

Ejercicio similar al 8

Input:

eigenvectors $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = A$

Results:

$v_1 = (1, 0, 1)$

$v_2 = (-1, 1, 0)$

$v_3 = (-1, -1, 1)$

Corresponding eigenvalues:

$\lambda_1 = -3$

$\lambda_2 = -3$

$\lambda_3 = 0$

$A = A^T$
Simétrica

$v_1 \perp v_3$

$v_2 \perp v_3$

$v_1 \neq v_2$

$\mu(-3) = 2$

$\mu(0) = 1$

impar $-3^n v_1$
par $3^n v_1$
 $n \in \mathbb{N}$

a) Hallar $A^n \forall n \in \mathbb{N}$

b) Hallar $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n v \forall v \in \mathbb{R}^3$

Obs: $\lambda = -3$ con $S_{-3} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

$\lambda = 0 \Rightarrow S_0 = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

es $(S_{-3})^\perp = S_0$

A simétrica $\Rightarrow \exists U$ ORTOGONAL: $A = UDU^T$

$\Rightarrow U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} -3 & & \\ & -3 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 1x_1 + -1x_2 = x \\ 0x_1 + 1x_2 = y \\ 1x_1 + 0x_2 = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x + y \\ x_2 = y \end{cases} \Rightarrow (x+y-z, y, 0)$

a) $A^n = (UDU^T)^n = U D (U^T \cdot U) D (U^T \dots U) D U^T = U D^n U^T = U \begin{pmatrix} (-3)^n & & \\ & (-3)^n & \\ & & 0 \end{pmatrix} U^T$

b) $\exists \{w_1, w_2, w_3\}$ BON de $\mathbb{R}^3$ formada por avas de A

$\therefore \forall v \in \mathbb{R}^3 \quad v = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_3 w_3$

$A^n v = \alpha_1 A^n w_1 + \alpha_2 A^n w_2 + \alpha_3 A^n w_3$

$A^n v = \alpha_1 (-3)^n w_1 + \alpha_2 (-3)^n w_2 + \alpha_3 \cdot 0 w_3 = \alpha_1 (-3)^n w_1 + \alpha_2 (-3)^n w_2$

Secuencia de vectores para cada vector v $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n v = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_1 (-3)^n w_1 + \alpha_2 (-3)^n w_2$
 $\therefore$ La sucesión $A^n v$ DIVERGE para cada v si $\alpha_1 \neq 0 \vee \alpha_2 \neq 0$

$S_{-3} = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$

$S_{-3} \perp S_0$

Base de S_{-3}

$\mu_1 \perp \mu_2$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\forall v \in \mathbb{R}^3 \quad v = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_3 w_3$$

$$\text{Si } v = \alpha_3 w_3 \quad Av = 0 \text{ y } A^n v = 0$$

$\Rightarrow$ la única forma de que la
 sucesión sea CV es que $v = \alpha w_3$
 $A^n v = 0 \quad \forall n \geq 1$

5. Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tal que

$$v_1 = [1 \ 1 \ 1]^T, \quad v_2 = [1 \ -1 \ 0]^T, \quad v_3 = [0 \ 1 \ -1]^T,$$

es una base de autovectores de A asociados a los autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, respectivamente. Probar que A es simétrica si y solo si $\lambda_2 = \lambda_3$.

$$v_1 \perp v_2 \quad \checkmark \quad v_1 \perp v_3 \quad \checkmark$$

$$v_1 \rightarrow \lambda_1$$

$$v_2 \neq v_3 \Rightarrow \text{para que } A$$

$$\text{sea simétrica} \quad \lambda_2 = \lambda_3$$

$$\langle Av_2, v_3 \rangle = \langle v_2, Av_3 \rangle \Rightarrow \lambda_2 \langle v_2, v_3 \rangle = \lambda_3 \langle v_2, v_3 \rangle$$

$A \text{ simétr.} \quad \text{Si } \langle v_2, v_3 \rangle \neq 0 \Rightarrow \lambda_2 = \lambda_3$

