

4.8 Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 10 & 5 & 10 \\ 10 & 5 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1\sqrt{2}-1}{10} & \frac{-1\sqrt{2}-1}{10} \\ 1 & \frac{11\sqrt{2}-1}{10} & \frac{11\sqrt{2}-1}{10} \\ 1 & \frac{11\sqrt{2}-1}{10} & \frac{11\sqrt{2}-1}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\sqrt{2}-1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}+1}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{16}{17} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{17} \end{pmatrix}$$

a) $\sigma(A) = \left\{ 1, \frac{3-\sqrt{2}}{10}, \frac{3+\sqrt{2}}{10} \right\}$ tiene 3 valores distintos $\Rightarrow$ es diagonalizable

b) $A = 1 G_1 + \frac{3-\sqrt{2}}{10} G_2 + \frac{3+\sqrt{2}}{10} G_3$

$$A^n = \frac{1^n}{1} G_1 + \left(\frac{3-\sqrt{2}}{10} \right)^n G_2 + \left(\frac{3+\sqrt{2}}{10} \right)^n G_3$$

$$A^n - G_1 = \left(\frac{3-\sqrt{2}}{10} \right)^n G_2 + \left(\frac{3+\sqrt{2}}{10} \right)^n G_3$$

$$\|A^n - G_1\|_F = \left\| \left(\frac{3-\sqrt{2}}{10} \right)^n G_2 + \left(\frac{3+\sqrt{2}}{10} \right)^n G_3 \right\|_F \leq$$

$$\leq \left(\frac{3-\sqrt{2}}{10} \right)^n \|G_2\| + \left(\frac{3+\sqrt{2}}{10} \right)^n \|G_3\| \leq$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{10} < \frac{3+\sqrt{2}}{10} \quad M^* = \max \{ \|G_2\|, \|G_3\| \}$$

$$\leq \frac{2 M^*}{M} \left(\frac{3+\sqrt{2}}{10} \right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n - G_1\|_F \leq \lim_{n \rightarrow \infty} M \left(\frac{3+\sqrt{2}}{10} \right)^n$$

Como $\frac{3+\sqrt{2}}{10} < 1$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3+\sqrt{2}}{10} \right)^n = 0$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n - G_1\|_F = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} A^n = G_1$$

4.9

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma(A) = \{ 1, 1/2, 2 \}$$

$$A = 1 G_1 + 1/2 G_2 + 2 G_3$$

$$A^n = G_1 + (1/2)^n G_2 + 2^n G_3, \quad \|A^n\|_F = \|G_1 + (1/2)^n G_2 + 2^n G_3\|_F$$

$$\|A^n\|_F \leq \|G_1\| + (1/2)^n \|G_2\| + 2^n \|G_3\|$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|A^n\|_F}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\|G_1\|}{2^n} + (1/2)^{2n} \|G_2\| + \|G_3\| \right) = 0 + 0 + \|G_3\| = M > 0$$

(a) $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|A^n\|_F}{2^n} > 0 \Rightarrow \nexists \lim_{n \rightarrow \infty} A^n$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n x = ?$

$$S_{\lambda=1} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$S_{\lambda=2} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$S_{\lambda=1/2} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$x \in S_{\lambda=1} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A^n x = \lim_{n \rightarrow \infty} 1^n x = x$$

$$x \in S_{\lambda=2} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A^n x = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n x \nexists$$

$$x \in S_{\lambda=1/2} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A^n x = \lim_{n \rightarrow \infty} (1/2)^n x = 0$$

$$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$$

$$\sigma(A) = \{ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \}$$

$$A \sim D_A \iff \exists \text{ matrices } \mathbb{K}^{n \times n} G_i /$$

G_i is the projection onto $\text{Ker}(A - \lambda_i I) = S_{\lambda_i}$ in the direction of $\text{Col}(A - \lambda_i I)$

$$G_i \cdot G_j = 0 \quad i \neq j$$

$$G_1 + G_2 + \dots + G_k = I$$

$$A = \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \dots + \lambda_k G_k$$

$$A^n = \lambda_1^n G_1 + \lambda_2^n G_2 + \dots + \lambda_k^n G_k$$

$$(b) S = \{x \in \mathbb{R}^3 : \lim_{n \rightarrow \infty} A^n x = 0\} \text{ es subesp. de } \mathbb{R}^3$$

