

Gua 4 :

DEFINICIONES

Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

λ are asociado al ara λ

- $\lambda \in \mathbb{K}$ se llama un autovalor de A , cuando existe un vector no nulo $x \in \mathbb{K}^n$ tal que $Ax = \lambda x$. En tal caso, el vector x se llama un autovector de A correspondiente al autovalor λ .

are.
are.
- El conjunto de todos los autovalores de A se llama el espectro de A , y se lo denota mediante $\sigma(A)$.

$$\lambda \in \mathbb{K} : \exists x \neq 0_{\mathbb{K}^n} : Ax = \lambda x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists x \neq 0_{\mathbb{K}^n} : Ax - \lambda x = 0_{\mathbb{K}^n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists x \neq 0_{\mathbb{K}^n} : (A - \lambda I)x = 0_{\mathbb{K}^n} \Leftrightarrow x \in \text{Nul}(A - \lambda I)$$

Sistema homogéneo SIEMPRE compatible

Quiero S.C. Int. (00's soluciones)

$$\Leftrightarrow A - \lambda I \text{ es singular} \Leftrightarrow |A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow |\lambda I - A| = 0$$

$A - \lambda I$ No invertible

Ej 1: Dada $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Hallar aras. y are de A $P_A(\lambda)$

$$\chi_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)((3-\lambda)^2 - 1)$$

polinomio característico

$$\chi_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 5 \quad \lambda_2 = 2 \quad \lambda_3 = 4 \therefore \sigma(A) = \{5, 2, 4\} \quad \text{ESPECTRO DE } A.$$

- La multiplicidad algebraica de $\lambda \in \sigma(A)$ es su multiplicidad como raíz del polinomio característico de A y la designaremos mediante $m(\lambda)$:

$$m(\lambda) = \max \{k \in \mathbb{N} : \chi_A(x) = (x - \lambda)^k q(x), \text{ con } q \in \mathbb{K}[x]\}.$$

Ej $\chi_A(x) = (x-3)^2(x-1)^5$

$$m(3) = 2$$

$$m(1) = 5$$

Para cada λ ara de A calculamos $S_\lambda = \text{Nul}(A - \lambda I)$

$$\lambda = 5 \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{matrix} \therefore S_{\lambda=5} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{Nul}(A - 5I)$$

$$\lambda = 2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} x_1 = -x_2 \\ x_2 = 0 \end{matrix} \therefore S_{\lambda=2} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \text{Nul}(A - 2I)$$

$x_2 \neq 0 \Rightarrow X$ are de A are a $\lambda = 2$

$$\lambda = 3 \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} x_1 = x_2 \\ x_2 = 0 \end{matrix} \therefore S_{\lambda=3} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \text{Nul}(A - 3I)$$

- Si $\lambda \in \sigma(A)$, el subespacio $S_\lambda := \text{Nul}(A - \lambda I)$ se llama el autoespacio correspondiente a λ . La dimensión de S_λ se llama la multiplicidad geométrica de λ y la se denotaremos mediante $\mu(\lambda)$.

En este caso $\mu(5) = 1$; $\mu(2) = 1$; $\mu(3) = 1$

$m(5) = 1$; $m(2) = 1$; $m(3) = 1$

Obs: $A \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in S_{\lambda=3}$

multiplicidad geométrica $\mu(\lambda_0)$

Si λ_0 es autovalor de $A \Rightarrow \mu_{\lambda_0} \leq m_{\lambda_0}$

multip. geométrica

importante

multip. algebraica

$\mu(\lambda) \geq 1$ S_λ tiene que tener dimensión ≥ 1

- En este ejemplo vale la igualdad

Ej 2 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ $K = \mathbb{R}$

Rotación $\alpha = \pi/2$
Sentido anti-h
En este caso $|A - \lambda I| = \lambda^2 + 1$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$
 $\lambda_1 = i \notin \mathbb{R}$
 $\lambda_2 = -i \notin \mathbb{R}$

raíces de $\chi_A(\lambda)$

Por lo tanto A no tiene avas si $K = \mathbb{R}$

Obs: $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ $K = \mathbb{C} \Rightarrow \lambda_1 = i$ y $\lambda_2 = -i$ son avas de A

y $S_{\lambda=i} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $S_{\lambda=-i} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Q3S. $A \in \mathbb{R}^{n \times n} \Rightarrow \lambda_1 = \bar{\lambda}_2 \Rightarrow \alpha_1 = \bar{\alpha}_2$

