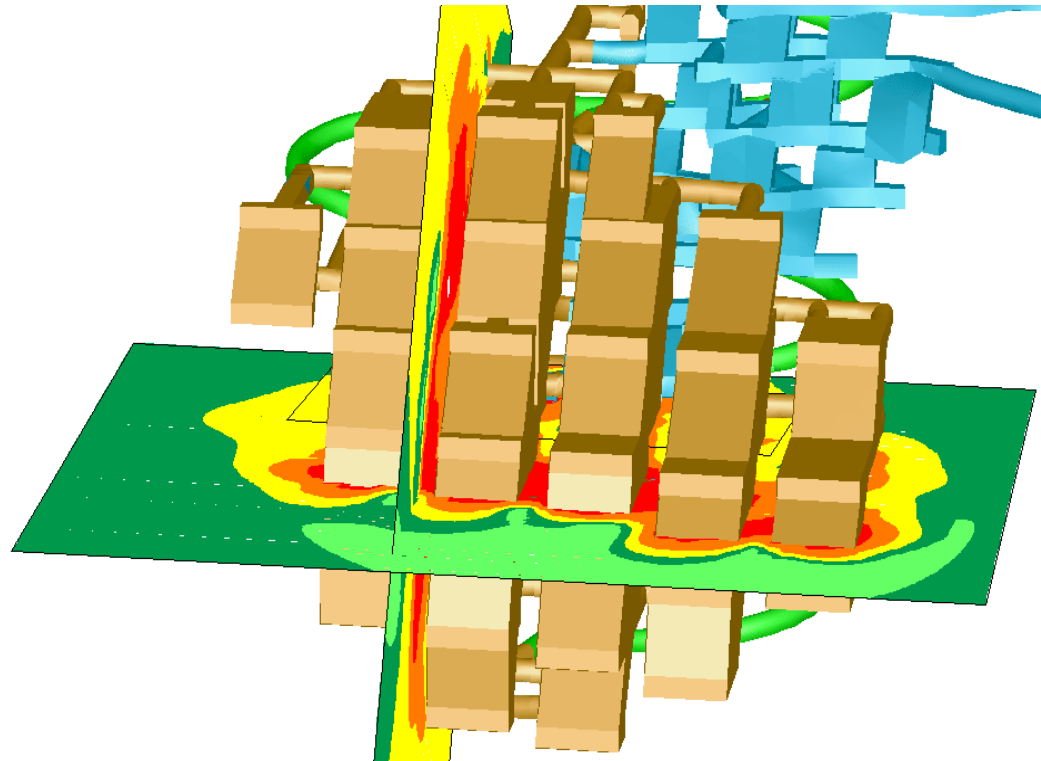




Elasticidad aplicada a geotecnia



Mecánica de Suelos y Geología
Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires

Índice



- Elasticidad aplicada a geomateriales
- El problema de Boussinesq
- Presión de contacto y asiento de zapatas
- Coeficiente de reacción de la subrasante



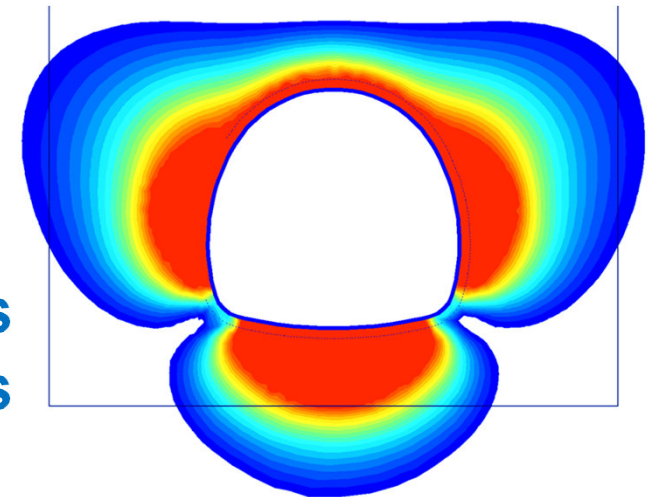
Problemas “elásticos” en geotecnia y determinación de parámetros

Cuando el suelo está lejos de “falla”

- Propagación de ondas
- Fundaciones con cargas de servicio
- Vibraciones de máquinas
- Carga lateral en pilotes
- Tensiones alrededor de túneles
- Minería subterránea a gran escala

Los parámetros elásticos dependen del rango de deformación del problema

Las concentraciones de tensiones locales se resuelven con modelos elastoplásticos

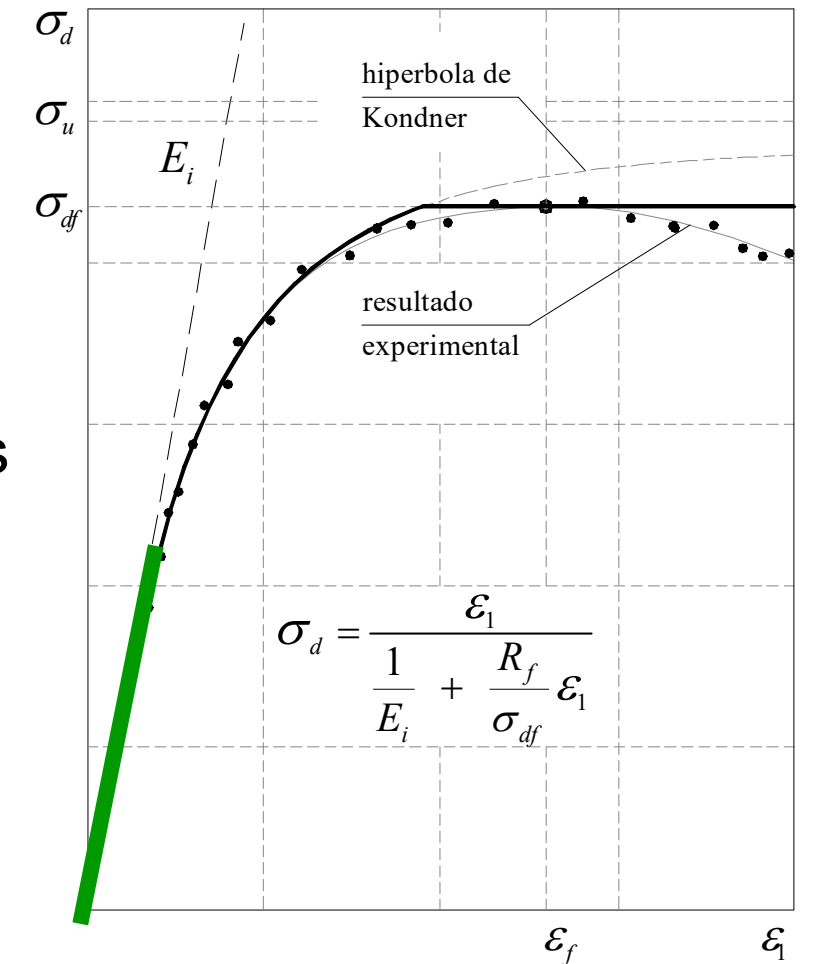


Elasticidad aplicada a problemas geotécnicos



Condiciones necesarias

- Las tensiones inducidas en el terreno son menores a su resistencia
(no hay plasticidad por corte)
- Los suelos están sobreconsolidados
(no hay plasticidad por compresión)





La idea de la elasticidad lineal (1D)

El material elástico lineal tiene un **comportamiento lineal y reversible para cualquier tensión aplicada**

Parámetros necesarios de un modelo elástico

- Módulo de Young

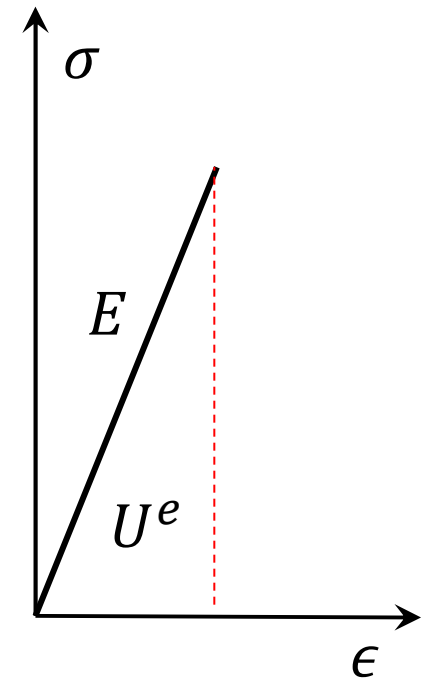
$$E = \partial\sigma / \partial\epsilon = \sigma / \epsilon$$

- Coeficiente de Poisson

$$\nu = -\partial\epsilon_3 / \partial\epsilon_1 = -\epsilon_3 / \epsilon_1$$

Energía elástica almacenada (1D)

$$U^e = \frac{1}{2} \sigma \cdot \epsilon = \frac{1}{2} \epsilon \cdot E \cdot \epsilon$$





Elasticidad lineal isotrópica

La relación $\sigma = \epsilon \cdot E$ es 1D (σ y ϵ son escalares)

