

Resumen:

$$A \in K^{n \times n} \quad (K = \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C})$$

- $\lambda \in K$ es ara de A si $\exists x \in K^n: x \neq 0: Ax = \lambda x$
 x es vec ara a λ

- $\chi_A(\lambda) = p_A(\lambda) = |(A - \lambda I)| = |(\lambda I - A)|$ polinomio característico

Las raíces del polinomio característico son los aras de A

Si $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = i \\ \lambda_2 = -i \end{cases} \therefore A \text{ no tiene aras en } \mathbb{R}$$

Si $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2} \Rightarrow A$ tiene dos aras $\neq$

$$\Rightarrow \sigma(A) = \{i, -i\}$$

- $\lambda = 0$ es ara de $A \Leftrightarrow A$ no es invertible

- Todos los aras de A son $\neq 0 \Leftrightarrow A$ es invertible

- $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ $\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdots \lambda_n$

- λ es ara de $A \Rightarrow \lambda$ es ara de A^n ($n \in \mathbb{N}$)

- λ es ara de $A \Rightarrow \lambda + \alpha$ es ara de $A + \alpha I$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)

- A es diagonalizable si existe $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ base de K^n formada por aras de A .

Ej: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 2 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$

$$p_A(\lambda) = (2-\lambda)(-\lambda)(1-\lambda) \quad \lambda / p_A(\lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sigma(A) = \{0, 1, 2\}$$

$\nexists A^{-1}$ ya que $S_0 = \text{Nul}(A) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

$$S_0: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 \end{cases}$$

$$S_0 = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$S_1: \text{Nul}(A - I) = \text{Nul} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$S_2: \text{Nul}(A - 2I) = \text{Nul} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{cases} -x_1 + x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = x_1 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \end{cases}$$

$$S_2 = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

En este caso $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ base de $\mathbb{R}^3$ formada por aras de A

- A aras $\neq$ de una matriz corresponden aras L_i

- $\mu(\lambda) \leq m_a(\lambda) \quad \forall \lambda \text{ ara de } A \quad \mu(\lambda) \geq 1$

Obs: $m_a(\lambda) = 1 \Rightarrow \mu(\lambda) = 1$

- $\mu(\lambda) = m_a(\lambda)$ para cada $\lambda \Rightarrow A$ es diagonalizable

$$B = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{S_0}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{S_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{S_2} \right\}$$

$$\text{Obs: } A \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad A \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Obs: } B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \text{ es base de } \mathbb{R}^3 \text{ formada por auto de } A$$

$$\text{Obs: } A \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_P = \begin{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_P \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}}_{D_A}$$

También

$$A \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_M = \begin{pmatrix} A \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} & A \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} & A \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} & 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} & 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_M \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}}_{D_A}$$

En los dos casos $AP = PD_A$ y P es invertible
 $\Rightarrow A = P D_A P^{-1}$
 $AM = MD_A$ y M es invertible
 $A = M D_A M^{-1}$

Ejercicio: Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & a & a+1 \\ 0 & 1/2 & a^2-2a-3 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ $a > 0$. Estudiar la diagonalización de A $\forall a > 0$

Autos de A : $\sigma(A) = \{2, 1/2\}$ donde $m_a(2) = 1$ $m_a(1/2) = 2$
 $\mu(2) = 1$ $\mu(1/2) = ?$

$$\mu(1/2) = \dim \text{Nul}(A - \frac{1}{2}I) = 3 - \text{rg}(A - \frac{1}{2}I)$$

$$A - \frac{1}{2}I = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & a & a+1 \\ 0 & 0 & a^2-2a-3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{rg}(A - \frac{1}{2}I) \neq 3$$

- $a^2-2a-3 = 0 \Rightarrow \text{rg}(A - \frac{1}{2}I) = 1 \Rightarrow \mu(1/2) = 2 = m_a(1/2)$
- $a^2-2a-3 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A - \frac{1}{2}I) = 2 \Rightarrow \mu(1/2) = 1 \neq m_a(1/2)$

La matriz es diagonalizable si $a^2-2a-3 = 0$ $\begin{matrix} \nearrow a=3 \\ \searrow a=-1 \end{matrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$S_0 \oplus S_1 \oplus S_2 = \mathbb{R}^3$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

con $S_0 = \text{Nul}(A - 0 \cdot I)$ $S_1 = \text{Nul}(A - I)$ $S_2 = \text{Nul}(A - 2I)$

Matrices diagonalizables.

1. Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

- a) A es diagonalizable.
- b) Existe una base $\mathbb{K}^n$ compuesta por autovectores de A .
- c)

$$\mathbb{K}^n = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(A)} \underbrace{\text{mul}(A - \lambda I)}_{S_\lambda}.$$

d)

$$\chi_A(x) = \prod_{\lambda \in \sigma(A)} (x - \lambda)^{\mu(\lambda)}.$$

polinomio característico

Usaremos más adelante:

2. Si $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ es diagonalizable y $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base de $\mathbb{K}^n$ compuesta por autovectores de A correspondientes a los autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, respectivamente, entonces para todo $k \in \mathbb{N}$ vale que

$$A^k \left(\sum_{j=1}^n c_j v_j \right) = \sum_{j=1}^n c_j \lambda_j^k v_j,$$

donde $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{K}$.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_A = \{11, 1\}$$

$$\chi_A(\lambda) = p_A(\lambda) = (x-1)^1 (x-11)^1 \text{ con } \chi_A \in \mathbb{R}_{\geq 1}[x]$$

$$\text{ma}(11) = 1 \quad \text{ma}(1) = 1 \quad \therefore \mu(1) = 1$$

$$\mu(11) = 1$$

$$\lambda = 1 \quad A - I = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow S_{\lambda=1} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{Nul}(A - I)$$

$$\lambda = 11 \quad A - 11I = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow S_{\lambda=11} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = \text{Nul}(A - 11I)$$

$$\Rightarrow \mathcal{B} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{v_2} \right\} \text{ base de } \mathbb{R}^2 \text{ formada por avcs de } A$$

$$\Rightarrow A = P D P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \quad (\text{Obs})$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^2 : x = \alpha_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (\exists \text{ únicos } \alpha_1 \text{ y } \alpha_2)$$

$$A^k x = A^k \left(\alpha_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \alpha_1 A^k \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 A^k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\alpha_1 \cdot 1^k}_{v_1} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \underbrace{\alpha_2 \cdot 11^k}_{v_2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^2 \alpha_j \lambda_j^k v_j$$

POLINOMIOS MATRICIALES

Sea $A \in K^{n \times n}$ y sea $p(x)$ un polinomio cualquiera
 $p(x) \in \mathbb{R}[x]$

Propiedad:

- Si λ es ava de $A \Rightarrow p(\lambda)$ es ava de $p(A)$ ✓
así a $v \neq 0$ ave de A

Obs: $p(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_q x^q$

$$\Rightarrow p(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_q A^q \rightarrow \text{polinomio matricial}$$

Evaluamos:

$$\begin{aligned} v \neq 0 \quad p(A)v &= (a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_q A^q)v \\ &= a_0 v + a_1 Av + a_2 A^2 v + \dots + a_q A^q v \\ &= a_0 v + a_1 \lambda v + a_2 \lambda^2 v + \dots + a_q \lambda^q v \\ &= (a_0 \cdot 1 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + \dots + a_q \lambda^q) v \\ &= p(\lambda) v \quad (v \neq 0) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda \in \sigma_A \Rightarrow p(\lambda) \in \sigma_{p(A)} \quad \sigma_A \subset \sigma_{p(A)}$$

¿Qué pasa con la vuelta? Si conoces los avas de $p(A)$ ¿puedes saber de los avas de A ?

- β es ava de $p(A) \Rightarrow \exists \lambda$ ava de $A : p(\lambda) = \beta$ Aceptando este resultado means en un segundo

Ej: Sabiendo que $A^2 - 3A + 2I = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

¿Qué podemos decir de los avas de A ?

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \sigma_B = \{0, 6\}$$

$$A^2 - 3A + 2I = p(A) \text{ donde } p(x) = x^2 - 3x + 2$$

Ejemplos



Ej: Sabiendo que $A^2 - 3A + 2I = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

¿Qué podemos decir de los avas de A?

$B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ $\sigma_B = \{0, 6\}$

$A^2 - 3A + 2I = p(A)$ donde $p(x) = x^2 - 3x + 2$

Como 0 es ava de $p(A) \Rightarrow \exists \lambda$ ava de A : $p(\lambda) = 0$

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2 \rightarrow$ posibles avas de A

También se tiene que dar para esta matriz

Como 6 es ava de $p(A) = B \Rightarrow \exists \lambda$ ava de A : $p(\lambda) = 6$

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 6 \Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \rightarrow \lambda_3 = 4, \lambda_4 = -1 \rightarrow$ otros posibles avas de A

Como $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tiene a lo sumo 2 avas, ¿qué posibilidades tenemos para el $\sigma(A)$?