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \quad \text{para que } \lim_{n \rightarrow \infty} A^n v = 0$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 $\in S_1$ $\in S_2$ $\in S_{1/2}$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0 \quad \forall \alpha_3$$

$$\Rightarrow S = S_{1/2} \quad \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(c) S = \{x \in \mathbb{R}^3 : \text{existe } \lim_{n \rightarrow \infty} A^n x\} \quad \alpha_2 = 0$$

$$\text{Si } v = \alpha_1 v_1 + \alpha_3 v_3 \Rightarrow A^n v = \alpha_1 1^n v_1 + \alpha_3 \left(\frac{1}{2}\right)^n v_3$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^n v = \alpha_1 v_1 + 0 \text{ existe}$$

$$\Rightarrow S = S_1 \oplus S_{1/2} \quad \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(d) \text{ Comprobar que } \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \in \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} A^n x : x \in S \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \in \text{gen } \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{Hallar todas las soluciones } \lim_{n \rightarrow \infty} A^n x = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Para que } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} A^n x \quad \alpha_2 = 0$$

$$v = \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n v = \alpha_1 A^n \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 A^n \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha_1 1^n \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^n v = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_3 \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_1 = 2 \quad \alpha_3 \in \mathbb{R}$$

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Guía 5

PRELIMINARES Y NOTACIÓN

En todo lo que sigue

1. $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ designa el producto interno canónico en $\mathbb{R}^n$ definido por $x^T y = \langle x, y \rangle := y^T x$, y $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ designa su norma inducida.
2. $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ designa el producto interno canónico en $\mathbb{R}^{n \times n}$ definido por $\langle A, B \rangle := \text{tr}(B^T A)$, y $\|A\|_F := \sqrt{\langle A, A \rangle}$ designa su norma inducida, llamada la norma de Frobenius.
3. Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Obsérvese que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^m$ vale que

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^T y \rangle.$$

$\in \mathbb{R}^m$
 $\in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 3) \quad \langle Ax, y \rangle &= y^T (Ax) = (y^T A x)^T = (Ax)^T (y^T)^T = x^T A^T y \\ \langle x, A^T y \rangle &= (A^T y)^T x = ((A^T y)^T x)^T = x^T ((A^T y)^T)^T = x^T A^T y \end{aligned}$$

Consecuentemente,

- a) $\text{nul}(A^T) = \text{col}(A)^\perp$;
- b) $\text{col}(A^T) = \text{nul}(A)^\perp$;
- c) $\text{nul}(A) = \text{col}(A^T)^\perp$;
- d) $\text{col}(A) = \text{nul}(A^T)^\perp$.

$$c) \quad \text{nul}(A) = \text{col}(A^T)^\perp$$

$\Downarrow$

$$\bullet \quad \forall x \in \text{nul}(A) : \langle x, y \rangle = 0 \quad \forall y \in \text{col}(A^T)$$

$$\text{Si } y \in \text{col}(A^T) \exists u \in \mathbb{R}^m \text{ tal que } A^T u = y \quad A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

$$\text{nul}(A) = \{ x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0 \}$$

$$\langle x, y \rangle = \langle x, A^T u \rangle = (A^T u)^T x = u^T (A^T)^T x = u^T \underbrace{Ax}_0 = 0$$

$\in \text{nul}(A)$

$\in \text{col}(A^T)$

$$\text{nul}(A) = \text{col}(A^T)^\perp = \text{Fil}(A)^\perp$$

$$(a) \quad \text{nul}(A^T) = (\text{col}(A^T)^T)^\perp = \text{col}(A)^\perp$$

$$(b) \quad \text{nul}(A)^\perp = (\text{col}(A^T)^\perp)^\perp = \text{col}(A^T)$$

$$(d) \quad (\text{nul}(A^T))^\perp = (\text{col}(A)^\perp)^\perp \Rightarrow \text{nul}(A^T)^\perp = \text{col}(A)$$

4. Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es

- ortogonal si $A^T A = A A^T = I$.
- simétrica si $A = A^T$.