Nuevamente en este caso $m(i) = \mu(i)$ y $m(-i) = \mu(-i)$

Ej 3 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 3 & 4 & 0-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda = -\lambda \cdot (\lambda^2 - 6\lambda + 9) = -\lambda \cdot (\lambda - 3)^2 = 0$

con $\sigma(A) = \{0, 3\}$

Acá $m(0) = 1$ y $m(3) = 2$

Para $\lambda = 0$ $\text{Nul}(A) = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ $\mu(0) = 1$

Para $\lambda = 3$ $\text{Nul}(A - 3I) = \text{Nul} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ $\mu(3) = 1$

En este caso: $m(3) \neq \mu(3)$

Q3S. Si $m(\lambda) = 1$ Como $1 \leq \mu(\lambda) \leq m(\lambda) \Rightarrow m(\lambda) = \mu(\lambda)$

6. Si $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$, decimos que A es semejante a B cuando existe una matriz inversible $P \in \mathbb{K}^{n \times n}$ tal que $A = PBP^{-1}$.

7. Decimos que A es diagonalizable cuando A es semejante a una matriz diagonal.

Ej:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

A no es semejante a una matriz diagonal
 B no es una matriz diagonal
 A no es diagonalizable

1. Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

a) A es diagonalizable.

b) Existe una base $\mathbb{K}^n$ compuesta por autovectores de A .

c) A es semejante a una matriz diagonal.

$A \sim D \Leftrightarrow \exists P$ invertible: $AP = PD$ con D : diagonal

$\Leftrightarrow AP = PD$ $P = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$ donde $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset \mathbb{K}^n$ es li

