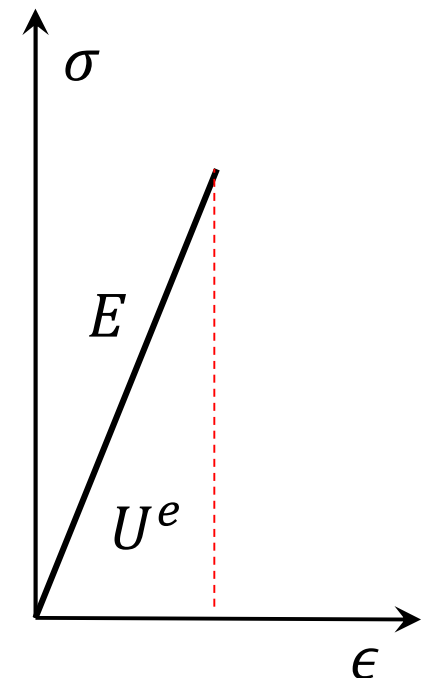
$$E = \partial\sigma / \partial\epsilon = \sigma / \epsilon$$

- Coeficiente de Poisson

$$\nu = -\partial\epsilon_3 / \partial\epsilon_1 = -\epsilon_3 / \epsilon_1$$

Energía elástica almacenada (1D)

$$U^e = \frac{1}{2} \sigma \cdot \epsilon = \frac{1}{2} \epsilon \cdot E \cdot \epsilon$$





# Elasticidad lineal isotrópica

La relación  $\sigma = \epsilon \cdot E$  es 1D ( $\sigma$  y  $\epsilon$  son escalares)

En el espacio general de tensiones la relación es

- En componentes  $\sigma_{ij} = K\epsilon_{kk}\delta_{ij} + 2G\epsilon_{ij}^d$
- En notación tensorial  $\boldsymbol{\sigma} = K\epsilon_v\mathbf{1} + 2G\boldsymbol{\epsilon}^d$
- Para deformación plana (caso 2D) con tensiones iniciales ( $i$ )

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^i \\ \sigma_{yy}^i \\ \sigma_{zz}^i \\ \sigma_{xy}^i \end{Bmatrix}$$



# Elasticidad lineal isotrópica

El trabajo de deformación ( $\dot{W}$ ) debe ser positivo

$$\dot{W} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = p\dot{\epsilon}_v + s_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}^d = K\epsilon_v\dot{\epsilon}_v + 2G\epsilon_{ij}^d\dot{\epsilon}_{ij}^d$$

$$\dot{W} > 0 \forall \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \rightarrow \mathbf{K} > \mathbf{0} \wedge \mathbf{G} > \mathbf{0}$$

$$K > 0 \wedge G > 0 \rightarrow \mathbf{E} > \mathbf{0} \wedge -1.0 < \nu < 0.5$$

Las relaciones entre parámetros elásticos son

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad E_{oed} = \frac{(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} E$$

$$\text{Para } \nu \sim 0.30 \rightarrow G \sim 0.38E \quad K \sim 0.83E \quad E_{oed} \sim 1.35E$$



# Relaciones simples empleadas en geotecnia

Tensión desviadora

$$q = \sigma_1 - \sigma_3 = E \epsilon_1 = 3G \epsilon_q$$

Deformación por corte

$$\epsilon_q = \frac{2}{3} (\epsilon_3 - \epsilon_1) = \frac{\epsilon_1}{1 - 2\nu}$$

Presión media

$$p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = K \epsilon_v$$

Trayectoria edométrica (consolidación)

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial \sigma_z} = \frac{\nu}{1 - \nu} = \frac{3K - 2G}{3K + 4G}$$



# Índice

- Elasticidad aplicada a geomateriales
- El problema de Boussinesq
- Presión de contacto y asiento de zapatas
- Coeficiente de reacción de la subrasante

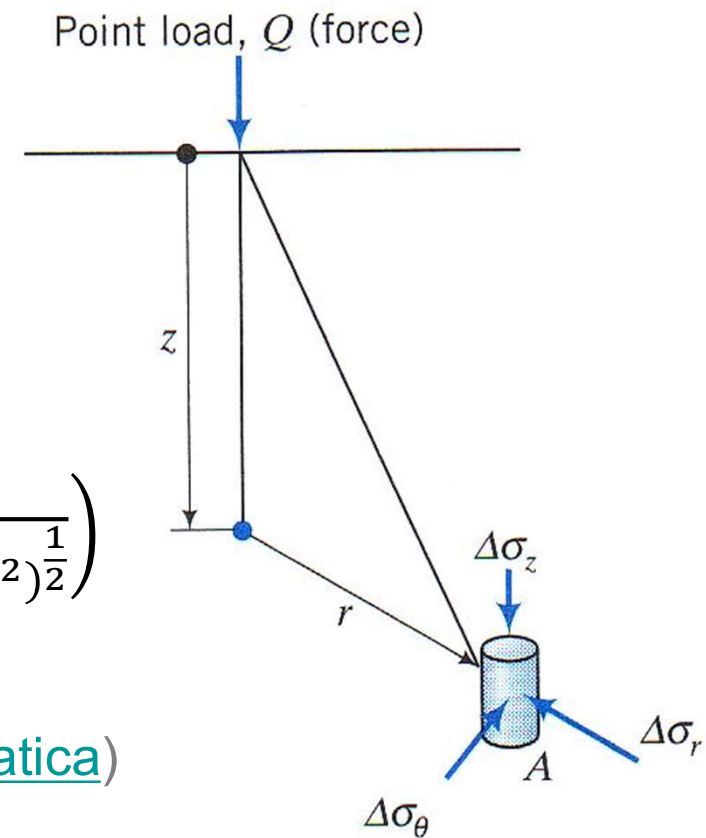
# Teoría de Boussinesq para carga puntual



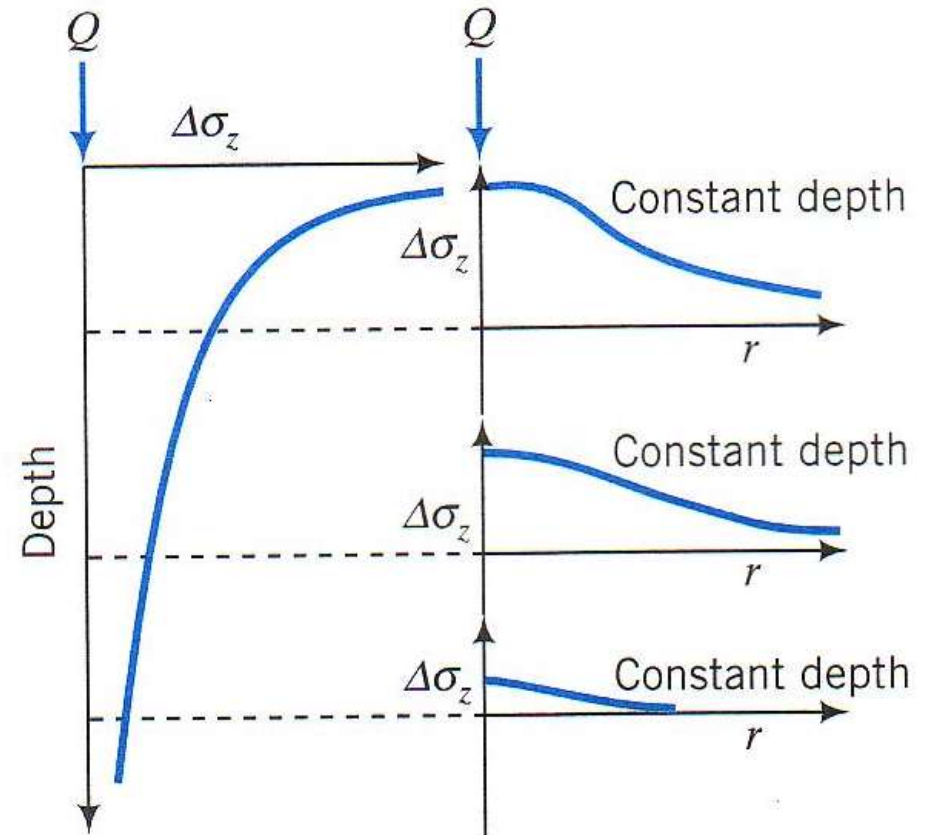
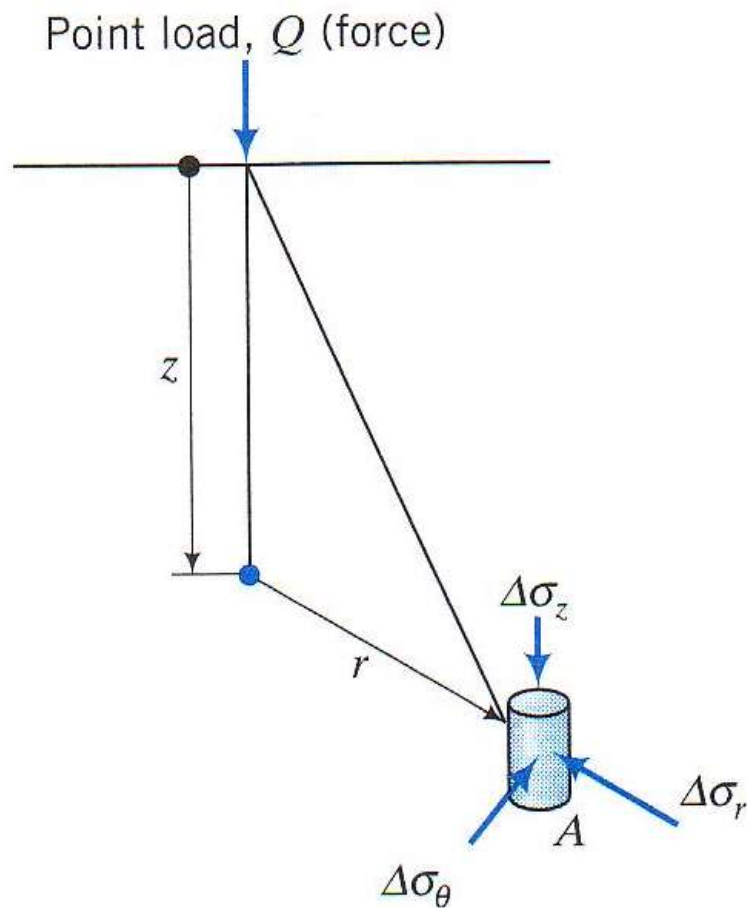
Tensiones en un punto de un espacio **semi-infinito, elástico-lineal, isótropo** para carga normal concentrada  $Q$  actuando en superficie

- $$\sigma_z = \frac{3Q}{2\pi z^2} \left( \frac{z^2}{z^2+r^2} \right)^{5/2}$$
- $$\sigma_r = \frac{Q}{2\pi} \left( \frac{3r^2 z}{(r^2+z^2)^{5/2}} - \frac{1-2\nu}{r^2+z^2+z(r^2+z^2)^{1/2}} \right)$$
- $$\sigma_\theta = -\frac{Q}{2\pi} (1-2\nu) \left( \frac{z}{(r^2+z^2)^{3/2}} - \frac{1}{r^2+z^2+z(r^2+z^2)^{1/2}} \right)$$
- $$\sigma_{rz} = \frac{3Q}{2\pi} \left( \frac{rz^2}{(r^2+z^2)^{5/2}} \right)$$

([Mathematica](#))



# Teoría de Boussinesq para carga puntual



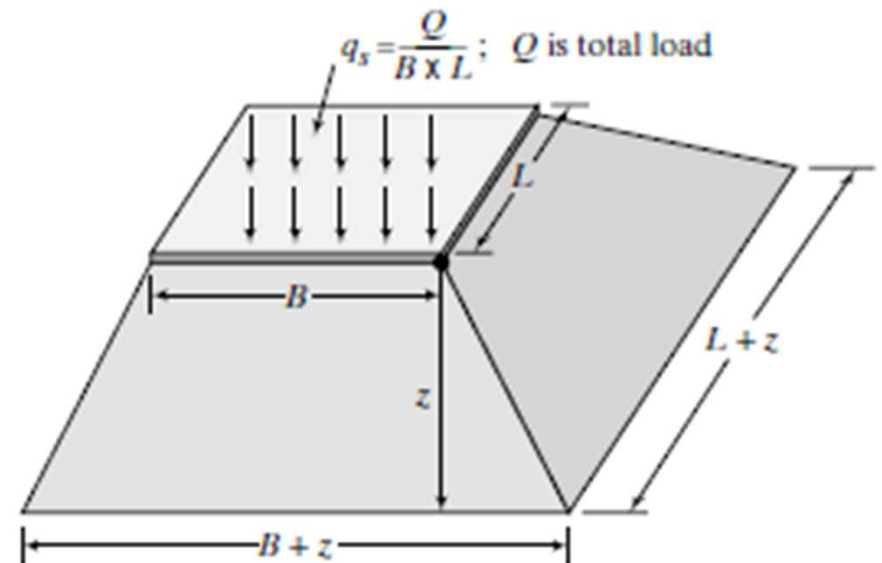


# Boussinesq “simplificado” (método 2:1)

Para análisis preliminares, la propagación de tensiones verticales en el terreno puede calcularse asumiendo una distribución 2V:1H

- $q_s^{prof\ z} = \frac{Q}{(B+z)(L+z)} = \frac{q_s BL}{(B+z)(L+z)}$
- $\Delta\sigma_z = q_s - q_s^{prof\ z}$

El método es razonablemente válido cuando  $z > B$



# Índice

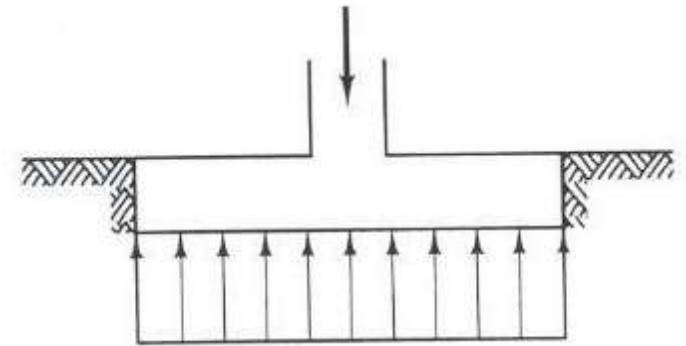


- Elasticidad aplicada a geomateriales
- El problema de Boussinesq
- Presión de contacto y asiento de zapatas
- Coeficiente de reacción de la subrasante

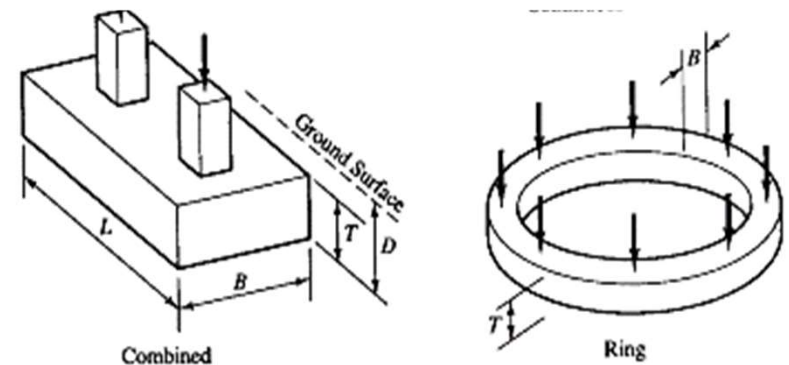
# Fundaciones superficiales: zapatas y vigas



Zapatas ( $L \geq B$ ) : **estructuras rígidas** en las que se asume que se transmite una “**presión uniforme**” al terreno



Vigas ( $L \gg B$ ) : **estructuras flexibles** que interactúan “**elásticamente**” con el terreno



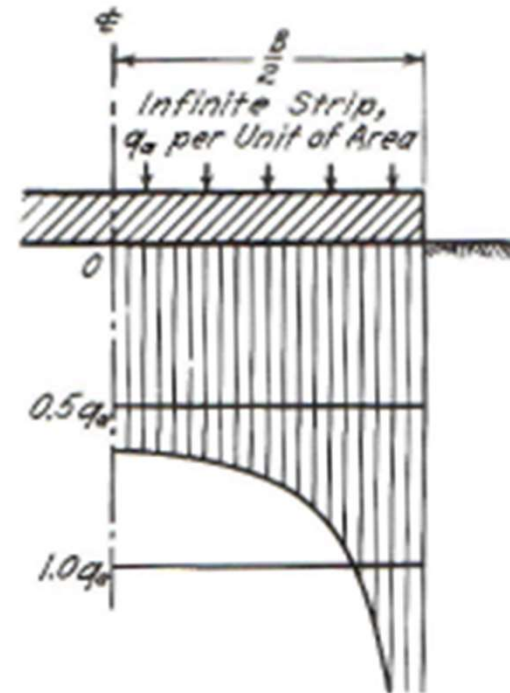
El tema es objeto de “Geotecnia Aplicada”