En el espacio general de tensiones la relación es

- En componentes $\sigma_{ij} = K\epsilon_{kk}\delta_{ij} + 2G\epsilon_{ij}^d$
- En notación tensorial $\boldsymbol{\sigma} = K\epsilon_v\mathbf{1} + 2G\boldsymbol{\epsilon}^d$
- Para deformación plana (caso 2D) con tensiones iniciales (i)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^i \\ \sigma_{yy}^i \\ \sigma_{zz}^i \\ \sigma_{xy}^i \end{Bmatrix}$$



Elasticidad lineal isotrópica

El trabajo de deformación (\dot{W}) debe ser positivo

$$\dot{W} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = p\dot{\epsilon}_v + s_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}^d = K\epsilon_v\dot{\epsilon}_v + 2G\epsilon_{ij}^d\dot{\epsilon}_{ij}^d$$

$$\dot{W} > 0 \forall \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \rightarrow \mathbf{K} > \mathbf{0} \wedge \mathbf{G} > \mathbf{0}$$

$$K > 0 \wedge G > 0 \rightarrow \mathbf{E} > \mathbf{0} \wedge -1.0 < \nu < 0.5$$

Las relaciones entre parámetros elásticos son

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad E_{oed} = \frac{(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} E$$

$$\text{Para } \nu \sim 0.30 \rightarrow G \sim 0.38E \quad K \sim 0.83E \quad E_{oed} \sim 1.35E$$



Relaciones simples empleadas en geotecnia

Tensión desviadora

$$q = \sigma_1 - \sigma_3 = E \epsilon_1 = 3G \epsilon_q$$

Deformación por corte

$$\epsilon_q = \frac{2}{3} (\epsilon_3 - \epsilon_1) = \frac{\epsilon_1}{1 - 2\nu}$$

Presión media

$$p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = K \epsilon_v$$

Trayectoria edométrica (consolidación)

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial \sigma_z} = \frac{\nu}{1 - \nu} = \frac{3K - 2G}{3K + 4G}$$

Índice



- Elasticidad aplicada a geomateriales
- El problema de Boussinesq
- Presión de contacto y asiento de zapatas
- Coeficiente de reacción de la subrasante

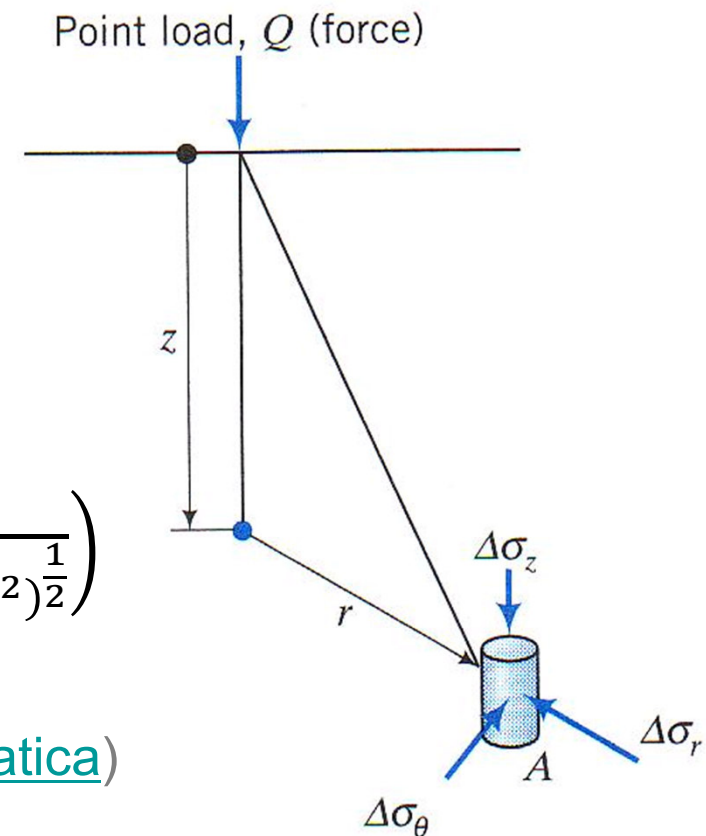


Teoría de Boussinesq para carga puntual

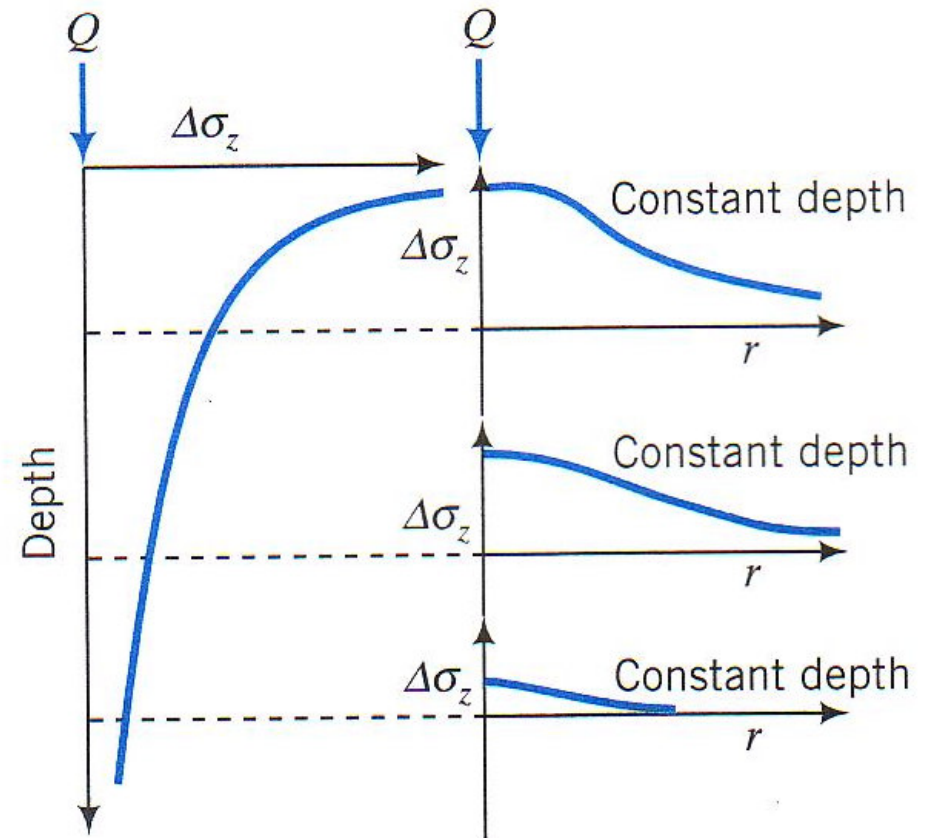
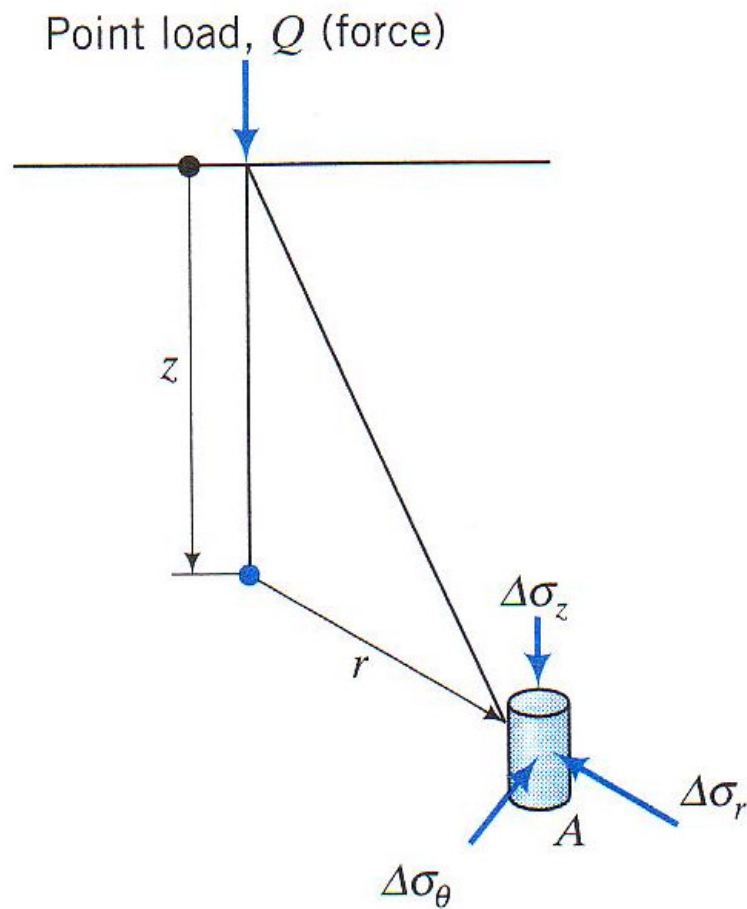
Tensiones en un punto de un espacio **semi-infinito, elástico-lineal, isótropo** para carga normal concentrada Q actuando en superficie