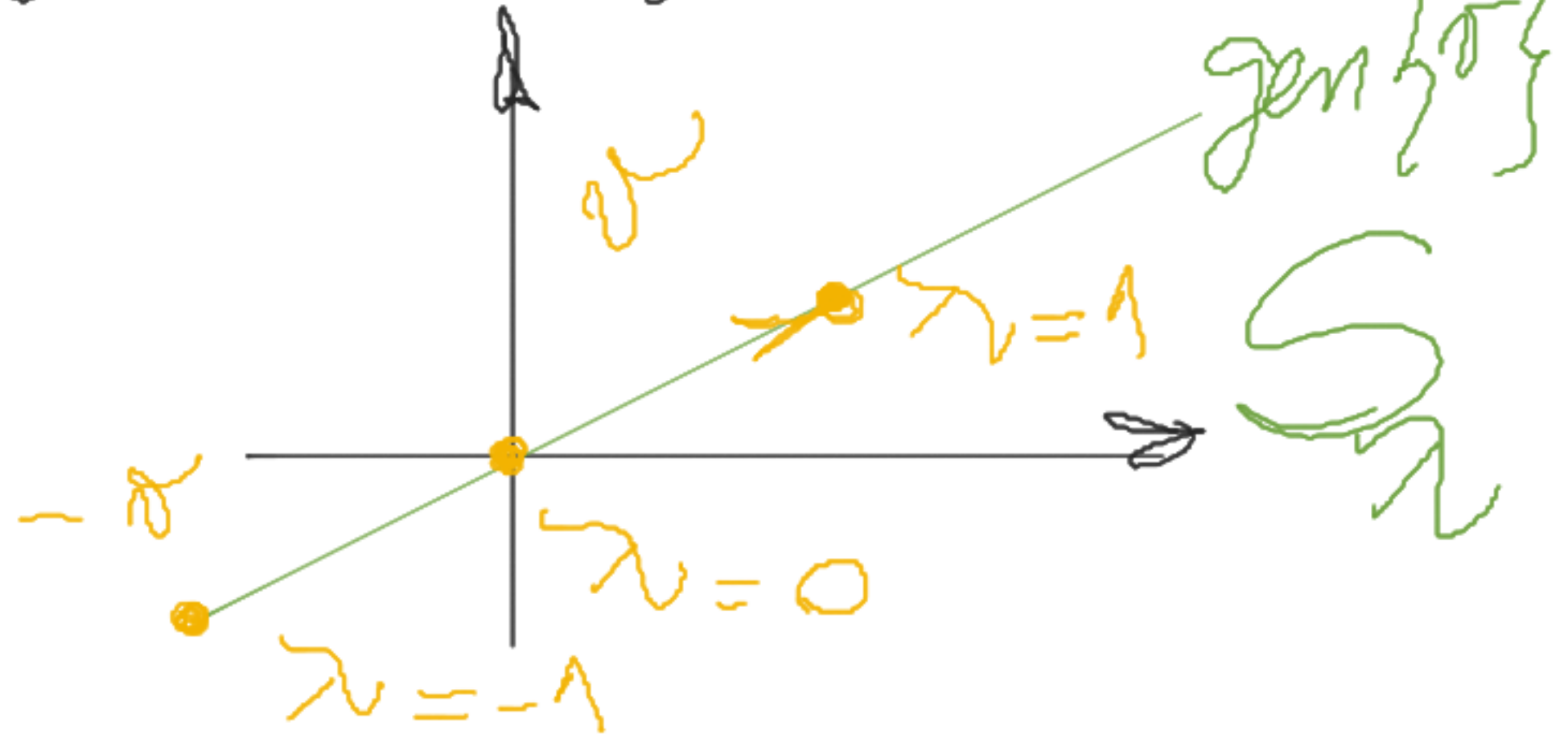
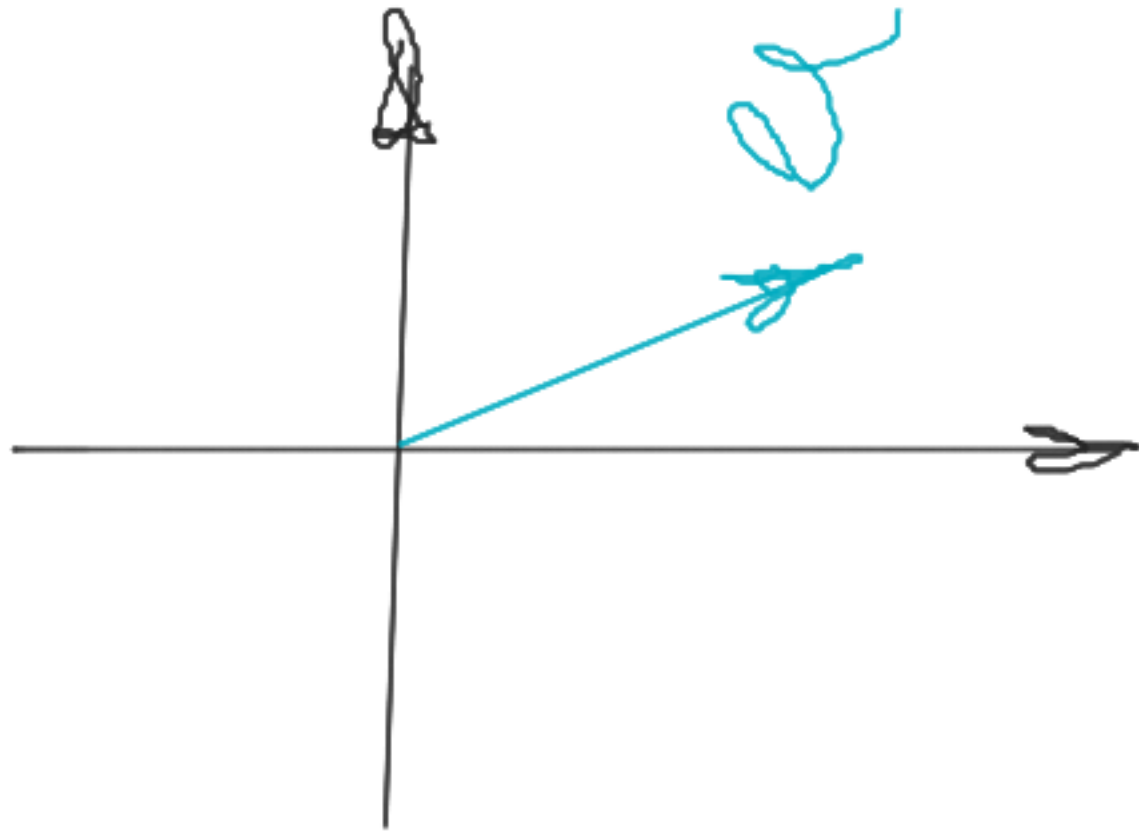
$\Leftrightarrow A \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow Av_1 = \lambda_1 v_1; Av_2 = \lambda_2 v_2; \dots Av_n = \lambda_n v_n$