$\sigma_A = \{1, 4\}$ o $\sigma_A = \{2, 4\}$ o $\sigma_A = \{1, -1\}$ o $\sigma_A = \{2, -1\}$

Variantes:

Buscar $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$: $A^2 - 3A + 2I = B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ con $\text{tr}(A) = 6$

Como $\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 = 6 \therefore \sigma_A = \{2, 4\} \Rightarrow D_A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Obs: $B = p(A) = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ tiene 2 avas $\neq$ (B es diagonalizable)

Para 0 ava de B $\Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ave

Para 6 ava de B $\Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ave

A / $A^2 - 3A + 2I = B$ y $B = P D P^{-1}$ con $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

Podemos pensar a $A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1}$

$A^2 - 3A + 2I = P D_A^2 P^{-1} - 3 P D_A P^{-1} + 2 P P^{-1}$
 $= P \underbrace{(D_A^2 - 3D_A + 2I)}_{p(D_A)} P^{-1} = P p(D_A) P^{-1}$
 con $p(D_A) = \begin{pmatrix} p(2) & 0 \\ 0 & p(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

Obs: B es diagonalizable con avas $\neq$ (clara para los ejercicios)

Otro ej: Sea $A^2 - 3A + 2I = O_{\mathbb{R}^{2 \times 2}}$ ¿Qué podemos decir de los avas de A? $\sigma_A = \{1, 2\} \rightarrow$ únicos posibles avas de A

Obs: $O_{\mathbb{R}^{2 \times 2}} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$ $P = I$ o P es cualquier matriz invertible sus columnas forman base de $\mathbb{R}^2$

de modo que A puede ser:

$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$ o $A = P \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$ o $A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$

Otro: Sea $A^2 - 3A + 2I$ una matriz no invertible ¿Qué podemos decir de los avas de A?

$A^2 - 3A + 2I$ tiene a 0 como uno de sus avas $\Rightarrow \lambda = 1$ o $\lambda = 2$ serán uno de los avas de A.

Propiedad: Si $A \in K^{n \times n}$ es diagonalizable $\Rightarrow p(A)$ es diagonalizable para cualquier polinomio $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_q x^q$

Como A es diagonalizable $\exists P^{-1}$: $A = P D_A P^{-1}$

$p(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_q A^q$

$p(A) = a_0 P P^{-1} + a_1 P D P^{-1} + a_2 P D^2 P^{-1} + \dots + a_q P D^q P^{-1}$

$p(A) = P \underbrace{(a_0 I + a_1 D + a_2 D^2 + \dots + a_q D^q)}_{\text{diagonal : } p(D)} P^{-1} = P p(D) P^{-1}$

Obs importante: la cuenta no se equivoca

• Sea $p(x) = x^2$ y $p(A) = 0_{\mathbb{R}^{2 \times 2}}$ $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A^2 = 0_{\mathbb{R}^{2 \times 2}}$ es diagonalizable (trivial) y A no es diagonalizable

para $\chi(A) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2$ A tiene sólo al 0 como

valor
 $\mu(0) = 2$

$\mu(0) = ?$ $\dim \text{Nul}(A) = 2 - \text{rg}(A) = 2 - 1 = 1 = \mu(0)$

Como $\mu(0) \neq \mu(0) \Rightarrow A$ no es diagonalizable

Propiedad: $A \in K^{n \times n}$ y $q(x)$ es un polinomio cualquiera
 $q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_gx^g$

Si $q(A)$ es diagonalizable con todos los valores $\neq 0$, entonces
 A es diagonalizable (uso en ej 4-6)

3. TEOREMA ESPECTRAL PARA MATRICES DIAGONALIZABLES

Teorema 3.1. Una matriz $A \in K^{n \times n}$ con espectro $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ es diagonalizable si y sólo si existen matrices $\{G_1, G_2, \dots, G_k\}$ tales que

(7) $A = \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \dots + \lambda_k G_k$

donde las G_i tienen las siguientes propiedades

en el sentido de pág. 2

- G_i es la proyección sobre $\text{Nul}(A - \lambda_i I)$ en la dirección de $\text{col}(A - \lambda_i I)$.
- $G_i G_j = 0$ para $i \neq j$.
- $G_1 + G_2 + \dots + G_k = I$.

