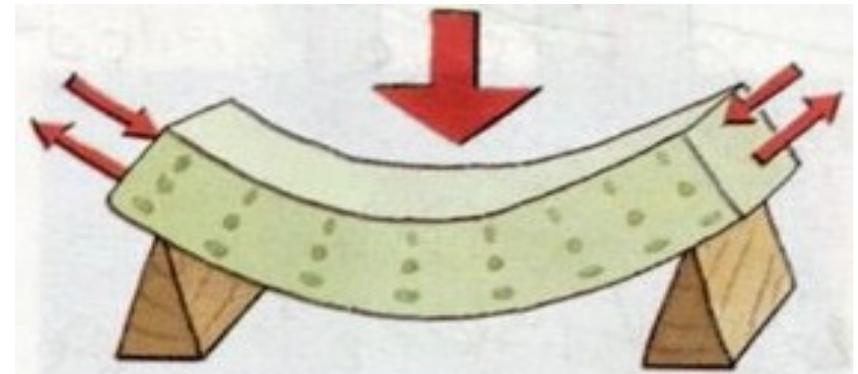


Solicitación x FLEXIÓN

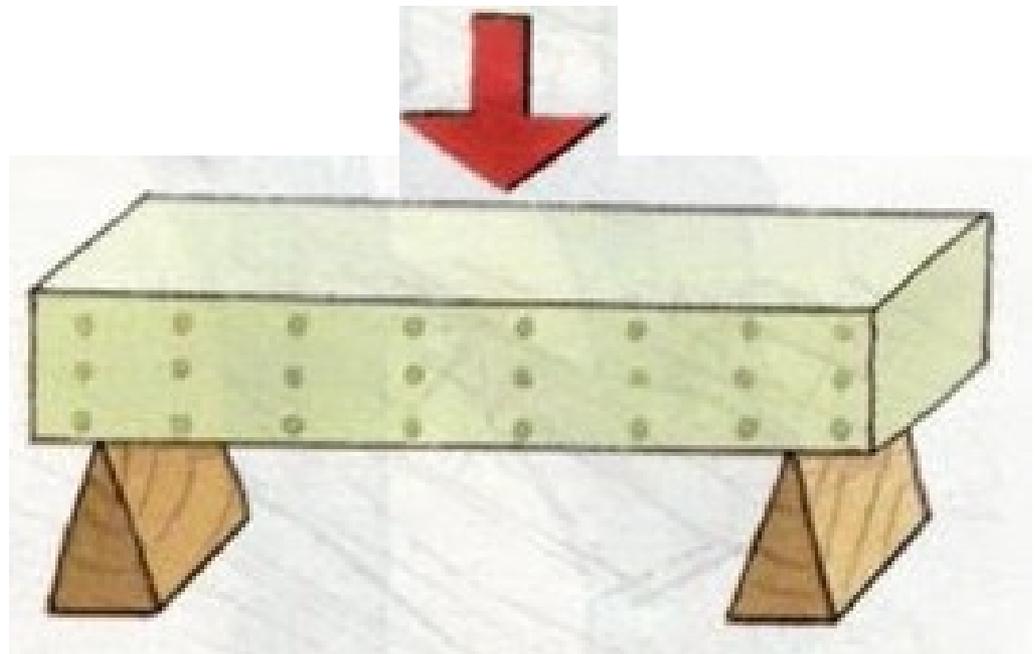
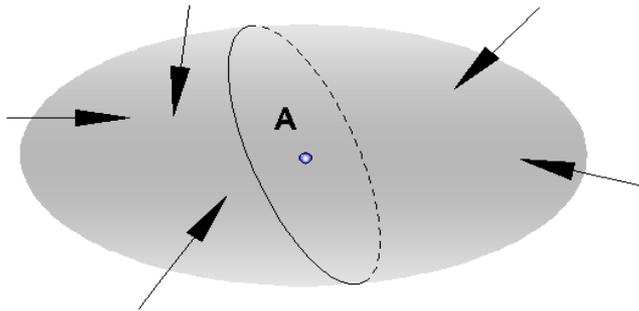
Clasificación. Conceptos generales. Flexión pura normal. Módulo Resistente. Deformación: elástica. Ejemplos. Ejercicio Flexión Simple normal. Flexión pura oblicua. Verificación y Proyecto a Flexión Oblicua. Comparación de solicitaciones puras. Ejercicio flexión Simple Oblicua.