# Fundaciones superficiales: distribución de tensiones bajo zapatas rígidas y flexibles

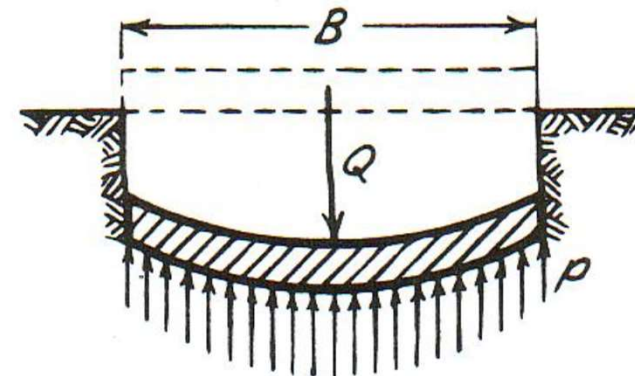
## Zapata rígida

- Asentamiento uniforme
- Mayor presión en los bordes



## Zapata flexible

- Presión uniforme
- Mayor asentamiento en el centro



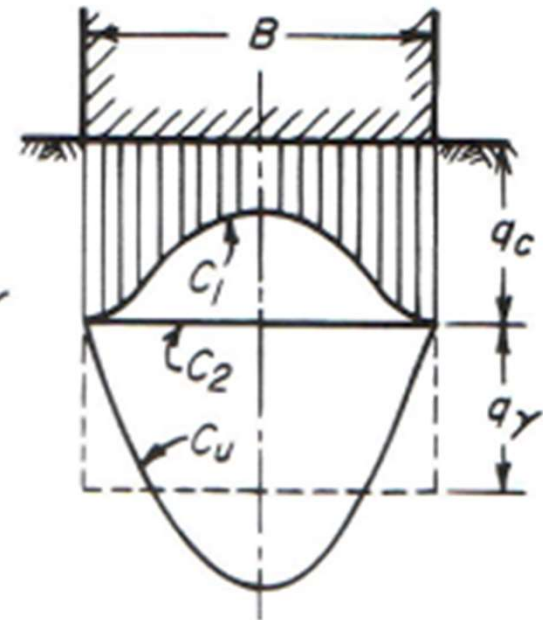
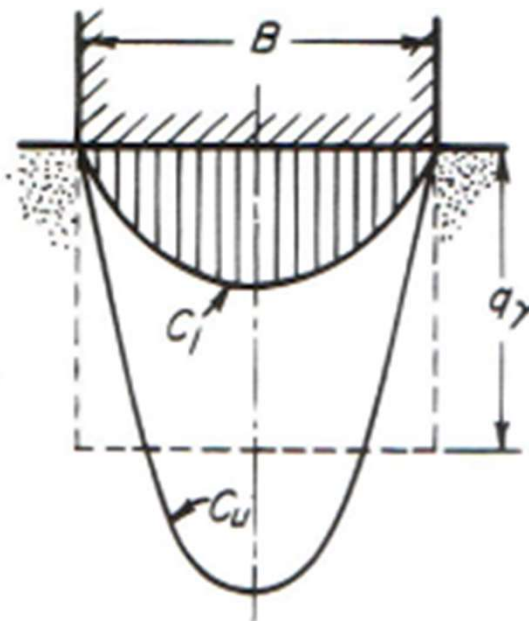
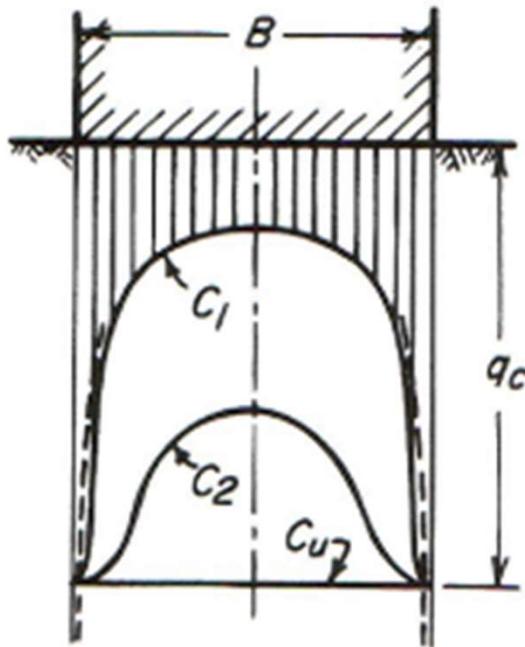


# Fundaciones superficiales: tensiones verticales bajo zapatas en distintos suelos

Teoría de elasticidad  
rigidez independiente  
del confinamiento

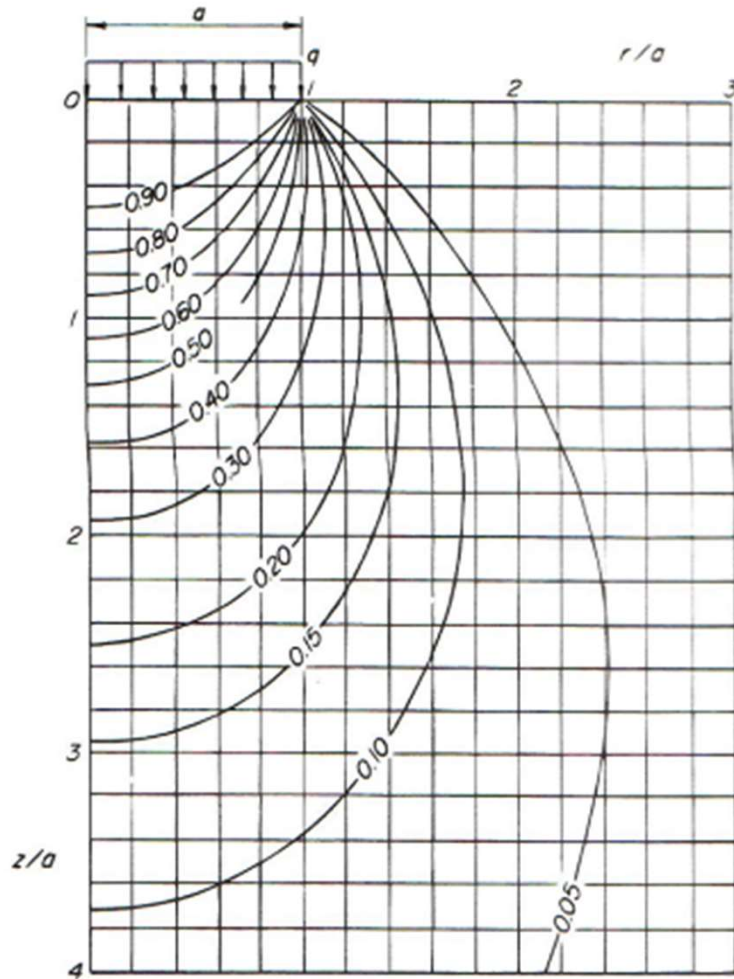
“arenas”  
rigidez nula sin  
confinamiento

“arcillas”  
plastificación parcial  
del borde de zapata



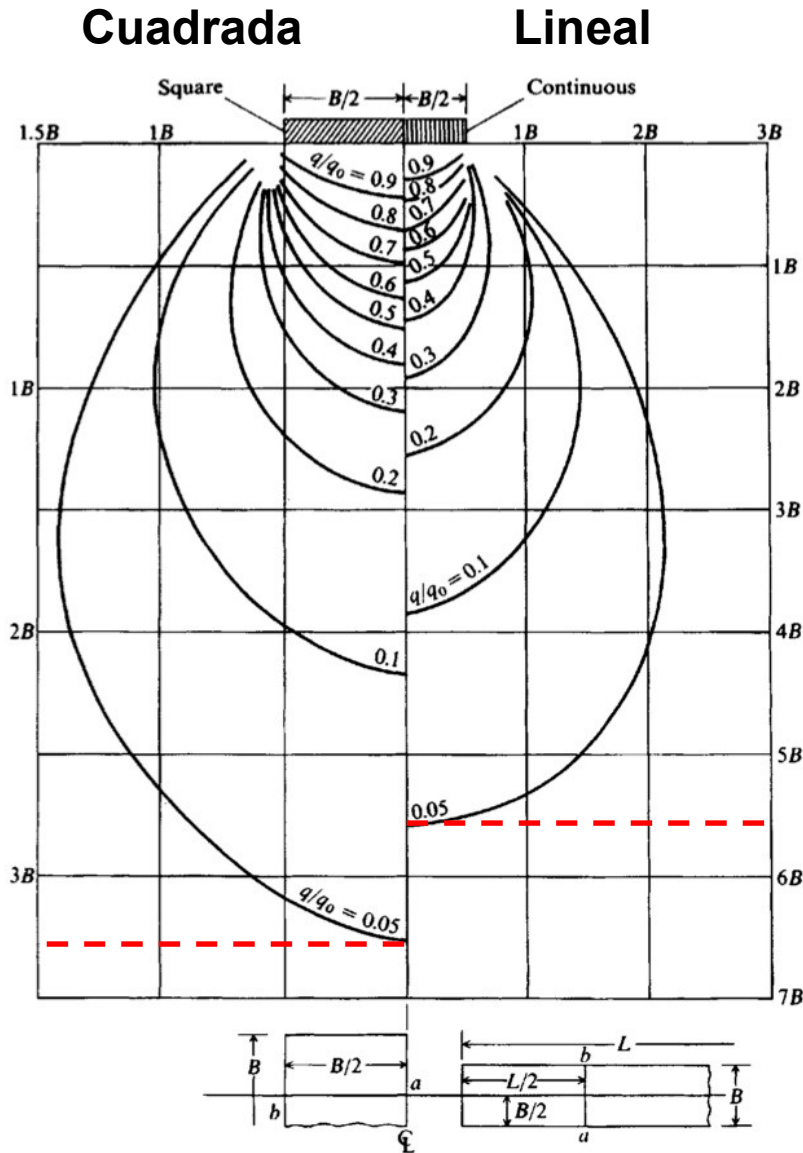


# Fundaciones superficiales: tensiones bajo zapata circular, cuadrada y lineal

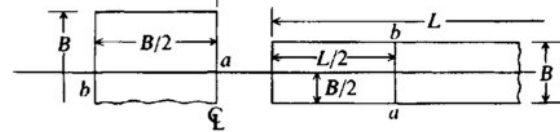


Circular

$3.5B$



$5.5B$



# Método de Schmertmann

Se asume rigidez constante en cada estrato

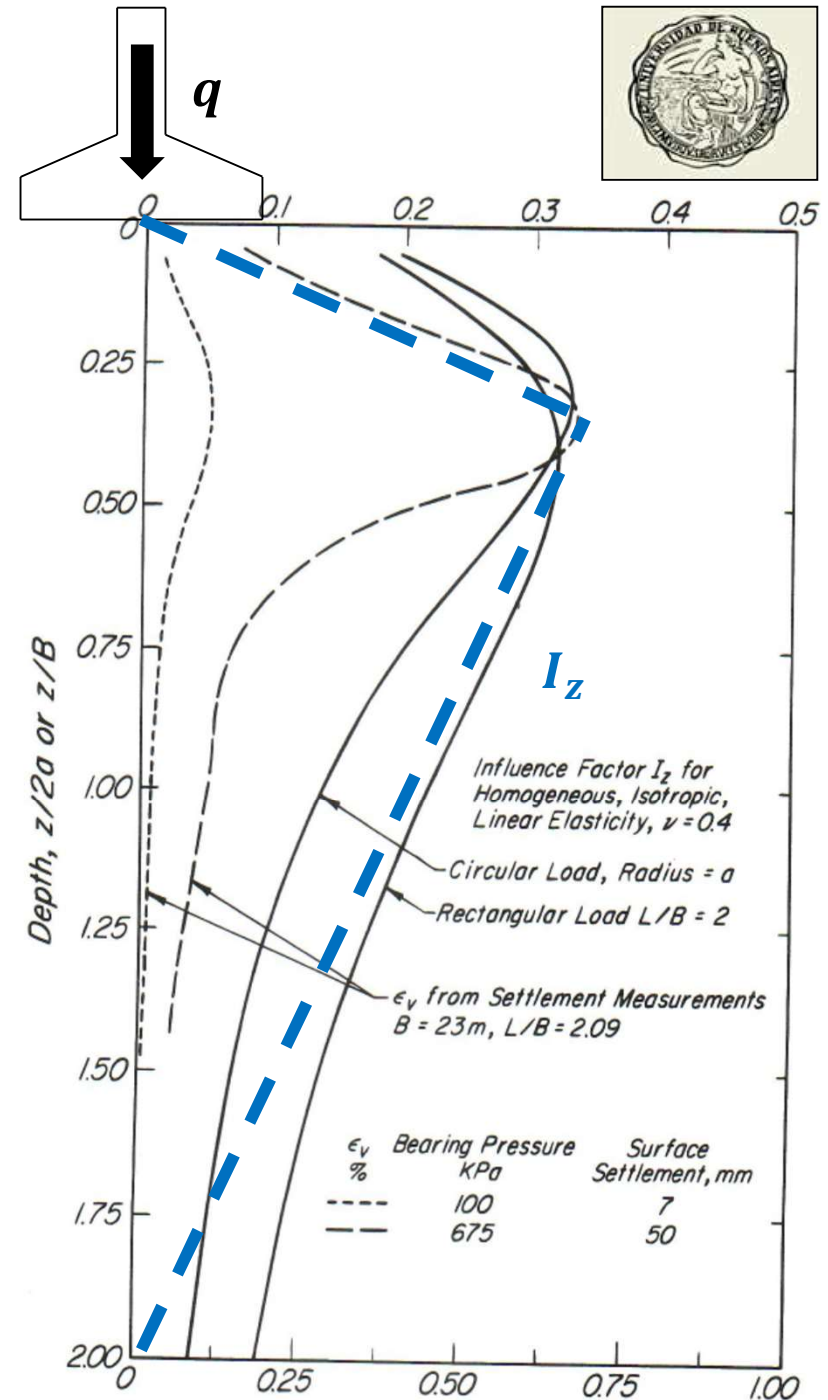
$$\bullet \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E_s} \left( \Delta\sigma_z + \nu(\Delta\sigma_x + \Delta\sigma_y) \right)$$