El desarrollo (7) se denomina la descomposición espectral de A , y las G_i se llaman los proyectores espectrales asociados.

Ejemplo de aplicación:

$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ con $\sigma(A) = \{3, 7\}$ $\mathcal{N}(A - 3I) = \text{Nul}(A - 3I) = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
 $\mathcal{N}(A - 7I) = \text{Nul}(A - 7I) = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Además $\text{Col}(A - 3I) = \text{Col} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

$\text{Col}(A - 7I) = \text{Col} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Recordemos que proyección sobre $\text{Nul}(A - \lambda I)$ en la dirección del $\text{Col}(A - \lambda I)$ sería $G(x) = \begin{cases} x & x \in \text{Nul}(A - \lambda I) \\ 0 & x \in \text{Col}(A - \lambda I) \end{cases}$ como transf. lineal!

con esta idea armamos G_1 y G_2

$$G_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad G_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$[G_1]_{\mathbb{R}^2}^{\mathbb{R}^2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{H^{\mathbb{R}^2}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{G_1^B} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}}_{B^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore [G_1]_{\mathbb{R}^2}^{\mathbb{R}^2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

del mismo modo se halla $[G_2]_{\mathbb{R}^2}^{\mathbb{R}^2} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ (verificar)

así $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = 3 \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}}_{G_1} + 4 \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}}_{G_2}$ Descomposición espectral de A

donde además:

$$G_1 \circ G_2 = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^{2 \times 2}} \quad \checkmark$$

$$G_1 + G_2 = I_{\mathbb{R}^{2 \times 2}} \quad \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

Ejemplo 2

Ejemplo 2:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \sigma_A = \{1, 2, 3\} \quad (3 \text{ auto } \neq)$$

$$S_1 = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad S_2 = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \quad S_3 = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

A es diagonalizable $\Leftrightarrow \exists P$ invertible : $A = P D P^{-1}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$

$$y P = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

A es diagonalizable $\Rightarrow \mathbb{R}^3 = S_1 \oplus S_2 \oplus S_3$ ya que:

Sea $B = \left\{ \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ es base de $\mathbb{R}^3$ formada por auto de $A \Rightarrow S_1 \oplus S_2 \oplus S_3$

A es diagonalizable $\Rightarrow \exists G_1, G_2, G_3 : A = 1G_1 + 2G_2 + 3G_3$

donde G_i proyección sobre $\text{Nul}(A - \lambda_i I)$ en la dirección de $\text{Col}(A - \lambda_i I)$
para cada $\lambda_i \quad i=1,2,3$
 $\sum_{i=1}^3 G_i = I \quad G_i G_j = 0 \quad i \neq j$

Para armar G_1 :
 $\text{Col}(A - I) = \text{Col} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

Sea $B = \left\{ \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ base de $\mathbb{R}^3$

$$G_1 \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad G_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad G_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[G_1]_{E_{\mathbb{R}^3}}^{E_{\mathbb{R}^3}} = M_B^{E_{\mathbb{R}^3}} [G_1]_B^B \cdot M_{E_{\mathbb{R}^3}}^B = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$$

idem para $G_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & -1 \end{pmatrix}$

$$G_3 = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Como $G_1 + G_2 + G_3 = I \Rightarrow -G_2 - G_3 = \begin{pmatrix} -1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$G_1 = I - G_2 - G_3 = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = 1G_1 + 2G_2 + 3G_3$$

$$G_1 \cdot G_3 = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

Obs: recordemos $G_1^2 = G_1 \quad G_2^2 = G_2 \quad G_3^2 = G_3$

$$k \in \mathbb{N} \quad A^k = \lambda_1^k G_1 + \lambda_2^k G_2 + \lambda_3^k G_3 \quad (\text{en este caso})$$

$$\text{Ej: } A^2 = (1G_1 + 2G_2 + 3G_3)(1G_1 + 2G_2 + 3G_3) \\ = 1^2 G_1^2 + 2^2 G_2^2 + 3^2 G_3^2 = 1^2 G_1 + 2^2 G_2 + 3^2 G_3$$

3. TEOREMA ESPECTRAL PARA MATRICES DIAGONALIZABLES

Teorema 3.1. Una matriz $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ con espectro $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ es diagonalizable si y sólo si existen matrices $\{G_1, G_2, \dots, G_k\}$ tales que

$$(7) \quad A = \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \dots + \lambda_k G_k,$$

donde las G_i tienen las siguientes propiedades

- G_i es la proyección sobre $\text{Nul}(A - \lambda_i I)$ en la dirección de $\text{Col}(A - \lambda_i I)$.
- $G_i G_j = 0$ para $i \neq j$.
- $G_1 + G_2 + \dots + G_k = I$.