Referencias- Bibliografía sugerida

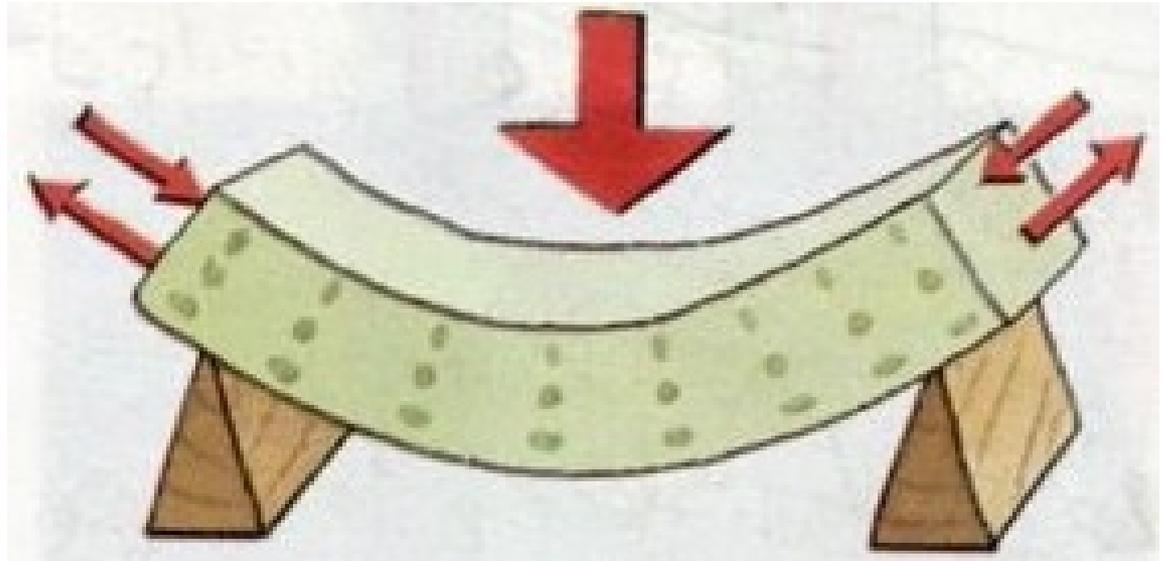
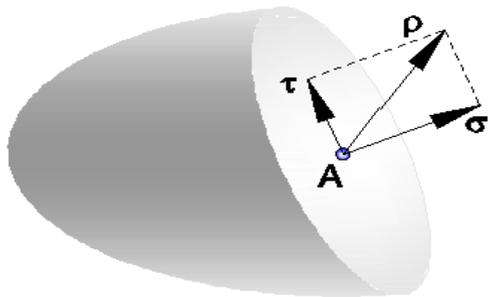
E.D.Fliess Estabilidad. Segundo curso.
F.P. Beer y J.R.Russell Johnston. Mecánica de Materiales—
James M.Gere. Mecánica de Materiales—
Riley Sturges Morris. Mecánica de Materiales—
R.C .Hibbeler. Mecánica de Materiales—