Ortogonal y simétrica

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{Ej: } A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A A^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \therefore A \text{ es ORTOGONAL}$$

$$\text{Ej: } B = \begin{pmatrix} 1 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \|v_1\| = \|v_2\| = 1 \quad v_1, v_2 \text{ son vectores UNITARIOS}$$

$$B^T B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \neq I$$

$\therefore B$ NO ES ORTOGONAL

$B \neq B^T$,
NO ES SIMÉTRICA

$$\left\langle \begin{pmatrix} \textcircled{1} & \textcircled{2} \\ \textcircled{3} & \textcircled{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \textcircled{1} & \textcircled{-1} \\ \textcircled{2} & \textcircled{0} \end{pmatrix} \right\rangle = \text{tr } B^T A =$$

$$\text{tr} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \text{tr} \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = 5$$

$$1 \cdot 1 + 2(-1) + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 0 = 5 \checkmark$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle A, B \rangle = \langle [A]^E, [B]^E \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij}$$

$$A \cdot x = 0$$

$\downarrow$

$$x \in \text{Nul}(A)$$

$$\begin{pmatrix} -F_1(A) - \\ -F_2(A) - \\ \vdots \\ -F_m(A) - \end{pmatrix} \cdot x = 0$$

$$\langle F_i(A); x \rangle = 0 \Rightarrow x \in \text{Nul}(A) \Rightarrow$$

$$x \in (\text{Fil}(A))^\perp = (\text{Col}(A^T))^\perp$$

Caracterización de las matrices ortogonales.

Sea $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. U es ortogonal.
2. U^T es ortogonal.
3. U es inversible y $U^{-1} = U^T$.
4. U preserva el producto escalar:

$$\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

5. Si $\{v_j : j \in \mathbb{I}_n\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$, entonces $\{Uv_j : j \in \mathbb{I}_n\}$ también lo es.
6. Las columnas de U constituyen una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.
7. Las filas de U constituyen una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.
8. Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, vale que $\|Ux\| = \|x\|$ (i.e., la transformación lineal $T(x) = Ux$ es una isometría.)

1) $\Rightarrow$ 2)

$$\underline{U \text{ ORTOGONAL}} \Rightarrow \underline{U^T \text{ ORTOGONAL}}$$

$$\text{quiero ver que : } M^T M = M M^T = I$$

$$M^T M = (U^T)^T U^T = U U^T = I$$

$$M M^T = U^T (U^T)^T = U^T U = I$$

2) $\Rightarrow$ 3)

$$U U^T = I = U U^{-1} \quad (\text{verificar})$$

3) $\Rightarrow$ 4)

$$\exists U^{-1} \text{ y } U^{-1} = U^T$$

$$\langle Ux, Uy \rangle = (Uy)^T Ux = y^T \underbrace{(U^T U)}_I x = y^T x = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y$$

pic

4) $\Rightarrow$ 5 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ base ORTONORMAL de $\mathbb{R}^n$

BOB

cada vector tiene norma 1

$$\Rightarrow \{Uv_1, Uv_2, Uv_3, \dots, Uv_n\} \text{ BON de } \mathbb{R}^n$$

$$\begin{aligned} \text{Para eso } \langle Uv_i, Uv_j \rangle &= (Uv_j)^T Uv_i = v_j^T \underbrace{U^T U}_I v_i \\ &= v_j^T v_i = \langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \end{aligned}$$

5) $\Rightarrow$ 6)

Las columnas de U forman una BON de $\mathbb{R}^n$

$$U \text{ ORTOGONAL} \Rightarrow U^T U = \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

$$(U^T U)_{11} = v_1^T v_1 = \langle v_1, v_1 \rangle$$

$$(U^T U)_{21} = v_2^T v_1 = \langle v_1, v_2 \rangle$$

$$(U^T U)_{34} = v_3^T v_4 = \langle v_4, v_3 \rangle$$

$$(U^T U)_{nn} = v_n^T v_n = \langle v_n, v_n \rangle$$

Como U es ortogonal $\Rightarrow U^T U = I$

$$\Rightarrow (U^T U)_{ij} = \langle v_j, v_i \rangle = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$\Rightarrow \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es BON de $\mathbb{R}^n$