- $$\sigma_z = \frac{3Q}{2\pi z^2} \left(\frac{z^2}{z^2+r^2} \right)^{5/2}$$
- $$\sigma_r = \frac{Q}{2\pi} \left(\frac{3r^2 z}{(r^2+z^2)^{5/2}} - \frac{1-2\nu}{r^2+z^2+z(r^2+z^2)^{1/2}} \right)$$
- $$\sigma_\theta = -\frac{Q}{2\pi} (1-2\nu) \left(\frac{z}{(r^2+z^2)^{3/2}} - \frac{1}{r^2+z^2+z(r^2+z^2)^{1/2}} \right)$$
- $$\sigma_{rz} = \frac{3Q}{2\pi} \left(\frac{rz^2}{(r^2+z^2)^{5/2}} \right)$$

([Mathematica](#))



Teoría de Boussinesq para carga puntual



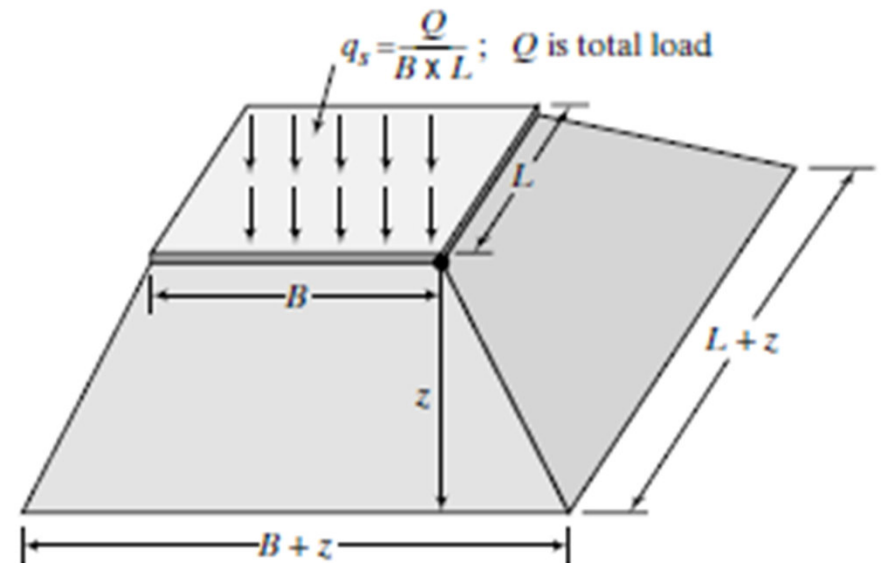


Boussinesq “simplificado” (método 2:1)

Para análisis preliminares, la propagación de tensiones verticales en el terreno puede calcularse asumiendo una distribución 2V: 1H

- $q_s^{prof\ z} = \frac{Q}{(B+z)(L+z)} = \frac{q_s BL}{(B+z)(L+z)}$
- $\Delta\sigma_z = q_s - q_s^{prof\ z}$

El método es razonablemente válido cuando $z > B$



Índice

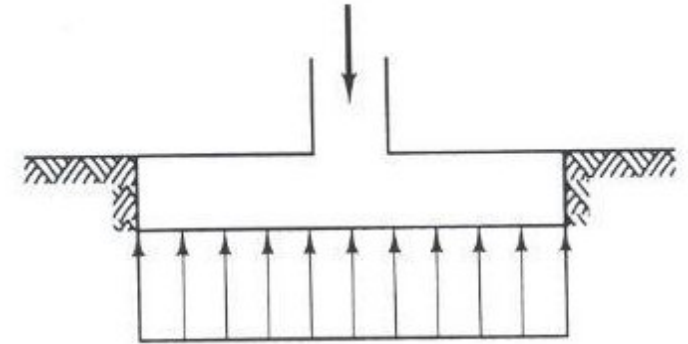


- Elasticidad aplicada a geomateriales
- El problema de Boussinesq
- Presión de contacto y asiento de zapatas
- Coeficiente de reacción de la subrasante

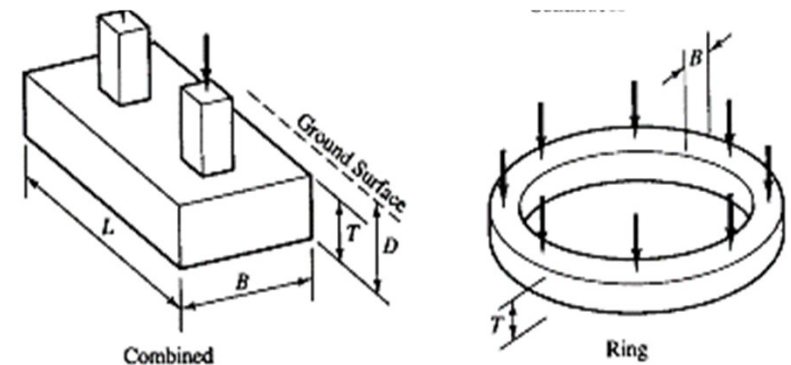
Fundaciones superficiales: zapatas y vigas



Zapatas ($L \geq B$) : **estructuras rígidas** en las que se asume que se transmite una “**presión uniforme**” al terreno



Vigas ($L \gg B$) : **estructuras flexibles** que interactúan “**elásticamente**” con el terreno



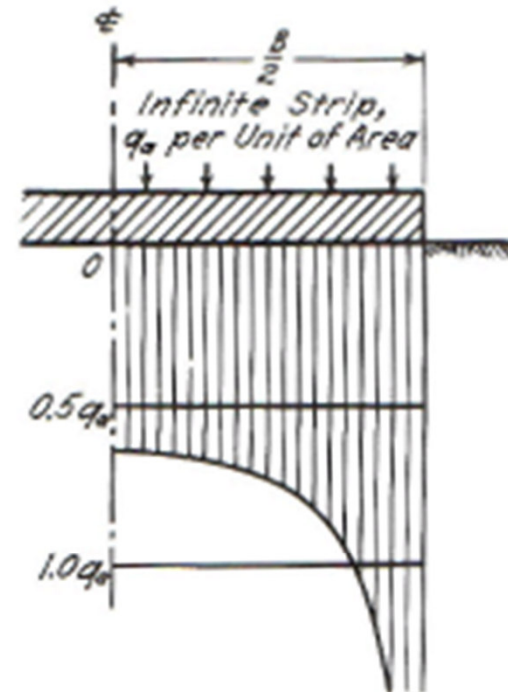
El tema es objeto de “Geotecnia Aplicada”



Fundaciones superficiales: distribución de tensiones bajo zapatas rígidas y flexibles