$\Leftrightarrow \forall j = 1, 2, \dots, n \quad Av_j = \lambda_j v_j$ con $v_j \neq 0 \in \mathbb{K}^n$

Disco $\sigma \neq 0$

$A\sigma = \lambda\sigma$ Que effects
produce A sobre σ are



$\Leftrightarrow \exists \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ base de K^n formada por autovectores de A .
 A es diagonalizable $\Leftrightarrow \exists \{v_1, \dots, v_n\}$ base de K^n formada por avas de A .

- La pregunta ahora es ¿cuándo será posible?
 ¿cuándo existe esa base?

Observaciones

$\dim S_{\lambda=0} \geq 1$

- Si $\lambda_0 \in K$ es autovalor de $A \Rightarrow \mu_{\lambda_0} \geq 1$.
 (Trivial por definición de autovalor y autovector)
- Si $\lambda = 0$ es autovalor de $A \Rightarrow S_{\lambda=0} = \text{Nul}(A)$.
 Es inmediato pues $S_{\lambda=0} = \text{Nul}(0I - A) = \text{Nul}(-A) = \text{Nul}(A)$.
 $\therefore \text{rg}(A) \neq n$ $\Rightarrow A$ no es invertible
- Si A es invertible $\lambda \neq 0, \forall \lambda$ autovalor de A .
 Pues A es invertible $\Leftrightarrow \text{rg}(A) = n \Leftrightarrow \dim(\text{Nul}(A)) = 0 \Leftrightarrow |A - \lambda I| = 0 \Rightarrow |A - 0I| = 0 \Rightarrow |A| = 0$
 $\lambda = 0$ no es autovalor de A .
- Sea $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ un conjunto de autovectores de A asociados respectivamente a los autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, tal que $(\lambda_i \neq \lambda_j \forall i \neq j) \Rightarrow \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ es l.i.

Ej b) (*) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ tiene avas 0 con $S_{\lambda=0} = \text{Nul}(A) = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$
 $\Rightarrow A$ no es invertible

Ej c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ con $\chi_A(\lambda) = (2-\lambda)^2 - 1$ cuyas raíces son

$\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 3 \Rightarrow$ como $\forall \lambda$ avas de A $\lambda \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

(*) También $\lambda = 5$ es avas de A porque: $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
 $\therefore \sigma(A) = \{0, 5\}$

(d) Tomemos por ejemplo $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ con $\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_2 \neq \lambda_3, \lambda_1 \neq \lambda_3$ avas asociados a v_1, v_2, v_3 respectivamente, queremos probar que $\{v_1, v_2, v_3\}$ es l.i. (demo general en pdf)

Por el absurdo $\{v_1, v_2, v_3\} \neq 0$ LD y supongamos que $\{v_1, v_2\}$ l.i.