Se reemplaza la solución exacta por una aproximada y se integra

$$\bullet \quad \varepsilon_z = \frac{q}{E_s} I_z$$

$$\bullet \quad \delta = \int_0^{\infty} \varepsilon_z dz$$

El método estima solamente asentamientos elásticos



# Método de Schmertmann

$$\delta = \int_0^{\infty} \varepsilon_z dz \cong c_1 c_2 c_3 (q - \sigma_{zD}) \sum \frac{I_z}{E} \Delta z$$

$$z < B/2 \rightarrow I_z = 0.2(1 + 4z/B)$$

$$z < z_{max} \rightarrow I_z = 0.6 \left( 1 - \frac{z-B/2}{z_{max}-B/2} \right)$$

$$z_{max} = 2B(1 + \log(L/B))$$

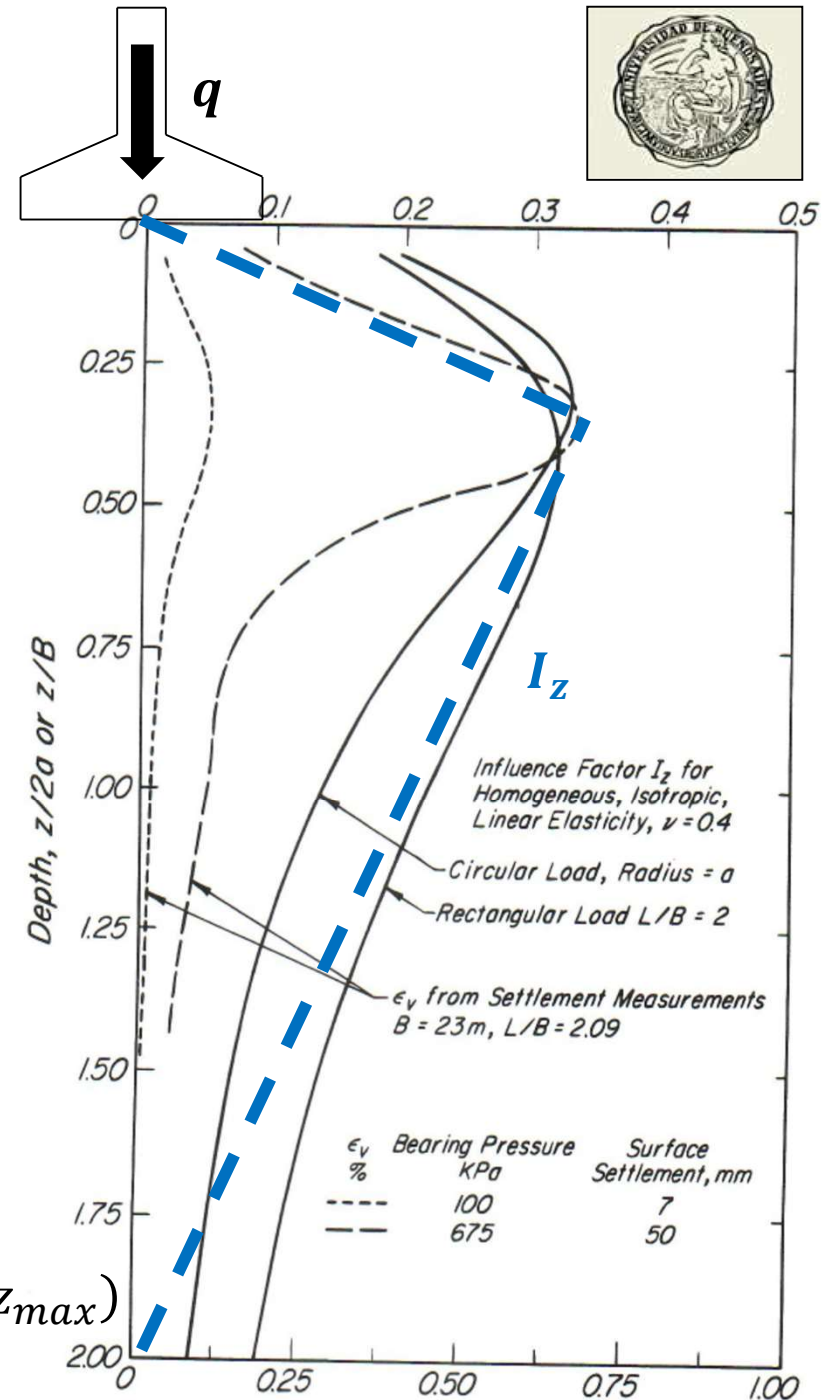
$$c_1 = 1 - (0.5\sigma_{zD}) / (q - \sigma_{zD})$$

$$c_2 = 1 + 0.2 \log(t/365 \text{ dias})$$

$$c_3 = 1.03 - 0.03(L/B) \geq 0.73$$

$$z \leq B/2 \rightarrow \int_{z_1}^{z_2} \frac{I_z}{E} dz = \frac{1}{5E} \frac{z_2 - z_1}{B} (B + 2(z_2 + z_1))$$

$$z > B/2 \rightarrow \int_{z_1}^{z_2} \frac{I_z}{E} dz = \frac{3}{5E} \frac{z_2 - z_1}{(B - 2z_{max})} (z_2 + z_1 - 2z_{max})$$





# Índice

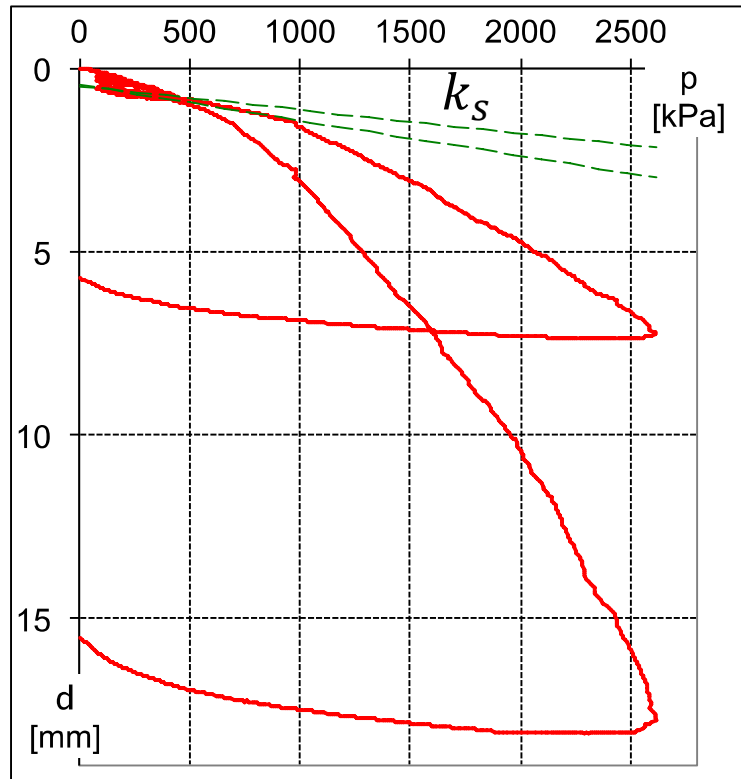
- Elasticidad aplicada a geomateriales
- El problema de Boussinesq
- Presión de contacto y asiento de zapatas
- Coeficiente de reacción de la subrasante

# Coeficiente de reacción de la subrasante: medición directa (ensayo PLT)



Cociente entre la presión aplicada sobre una placa rígida y el asentamiento medido

$$k_s = \frac{p}{\delta} \cong 1.35 \frac{E}{B_0}$$



# Coeficiente de reacción de la subrasante: aplicación en teoría elástica



## El coeficiente de reacción depende del tamaño y forma del área cargada

Placa diámetro  $B_0$

$$k_{s0} \sim 1.35 \frac{E}{B_0}$$

$E$  constante, base  $B \times L$

$$k_s \sim k_{s0} \frac{B_0}{B} \left( \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \frac{B}{L} \right)$$

$E$  creciente con profundidad, base  
 $B \times L$  (fórmula de Terzaghi, obsoleta)

$$k_s \sim k_{s0} \left( \frac{B + B_0}{2B} \right)^2 \left( \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \frac{B}{L} \right)$$



# Coeficiente de reacción de la subrasante: viga / platea sobre medio elástico

Una platea sobre medio elástico se resuelve como un problema de Winkler

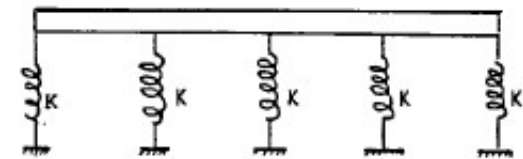
## Limitaciones

- Existe acoplamiento entre “resortes”
- A largo plazo se producen asentamientos adicionales

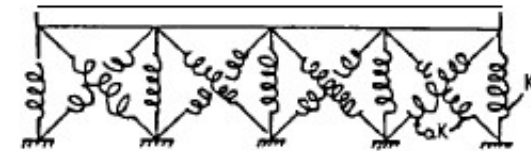


$$\nabla^4 w + \frac{p}{D} = 0$$

$$\nabla^4 w + \frac{p - k_s[w]w}{D} = 0$$



(a) Uncoupled springs



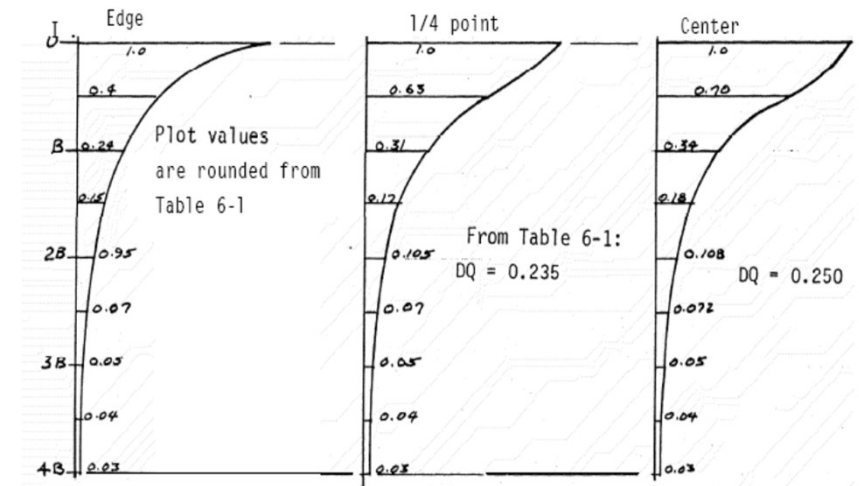
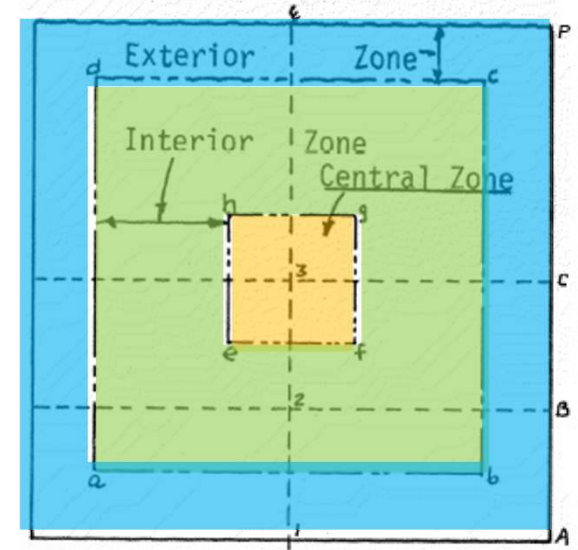
(b) Coupled springs

# Principios de funcionamiento de una platea sobre medio elástico



El acoplamiento se considera usualmente mediante una reducción del módulo de reacción  $k_s$  desde el centro hacia los bordes del área cargada

- El método es razonable para el diseño estructural
- **Sus predicciones de asentamiento son pobres**





# Coeficiente de reacción para pilotes con carga horizontal

El coeficiente de reacción se emplea para el diseño estructural de pilotes con carga horizontal

- Depende de la rigidez del terreno en profundidad

$$k_h = 0.65 \cdot \sqrt[12]{\frac{E_s \cdot D^4}{E_p \cdot I_p}} \frac{E_s}{1 - \nu^2}$$

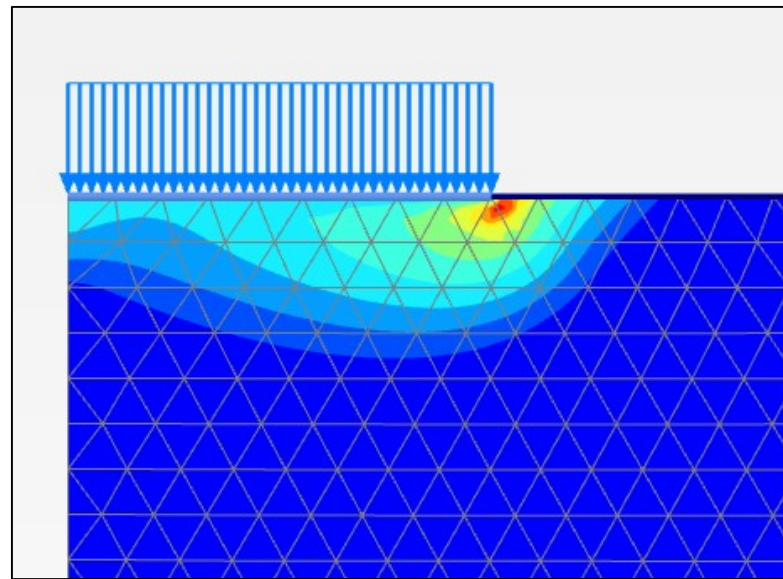
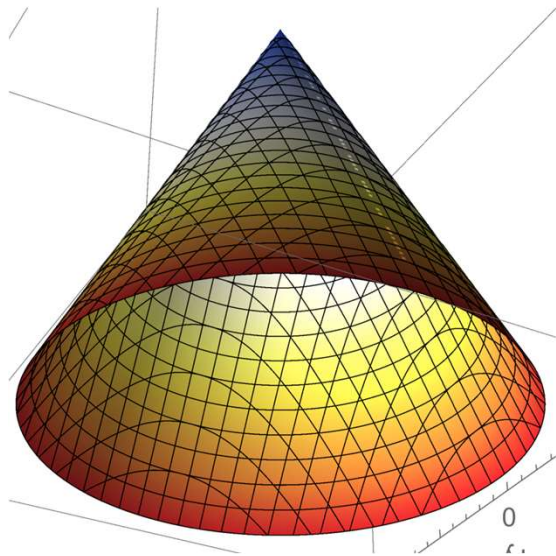
- $E_s$ : Módulo de Young suelo (puede variar con la profundidad)
- $E_p$ : Módulo de Young pilote
- $\nu$ : Módulo de Poisson del suelo
- $D$ : Diámetro/ancho del pilote
- $I_p$ : Momento de inercia pilote

# Bibliografía



- Básica
  - USACE. Settlement analysis.
  - Jimenez Salas et al. Geotecnia y Cimientos. Rueda
  - Powrie. Soil Mechanics, Concepts and Applications. Spon Press
  - Bowles. Foundation analysis and design. McGraw-Hill.
- Complementaria
  - Poulos & Davis. Elastic solutions for soil and rock mechanics. CGR Sidney
  - FHWA. Soils and foundations (I & II)

# Elementos de plasticidad aplicada a geotecnia



Mecánica de Suelos y Geología  
Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires



# Índice

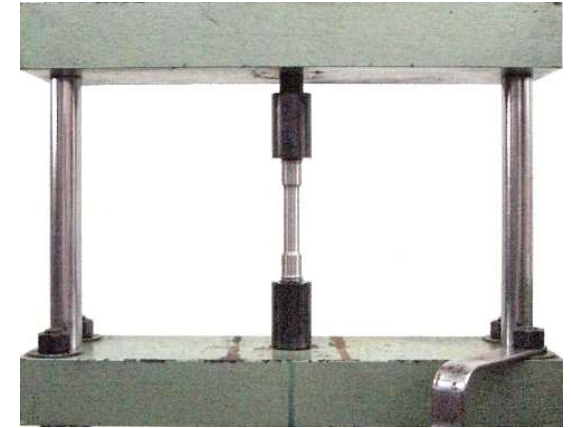
- Ecuaciones constitutivas
- Plasticidad: el bloque friccionante
- Introducción a la plasticidad perfecta
- El modelo de Mohr-Coulomb
- Plasticidad con endurecimiento
- Modelo de compresión edométrica

# Una barra de acero a tracción



## Ensayo

- Medimos longitud y diámetro de la barra
- La ponemos en la máquina de ensayo
- **Aplicamos** una **carga** monotónica de tracción
- **Medimos** el **desplazamiento** de los extremos de la barra



<https://tecnolowikia.wikispaces.com/file/view/HPIM2425.JPG/193485340/576x432/HPIM2425.JPG>

## Resultado

$$E = \frac{\Delta\sigma_a}{\Delta\epsilon_a} \quad \beta_s = \frac{P_{max}}{A_0}$$

**¿Hemos medido las propiedades del acero?**



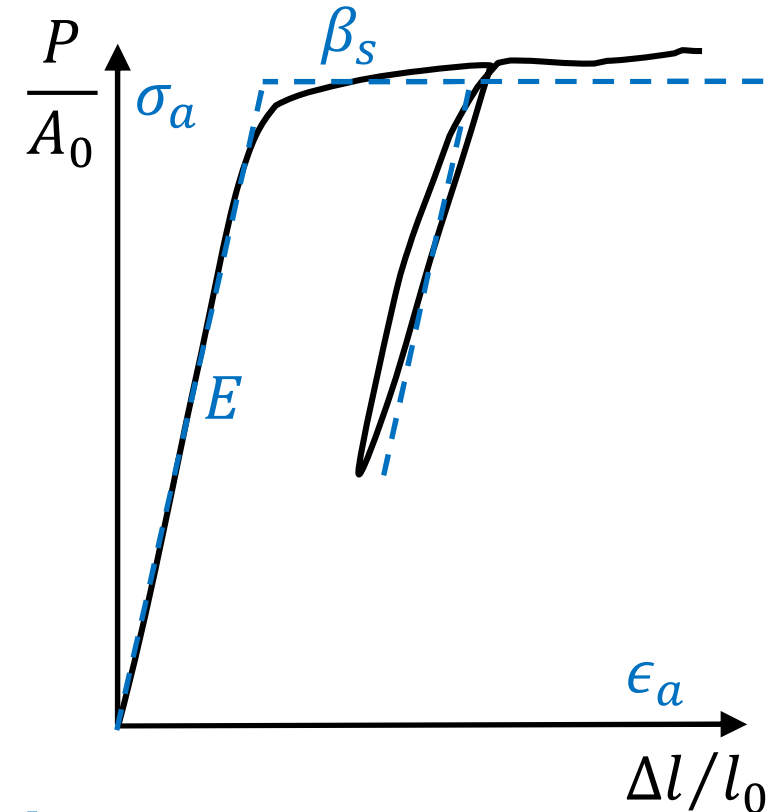
# Comportamiento observado vs **comportamiento idealizado**