$$A^\eta = \lambda_1^\eta G_1 + \lambda_2^\eta G_2 + \dots + \lambda_k^\eta G_k$$

($\eta \in \mathbb{N}$) $\rightarrow$ se demuestra por inducción

Semejanza de matrices

Definición: Sean A y B dos matrices en $\mathbb{K}^{n \times n}$, se dice que B es **semejante** a A si existe $Q \in \mathbb{K}^{n \times n}$ inversible, tal que $B = Q A Q^{-1}$.
Se nota: $B \sim A$.

Propiedades : $A \sim B \Rightarrow \begin{cases} \det(A) = \det(B) \\ \text{tr}(A) = \text{tr}(B) \\ \chi_A(\lambda) = \chi_B(\lambda) \end{cases}$

Ej 1 : $A = \begin{pmatrix} 5/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 5/2 \end{pmatrix}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 5/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 5/2 \end{pmatrix}}_A = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_Q \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_B \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{Q^{-1}} \quad A \sim B$$

Obs : $\sigma(A) = \{3, 2\}$ con $m_3 = \mu_3$ (simple)
 $m_2 = 2$, $\mu_2 = 1$
 $\therefore A$ no es diagonalizable (verificar)

Ej 2 ¿ $A \sim B$? siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\text{tr}(A) = \text{tr}(B) \checkmark$

$\det(A) = 2 - 3 = -1$ como $\det(A) \neq \det(B) \Rightarrow A$ no es semijante a B
 $\det(B) = 0 - 2 = -2$

Ej 3 : ¿ $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$?

$\text{tr}(A) = 7 = \text{tr}(B) \checkmark$

$\det(A) = 12 = \det(B) \checkmark$

$\chi_A(\lambda) = (2 - \lambda)^2(3 - \lambda) = \chi_B \checkmark$

Sin embargo si existiera Q invertible : $A = QBQ^{-1}$

sería $AQ = QB \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2a_1 + a_4 & 2a_2 + a_5 & 2a_3 + a_6 \\ 2a_4 & 2a_5 & 2a_6 \\ 3a_7 & 3a_8 & 3a_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_1 & 2a_2 & 3a_3 \\ 2a_4 & 2a_5 & 3a_6 \\ 2a_7 & 2a_8 & 3a_9 \end{pmatrix}$

$2a_1 + a_4 = 2a_1 \Rightarrow a_4 = 0$

$2a_2 + a_5 = 2a_2 \Rightarrow a_5 = 0$

$2a_3 + a_6 = 3a_3 \Rightarrow a_6 = a_3$

$2a_4 = 2a_4$

$2a_5 = 2a_5$

$2a_6 = 3a_6 \Rightarrow a_6 = 0$

$\therefore Q = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix}$

No $\exists Q^{-1}$

$\therefore A \not\sim B$

Propiedad (usar en los ejercicios)

A es diagonalizable, B es diagonalizable y $\chi_A(\lambda) = \chi_B(\lambda)$

$\Rightarrow A \sim B$

Demo: A diagonalizable $\Rightarrow \exists Q^{-1} : A = Q D_A Q^{-1}$ donde

$D_A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ y $\chi_A(\lambda)$

B diagonalizable $\Rightarrow \exists P^{-1} : B = P D_B P^{-1}$ donde

$D_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ ya que $\chi_A(\lambda) = \chi_B(\lambda)$
 $D_A = D_B$

$A = Q D_A Q^{-1} \Leftrightarrow D_A = Q^{-1} A Q$

$B = P D_B P^{-1} \Leftrightarrow D_B = P^{-1} B P$

$\therefore Q^{-1} A Q = P^{-1} B P$

$Q Q^{-1} A Q = Q P^{-1} B P \Leftrightarrow A Q = Q P^{-1} B P$

$\Leftrightarrow A Q Q^{-1} = Q P^{-1} B P Q^{-1} \Leftrightarrow A = \underbrace{Q P^{-1}}_M B \underbrace{P Q^{-1}}_{M^{-1}}$

$M = Q P^{-1}$ y $M^{-1} = (Q P^{-1})^{-1} = (P^{-1})^{-1} Q^{-1} = P Q^{-1}$

$\Rightarrow \exists M$ invertible : $A = M B M^{-1} \Rightarrow A \sim B$

Ejercicio

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & a & a+1 \\ 0 & 1/2 & a^2-2a-3 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ diagonalizable si $a=3 \vee a=-1$