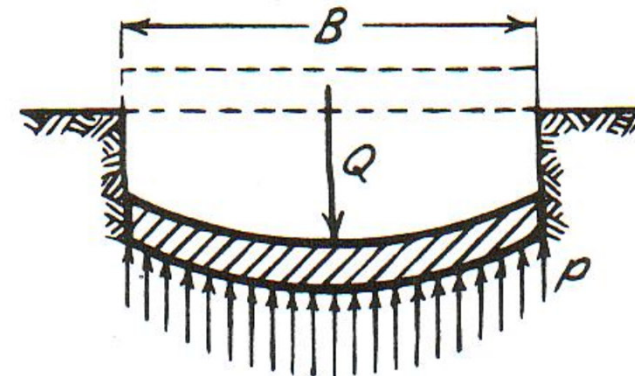
Zapata rígida

- Asentamiento uniforme
- Mayor presión en los bordes



Zapata flexible

- Presión uniforme
- Mayor asentamiento en el centro



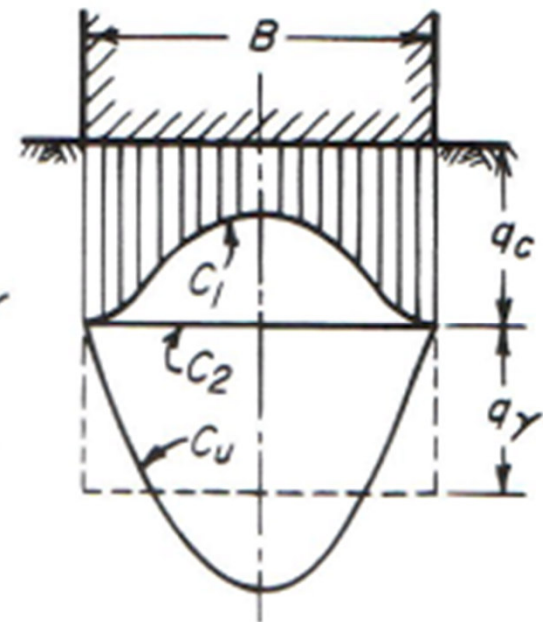
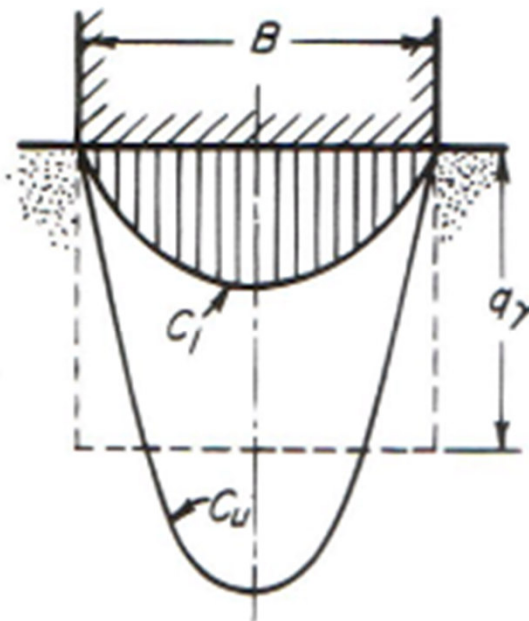
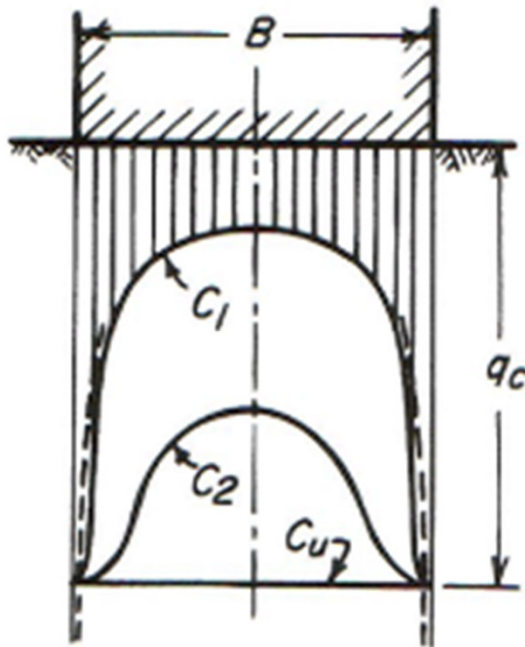