$\Rightarrow v_3 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ (3)

Aplicando A

$\lambda_3 v_3 = \alpha_1 \lambda_3 v_1 + \alpha_2 \lambda_3 v_2$ (1)

También $Av_3 = \alpha_1 Av_1 + \alpha_2 Av_2 = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2$

$\lambda_3 v_3 = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2$ (2)

De (1) y (2): $0_v = \alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_3) v_1 + \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_3) v_2$

Como $\{v_1, v_2\}$ es l.i. $\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_3) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_3) = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0 \end{cases}$

En (3): $v_3 = 0_v$ Absurdo v_3 es avas de A

Conclusión a avas $\neq$ corresponden avas l.i.

Consecuencia: $A \in K^{n \times n}$, A tiene " n " avas $\neq$ ($\lambda_i \neq \lambda_j \forall i \neq j$)

$\Rightarrow B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ conjunto de avas de A es l.i.

$\therefore \exists B$ base de K^n formada por avas de A y A es diagonalizable

Algunos definen el polinomio
característico como $|\lambda I - A| = 0$

Es equivalente porque lo que se busca
en las raíces

Buscar $\text{Nul}(A - \lambda I)$ es equivalente

a buscar $\text{Nul}(\lambda I - A)$

Volvamos al problema de encontrar una **condición necesaria y suficiente** para poder asegurar que una matriz de $A \in K^{n \times n}$ es diagonalizable.

- ▶ Para poder asegurar que una matriz A es diagonalizable, tenemos que poder afirmar que existe una base de K^n formada por autovectores de A .
- ▶ Ya sabemos que a autovalores distintos corresponden autovectores linealmente independientes. Como acabamos de demostrar que la **multip. geométrica** de un autovalor es siempre menor o igual que su multiplicidad algebraica, sabemos que si un autovalor es **raíz simple** del polinomio característico obtendremos como autoespacio asociado a él un subespacio de **dimensión 1**. *En este caso $m(\lambda) = \mu(\lambda) = 1$*

- ▶ Entonces para construir una base de autovectores asociados a una matriz A , tendrá que cumplirse que si algún autovalor tiene multiplicidad algebraica **mayor que uno** podamos encontrar asociados a él tantos autovectores l.i. como su multiplicidad algebraica, esto es lo mismo que pedir que la dimensión de su autoespacio asociado sea igual a su multiplicidad algebraica. O sea se debe cumplir que **multiplicidad algebraica = multiplicidad geométrica** para cada autovalor de A .

$$m(\lambda) = \mu(\lambda)$$

$$Ej: A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} F_2 &= 2F_1 \\ F_3 &= -F_1 \end{aligned} \Rightarrow \text{rg}(A) = 1$$

$$\dim \text{Nul}(A) = 2$$

Ec. caract.

$$\chi_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 4-\lambda & 6 \\ -1 & -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{matrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{matrix}$$

$$\lambda = 0 \text{ es raíz}$$

- $\text{rg}(A) = 1 \Rightarrow \dim \text{Nul}(A) + \text{rg}(A) = 3 \Rightarrow \dim \text{Nul}(A) = 2 \Rightarrow \lambda = 0$ es ara de A con $\mu(0) = 2$

$$\text{Nul}(A) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \right\} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \text{autoespacio de } A \text{ ara a } \lambda = 0$$

- Como $1 \leq \underbrace{\mu(0)}_2 \leq m(0) \Rightarrow 0$ es ara de A con $2 \leq m(0) \leq 3$

- El otro ara de A es $\lambda = 2 \neq 0 \Rightarrow B = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 \right\}$ base de $\mathbb{R}^3$ formada por aras de A donde $A v_3 = 2 v_3$

$$v_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_3 \in S = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$v_3 \in \text{Nul}(A - 2I)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 5 \\ -1 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Obs