Si U ortogonal $\Rightarrow U^T$ es ortogonal

$\Rightarrow$ Las filas de U forman una BON de $\mathbb{R}^n$

Ej: $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una BOG de $\mathbb{R}^2$ con piv

$$2I = B^T B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \neq I$$

$\therefore B$ No es ORTOGONAL

Ej: $A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ como $A^T A = A A^T = I$

$\Rightarrow A$ es ORTOGONAL ya que $\left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$ es una BON de $\mathbb{R}^2$

Ej: $C = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

donde $\left\{ \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \right\}$ es una BON de $\mathbb{R}^2$

ya que $\left\langle \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \right\rangle = 0$

y además $\left\| \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \right\| = 1$ y $\left\| \begin{pmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \right\| = 1$

Como las columnas de C forman una BON de $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow C$ es ORTOGONAL verificará $C^T C = C C^T = I$

Caracterización de las matrices simétricas.

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Son equivalentes:

- A es simétrica.
- $\mathbb{R}^n$ tiene una base ortonormal constituida por autovectores de A .
- A es ortogonalmente equivalente a una matriz diagonal.

Propiedad: A es simétrica $\Rightarrow m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$ para cada λ
 autovector de A Acta de fe'
 (A simétrica es siempre diagonalizable)

Propiedad: Sea v_1 ave de $A = A^T$ asociado a λ_1
 y sea v_2 ave de $A = A^T$ asociado a λ_2

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \{v_1, v_2\} \text{ es ORTOGONAL}$$

Debo probar que $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$

Sabemos que $v_1 \neq 0 : A v_1 = \lambda_1 v_1$
 $v_2 \neq 0 : A v_2 = \lambda_2 v_2$

También sabemos $\langle A v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, A^T v_2 \rangle$ (prop 3)

$$\langle \lambda_1 v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, \lambda_2 v_2 \rangle \Rightarrow \langle \lambda_1 v_1, v_2 \rangle - \langle v_1, \lambda_2 v_2 \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle - \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle = 0 \quad \text{Anas de una}$$

$$\Rightarrow (\underbrace{\lambda_1 - \lambda_2}_{\neq 0}) \langle v_1, v_2 \rangle = 0 \Rightarrow \langle v_1, v_2 \rangle = 0 \quad \begin{matrix} A = A^T \\ \text{en } \mathbb{R} \end{matrix}$$

Ej:
$$\overbrace{\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}^A = \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{v}_1 & \tilde{v}_2 & \tilde{v}_3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\equiv} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}}_{\equiv} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}}_{\equiv}$$

A es simétrica $\Rightarrow$ A es diagonalizable

$$\sigma(A) = \left\{ \frac{1}{2}, 3, 5 \right\} \quad \text{donde} \quad \begin{aligned} S_{1/2} &= \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ S_3 &= \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ S_5 &= \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Obs: $S_{1/2} \oplus S_3 \oplus S_5 = \mathbb{R}^3$

$$(S_{1/2})^\perp = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = S_3 \oplus S_5$$

$$(S_3)^\perp = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = S_{1/2} \oplus S_5$$

$$(S_5)^\perp = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = S_{1/2} \oplus S_3$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} : A = P D_A P^{-1} \quad (\text{como antes})$$

pero P No es una matriz ORTOGONAL

Para hallar U ORTOGONAL debo dividir cada vector por su norma:

Como $U = \begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ tiene por columnas una BON de $\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow$ U es ORTOGONAL donde:

$$A = U D U^{-1} = U D U^T$$

Obs: También si $M = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M$ ORTOGONAL

$\begin{matrix} \underbrace{\quad}_{\in S_{1/2}} & \underbrace{\quad}_{\in S_3} & \underbrace{\quad}_{\in S_5} \end{matrix}$

y también verifica $M^T A M = \begin{pmatrix} 1/2 & & \\ & 3 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$

Prop: $A = A^T \Rightarrow \exists U$ ORTOGONAL : $U^T A U = D_A$

$\Leftrightarrow A = A^T \Leftrightarrow \exists U$ ORTOGONAL : $U^T A U = D_A$?