## Hipótesis previas al ensayo

- Definición de deformación  

$$\epsilon_a = \Delta l / l_0$$
- Definición de tensión  

$$\sigma_a = P / A_0$$
- Muy convenientes: permiten usar el "principio de superposición"



Sólo medimos  $P$  y  $\Delta l$  porque **una teoría previa** nos indica que otras variables no participan en los fenómenos que queremos ver: **Sólo vemos lo que miramos**

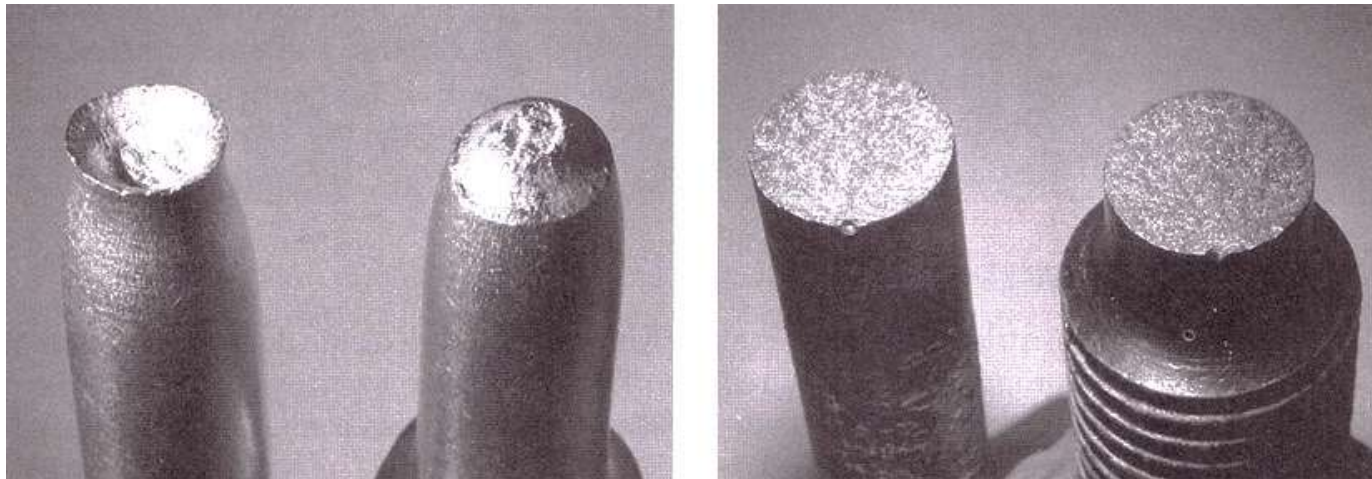


# Una barra de acero a tracción

Como consecuencia de nuestras hipótesis

- **Hemos linealizado el problema**
- No hemos tenido en cuenta el efecto de la localización de deformaciones

**¿Hemos medido las propiedades del acero o las de “esa” barra de acero?**



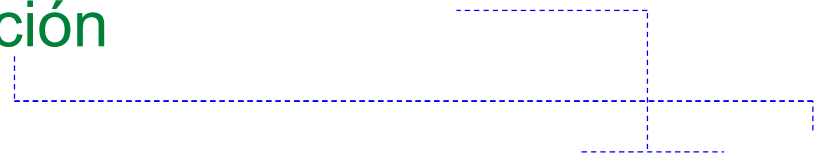
(Warnes 2006)



# Ecuaciones constitutivas

Una ecuación constitutiva es un conjunto de fórmulas que determina el estado del material antes y después de cualquier cambio en su configuración

- Entrada
  - Valor actual de la tensión y de las variables de estado
  - Incremento de deformación
- Salida
  - Tensión actualizada
  - Variables de estado actualizadas



$$\sigma_{n+1} = f[\sigma_n, \rho_n, \Delta\epsilon]$$

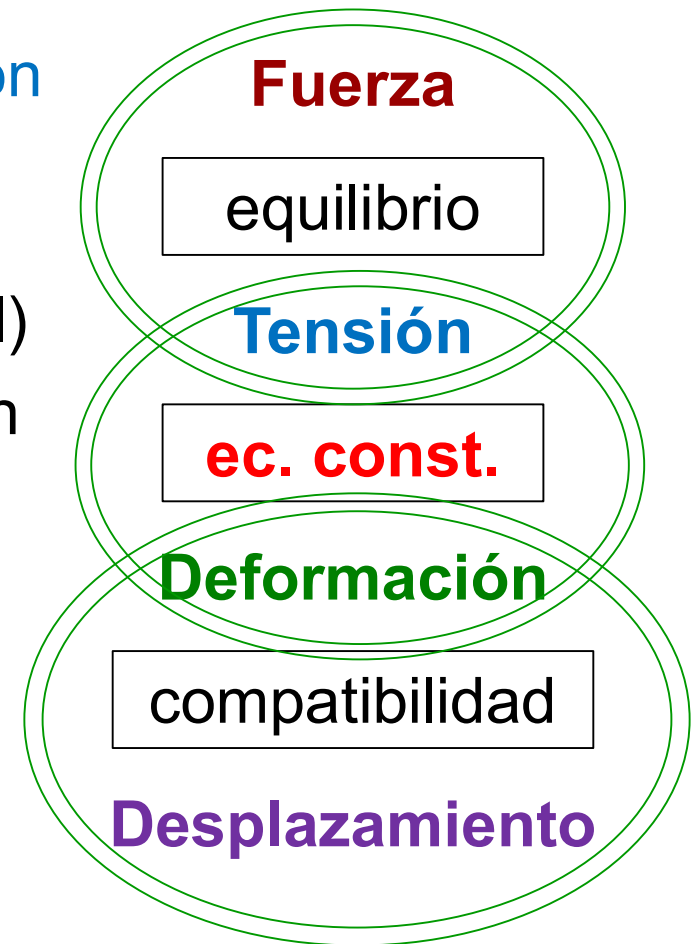
$$\rho_{n+1} = f[\sigma_n, \rho_n, \Delta\epsilon]$$



# Ecuaciones constitutivas

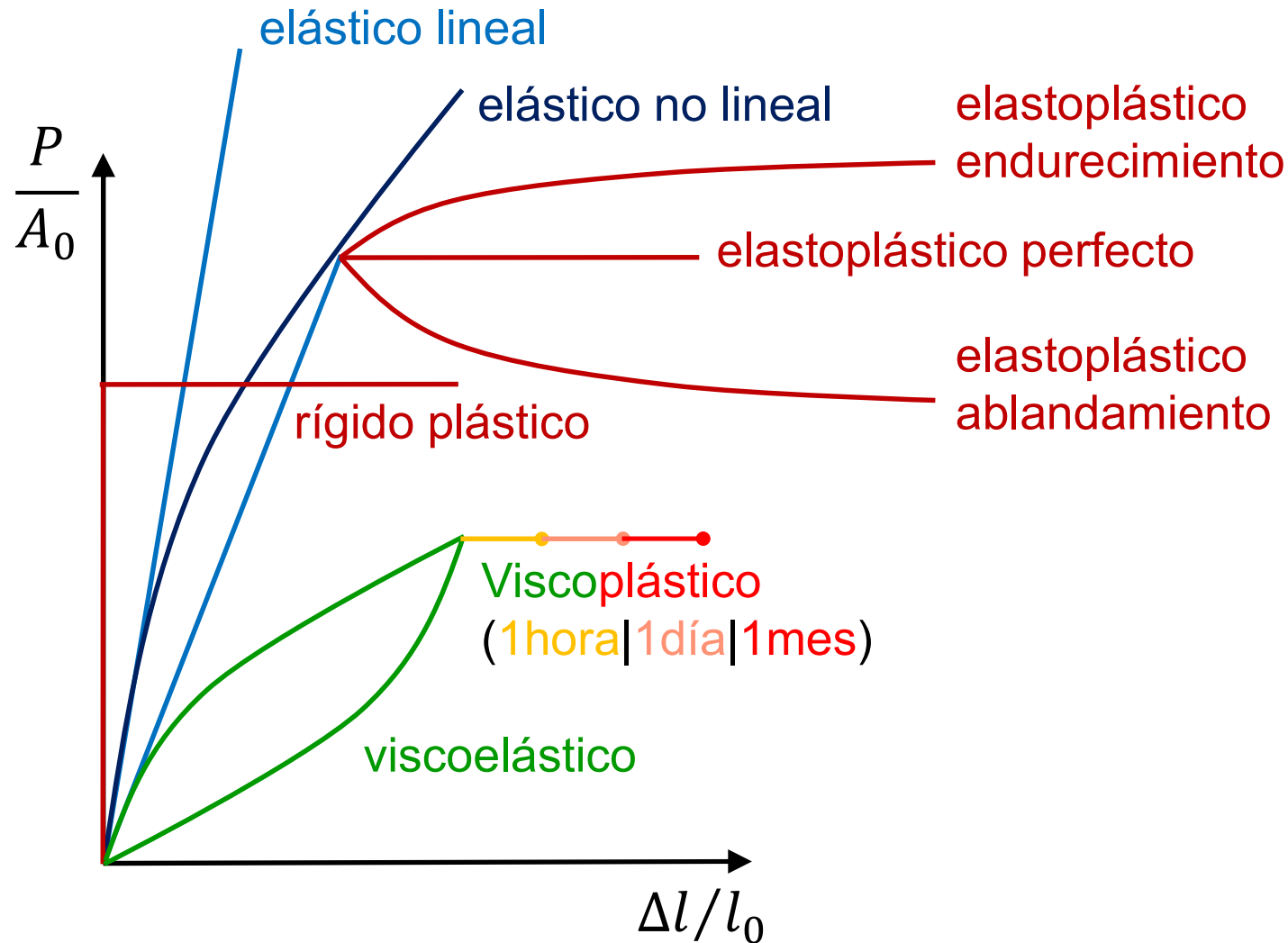
- El equilibrio relaciona **fuerza** con **tensión** (vale para cualquier material)
- La cinemática relaciona **deformación** con **desplazamiento** (cualquier material)
- Las **ecuaciones constitutivas** relacionan **tensión** con **deformación** (dependen del material)
  - Sólido elástico...
  - Fluido Newtoniano...
  - Gas perfecto...

Las **ecuaciones constitutivas** cierran la cadena de cálculo





# Ecuaciones constitutivas comunes en mecánica del sólido





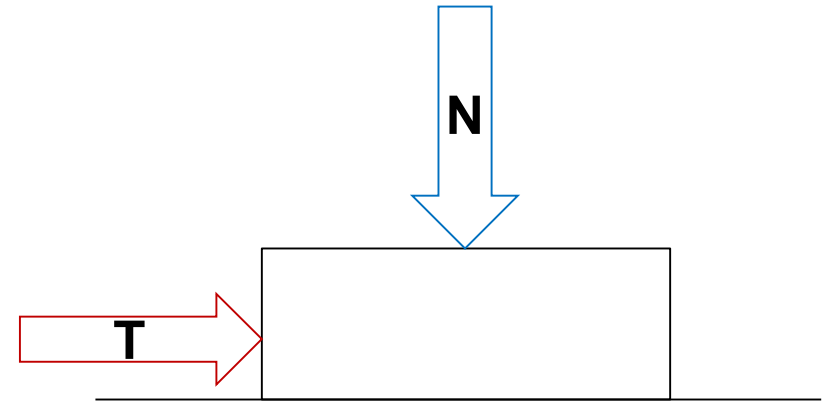
# Índice

- Ecuaciones constitutivas
- **Plasticidad: el bloque friccionante**
- Introducción a la plasticidad perfecta
- El modelo de Mohr-Coulomb
- Plasticidad con endurecimiento
- Modelo de compresión edométrica



# Un bloque friccionante: **la función de fluencia**

Se tiene un bloque ubicado en una superficie plana



Se procura desarrollar un conjunto de fórmulas que permitan determinar

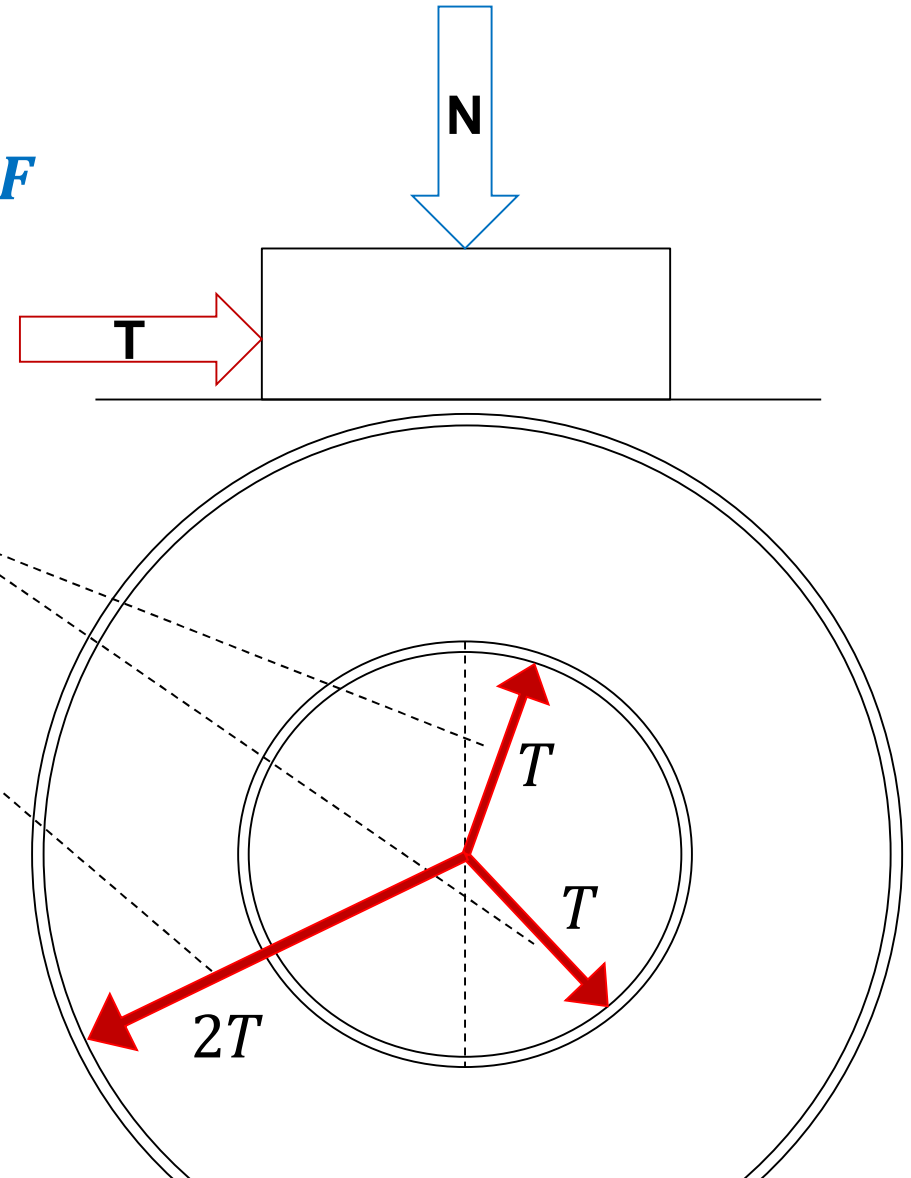
- Cuando se mueve el bloque (**función de fluencia**)
- Para donde se mueve el bloque (**regla de flujo**)
- Cuanta energía hay que gastar (**disipación plástica**)