Para $a=3$, hallar todos los $x \in \mathbb{R}^3$: $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Obs: $\{Ax, A^2x, A^3x, A^4x, \dots\}$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots \right\} \quad A^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} +\infty \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Con $a=3$ A es diagonalizable $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

$$\sigma(A) = \{1/2, 2\} \quad \mu_a(1/2) = \mu(1/2) = 2$$

$$\mu_a(2) = \mu(2) = 1$$

$$S_2 = \text{Nul}(A - 2I) = \text{Nul} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 \end{pmatrix} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$S_{1/2} = \text{Nul}(A - \frac{1}{2}I) = \text{Nul} \begin{pmatrix} 3/2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \frac{3}{2}x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \right\}$$

$$S_{1/2} : \frac{3}{2}x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0$$

$$S_{1/2} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \right\} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

$\therefore B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$ es base de $\mathbb{R}^3$ formada por v.e.s de A

$\Rightarrow A$ es diagonalizable

$$\forall x \in \mathbb{R}^3 : x = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$A^k x = A^k \left(\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$$

$$A^k x = \alpha_1 A^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 A^k \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha_3 A^k \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$A^k x = \alpha_1 2^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \left(\frac{1}{2}\right)^k \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha_3 \left(\frac{1}{2}\right)^k \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k x = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\alpha_1 2^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \left(\frac{1}{2}\right)^k \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha_3 \left(\frac{1}{2}\right)^k \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_1 2^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \alpha_1 = 0$$

$$\Rightarrow x = \alpha_2 \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$$

$$\text{ó } x \in \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \right\} = S_{1/2}$$

Ejercicio:

Hallar una matriz $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ con $\text{tr}(A) = 0$ /

$$A^2 - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\text{rg}(A^2) = 2 \Rightarrow 0$ es ara de A^2

$$|(A^2 - \lambda I)| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow 2$ es ara de A^2

$$\text{tr}(A^2) = 4 = 0 + 2 + \lambda \Rightarrow \lambda = 2$$

$$\sigma(A^2) = \{0, 2\} \quad \begin{matrix} m_a(0) = \mu(0) = 1 \\ m_a(2) = 2 \end{matrix}$$

$$\text{Nul}(A^2 - 2I) = \text{Nul} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\Rightarrow \dim \text{Nul}(A^2 - 2I) = 3 - 1 = 2 = \mu(2)$$

A^2 es diagonalizable

$$\underbrace{S_2}_{\text{para } A^2} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \underbrace{S_0}_{\text{para } A^2} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \text{ formada por avas de } A^2$$

λ es ara de $A \Rightarrow \lambda^2$ es ara de A^2 con los mismos avas
 $\lambda^2 = 0 \quad \vee \quad \lambda^2 = 2$
 $\lambda = 0 \quad \lambda = \sqrt{2} \quad \lambda = -\sqrt{2}$
 son avas de A

Elijo $\lambda = 0 \rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\lambda = \sqrt{2} \rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = -\sqrt{2} \rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} P^{-1}$$

Obs: ¿es única A ? No

Elijo $\lambda = 0 \rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
 $\lambda = \sqrt{2} \rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\lambda = -\sqrt{2} \rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_M \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} M^{-1}$$

Obs: $S_{\sqrt{2}} \oplus S_{-\sqrt{2}} = \underbrace{S_2}_{\text{de } A^2}$

Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{rg}(A) = 2$

$X \in \mathbb{R}^3 : \bigcup_{k=0}^{\infty} A^k X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\downarrow$
0 es ara de A

$$|(A - \lambda I)| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) [(-1-\lambda)(2-\lambda) + 2]$$

$$= (1-\lambda) \left[(-1-\lambda)(2-\lambda) + 2 \right] = (1-\lambda)(-\lambda + \lambda^2) \\ = (1-\lambda)\lambda(\lambda-1)$$

$$\sigma(A) = \{0, 1\} \quad m_A(0) = 1 \quad m_A(1) = 2$$

$$\text{Nul}(A-I) = \text{Nul} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{Nul}(A) = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ base de } \mathbb{R}^3 \text{ formada por autos de } A$$

$$X = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A^k X = \alpha_1 1^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 1^k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 0^k \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A^k X = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 1$$

$$\therefore X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 \in \mathbb{R}$$