8. Para cada una de la siguientes matrices

$$A = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 13 & -2 & -4 \\ -2 & 10 & 2 \\ -4 & 2 & 13 \end{bmatrix}, \quad A = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 17 & 2 & -2 \\ 2 & 14 & 4 \\ -2 & 4 & 14 \end{bmatrix},$$

(a) hallar $\left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \lim_{k \rightarrow \infty} A^k x = [0 \ 0 \ 0]^T \right\}$,

$$\text{Si } x \text{ es autovector} \\ A^k x = \lambda^k x$$

(b) comprobar que $[-2 \ 1 \ 2]^T \in \left\{ \lim_{k \rightarrow \infty} A^k x : x \in \mathbb{R}^3 \right\}$ y hallar todas las soluciones de la ecuación $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k x = [-2 \ 1 \ 2]^T$.

(a) Una posibilidad es que $x = 0$ (no es autovector)
 Otra posibilidad es $\lambda = 0, \quad x \in S_\lambda$

Otra posibilidad es que $|\lambda| < 1$
 $P^{-1} \neq P^T$

$$\begin{pmatrix} \frac{13}{18} & \frac{-1}{9} & \frac{-2}{9} \\ \frac{-1}{9} & \frac{5}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{-2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{13}{18} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-4}{9} & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{8}{9} & \frac{-2}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{-2}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 1/2 \text{ doble}$$

$$S_{\lambda=1/2} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad S_{\lambda=1} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$S_{\lambda=1} \perp S_{\lambda=1/2}$

$$\forall v \in \mathbb{R}^3 \quad v = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$$

$$\begin{pmatrix} \frac{13}{18} & -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{5}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{13}{18} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{8}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

autovalor
 $\lambda = 1$

auto. $\lambda = 1/2$

$$A^k v = \alpha 1^k v_1 + \beta (1/2)^k v_2 + \gamma (1/2)^k v_3$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k v = \alpha v_1$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (1/2)^k = 0$$

$v_1 \neq 0$

$$\Rightarrow (a) \quad \alpha = 0 \Rightarrow v = \beta v_2 + \gamma v_3$$

$\beta, \gamma \in \mathbb{R}$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k v = \alpha v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \forall k$$

$$\Rightarrow \alpha = 1 \quad \text{y si } v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta v_2 + \gamma v_3$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A^k v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (1/2)^k \beta v_2 + (1/2)^k \gamma v_3$$

$$\text{P/que } \lim_{n \rightarrow \infty} A^n v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta v_2 + \gamma v_3$$

$\beta, \gamma \in \mathbb{R}$

$$A^k v_1 = \underbrace{1^k}_{=1} v_1 = v_1$$

$$A^k v_2 = (1/2)^k v_2$$

$$A^k v_3 = (1/2)^k v_3$$

Si me piden v / $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dicho v no existe.

1. Comprobar que las siguientes matrices $U \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ son ortogonales

$$\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

En cada caso caracterizar la isometría $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x) = Ux$.

Ⓢ: En otras palabras, si se trata de una rotación, describir su ángulo; si se trata de una simetría ortogonal, describir la recta con respecto a la que se realiza la simetría.

Las bases de U_1 (rotación) son
 Solo $\alpha = \pi k$
 $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T(x) = U_1 x$$

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$



$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Rotación en sentido horario

Ángulo

$$\langle v_1, U_1 v_1 \rangle = \frac{\|v_1\| \|U_1 v_1\| \cos \alpha}{1 \cdot 1} = 3/5$$

U_1 preserva normas

$$\alpha \approx 0,93 \text{ rad}$$

$$53^\circ 7' 48''$$

$$\text{Q28: } \det(U_1) = 1$$

⇒ Rotación

Propiedad

$\det U$ ortogonal

$$\det(U^T U) = \det I = 1$$

tiene módulo 1 es

decir es 1 0 -1

$$\det(U^T U) = \det U^T \det U =$$

$$\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$



$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Rotación de ángulo sentido antihorario

Seguido de reflexión

(simetría) resp. a $U_2 v_1 = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$

Rotación sent. Ⓢ (antihorario)