Fundaciones superficiales: tensiones verticales bajo zapatas en distintos suelos

Teoría de elasticidad
rigidez independiente
del confinamiento

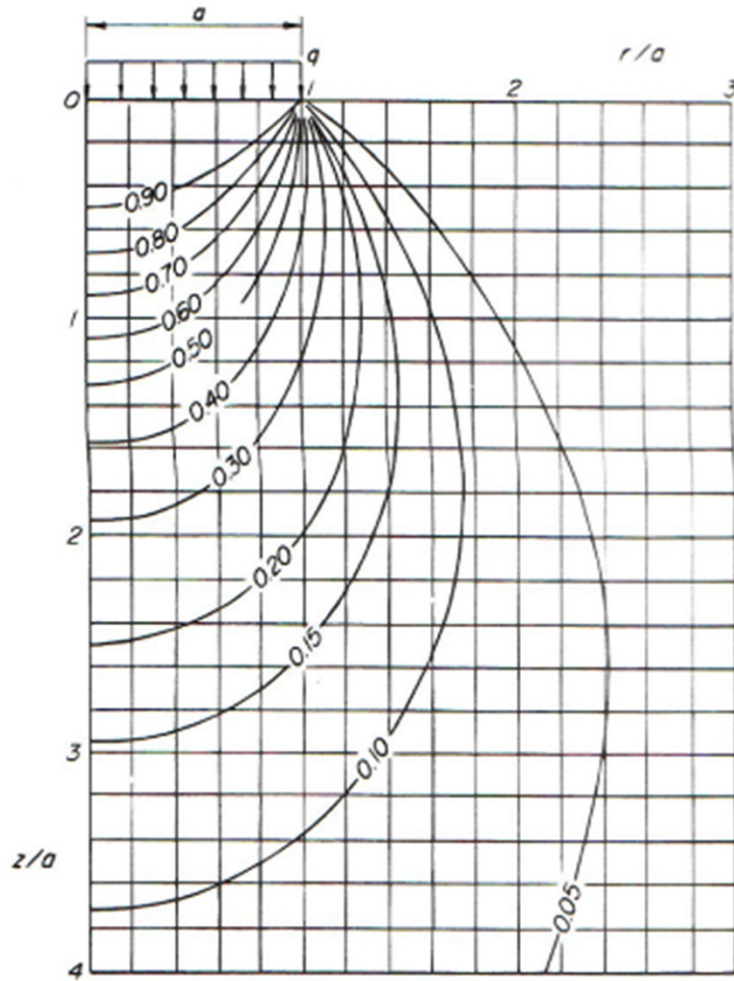
“arenas”
rigidez nula sin
confinamiento

“arcillas”
plastificación parcial
del borde de zapata



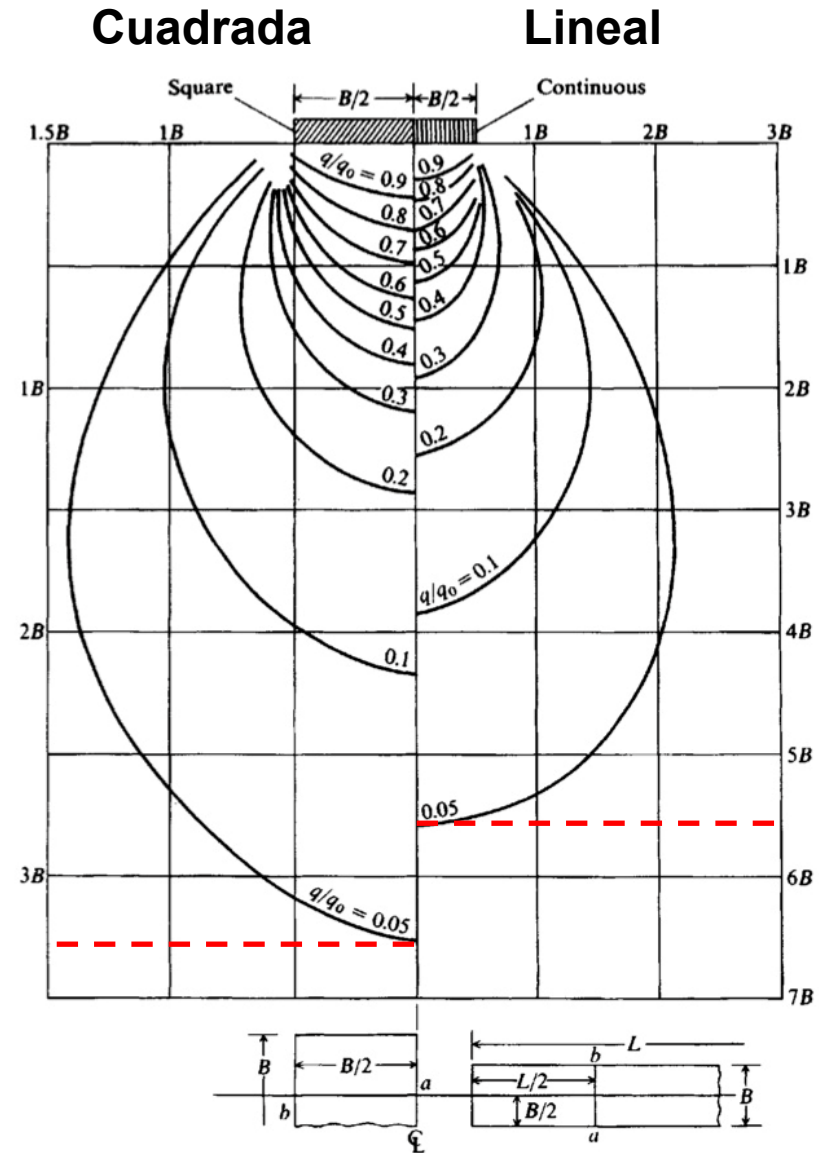


Fundaciones superficiales: tensiones bajo zapata circular, cuadrada y lineal

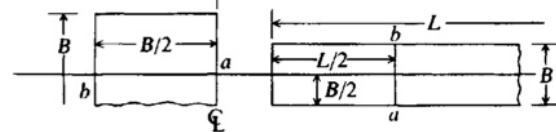


Circular

$3.5B$



$5.5B$



Método de Schmertmann

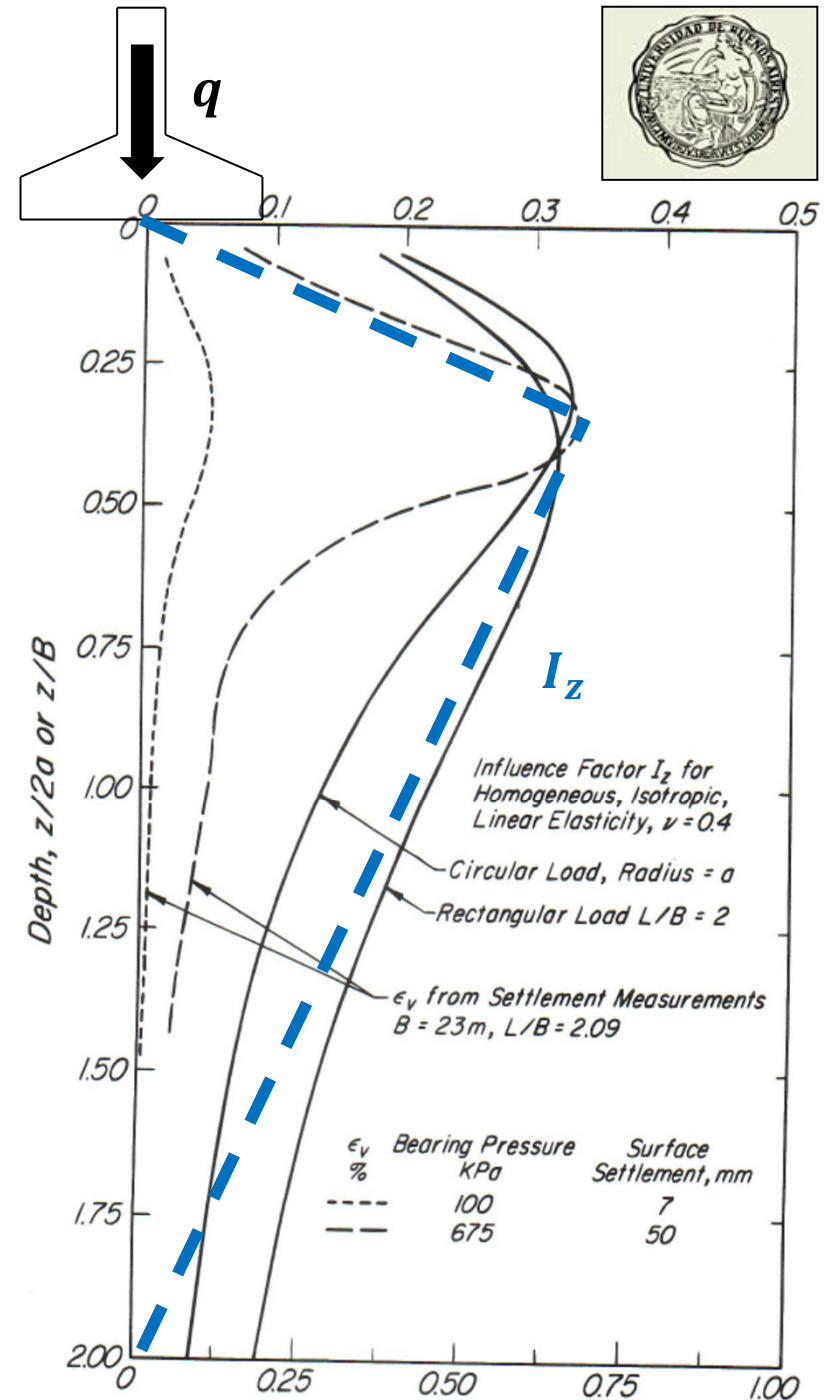
Se asume rigidez constante en cada estrato

- $$\varepsilon_z = \frac{1}{E_s} \left(\Delta\sigma_z + \nu(\Delta\sigma_x + \Delta\sigma_y) \right)$$

Se reemplaza la solución exacta por una aproximada y se integra

- $$\varepsilon_z = \frac{q}{E_s} I_z$$
- $$\delta = \int_0^{\infty} \varepsilon_z dz$$

El método estima solamente asentamientos elásticos



Método de Schmertmann

$$\delta = \int_0^{\infty} \varepsilon_z dz \cong c_1 c_2 c_3 (q - \sigma_{zD}) \sum \frac{I_z}{E} \Delta z$$

$$z < B/2 \rightarrow I_z = 0.2(1 + 4z/B)$$

$$z < z_{max} \rightarrow I_z = 0.6 \left(1 - \frac{z-B/2}{z_{max}-B/2} \right)$$

$$z_{max} = 2B(1 + \log(L/B))$$

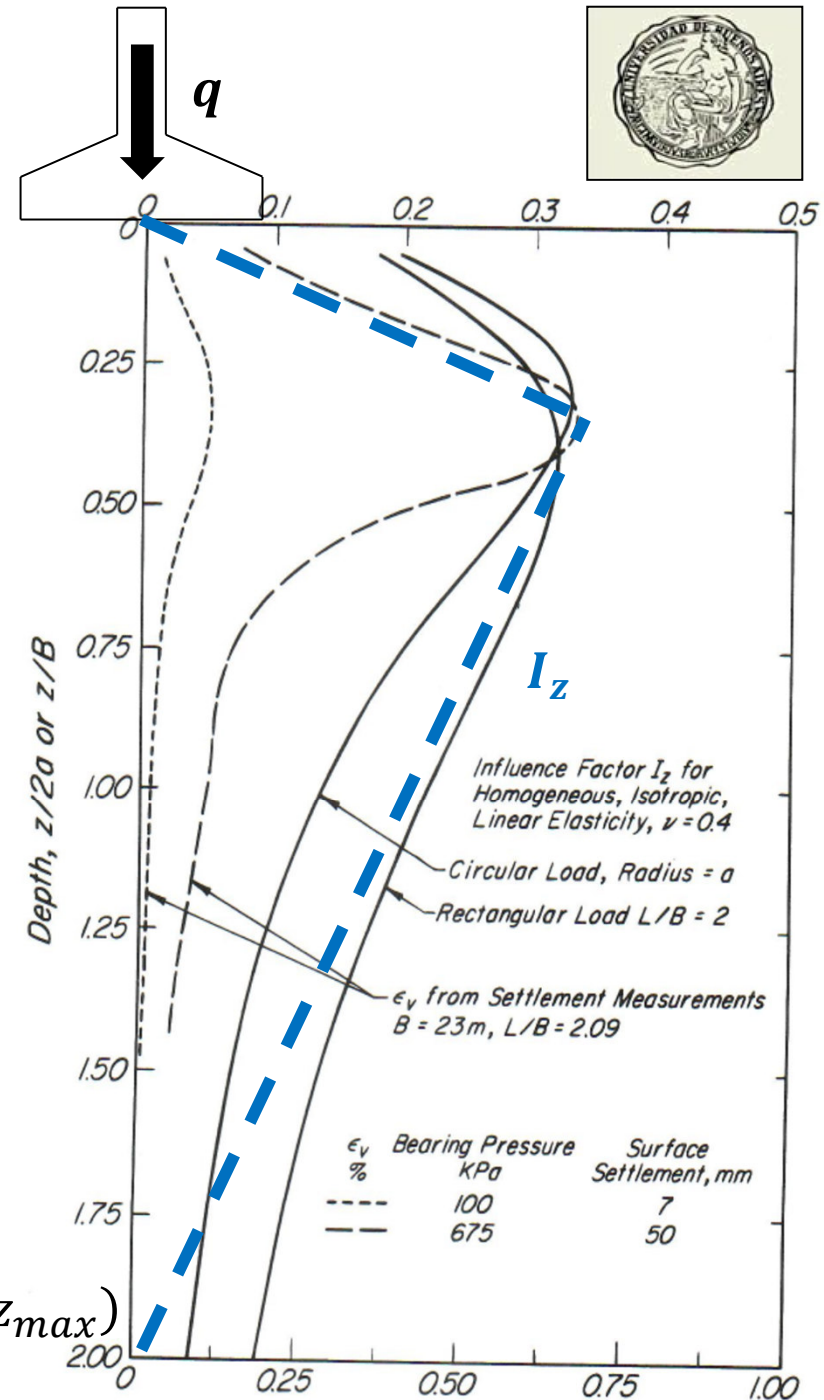
$$c_1 = 1 - (0.5\sigma_{zD}) / (q - \sigma_{zD})$$

$$c_2 = 1 + 0.2 \log(t/365 \text{ dias})$$

$$c_3 = 1.03 - 0.03(L/B) \geq 0.73$$

$$z \leq B/2 \rightarrow \int_{z_1}^{z_2} \frac{I_z}{E} dz = \frac{1}{5E} \frac{z_2 - z_1}{B} (B + 2(z_2 + z_1))$$

$$z > B/2 \rightarrow \int_{z_1}^{z_2} \frac{I_z}{E} dz = \frac{3}{5E} \frac{z_2 - z_1}{(B - 2z_{max})} (z_2 + z_1 - 2z_{max})$$