A es diagonalizable, A no es invertible ($\lambda = 0$ es ara de A) - P^{-1}

$$A v_1 = \lambda_1 v_1$$

$$A \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} = A v_1 \quad A v_2 = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Si γ está en la posición ii la columna
 i de P debe ser un autovector asociado a $\lambda_{se\gamma}$

Propiedad : A es diagonalizable $\Rightarrow \exists P$ invertible : $A = P D P^{-1}$

donde $P = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$ tiene por columnas una base de K^n formada por avas de A

$\Rightarrow A$ es diagonalizable $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : A^n$ es diagonalizable

$$\underline{A^n} = (P \cdot D \cdot P^{-1})^n = \underbrace{P D P^{-1} \cdot P D P^{-1} \cdot P D P^{-1} \dots P D P^{-1}}_{n \text{ veces}} = P \underbrace{D \cdot D \cdot D \dots D}_{n \text{ veces}} P^{-1} = \underline{P D^n P^{-1}}$$

$\therefore A^n \sim D^n$ con $P = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$ la matriz que tiene por columnas los avas de A .

donde $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ λ_j ava de A

y $D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & \\ & \lambda_2^n & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n^n \end{pmatrix}$

En el ejemplo $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$

$\Rightarrow A^{1000} = P \begin{pmatrix} 0^{1000} & & \\ & 0^{1000} & \\ & & 2^{1000} \end{pmatrix} P^{-1}$

Polinomio matricial

Sea $\phi(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_k t^k$ y $A \in K^{n \times n}$ llamamos polinomio matricial $\phi(A) = a_0 I + a_1 A + \dots + a_k A^k$

reemplaza a $t=1$

Ej. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\phi(t) = t^3 + 3$

$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$
 $= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \phi(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$\phi(A) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

Proposición Si λ es ava de $A \in K^{n \times n}$ y $\phi(t)$ es un polinomio $\Rightarrow \phi(\lambda)$ es ava de $\phi(A)$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\chi_A(\lambda) = (1-\lambda)^2 = 0$ $\lambda=1$ doble
 $m(1) = 2$

$(A-I)v = 0$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} v = 0$

$S_{\lambda=1} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ $\mu(1) = 1$

$\mu(1) < m(1)$ No es diagonalizable

$$\phi(A) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{Agas de } \phi(A) \quad \phi(A) = A^3 + 3I$$

$$\phi(t) = t^3 + 3$$

$$\chi_{\phi(A)}(\beta) = (4 - \beta)^2 = 0$$

$\beta = 4$ doble

$$\text{Si } \lambda = 1 \text{ es ara de } A \Rightarrow \phi(1) = 1^3 + 3 = 4$$

$$\text{es ara de } \phi(A) \quad (\beta = 4) \quad \checkmark$$

Supongamos λ ara de A o sea are asociado
y $\phi(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_k t^k$ $(A \in \mathbb{K}^{n \times n})$

$$A\sigma = \lambda\sigma$$

$$\phi(A)\sigma = (a_0 I + a_1 A + \dots + a_k A^k)\sigma = a_0 I\sigma + a_1 \underbrace{A\sigma}_{\lambda\sigma} + \dots + a_k A^k\sigma =$$

$$= a_0 \sigma + a_1 \lambda \sigma + \dots + a_k \lambda^k \sigma =$$

$$= \underline{(a_0 + a_1 \lambda + \dots + a_k \lambda^k)} \sigma$$

$$\phi(\lambda)$$

$$\phi(A)\sigma = \phi(\lambda)\sigma$$

$$A\sigma = \lambda\sigma$$

$$\sigma \neq 0$$

$\downarrow$ es ara de $\phi(A)$

$$\phi(t) = t^2 - 2t + 1$$

$$\phi(A) = A^2 - 2A + I$$

$$\text{Si por ej. } \lambda = 2 \text{ es ara de } A$$

$$\Rightarrow \phi(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 + 1 = 1$$

$$\text{es ara de } \phi(A) = A^2 - 2A + I$$

OBS: Si σ es are
de A también
es are de $\phi(A)$

Ejemplo:

Dada en $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & (\alpha - 2) & 0 \\ 0 & (\alpha + 2) & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. Hallar

todos los $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales A resulta diagonalizable.