Equilibrio estático

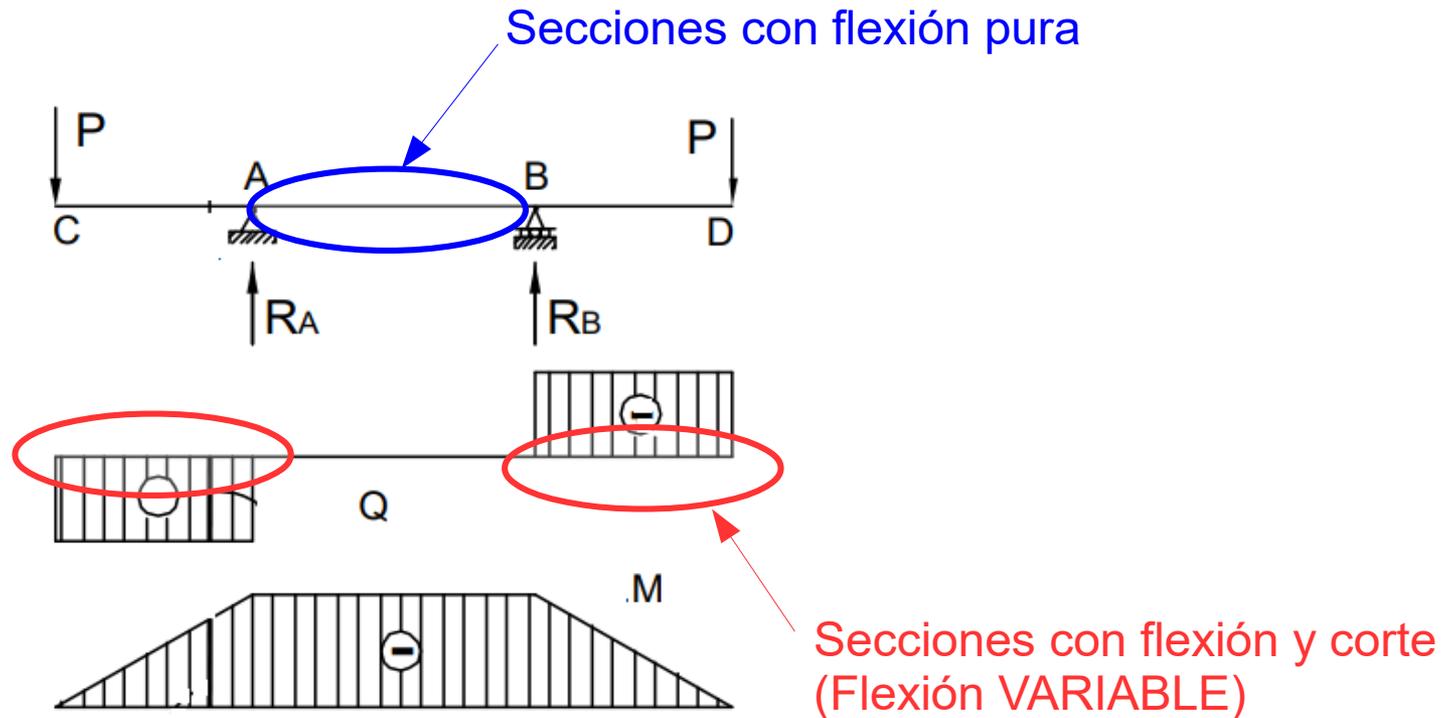


Equilibrio estático y equilibrio elástico



FLEXION Conceptos generales

- ➔ **Flexión**: La sollicitación se limita a dos pares normales al plano de la sección, sin o **con esfuerzo de corte**, en el primer caso es flexión pura y en el segundo es **flexión y corte**.