Índice

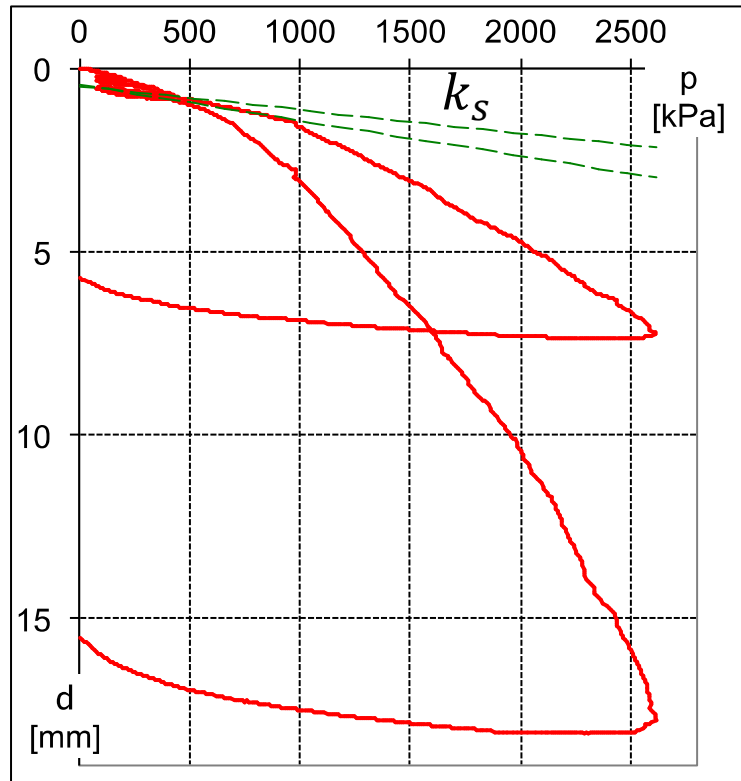
- Elasticidad aplicada a geomateriales
- El problema de Boussinesq
- Presión de contacto y asiento de zapatas
- Coeficiente de reacción de la subrasante



Coeficiente de reacción de la subrasante: medición directa (ensayo PLT)

Cociente entre la presión aplicada sobre
una placa rígida y el asentamiento medido

$$k_s = \frac{p}{\delta} \cong 1.35 \frac{E}{B_0}$$



Coeficiente de reacción de la subrasante: aplicación en teoría elástica



El coeficiente de reacción depende del tamaño y forma del área cargada

Placa diámetro B_0

$$k_{s0} \sim 1.35 \frac{E}{B_0}$$

E constante, base $B \times L$

$$k_s \sim k_{s0} \frac{B_0}{B} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \frac{B}{L} \right)$$

E creciente con profundidad, base
 $B \times L$ (fórmula de Terzaghi, obsoleta)

$$k_s \sim k_{s0} \left(\frac{B + B_0}{2B} \right)^2 \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \frac{B}{L} \right)$$



Coeficiente de reacción de la subrasante: viga / platea sobre medio elástico

Una platea sobre medio elástico se resuelve como un problema de Winkler

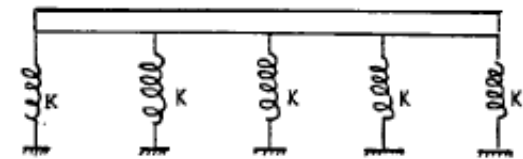
Limitaciones

- Existe acoplamiento entre “resortes”
- A largo plazo se producen asentamientos adicionales

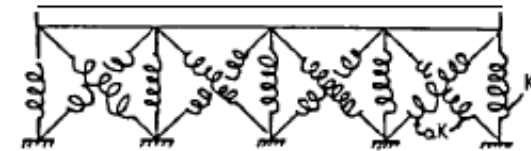


$$\nabla^4 w + \frac{p}{D} = 0$$

$$\nabla^4 w + \frac{p - k_s[w]w}{D} = 0$$



(a) Uncoupled springs



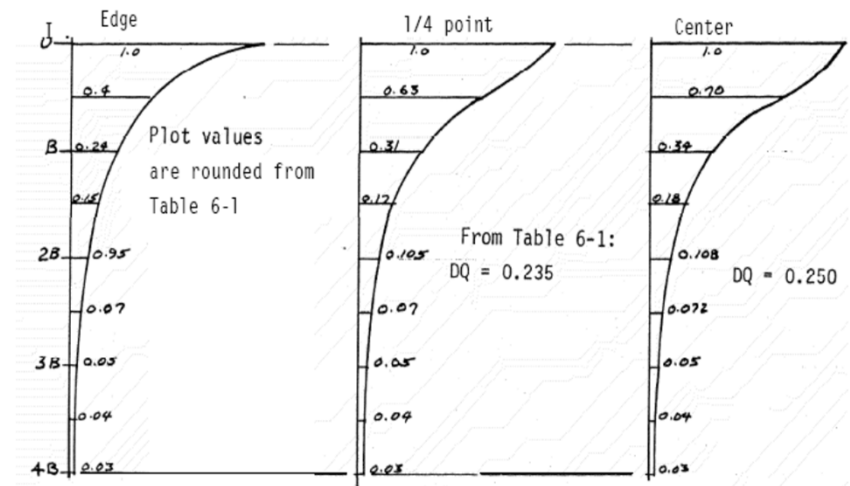
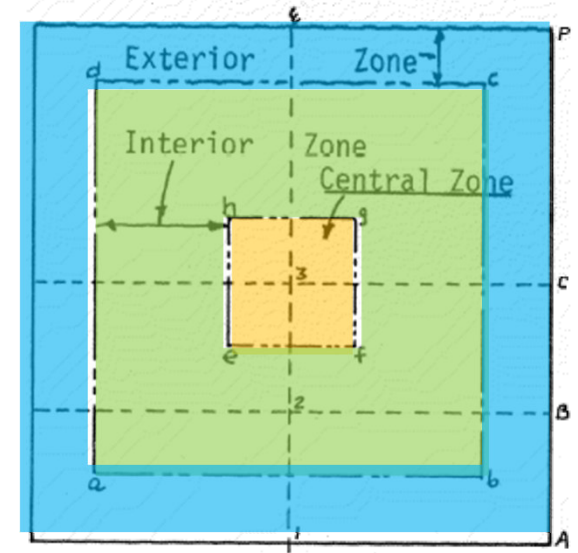
(b) Coupled springs

Principios de funcionamiento de una platea sobre medio elástico



El acoplamiento se considera usualmente mediante una reducción del módulo de reacción k_s desde el centro hacia los bordes del área cargada

- El método es razonable para el diseño estructural
- **Sus predicciones de asentamiento son pobres**





Coeficiente de reacción para pilotes con carga horizontal

El coeficiente de reacción se emplea para el diseño estructural de pilotes con carga horizontal

- Depende de la rigidez del terreno en profundidad

$$k_h = 0.65 \cdot \sqrt[12]{\frac{E_s \cdot D^4}{E_p \cdot I_p}} \frac{E_s}{1 - \nu^2}$$

- E_s : Módulo de Young suelo (puede variar con la profundidad)
- E_p : Módulo de Young pilote
- ν : Módulo de Poisson del suelo
- D : Diámetro/ancho del pilote
- I_p : Momento de inercia pilote

Bibliografía



- Básica
 - USACE. Settlement analysis.
 - Jimenez Salas et al. Geotecnia y Cimientos. Rueda
 - Powrie. Soil Mechanics, Concepts and Applications. Spon Press
 - Bowles. Foundation analysis and design. McGraw-Hill.
- Complementaria
 - Poulos & Davis. Elastic solutions for soil and rock mechanics. CGR Sidney
 - FHWA. Soils and foundations (I & II)



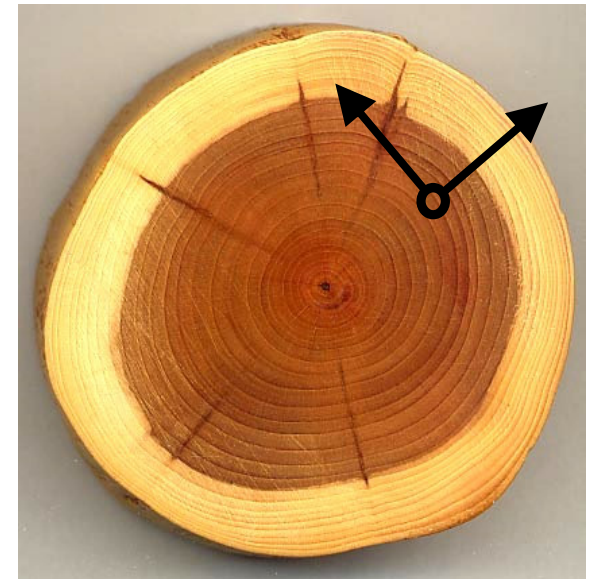
MATERIAL EXTRA

Elasticidad lineal anisotrópica



Un material elástico puede ser

- Isotrópico: las mismas propiedades en todas direcciones (rocas ígneas)
- Ortotrópico: propiedades diferentes con tres direcciones ortogonales principales (rocas sedimentarias, madera)
- Anisotrópico: propiedades diferentes sin direcciones principales (algunas rocas metamórficas)



Elasticidad lineal ortotrópica



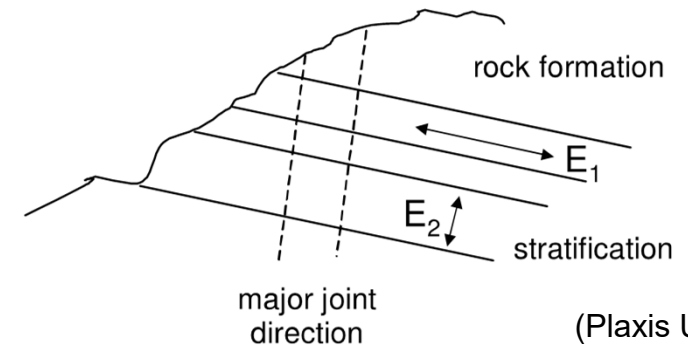
Útil para simular el comportamiento de terreno estratificado