Resolución:

Empezamos, como siempre por calcular los autovalores de la matriz:

$\chi_A(\lambda) = P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -(\alpha - 2) & 0 \\ 0 & \lambda - \alpha - 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix}$

$$P_A(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda - 2)(\lambda - \alpha - 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 3, \text{ o } \lambda = 2, \text{ o } \lambda = \alpha + 2.$$

Si $\alpha + 2 \neq 3$ y $\alpha + 2 \neq 2 \Rightarrow A$ tendrá tres autovalores distintos y, como a autovalores distintos corresponden autovectores l.i., la matriz resultará diagonalizable.

O sea ya sabemos qué pasa si $\alpha \neq 1$ y $\alpha \neq 0$.

Podemos asegurar que:

$$\boxed{\text{Si } \alpha \in \mathbb{R} - \{0, 1\} \Rightarrow A \text{ resulta diagonalizable.}}$$

Ahora entonces, tenemos que ver qué sucede si $\alpha = 0$ o $\alpha = 1$.

$$\boxed{\alpha = 0}$$

Si $\alpha = 0 \Rightarrow$ ya sabemos que los autovalores de A serán $\lambda_1 = 2$ autovalor de multiplicidad algebraica 2 y $\lambda_2 = 3$ autovalor de multiplicidad 1.

Para saber si la matriz A resulta diagonalizable basta con calcular la multiplicidad geométrica de $\lambda_1 = 2$. Si su multiplicidad geométrica coincide con la algebraica será diagonalizable y sino no.

El autoespacio asociado a $\lambda_1 = 2$ es el subespacio de las soluciones del sistema homogéneo determinado por la matriz $2I - A$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow x_3 = 0 \text{ y } x_2 = 0 \Rightarrow \dim(S_{\lambda=2}) = 1 \neq 2 =$$

Entonces si $\alpha = 0$ la matriz A **no es diagonalizable** pues la multiplicidad algebraica $\neq$ multiplicidad geométrica para $\lambda = 2$.

$$\boxed{\alpha = 1}$$

Si $\alpha = 1$ ya sabemos que los autovalores de A serán $\lambda_1 = 2$ de multiplicidad algebraica 1 y $\lambda_2 = 3$ de multiplicidad algebraica 2. Entonces, para saber si A es diagonalizable tenemos que chequear si coinciden la multiplicidad algebraica con la multiplicidad geométrica en este caso.

$$A_{\alpha=1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Analizamos las ecuaciones que definen al autoespacio $S_{\lambda=3}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3I - A \quad \text{Nul}(A - 3I) = \text{Nul}(3I - A) = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

La matriz tiene rango 1, así que su nulo tiene dimensión 2.

Entonces para $\lambda = 3$, en este caso, la multiplicidad geométrica = multiplicidad algebraica. Concluimos entonces que A es diagonalizable si $\alpha = 1$.

Entonces: $\boxed{A \text{ es diagonalizable } \forall \alpha \in \mathbb{R} - \{0\}}$

$$A \sim D \quad \forall \alpha \neq 0$$

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \dots (\lambda - \lambda_g)^{n_g}$$

Si $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ el polinomio tiene grado n

$$n_i \geq 1 \quad m(\lambda_i) = n_i$$

$$n_1 + n_2 + \dots + n_g = n$$

Si $n_i > 1$ tengo que analizar $\mu(\lambda_i)$
 para ver si $\mu(\lambda_i) = n_i = m(\lambda_i)$

Para saber
 si A es diagonalizable
 > > >

Más propiedades: $A \in K^{n \times n}$ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ avas. de A

- $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$ λ_j ava de A $j=1, 2, \dots, n$
- $\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$
- λ ava de A con x autovector $\Rightarrow \lambda + k$ es ava de $A + kI$
- λ ava de $A \Rightarrow \lambda^n$ es ava de $A^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