# Un bloque friccionante: la función de fluencia $F$

Para medir la **función de fluencia  $F$**

- Aumente  $T$  hasta que el bloque **se mueva**
- Verifique que  $T$  tiene el mismo valor en todas direcciones
- Duplique  $N$  y verifique que  $T$  se duplica
- Escriba la forma matemática



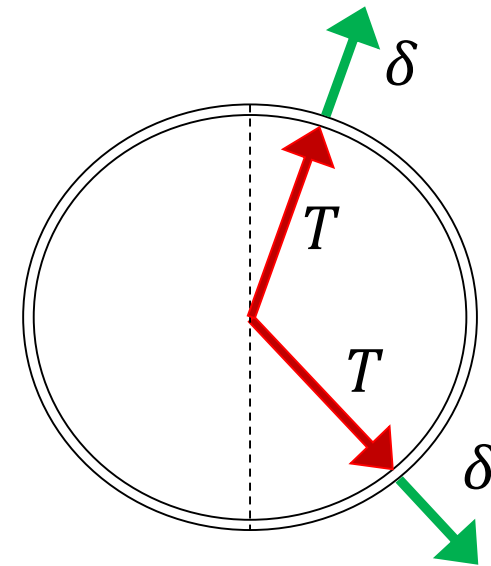
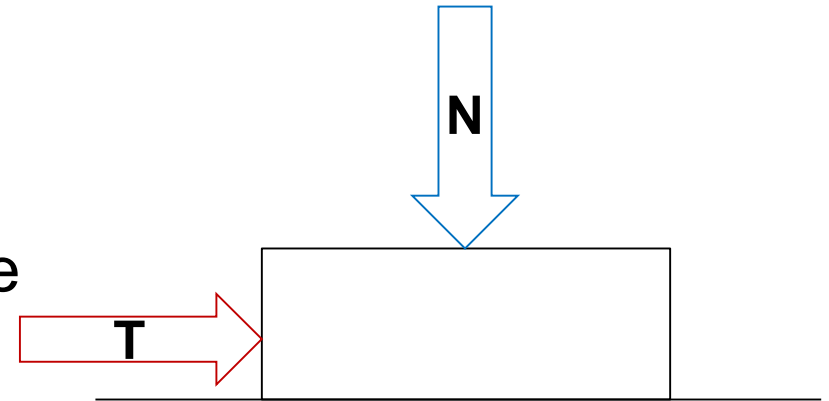
$$F = \sqrt{T_x^2 + T_y^2} - \mu N = 0$$



# Un bloque friccionante : el potencial plástico $G$

Para medir el **potencial plástico**

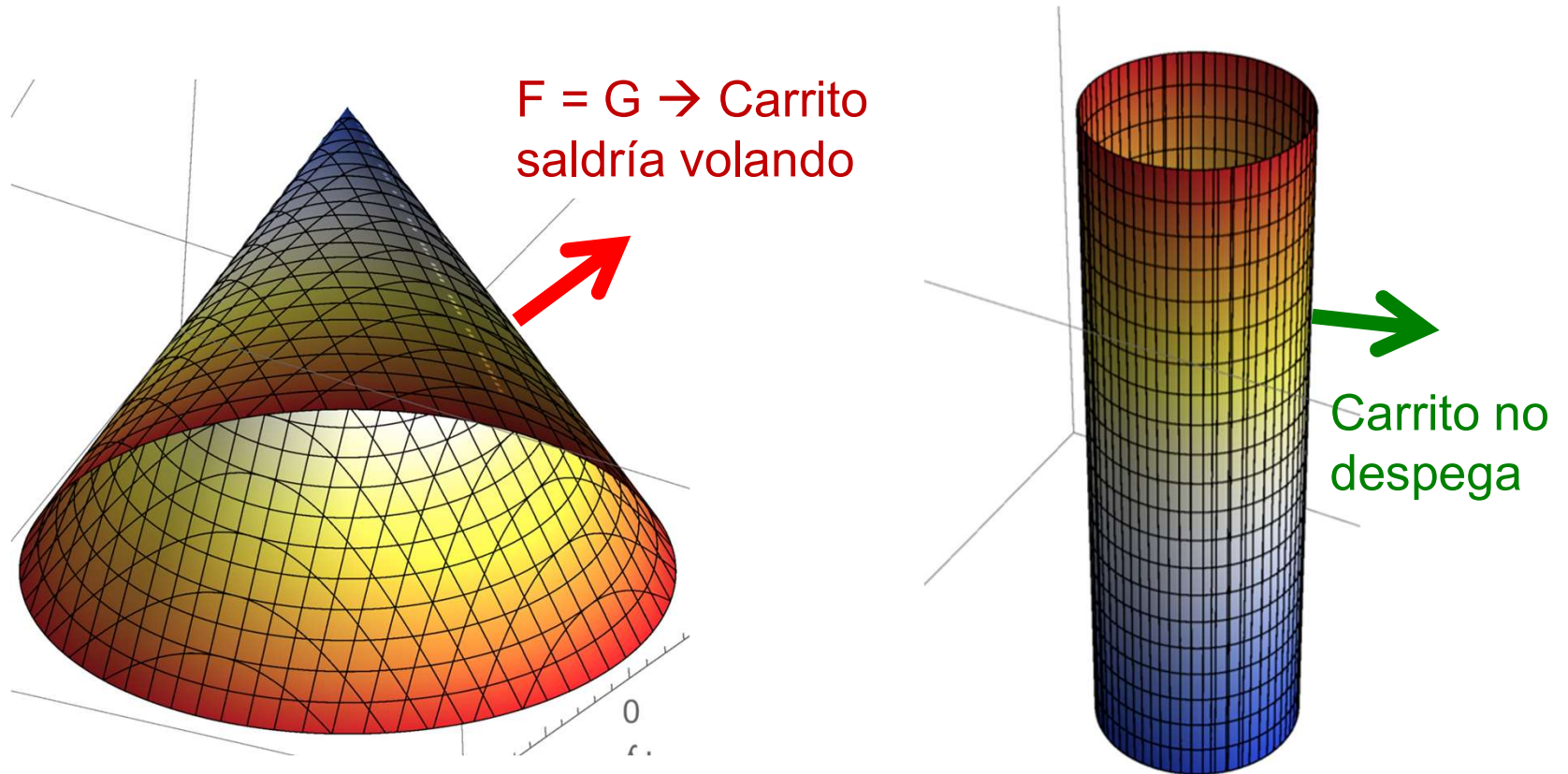
- Verifique que el bloque se mueve **para donde apunta  $T$**
- Duplique  $N$  y repita
- Verifique que el valor de  $N$  no afecta la dirección de movimiento
- Verifique que el bloque no se despega de la mesa



$$G = \sqrt{T_x^2 + T_y^2} - \mu = 0$$



# No asociatividad: función de fluencia distinta a potencial plástico



$$F = \sqrt{T_x^2 + T_y^2} - \mu N = 0$$

$$G = \sqrt{T_x^2 + T_y^2} - \mu = 0$$



# Índice

- Ecuaciones constitutivas
- Plasticidad: el bloque friccionante
- **Introducción a la plasticidad perfecta**
- El modelo de Mohr-Coulomb
- Plasticidad con endurecimiento
- Modelo de compresión edométrica



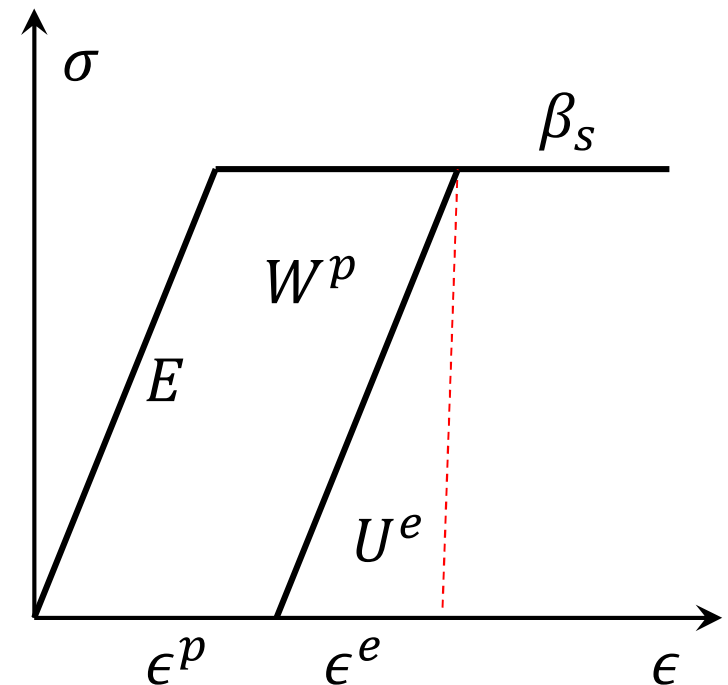
# La idea de la plasticidad perfecta

El material elastoplástico perfecto tiene un **comportamiento elástico hasta** la tensión en la que se produce la **fluencia** (indicada por el histórico “criterio de falla”)

Si se aumenta la deformación el material **fluye a tensión constante**

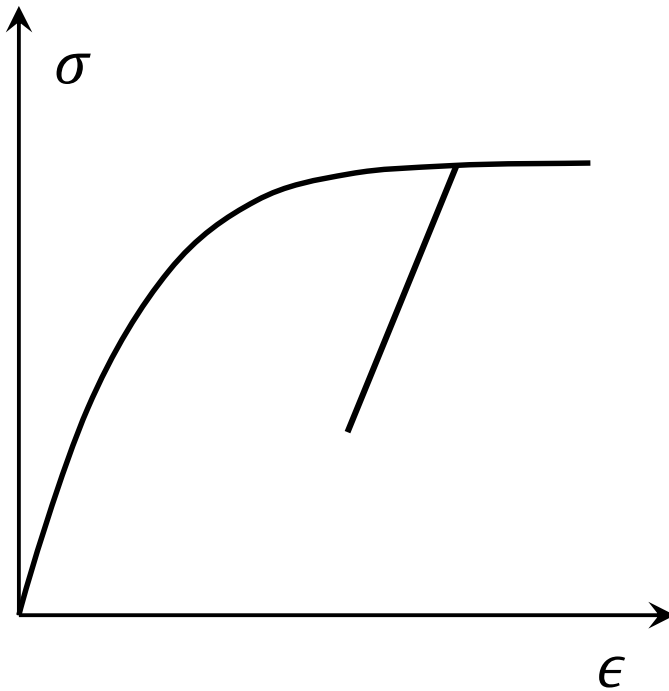
## Ingredientes

- Rango elástico  $\sigma < \beta_s$
- Fluencia a tensión constante  $\beta_s$
- Descarga elástica
- Almacena energía elástica  $U^e$
- Disipa trabajo plástico  $W^p$

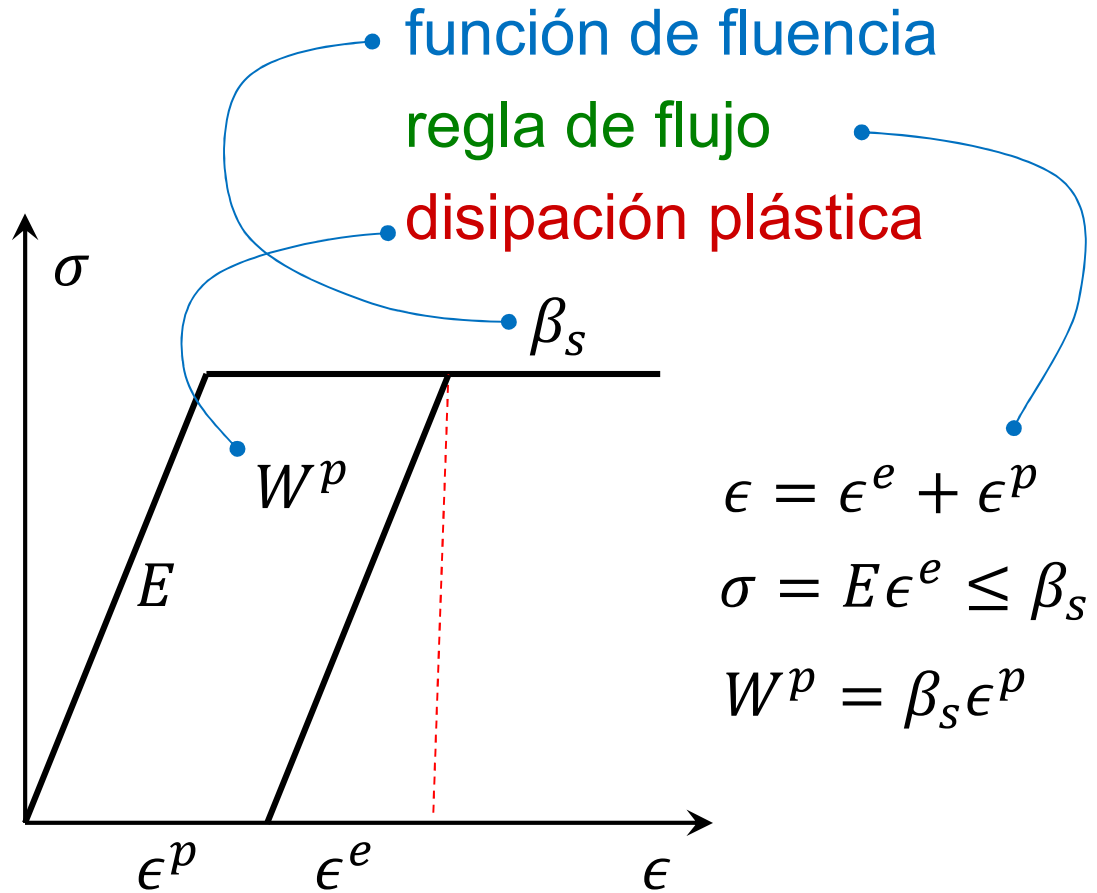




# La idea de la plasticidad perfecta



Ensayo de laboratorio



Interpretación

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p$$

$$\sigma = E\epsilon^e \leq \beta_s$$

$$W^p = \beta_s \epsilon^p$$

Teoría

# Plasticidad perfecta

## El rol de la función de fluencia



- **La tensión no puede ser mayor que la tensión de fluencia**
- Si la tensión es menor a la tensión de fluencia, el comportamiento es elástico
- Si la tensión es igual a la tensión de fluencia, puede haber deformación plástica
- La deformación plástica depende del trabajo aportado

$$f[\sigma] \leq 0$$

$$f[\sigma] < 0 \rightarrow \dot{\epsilon}^p = 0$$

$$f[\sigma] = 0 \rightarrow \dot{\epsilon}^p \geq 0$$

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{\dot{W}^p}{\beta_s}$$



# Índice

- Ecuaciones constitutivas
- Plasticidad: el bloque friccionante
- Introducción a la plasticidad perfecta
- **El modelo de Mohr-Coulomb**
- Plasticidad con endurecimiento
- Modelo de compresión edométrica

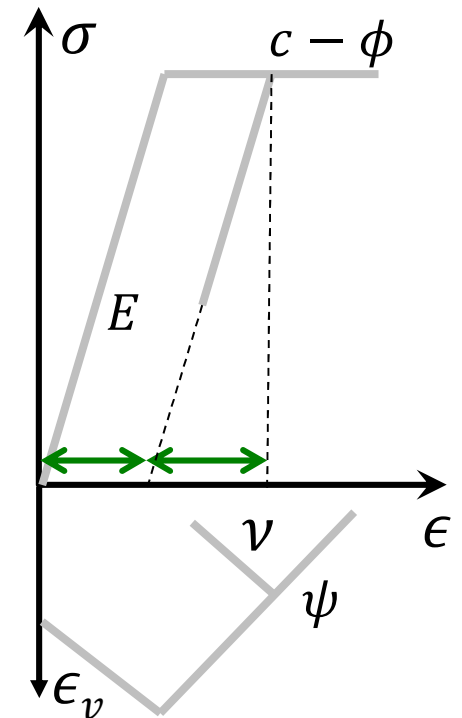


# El modelo de Mohr-Coulomb en el ensayo triaxial drenado

- Cinemática de la elastoplasticidad  
**¿Cuáles son los mecanismos que producen deformación?**

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p$$

*Es la hipótesis básica de la compatibilidad  
 Esta simple fórmula implica que no hay deformaciones dependientes del tiempo*