Simetría resp. $\begin{pmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$

$$T\left(\frac{4}{3}\right) = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$$

$$T\left(\frac{-3}{4}\right) = \begin{pmatrix} 3/5 \\ -4/5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{4x_1 + 3x_2}{25} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{-3x_1 + 4x_2}{25} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{7x_1 + 24x_2}{25} \\ \frac{24x_1 - 7x_2}{25} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 24 \\ 25 & 25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Simetría

Rotación α

$$[T]_E^E = \begin{pmatrix} 7/25 & 24/25 \\ 24/25 & -7/25 \end{pmatrix}$$

$$\text{Q28: } \det(U_2) = -1$$

$$\cos \alpha = 4/5, \quad \sin \alpha = 3/5$$

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$U_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{-4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{i}{1} & \frac{-i}{1} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3-4i}{5} & 0 \\ 0 & \frac{3+4i}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{-i}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^{2 \times 2}$ Rotación lo aras en $\mathbb{C}$

Si U es ortogonal y simétrica

Si U es ortogonal no es simétrica
Rotación

$$U_2 = \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ 3/5 & -4/5 \end{pmatrix} \quad \det U_2 = -1$$

$$(4/5 - \lambda)(-4/5 - \lambda) - 9/25 = 0$$

$$\lambda^2 - 1 = 0 \quad \lambda = 1 \quad \lambda = -1$$

(Simetría resp. v_1 en la dirección de v_2)

$$v_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 4/5 - 1 & 3/5 \\ 3/5 & -4/5 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

$$S_{\lambda=1} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$v_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 4/5 + 1 & 3/5 \\ 3/5 & -4/5 + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

$$S_{\lambda=-1} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$U_2 = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & -3/\sqrt{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & -3/\sqrt{10} \end{pmatrix}$$

Ortogonal $P^T = P^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ 3/5 & -4/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ 3/5 & -4/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

UJO $U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ axes de U 1 y -1 $U = U^T$ $\det U = -1$

2. Comprobar que las siguientes matrices $U \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ son ortogonales

$$\frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 & -6 & 3 \\ -6 & -3 & -2 \\ 3 & -2 & -6 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & -6 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -6 \\ -6 & -2 & -3 \\ 3 & -6 & -2 \end{bmatrix}$$

En cada caso caracterizar la isometría $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(x) = Ux$.

Ⓜ: Por ejemplo, si T es una rotación, hallar el eje y el ángulo de rotación; si T es una simetría ortogonal, describir el subespacio con respecto al que se realiza la simetría; etcétera.

$$U_2 = U_2^T = U_2^{-1}$$

$$U_1 = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 & -6 & 3 \\ -6 & -3 & -2 \\ 3 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

$$U_1 U_1^T = I$$

Además en este caso $U_1 = U_1^T \Rightarrow$ Simetría

no son $\perp$

$$\begin{pmatrix} 2 & -6 & 3 \\ -6 & -3 & -2 \\ 3 & -2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 14 & 7 & 14 \\ -3 & 1 & 13 \end{pmatrix}$$

$P \in S_{\lambda=-1}$

Arco = $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$v_1 \perp v_2, v_1 \perp v_3$ pero $v_2 \not\perp v_3$

Respecto a la recta $\text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ en la dirección del plano $\text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Podemos obtener en este caso una $S_{\lambda=-1}$

Aunque la matriz es simétrica & puede diagonalizarse con una P que no sea ortogonal

$$\frac{1}{7} \begin{bmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & -6 \end{bmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ 7 & 7 & 7 \\ 3 & 2 & 6 \\ 7 & 7 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

No es simétrica

Rotación alrededor

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 7 & 7 & 7 \\ 6 & 3 & -2 \\ 7 & 7 & 7 \\ -3 & 2 & -6 \\ 7 & 7 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{13}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+\sqrt{13}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que arroja $\lambda = 1$

del eje $\text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Los axes $\in \pi$ indican rotación sobre el plano π

$$\perp \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\pi: 2x + 3y = 0$$

Tomemos un $v \in \pi$ $v = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 7 & 7 & 7 \\ 6 & 3 & -2 \\ 7 & 7 & 7 \\ -3 & 2 & -6 \\ 7 & 7 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ 1 \\ 12 \\ 7 \\ -13 \\ 7 \end{pmatrix}$$