• λ ava de $A \Rightarrow Ax = \lambda x \Rightarrow (A + kI)x = Ax + kIx = \lambda x + kx = (\lambda + k)x$

• Si A es invertible y λ es ava de $A \Rightarrow \lambda^{-1}$ es ava de A^{-1}

λ es ava de A
 $\exists v \neq 0: Av = \lambda v$
 $A^{-1}Av = A^{-1}\lambda v$
 $Iv = \lambda A^{-1}v$

Como A es invertible $\lambda \neq 0$ (ava de A) $\Rightarrow \exists \lambda^{-1} \Rightarrow \lambda^{-1}v = \lambda^{-1}\lambda A^{-1}v \Rightarrow A^{-1}v = \lambda^{-1}v$
 λ^{-1} es ava de A^{-1}

Proposición si μ es ava de $\phi(A) \Rightarrow \exists \lambda$ ava de $A: \phi(\lambda) = \mu$
 $\exists v \neq 0: \phi(A)v = \mu v$
 v es el ave de $\phi(A)$ asociado a μ

Definimos $q(t) = \phi(t) - \mu$ Tenemos que $q(A) = \phi(A) - \mu I$ es singular
 $q(A) \cdot v = [\phi(A) - \mu I] \cdot v = \phi(A)v - \mu v = 0$
 $q(t)$ se puede factorizar $q(t) = a(t - t_1)(t - t_2) \dots (t - t_k)$

$\Rightarrow q(A) = a(A - t_1 I)(A - t_2 I) \dots (A - t_k I)$
 $|q(A)| = \det(q(A)) = a |A - t_1 I| |A - t_2 I| \dots |A - t_k I|$

Como $q(A)$ es singular $\det(q(A)) = 0 \Rightarrow \exists t_i:$

$\det(A - t_i I) = 0 \Rightarrow t_i$ es ava de A
 $1 \leq i \leq k$

EJ. 6 * $q(t_i) = \phi(t_i) - \mu = 0$
 $\lambda = t_i$

$\exists \lambda$ ava de $A: \phi(\lambda) = \mu$

$\phi(A) = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \mu_1 = 0, \mu_2 = 6$

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
 $\lambda = 2, \lambda = 4$

$\phi(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$
 $\lambda = 2, \lambda = 4$
 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}$
a) $\lambda_1 = 1, 2$
 $\lambda_2 = -1, 4$
b) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$
 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$

No puedo elegir 1 y 2 o (-1) y 4

c) $\text{tr}(A) = 6$
 $\lambda_1 + \lambda_2 = 6$
 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4$

$\det(A) = -1$

Si λ es ara de $A \Rightarrow \phi(\lambda)$ es ara de $\phi(A)$

Si μ es ara de $\phi(A) \Rightarrow \exists \lambda$ ara de $A : \phi(\lambda) = \mu$

$$P(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\phi(t) = t^2 - 2t$$

Autovalores de $\phi(A)$
Son también aras de A

μ de $P(A)$ aras de $P(A)$

$$|P(A) - \mu I| = 0 \quad (1 - \mu)(3 - \mu) = 0 \quad \mu_1 = 1 \quad \mu_2 = 3$$

$\exists \lambda_1$ ara de $A : \phi(\lambda_1) = 1$

$$\lambda^2 - 2\lambda = 1$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$$

$$1 \pm \sqrt{2}$$

$\exists \lambda_2$ ara de $A : \phi(\lambda_2) = 3$

$$\lambda^2 - 3\lambda = 3$$

$$\lambda^2 - 3\lambda - 3 = 0$$

$$\frac{3 \pm \sqrt{9+12}}{2} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{21}}{2}$$

posibles aras de A

$$\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{21}}{2}$$

$$\lambda_1 = 1 - \sqrt{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{21}}{2}$$

$$\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{21}}{2}$$

$$\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{21}}{2}$$

$$A = PDP^{-1}$$