Si $U^T A U = D_A \Rightarrow U^T A U \cdot U^{-1} = D_A U^{-1}$

$$\Rightarrow U^T A = D_A U^{-1} = (U^T)^{-1} \cdot U^T \cdot A = (U^T)^{-1} \cdot D_A U^{-1}$$

$$\Rightarrow A = (U^T)^{-1} D_A U^{-1} = (U^{-1})^T D_A U^{-1}$$

Si llamamos $M = U^{-1} \Rightarrow A = M^T D_A M$ con M ORTOGONAL

$$\begin{aligned} \text{Veamos como queda } A^T &= (M^T D_A M)^T \\ &= M^T D_A^T (M^T)^T \\ &= M^T D_A M \\ &= A \end{aligned}$$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $\therefore A$ es simétrica

Prop: $A = A^T \Leftrightarrow A$ es diagonalizable ortogonalmente.
Simétrica

Ej:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_P \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{D_A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{P^{-1}}$$

Simétrica

$$\sigma(A) = \{1, 3\} \text{ con } m_A(3) = 2 = m_g(3) \quad S_3 = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$m_A(1) = 1 = m_g(1) \quad S_1 = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Como $1 \neq 3 \Rightarrow (S_1)^\perp = S_3$

$\{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$ forma una BOG de $\mathbb{R}^3$. P NO es ORTOGONAL
 $P^{-1} \neq P^T$

Como $\|\tau_1\| = \sqrt{2} \quad \|\tau_2\| = 1 \quad \|\tau_3\| = \sqrt{2}$

$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \tau_1, \tau_2, \frac{1}{\sqrt{2}} \tau_3 \right\}$ forma una BON de $\mathbb{R}^3$ formada por av. de $A = A^T$

$$\therefore M = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ ORTOGONAL} \quad / \quad M^T A M = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$$

Obs: En este caso la descomposición de "matrix calculator" dio 2 vectores ortogonales entre sí para el autovalor doble 3

Ej: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A = A^T$ ✓

$\text{rg}(A) = 1 \Rightarrow \dim \text{Nul}(A) = 2$ porque $\dim \text{Nul}(A) + \text{rg}(A) = 3$

Como $\dim \text{Nul}(A) \geq 1 \Rightarrow 0$ es av. de A con $m_g(0) = 2$

Además $\text{tr}(A) = \underbrace{0}_0 + \underbrace{0}_0 + \lambda_3 = 3 \Rightarrow \lambda_3 = 3$

$\sigma(A) = \{0, 3\}$ con $m_A(0) = m_g(0) = 2$ y $m_A(3) = m_g(3) = 1$

$\text{Nul}(A) = S_0 \quad \wedge \quad \text{Nul}(A)^\perp = S_3$

donde $\text{Nul}(A) = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$
 $= \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \quad \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in S_0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ a \\ b \end{pmatrix}$$

$$a + a + b = 0$$

$$b = -2a$$

$$S_0 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

$$S_3 \perp S_0$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

BON

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

BON

Otra forma

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

"multiplo de"

$$S_3 = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \perp S_0$$

puedo

diagonalizar

por

$$A = P D_A P^T$$

$$D_A =$$

$$P = \begin{pmatrix} 3 \\ \lambda_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\in S_3$

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

Como $\text{Nul}(A)^\perp = \text{Fil}(A) = \text{Col}(A) = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = S_3$

Obs: $(A - 3I) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim$

$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{2F_2 + F_1, 2F_3 + F_1} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 + F_2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{x_3 = x_2} \quad \begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 0 \\ \Rightarrow x_2 = x_1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad x_2 \neq 0 \rightarrow \text{avcs de } A \text{ asociados a } \lambda = 3$

$\therefore (\text{Nul}(A - 3I))^\perp = \text{Nul}(A)$

Diagonalizamos $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Podemos tomar

1) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ invertible: $P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$

2) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Esta M tiene por columnas una BOG de $\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow M^{-1} A M = D_A = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$