# El modelo de Mohr-Coulomb en el ensayo triaxial drenado

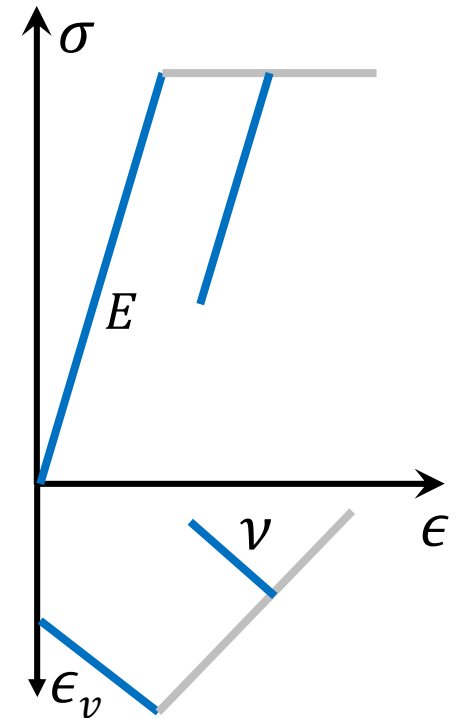


- Cinemática de la elastoplasticidad
- Relación tensión-deformación  
**¿cuál es la rigidez?**

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p$$

$$\dot{\sigma} = \mathbf{D} : \dot{\epsilon}^e$$

*Permite calcular las tensiones conociendo sólo la parte elástica de las deformaciones*







# El modelo de Mohr-Coulomb en el ensayo triaxial drenado

- Cinemática de la elastoplasticidad
- Relación tensión-deformación
- Función de fluencia
- Ley de flujo (**ángulo de dilatancia**)  
**¿hacia dónde se deforma?**

$$g_s = \sigma_3 - \sigma_1 + (\sigma_1 + \sigma_3) \sin[\psi] - 2c \cos[\psi] = 0$$

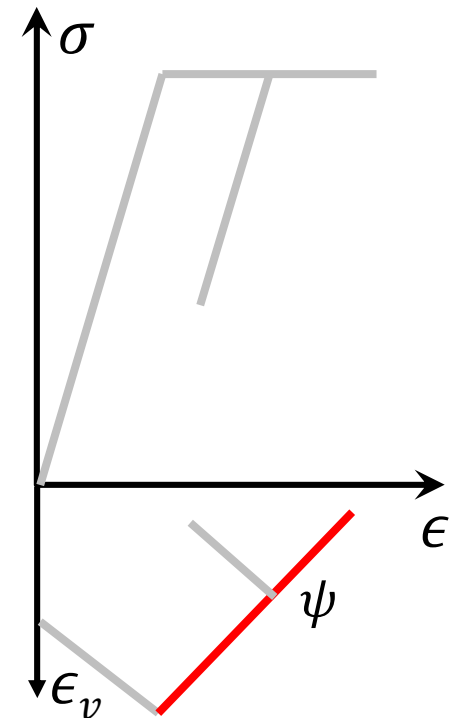
$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial g_s}{\partial \sigma}$$

*Permite establecer que dirección tendrán las deformaciones permanentes del material*

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p$$

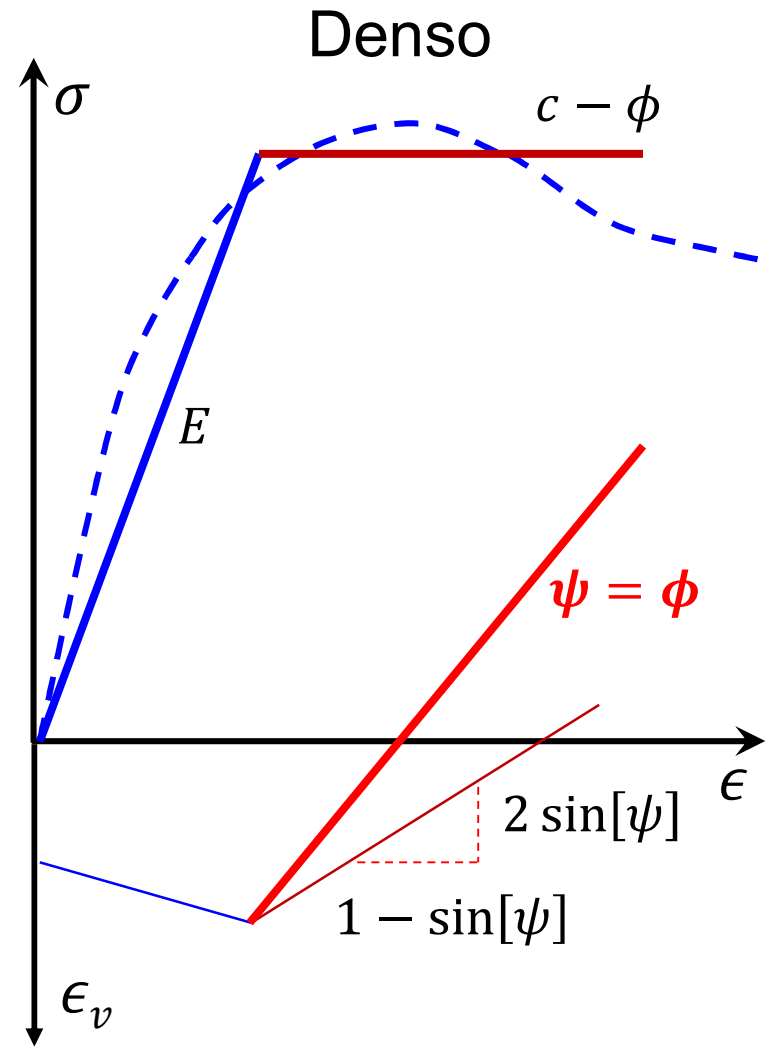
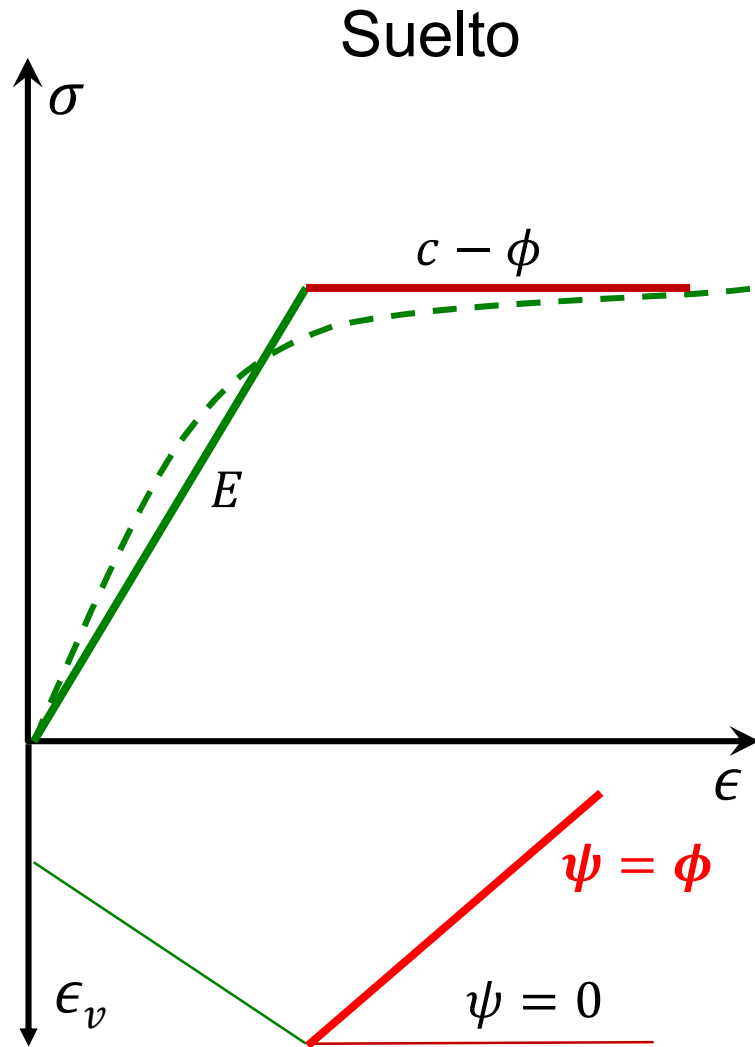
$$\dot{\sigma} = \mathbf{D} : \dot{\epsilon}^e$$

$$f_s = 0$$





# Plasticidad asociativa y no asociativa explicada en el ensayo triaxial drenado





# Índice

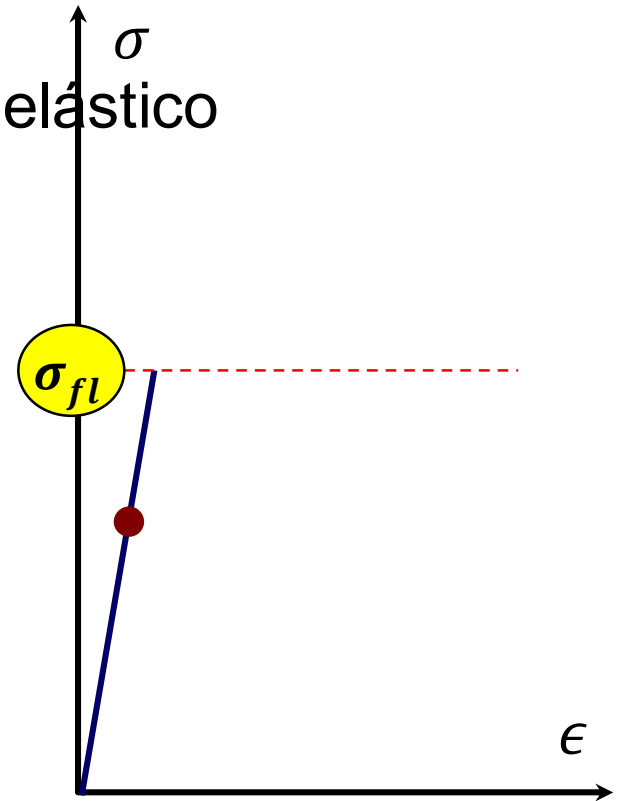
- Ecuaciones constitutivas
- Plasticidad: el bloque friccionante
- Introducción a la plasticidad perfecta
- El modelo de Mohr-Coulomb
- **Plasticidad con endurecimiento**
- Modelo de compresión edométrica



# El concepto de la plasticidad con endurecimiento

Función de fluencia  $f[\sigma] = \|\sigma\| - (\sigma_{fl} + \alpha \cdot \|\epsilon^p\|) = 0$

Mientras  $f < 0$  el material está en estado elástico

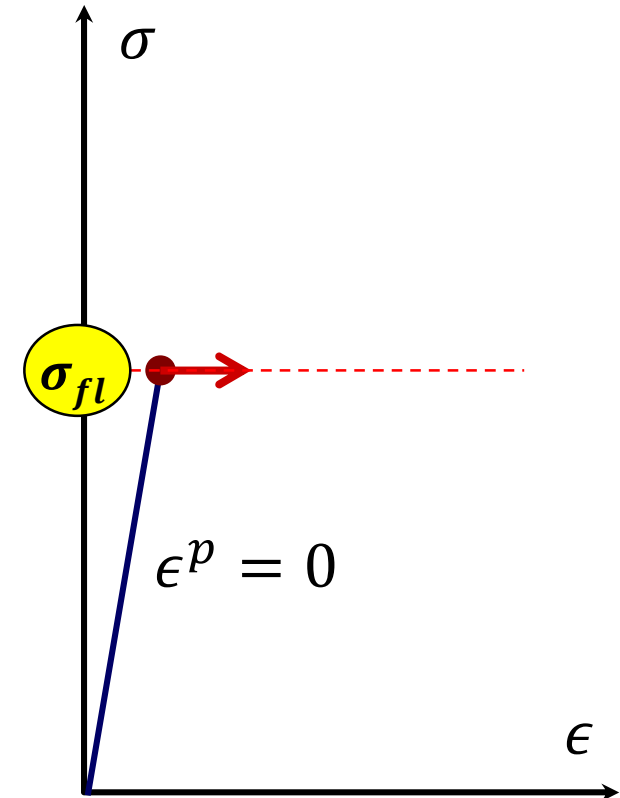


# El concepto de la plasticidad con endurecimiento



Función de fluencia  $f[\sigma] = \|\sigma\| - (\sigma_{fl} + \alpha \cdot \|\epsilon^p\|) = 0$

Cuando  $f = 0$  comienzan las deformaciones plásticas



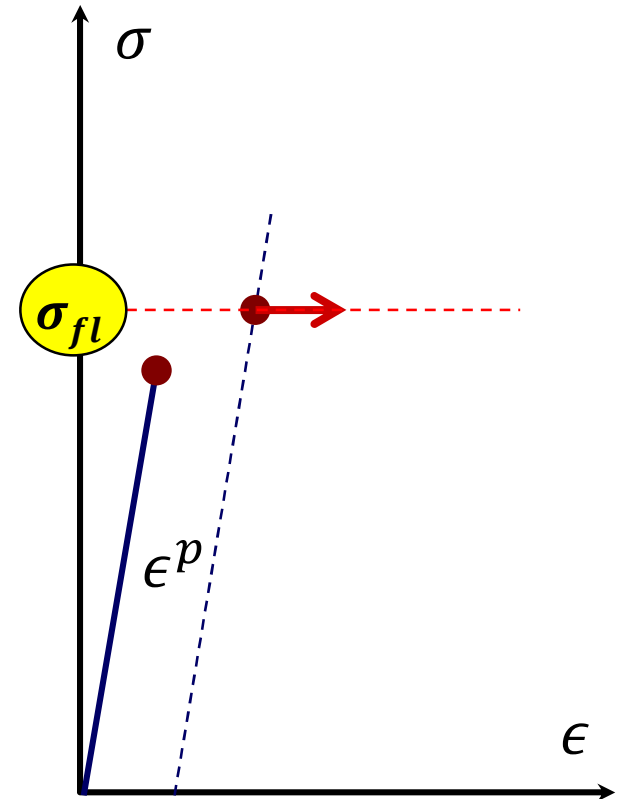


# El concepto de la plasticidad con endurecimiento

Función de fluencia  $f[\sigma] = \|\sigma\| - (\sigma_{fl} + \alpha \cdot \|\epsilon^p\|) = 0$

Cuando  $f = 0$  comienzan las deformaciones plásticas

El material “endurece”, o sea, aumenta su tensión de fluencia





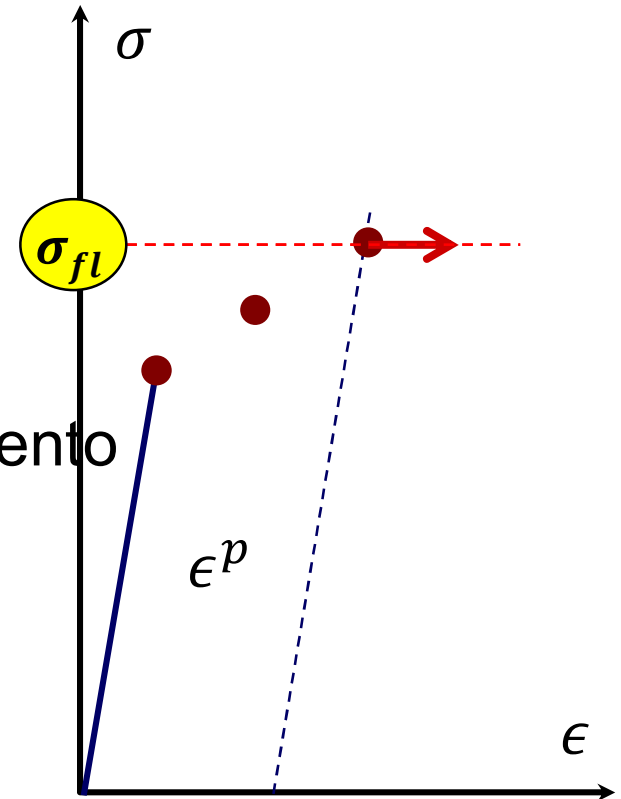
# El concepto de la plasticidad con endurecimiento

Función de fluencia  $f[\sigma] = \|\sigma\| - (\sigma_{fl} + \alpha \cdot \|\epsilon^p\|) = 0$