U_2 $U_2 v$

Ángulo de rotación

$$\langle v, U_2 v \rangle = \frac{\|v\|}{\sqrt{13}} \frac{\|U_2 v\|}{\sqrt{13}} \cos \alpha =$$

$$= 3 \left(\frac{-18}{7} \right) + (-2) \frac{12}{7} = -\frac{78}{7}$$

$$\cos \alpha = \frac{-78}{7} \cdot \frac{1}{13} = \frac{-78}{91} = -6/7$$

Tomemos otra $u \in \pi$ $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$

$$\langle u, U_2 u \rangle = \frac{\|u\|}{7} \frac{\|U_2 u\|}{7} \cos \alpha$$

$$= -6/7 \Rightarrow \cos \alpha = -6/7$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 7 & 7 & 7 \\ 6 & 3 & -2 \\ 7 & 7 & 7 \\ -3 & 2 & -6 \\ 7 & 7 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 49 \\ -14 \\ 49 \\ -42 \\ 49 \end{pmatrix}$$

Es a cargo del estudiante

$$\frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -6 \\ -6 & -2 & -3 \\ 3 & -6 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \text{plano} \quad U \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

u u Uu

$$\cos \alpha = \frac{\langle u, Uu \rangle}{\|u\| \|Uu\|} = \frac{3}{6}$$

$$\cos \alpha = 1/2$$

3. Hallar la matriz de rotación de ángulo $\frac{\pi}{3}$ alrededor del eje generado por $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

$$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad v_2 \perp v_1 \quad v_3 \perp v_1$$

plano π gen $\{v_2, v_3\} = S$ buco $v_2 \perp v_3$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \right\} \text{ de } \mathbb{R}^3$$

$\cos \lambda = 1$

$$\text{plano } x + y + z = 0$$

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \pi/3 & -\sin \pi/3 \\ 0 & \sin \pi/3 & \cos \pi/3 \end{pmatrix}$$

$$[T]_E^E = C_{\mathcal{B}}^E [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} C_E^{\mathcal{B}}$$

$$\begin{pmatrix} 30.5 & 20.5 & 0.5 \\ 1 & 2 & 6 \\ 30.5 & -20.5 & 0.5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 30.5 & 0 & -0.5 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30.5 & 20.5 & 0.5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 30.5 & -20.5 & 0.5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 30.5 & 0 & -0.5 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = U$$

$C_{\mathcal{B}}^E [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} C_E^{\mathcal{B}}$

Tomemos un $v \in \text{plano}$ cualquier $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\langle v, Uv \rangle = \frac{\|v\|}{\sqrt{2}} \frac{\|Uv\|}{\sqrt{2}} \cos \alpha$$

$$Uv = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

v Uv

$$\cos \alpha = \frac{\langle v, Uv \rangle}{\|v\| \|Uv\|} = \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = 1/2 \quad \checkmark$$

$$\alpha = \pi/3$$

Rotación $\pi/3$

4. Explicar por qué las siguientes matrices $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son diagonalizables ortogonalmente

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

y en cada caso hallar una matriz ortogonal U y una matriz diagonal Λ tales que $A = U\Lambda U^T$.

Da

Son simétricas!

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

No ortogonal

pero las columnas son $\perp$ pero

no tienen norma 1

Una U podría ser

$$\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

6. Sea $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ tal que

$$v_1 = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T, v_2 = [1 \ 1 \ -1 \ -1]^T, v_3 = [1 \ -1 \ 1 \ -1]^T,$$

son autovectores asociados a los autovalores 2, -3, 5, respectivamente. Probar que

A es simétrica si y solo si $[1 \ -1 \ -1 \ 1]^T$ es un autovector de A .