3) $N = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$

Esta matriz tiene por columnas una BON de $\mathbb{R}^3$

$\therefore N$ es ORTOGONAL y vale $\underbrace{N^{-1}}_{N^T} A N = \underbrace{N^T}_{N^T} A N = D_A$

Ejercicio: Tipo (5-7) (Tener en cuenta plafond)

1) Hallar una matriz $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ simétrica que verifique simetrizante:

$\lambda_1 = 1$ i) $(1 \ 1 \ 1)^T \in \text{Nul}(A - I)$

$\lambda_2 = 0$ ii) $\det(A) = 0$ $\lambda_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\lambda_3 = 2$ iii) $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

Si iii) $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$
~~Asimétrica~~ $\lambda = 1$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Obs: Quiero hallar M ORTOGONAL y D diagonal: $M D_A M^T = A$

De (i) $(A - I) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 1$ es avc de A con avc asociado en $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 1 \leq m_g(\lambda) = m_n(\lambda)$

De (ii) $\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$ es avc de A

Hasta acá $\sigma(A) = \{0, 1\}$ falta detectar otro avc

De (iii) $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow 2$ es avc de A con avc asociado $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Obs: Para $\lambda_1 = 1 \rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Para $\lambda_3 = 2 \rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Avias $\neq$ de $A = A^T \Rightarrow v_1 \perp v_2$ ✓

c) Qui' para con $S_0 = \text{Nul}(A)$?

En peu lugar $\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 0 \quad \lambda_3 = 2$

$\Rightarrow S_{\lambda_1} \oplus S_{\lambda_2} \oplus S_{\lambda_3} = \mathbb{R}^3$

y tambien $m_A(1) = m_A(1) \wedge m_A(2) = m_A(2)$

c) $S_{\lambda_2} = S_0$? $S_0 = \text{Nul}(A) = \text{gen} \{v_2\} \quad v_2 \neq 0$

v_2 **DEBE SER** $\langle v_1, v_2 \rangle = 0 \wedge \langle v_3, v_2 \rangle = 0$
si quies una $A = A^T$

$\Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ donde $\begin{cases} a+b+c=0 \\ a-c=0 \end{cases} \Rightarrow b = -a-c = -2c$

$\therefore v_2 = \begin{pmatrix} c \\ -2c \\ c \end{pmatrix} \quad \forall c \neq 0 \therefore v_2 \in S_0 = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una BGF de $\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow B^* = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una BON de $\mathbb{R}^3$

Armas $M = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$ ORTOGONAL

$\Rightarrow A = M \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 0 \end{pmatrix} M^T \quad / \quad A = A^T$

Ejercicio: Puede existir una matriz A simétrica $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$:

a) $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $\text{Nul}(A+3I) = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ simultaneamente?

a) $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore$ $\nexists A$ simétrica pero $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \neq 0$

$\therefore \nexists A$ simétrica

y si ahora solo fides A diagonalizable?

avas $\neq$ de $A \Rightarrow \{v_1, v_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ li ✓

$\exists A$ diagonalizable (∞) que cumplen c/lo pedido

c) $\exists A$ simétrica:?

$\bullet A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bullet \text{Nul}(A-5I) = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sea v_3 are de A
 $\lambda_1 = 2 \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = 5 \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_1 \perp v_2$

$\exists A$ simétrica: ?

• $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ • $\text{Nul}(A - 5I) = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ • $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sea v_3 arc de A

$\lambda_1 = 2$ $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\lambda_2 = 5$ $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_1 \perp v_2$

$v_3 \neq v_1$ $v_3 \perp v_2$

La única forma de que $\exists A = A^T$ es que v_3 esté asociado a $\lambda_1 = 2$

$\lambda_3 \neq \lambda_1$, como $v_3 \neq v_1$ sería imposible

$S_2 = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ $S_5 = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$S_5^\perp = S_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}$

puedo elegir un BON de arcs de A para $\mathbb{R}^3$

$M = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$

$D_A = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$

$A = M D_A M^T$

Resumen

A simétrica $\Rightarrow$ A diagonalizable

v_1 es arc de A sim v_2 es arc de A simétrica

$v_1 \neq v_2 \Rightarrow v_1, v_2 \in$ al mismo S_λ