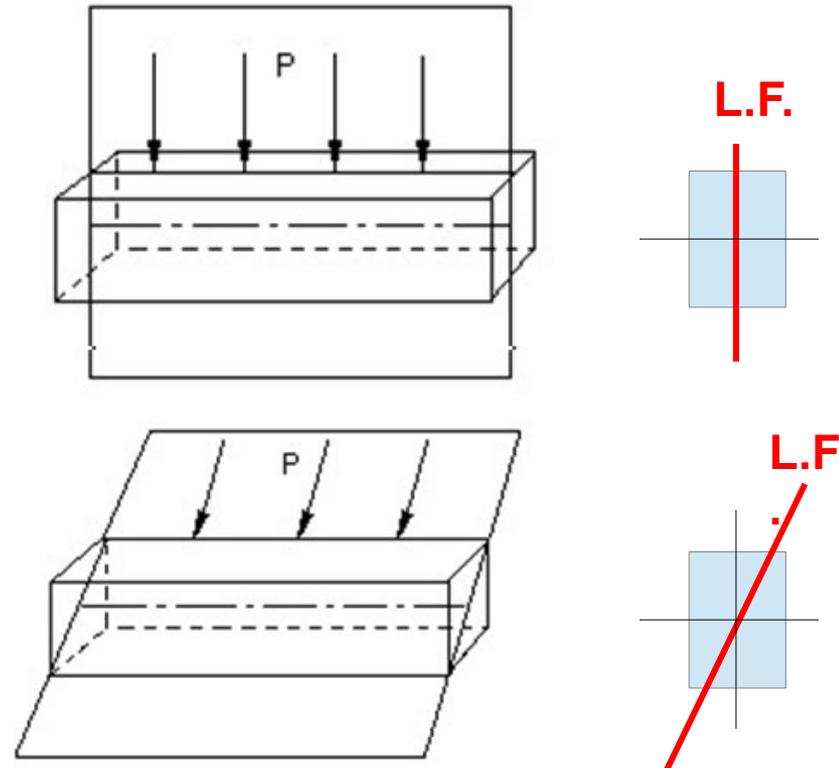


Conceptos generales

- ➔ **Flexión simple**: La sollicitación se limita a dos pares normales al plano de la sección, sin o con esfuerzo de corte.
- ➔ **Plano de flexión**: plano donde actúan los pares flexores.
- ➔ **Línea de fuerzas**: intersección del plano de flexión con el plano de la sección.

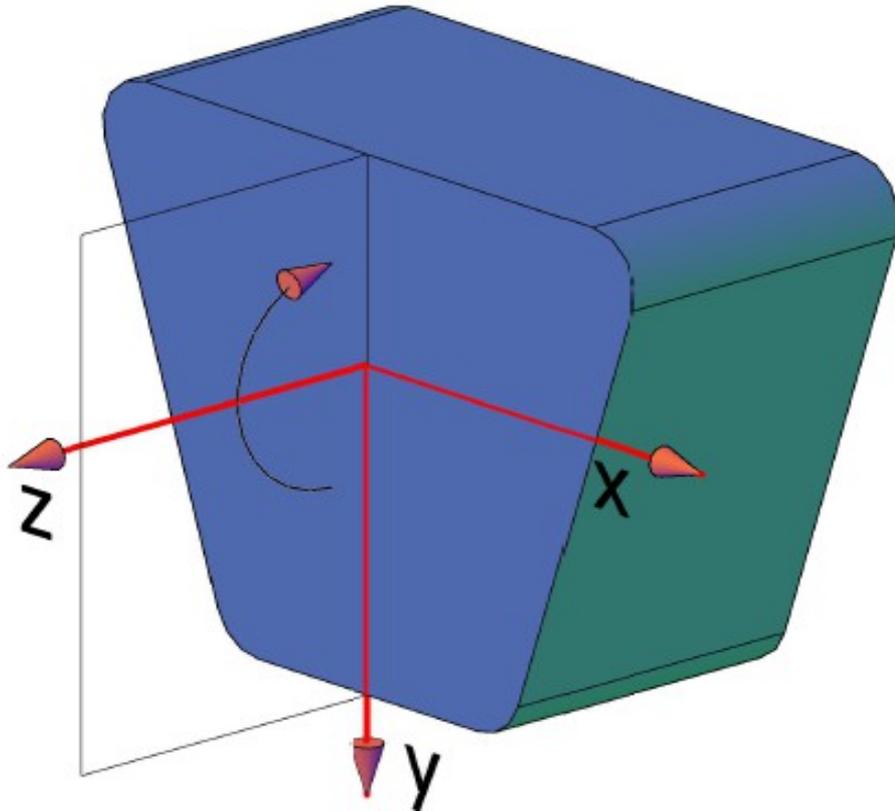
Flexión Simple normal (F.S.N.): La **línea de fuerzas** coincide con un eje principal de inercia de la sección.

Flexión simple oblicua (F.S.O.): La **línea de fuerzas** forma un cierto ángulo con un eje principal de inercia.