Si es core a μ $\lambda \neq 2$ $\lambda \neq -3$ y $\lambda \neq 5 \Rightarrow \mu \perp v_i \quad \forall 1 \leq i \leq 3$

Si uno de los λ es doble $\Rightarrow \mu \in \text{gen} \{v_i, v_j\} =$
por ejemplo $\lambda = 5$

$$= \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 = -x_2 \wedge x_3 = -x_4\}$$

terminar los otros dos casos

7. Hallar una matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ que posea las siguientes propiedades:

(a) $\sigma(A) = \{1, 1/4\}$ y $\text{nul}(A - I) = \text{gen} \{[1 \ 1 \ 1]^T\}$.

hay un λ doble

dim $S_{\lambda=1} = 1$
 $\Rightarrow 1/4$ doble

(b) $[1 \ 0 \ 1]^T \in \text{nul}(A - I)$, $[1 \ 1 \ -1]^T \in \text{nul}(A - 2I)$ y $\det(A) = 12$.

$\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = 1$ $\lambda_3 = 2$ $\lambda_3 = 6$

(c) $[1 \ 0 \ 0]^T$ y $[2 \ 3 \ 4]^T$ son autovectores de A , $\det(A) = 18$, $\text{tr}(A) = 8$, y $\sigma(A) \subset (0, +\infty)$.

no son $\perp$ hay λ doble

$$v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(d) $A^3 - 5A^2$ es singular, $\text{rango}(A - 3I) = 1$, el plano $\{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\}$ es un autoespacio de A , y $\sigma(A) \subset (0, +\infty)$.

$\Rightarrow$ diagonalizable *

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

(a) $\lambda = 1$ con $\mu(1) = 1 \Rightarrow m(1) \Rightarrow 1/4$ doble

$$S_{\lambda=1/4} = \left(\text{gen} \{v_i\} \right)^\perp = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

$$A = U \begin{pmatrix} 1/4 & & \\ & 1/4 & \\ & & 1/4 \end{pmatrix} U^T$$

(c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$ un λ doble λ_1

$$\det(A) = \lambda_1^2 \lambda_2 = 18$$

$$\text{tr}(A) = 2\lambda_1 + \lambda_2 = 8$$

$$\lambda_2 = 8 - 2\lambda_1 \quad \lambda_1^2 (8 - 2\lambda_1) = 18$$

$$8\lambda_1^2 - 2\lambda_1^3 - 18 = 0$$

raíces

$$\begin{cases} 3 \checkmark \\ \frac{1+\sqrt{13}}{2} \checkmark \\ \frac{1-\sqrt{13}}{2} < 0 \end{cases}$$

$$\text{Si } \lambda_1 = 3 = \lambda_3 \quad \lambda_2 = 2$$

$$\text{Si } \lambda_1 = \lambda_3 = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \Rightarrow$$

$$\lambda_2 = 8 - 1 - \sqrt{13} = 7 - \sqrt{13} > 0$$

$$\text{En ambos casos } S_{\lambda_2} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

(d) $A^3 - 5A^2$ es singular, $\text{rango}(A - 3I) = 1$, el plano $\{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\} = \sum_{\lambda=3}$ es un autoespacio de A , y $\sigma(A) \subset (0, +\infty)$.

$\mu=0$ es ara de $A^3 - 5A^2 \rightarrow \exists \lambda$ ara de A :

$$\cancel{\phi(\lambda)} = \lambda^3 - 5\lambda^2 = 0 \quad \lambda \neq 0 \vee \lambda = 5$$

Si $\text{rango}(A - 3I) = 1 \Rightarrow \sum_{\lambda=3}$ tiene dim 2

$\lambda=3$ doble

$$\text{rang}(A - 3I) = 1$$

$\lambda=5$ ara $\cdot S_{\lambda=5} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ $\Rightarrow \dim \text{Ker}(A - 3I) = 2$
 $\lambda=3$ es ara doble

$$U = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/\sqrt{5} & 4/\sqrt{45} \\ -1/3 & 2/\sqrt{5} & -2/\sqrt{45} \\ 2/3 & 0 & -5/\sqrt{45} \end{pmatrix}$$

una posible U

$$D = \begin{pmatrix} 5 & & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$$

Puedo escribir $A = PDP^{-1}$

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ES $\lambda=5$ $\lambda=3$

$$D = \begin{pmatrix} 5 & & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$$

Comprobar