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix} = \mathbf{D} \cdot \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \sigma_{11}^0 \\ \sigma_{22}^0 \\ \sigma_{33}^0 \\ \sigma_{12}^0 \\ \sigma_{23}^0 \\ \sigma_{31}^0 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/E_2 & -\nu_{22}/E_2 & -\nu_{12}/E_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{22}/E_2 & 1/E_2 & -\nu_{12}/E_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & -\nu_{12}/E_1 & 1/E_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2G_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1 + \nu_{22})/E_2 \end{bmatrix}$$

Estos cinco parámetros están sujetos a

$$\begin{aligned} E_1 &> E_2 > 0 & G_{12} &> 0 \\ (1 - \nu_{11})E_2 &\geq 2\nu_{12}^2 E_1 \end{aligned}$$



(Plaxis UM)

Elasticidad ortotrópica restringida



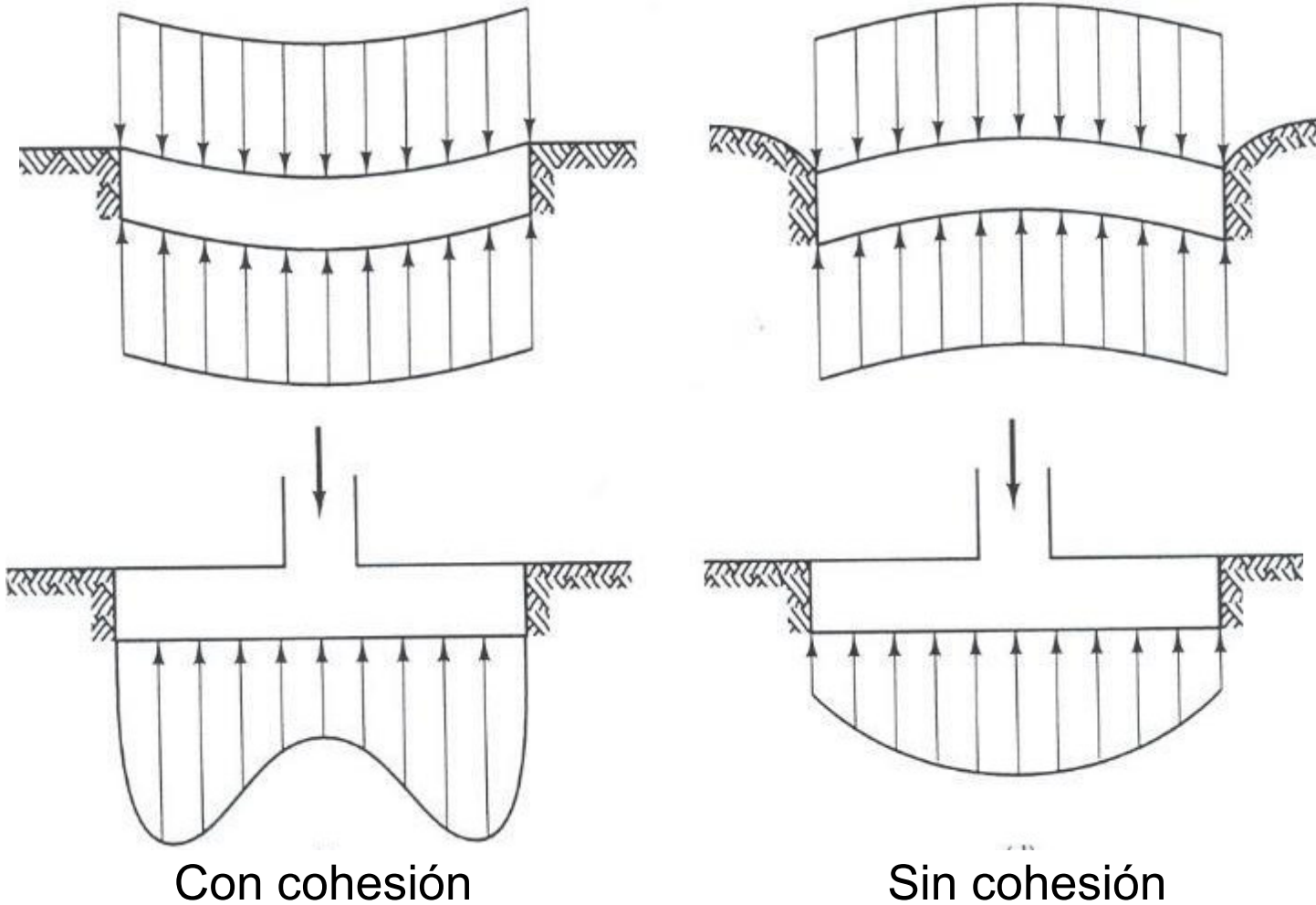
Tres parámetros elásticos: calibración más simple

$$\mathbf{C} = \frac{1}{E_2} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\alpha \nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\alpha \nu & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha \nu & -\alpha \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha(1 + \nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\alpha(1 + \nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1 + \nu) \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \sqrt{E_2/E_1}$$



Presiones de contacto y asentamientos: zapata flexible vs rígida





Cálculo de asentamientos totales en fundaciones superficiales

Componentes

- Asentamiento elástico (Schmertmann)
- Asentamientos por compresión plástica
 - Estimar tensiones con teoría elástica
 - Calcular asentamientos con teoría de compresión edométrica
- Rotaciones

$$- \tan(\theta) = \frac{M}{B^2 L} \left(\frac{1-\nu^2}{E_s} \right) \frac{16}{\pi(1+0.22B/L)}$$

Índice



- Elasticidad aplicada a geomateriales
- El problema de Boussinesq
- Presión de contacto y asiento de zapatas
- Coeficiente de reacción de la subrasante
- **Fundaciones de máquinas**

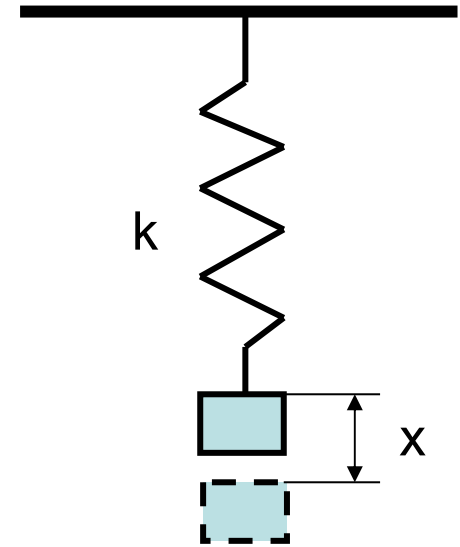


Ecuación del movimiento de un punto material

Ecuación del movimiento de un punto material

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + k \cdot x = F[t]$$

- m : masa, c : viscosidad, k : rigidez, $F[t]$: carga



Para un resorte libre: $\ddot{x} + \alpha^2 x = 0 \rightarrow x = \left(\frac{\dot{x}_0}{\alpha}\right) \sin[\alpha t] + x_0 \cos[\alpha t]$

- $\alpha = \sqrt{k/m} = 2\pi \cdot f_n$

Una máquina de 100kN apoyada en una base cuya rigidez es

$$10\text{GN/m} \text{ tiene un período } T_0 = \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{2\pi}{\sqrt{k/m}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{10\text{MN/m}}{100\text{kN/g}}}} = 0.2\text{s}$$

Vibraciones forzadas



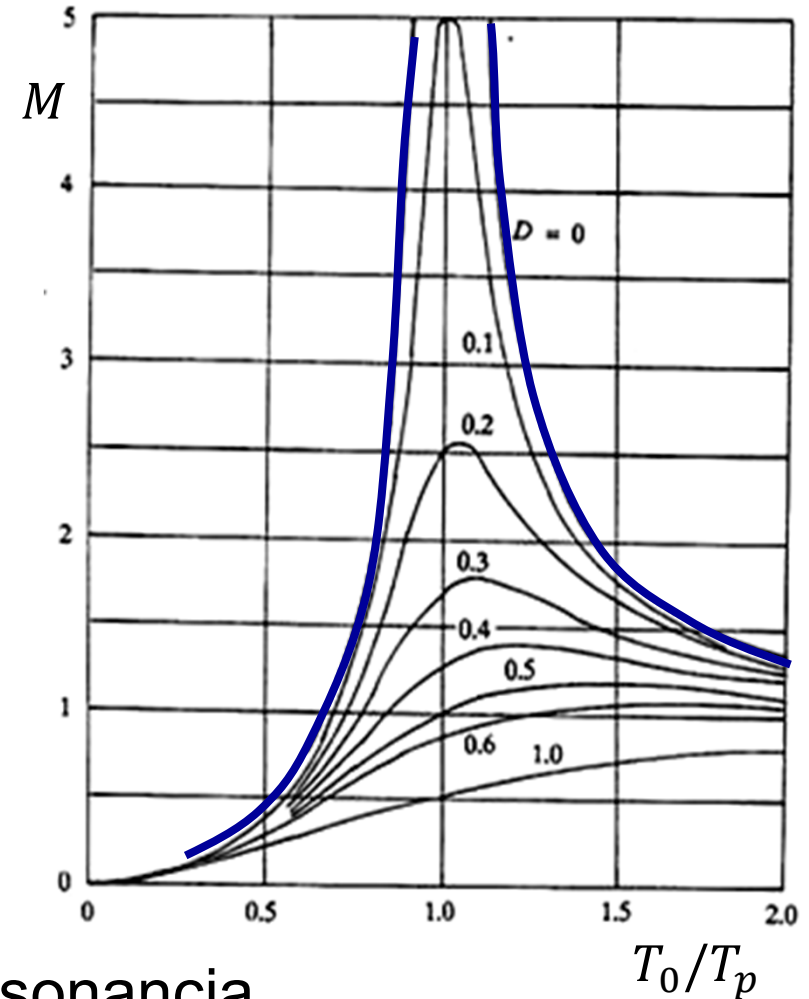
Las máquinas rotativas imponen fuerzas armónicas