Cuando  $f = 0$  comienzan las deformaciones plásticas

El material “endurece”, o sea, aumenta su tensión de fluencia

Mas deformación implica más endurecimiento





# El concepto de la plasticidad con endurecimiento

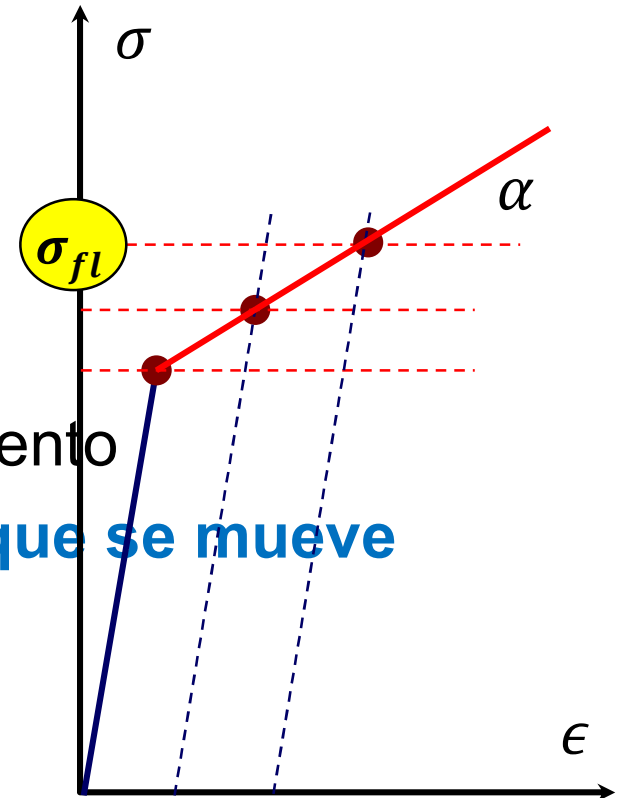
Función de fluencia  $f[\sigma] = \|\sigma\| - (\sigma_{fl} + \alpha \cdot \|\epsilon^p\|) = 0$

Cuando  $f = 0$  comienzan las deformaciones plásticas

El material “endurece”, o sea, aumenta su tensión de fluencia

Mas deformación implica más endurecimiento

**La línea inclinada es una “horizontal” que se mueve**





# Índice

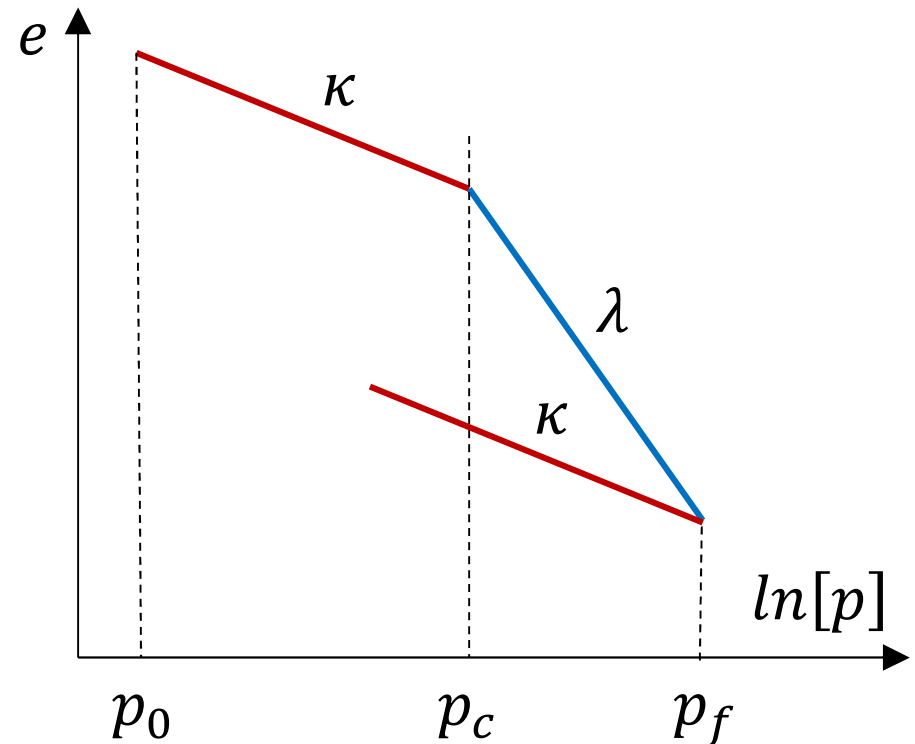
- Ecuaciones constitutivas
- Plasticidad: el bloque friccionante
- Introducción a la plasticidad perfecta
- El modelo de Mohr-Coulomb
- Plasticidad con endurecimiento
- **Modelo de compresión edométrica**



# Modelo de compresión edométrica

## Hipótesis

- Cinemática de grandes deformaciones
  - $\Delta\epsilon_v = \Delta e / (1 + e)$
  - $\Delta e = (1 + e)\Delta\epsilon_v$
- Material elastoplástico
  - $\Delta\epsilon = \Delta\epsilon^e + \Delta\epsilon^p$
- Compresión unidimensional
  - $\Delta\epsilon_3 = \Delta\epsilon_3^e + \Delta\epsilon_3^p = 0$
- Respuestas **elástica** y **elastoplástica** lineales en  $e - \ln[p]$



**Esto implica que la fluencia no ocurre a presión constante: plasticidad con endurecimiento**



# Cinemática de deformación

## Carga **elástica**

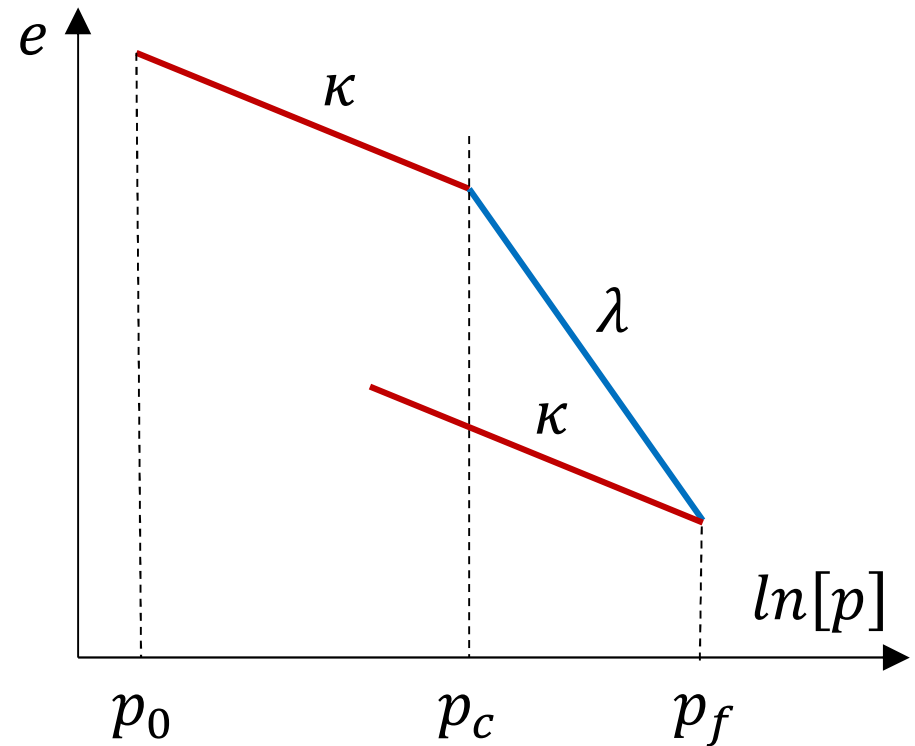
- $\Delta\epsilon_1^e > 0, \Delta\epsilon_1^p = 0$
- $\Delta\epsilon_3^p = 0 \rightarrow \Delta\epsilon_3^e = 0$

## Carga **elastoplástica**

- $\Delta\epsilon_1^e > 0, \Delta\epsilon_1^p > 0$
- $\Delta\epsilon_3^e > 0 \rightarrow \Delta\epsilon_3^p = -\Delta\epsilon_3^e$

## Descarga **elástica**

- $\Delta\epsilon_1^e < 0, \Delta\epsilon_1^p = 0$
- $\Delta\epsilon_3^p = 0 \rightarrow \Delta\epsilon_3^e = 0$





# Relación tensión-deformación

- Del gráfico

$$\Delta e = \kappa \ln \left[ \frac{p + \Delta p}{p} \right]$$

- Reemplazando

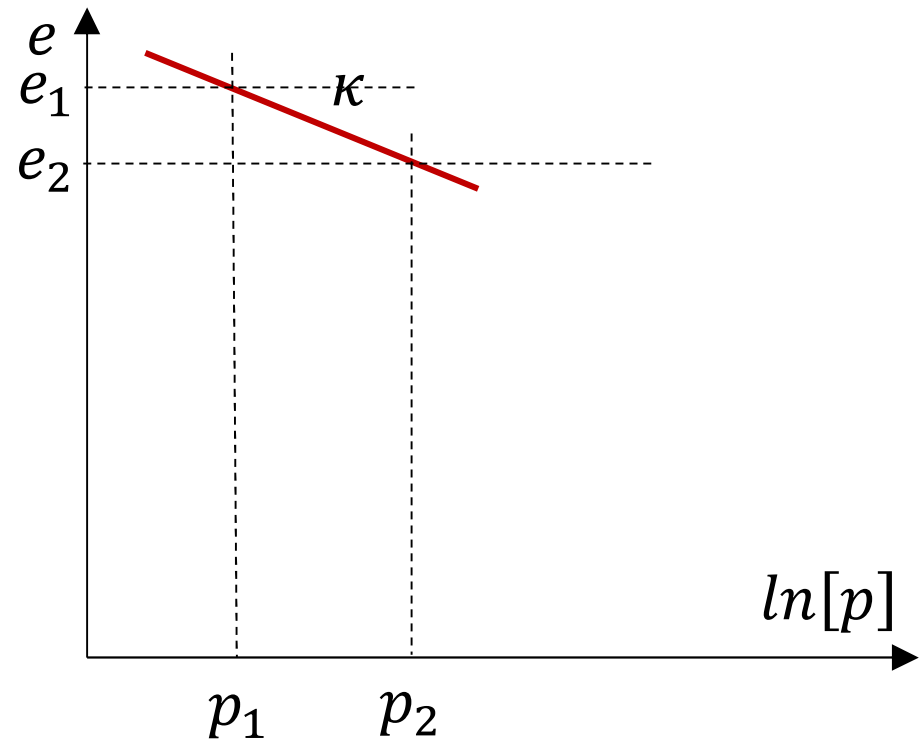
$\Delta \epsilon_v = \Delta e / (1 + e)$  y derivando

$$\frac{\partial p}{\partial \epsilon_v^e} = K[p, e] = \frac{1 + e}{\kappa} p$$

- En forma incremental

$$\dot{p} = \frac{1 + e}{\kappa} p \cdot \dot{\epsilon}_v^e$$

$$\dot{\epsilon}_v^e = \frac{\kappa}{(1 + e)p} \dot{p}$$





# Función de fluencia y deformaciones plásticas

- La función de fluencia es

$$F = p - p_c = 0$$

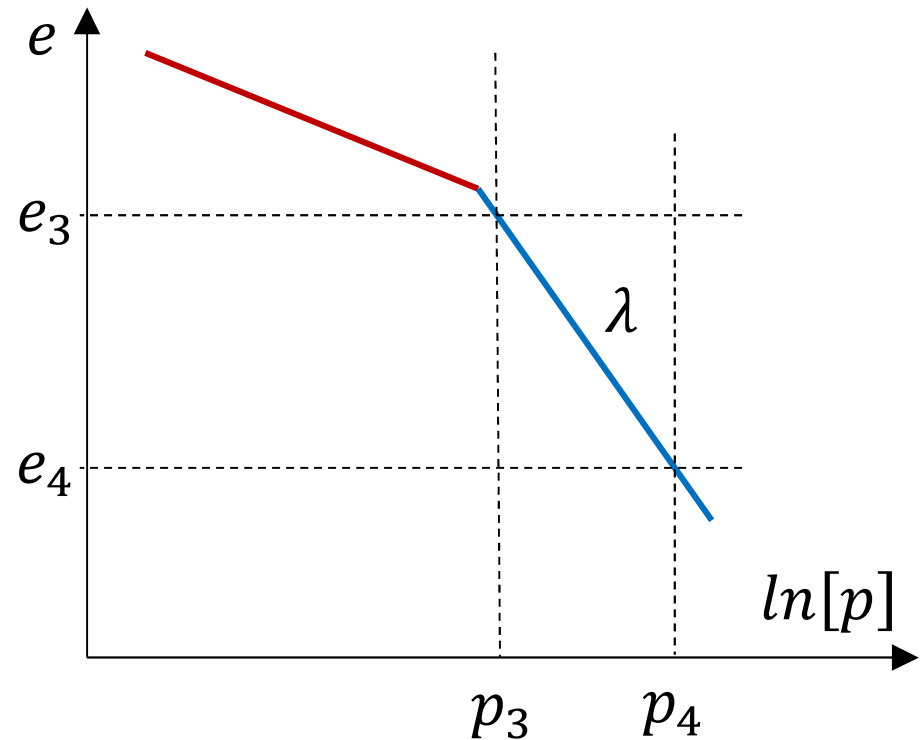
- Con el mismo procedim.

$$\dot{\epsilon}_v = \frac{\lambda}{(1+e)p} \dot{p}$$

- Pero  $\dot{\epsilon}_v = \dot{\epsilon}_v^e + \dot{\epsilon}_v^p$

$$\dot{\epsilon}_v^p = \dot{\epsilon}_v - \dot{\epsilon}_v^e = \frac{\lambda - \kappa}{(1+e)p} \dot{p}$$

$$\dot{p} = \left( \frac{1+e}{\lambda - \kappa} p \right) \dot{\epsilon}_v^p \rightarrow K^p[e, p] = \frac{1+e}{\lambda - \kappa} p$$



**Esta es una formulación moderna de la compresión 1D**

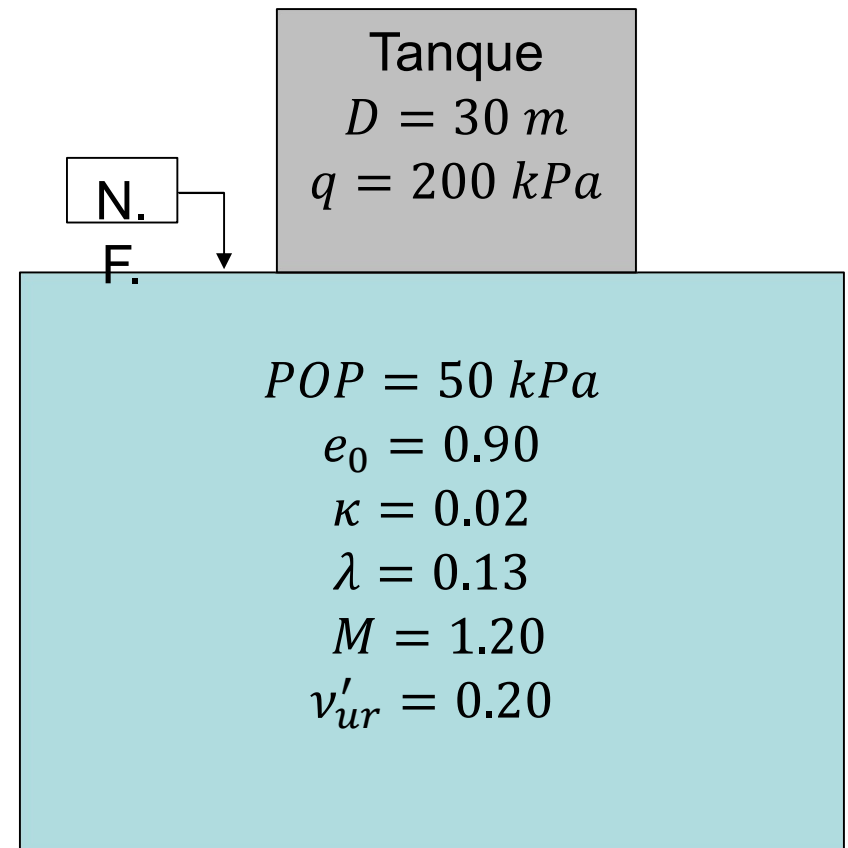


# Ejemplo: carga de tanque

Tanque 30m de diámetro, carga 200 kPa,  
fundado en arcilla preconsolidada

Tres escenarios de carga:

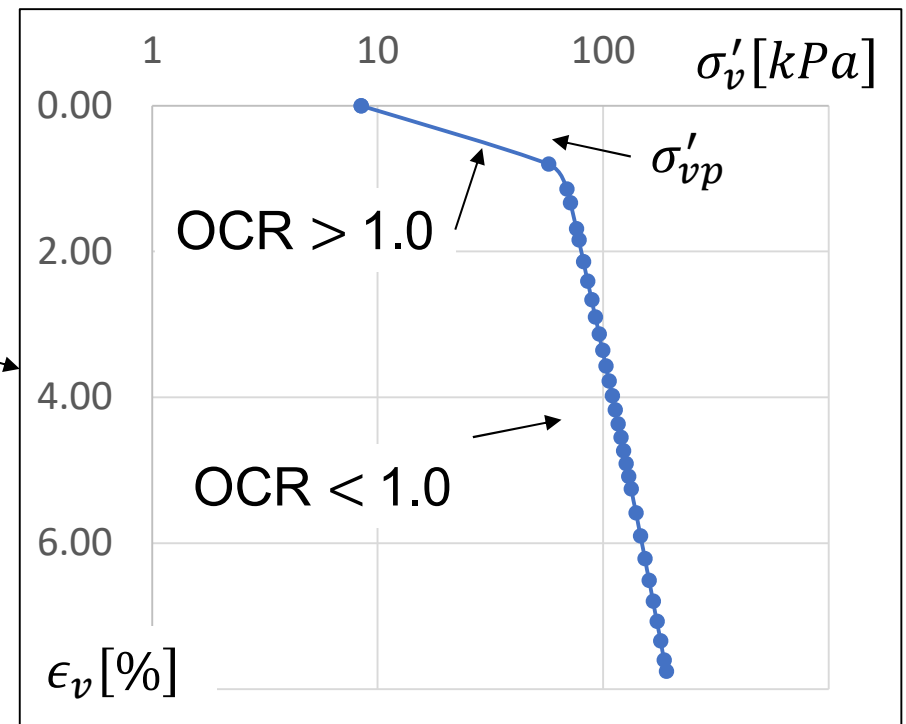
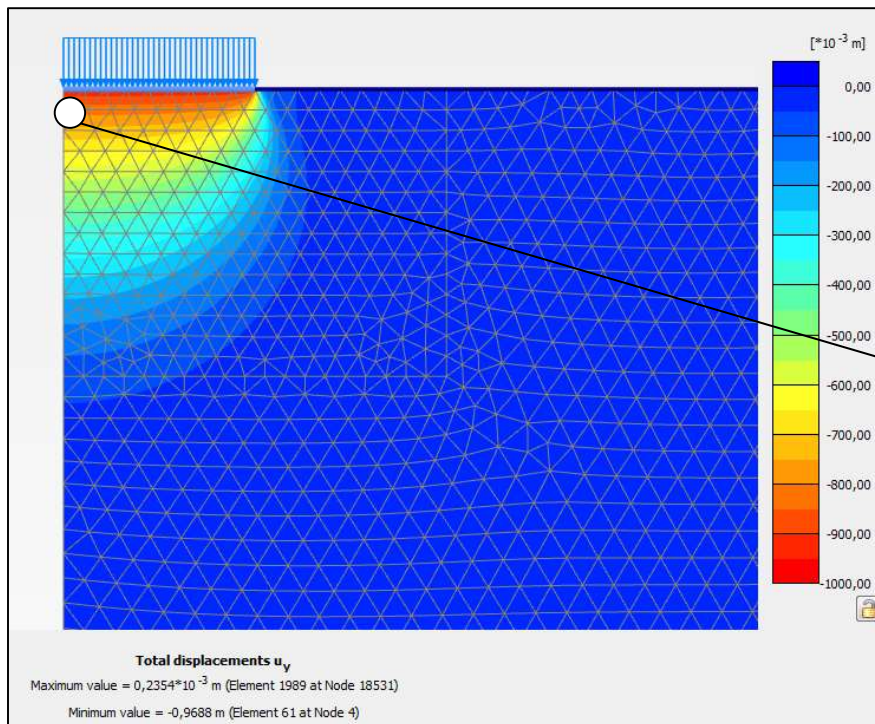
- Carga lenta (drenado)
- Carga rápida (no drenado)
- Carga en cuatro etapas rápidas (no drenadas) de 50kPa, con consolidación entre etapas





# Ejemplo: carga lenta

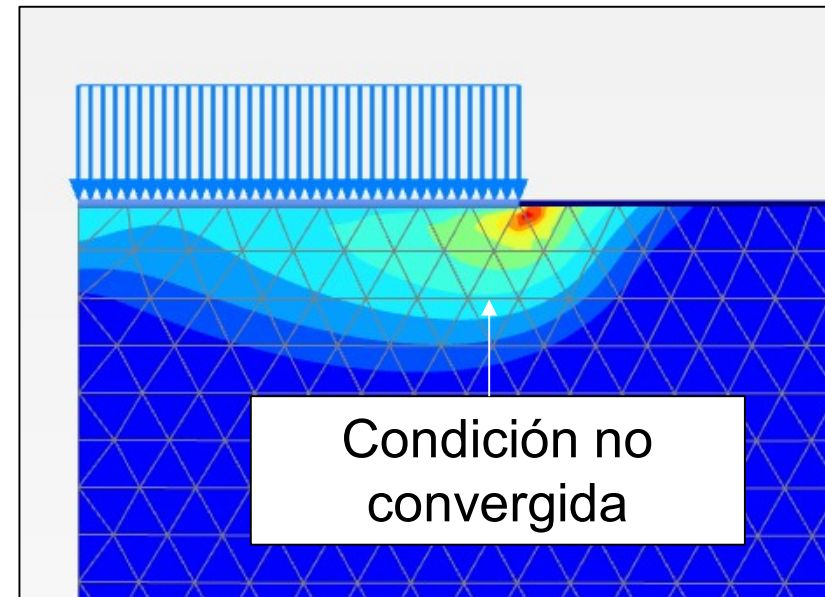
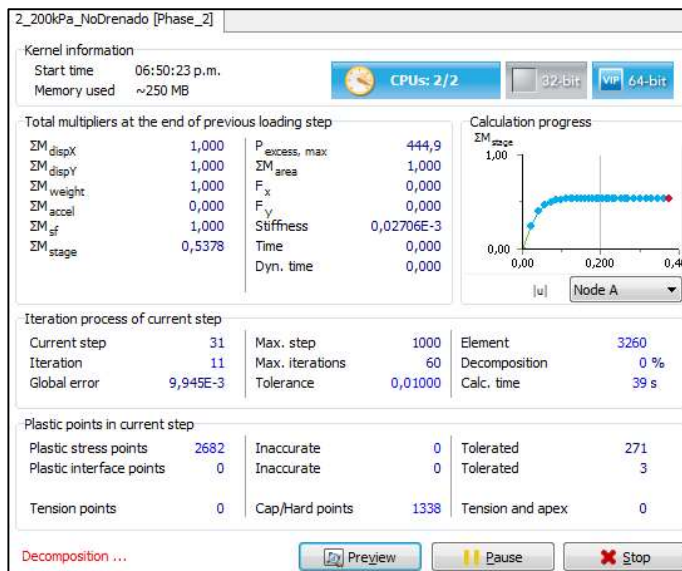
- **Carga lenta = comportamiento drenado**
- Fundación estable, no falla
- Asentamiento máximo bajo platea 98 cm





# Ejemplo: carga rápida

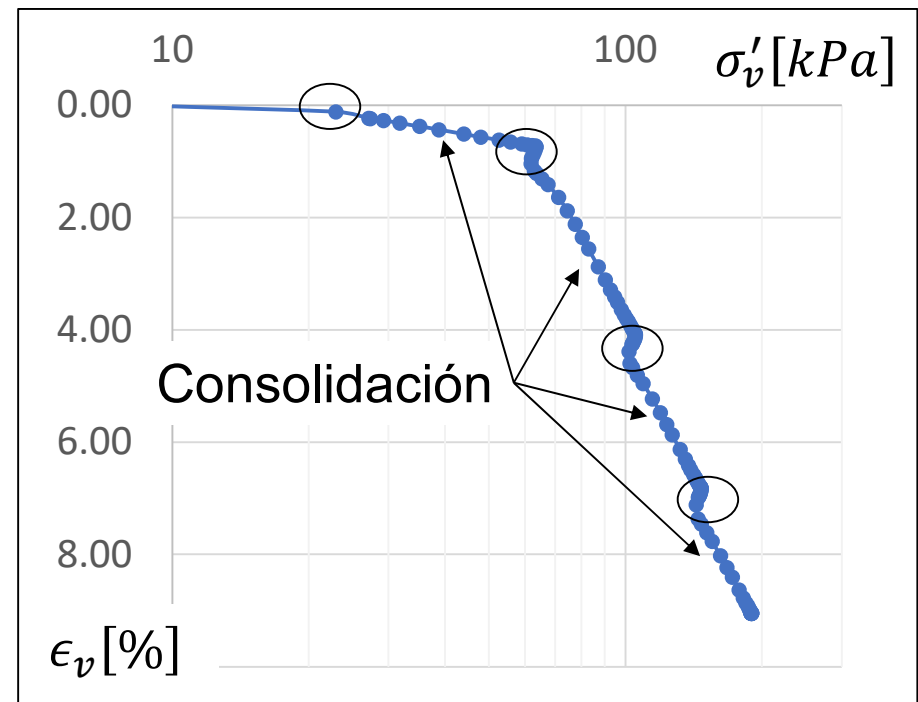
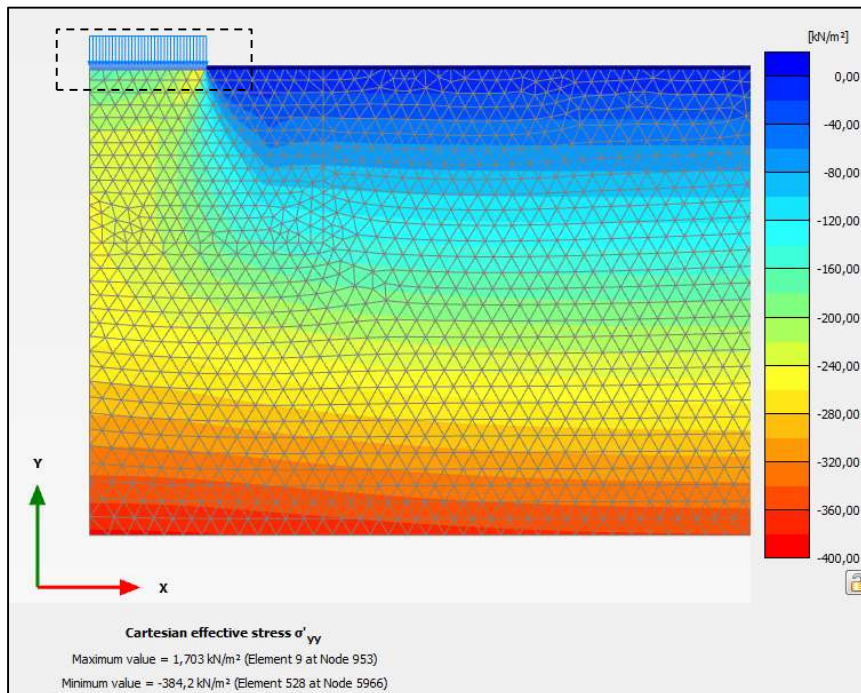
- **Carga única = carga rápida = comportamiento no drenado**
- El suelo falla antes de la carga de 200 kPa
- $s_u \cong \frac{1}{2} \sin[\phi'] \sigma'_v \cdot OCR^{(\lambda-\kappa)/\lambda}$
- $Q_{ult} \cong 1.2 (2 + \pi) s_u \cong 6 \cdot 0.23 \cdot 50 \text{ kPa} \cong 70 \text{ kPa} < 200 \text{ kPa}$





# Ejemplo: carga en cuatro etapas

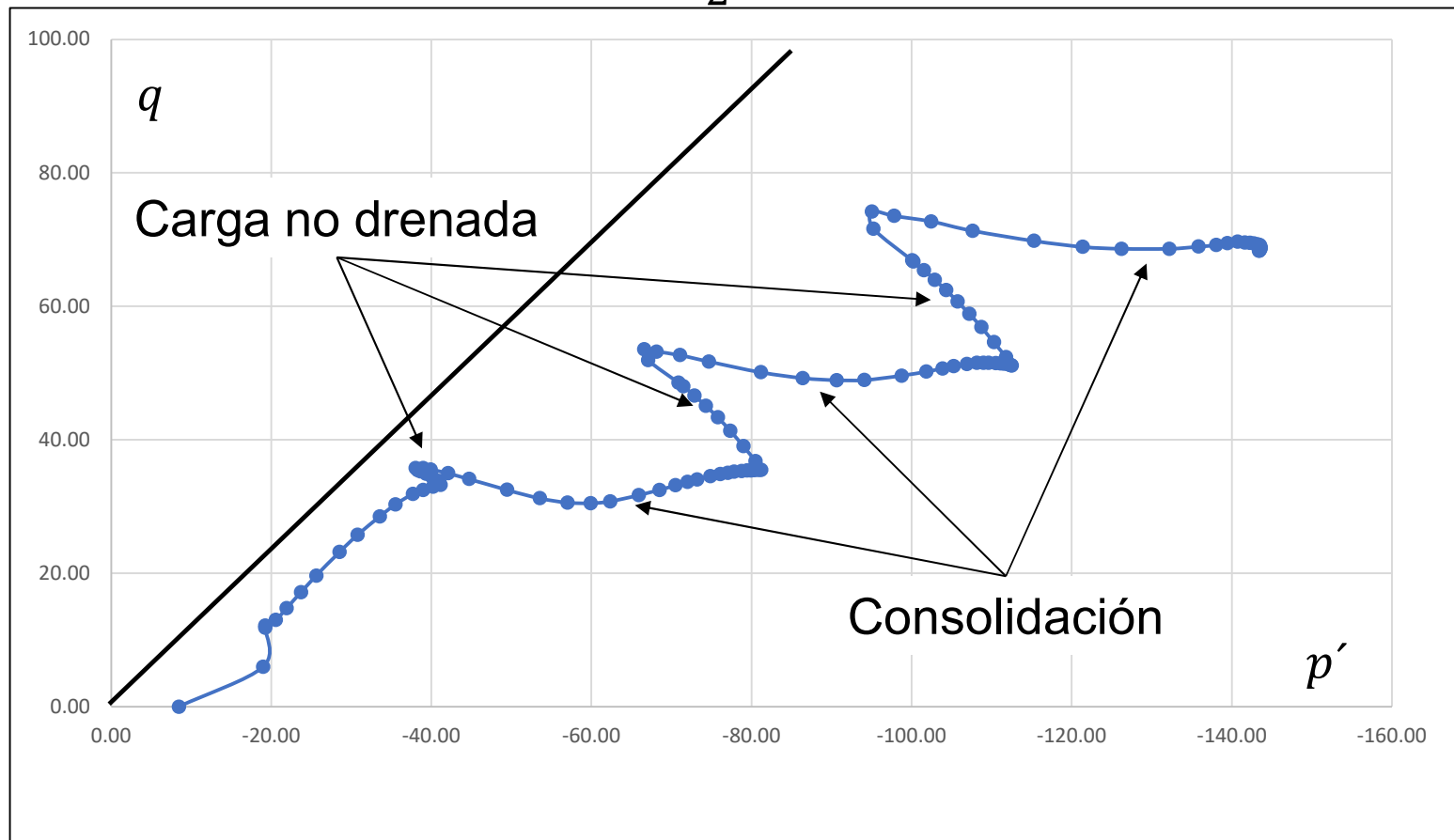
- **Carga rápida durante etapas = comportamiento no drenado**
- Consolidación del 95% entre escalones de carga
- La próxima etapa resiste mas





# Ejemplo: carga en cuatro etapas trayectoria $p' - q$

La reducción de  $e$  aumenta  $s_u = \frac{1}{2} \sin[\phi'] \sigma_v' \cdot OCR^{(\lambda-\kappa)/\lambda}$



# Bibliografía



## Básica

- Powrie, W. Soil Mechanics. Concepts and Applications. 2ª Ed. Spon Press.
- **Potts et al. Guidelines for the use of advanced numerical analyses. COST Action C7. Telford.**
- Jimenez Salas et al. Geotecnia y Cimientos. Rueda

## Complementaria

- Chen, W. y Mizuno, W. Nonlinear analysis in soil mechanics. Elsevier.
- Chen, W y Liu, X. Limit analysis in soil mechanics. Elsevier
- Potts y Zdracovic. Finite element analysis in geotechnical engineering. Theldord.
- Zienkiewicz et al. Computational geomechanics. Wiley.