$$F[t] = F_{max} \sin \left[\frac{2\pi}{T_F} \cdot t \right]$$

El desplazamiento máximo es

$$Z = \frac{F_{max}}{k} \frac{T_0^2}{T_0^2 - T_p^2} = Z_{est} \cdot M$$

Que tiene un infinito cuando $T_0 = T_p$: resonancia



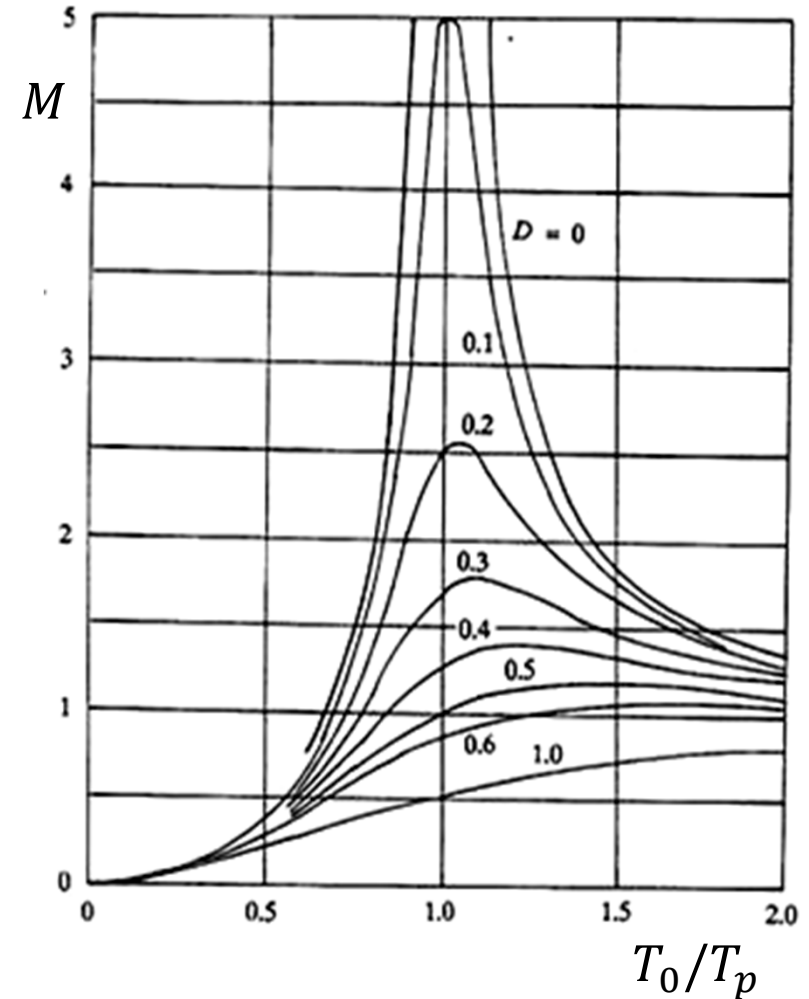
Vibraciones forzadas



Como los suelos disipan energía en carga cíclica, la amplificación tiene un amortiguamiento D

- $Z = z_{est} \cdot M$

- $$M = \frac{1}{\sqrt{(1 - T_0^2/T_p^2)^2 + 4 \cdot D^2 T_0^2/T_p^2}}$$



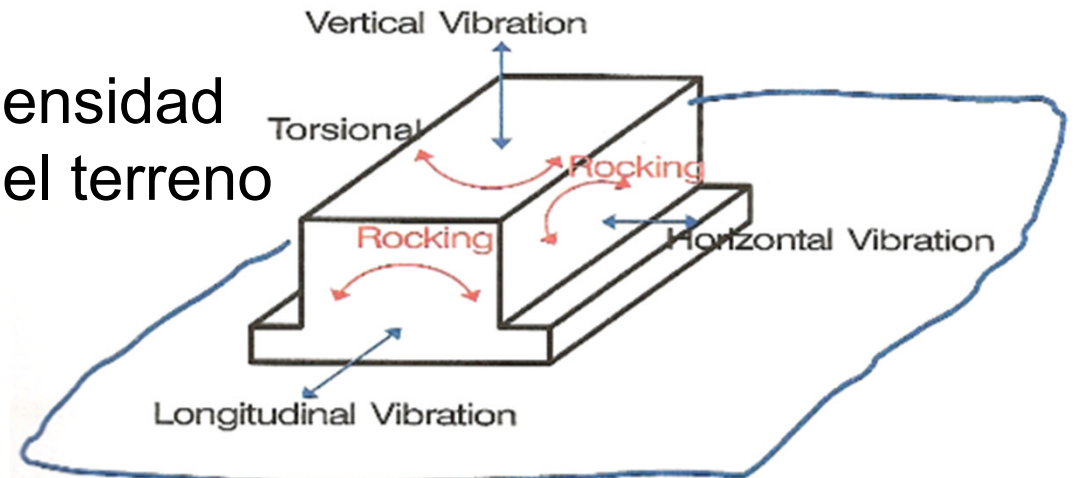


Fundaciones de máquinas

Los modos de vibración y el radio equivalente de la masa de suelo asociada a cada caso son

- Traslación (V o H): $r_0 = \sqrt{B \cdot L / \pi}$
- Rotación: $r_0 = \sqrt[4]{B \cdot L^3 / (3\pi)}$
- Torsión: $r_0 = \sqrt[4]{B \cdot L \cdot (B^2 + L^2) / (6\pi)}$

La respuesta depende de la densidad ρ y los parámetros elásticos del terreno



Fundaciones de máquinas



Mode of Vibration	Mass (or Inertia) Ratio	Damping Coefficient	Damping Ratio $D := \frac{C}{\sqrt{Km}}$	Spring Constant K
Vertical	$B_z := \frac{1-\nu}{4} \cdot \frac{m}{\rho \cdot (ro)^3}$	$C_z := \frac{3.4 \cdot (ro)^2}{1-\nu} \cdot \sqrt{\rho \cdot G}$	$D_z := \frac{0.425}{\sqrt{B_z}}$	$K_z := \frac{4 \cdot G \cdot ro}{1-\nu}$
Horizontal Sliding	$B_x := \frac{(7-8\nu)}{32(1-\nu)} \cdot \frac{m}{\rho \cdot (ro)^3}$	$C_x := \frac{4.6 \cdot (ro)^2}{2-\nu} \cdot \sqrt{\rho \cdot G}$	$D_x := \frac{0.288}{\sqrt{B_x}}$	$K_x := \frac{32(1-\nu) \cdot G \cdot ro}{7-8\nu}$
Rocking	$B_\psi := \frac{3(1-\nu)}{4} \cdot \frac{I_\psi}{\rho \cdot (ro)^5}$	$C_\psi := \frac{0.8 \cdot (ro)^4}{(1-\nu) \cdot (1+B_\psi)} \cdot \sqrt{\rho \cdot G}$	$D_\psi := \frac{0.15}{(1+B_\psi) \cdot \sqrt{B_\psi}}$	$K_\psi := \frac{8 \cdot G \cdot (ro)^3}{3(1-\nu)}$
Torsional	$B_\theta := \frac{I_\theta}{\rho \cdot (ro)^5}$	$C_\theta := \frac{4 \cdot \sqrt{B_\theta}}{1-2 \cdot B_\theta} \cdot \sqrt{\rho \cdot G}$	$D_\theta := \frac{0.5}{1+2 \cdot B_\theta}$	$K_\psi := \frac{16 \cdot G \cdot (ro)^3}{3}$

Fundaciones de máquinas



Los períodos propios de la máquina y de la fundación deben ser muy diferentes

- Para $> 1000\text{rpm}$ $T_0 < T_p/2$
- Para $< 400\text{rpm}$ $T_0 > 2T_p$

La carga dinámica que la máquina ejerce sobre su fundación puede estimarse con la expresión

$$\Delta P = P_{max} \frac{\sqrt{1 + 4D^2}}{2D \cdot \sqrt{1 - D^2}}$$