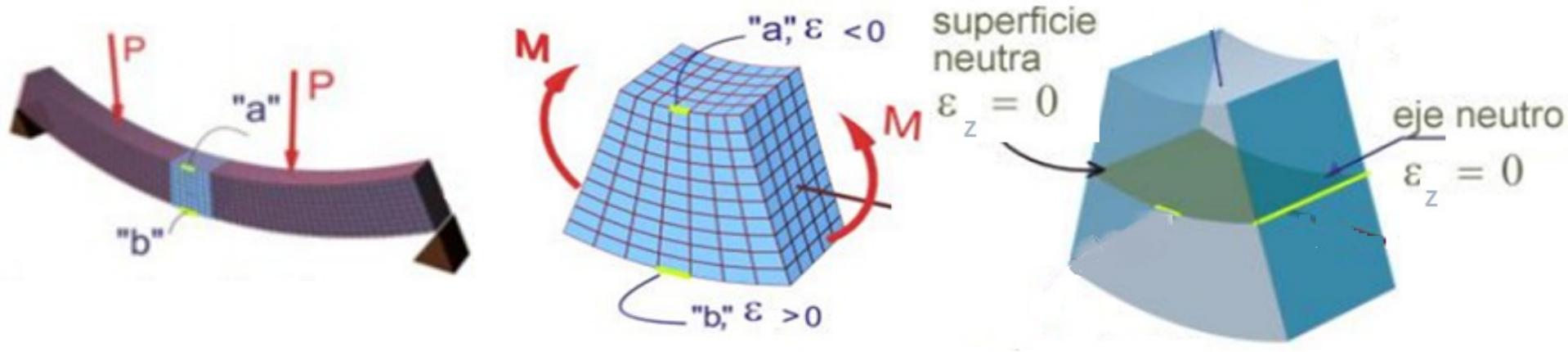
Flexión pura normal

- La línea de fuerzas coincide con un eje principal de inercia de la sección.
- La única sollicitación es M_x (con vector momento coincidente con el otro de los ejes principales), las demás son nulas.



Flexión pura normal

- Hipótesis de Bernoulli-Navier: Las secciones permanecen planas y giran en torno al eje neutro. Ciertas fibras se alargan y otras se acortan con una variación lineal; de lo cual podemos deducir que habrá fibras que no sufren deformación (estas fibras componen esta superficie que es la superficie neutra).

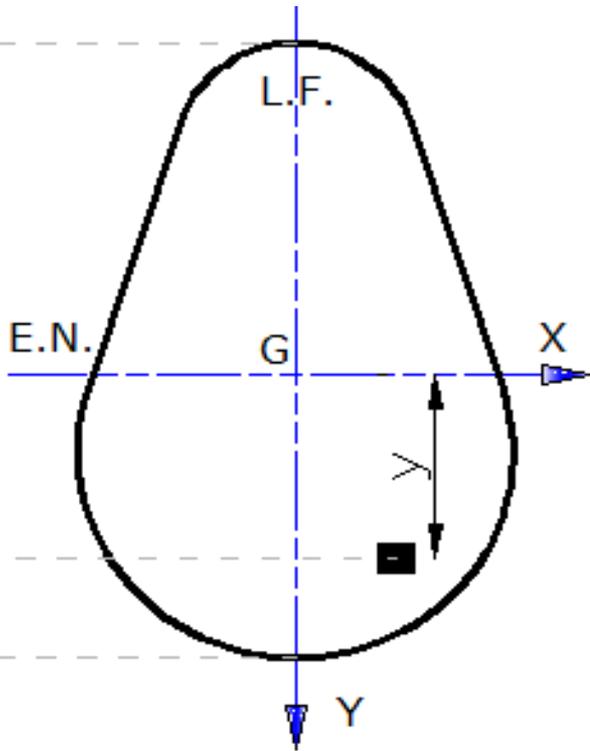


- Acorde al punto anterior y a la ley de Hooke, las tensiones variarán proporcionalmente en el plano de la sección según su distancia al eje neutro.

Flexión pura normal

Planteo de las Ecuaciones de Equivalencia

Considerando al eje principal “y” coincidente con la línea de fuerzas y a su conjugado de inercia (el eje principal “x”), coincidente con el eje neutro, hay que determinar, en base a las Ecuaciones de Equivalencia, las tensiones generadas:



$$(1) \quad 0 = \int_F \sigma_z . dF$$

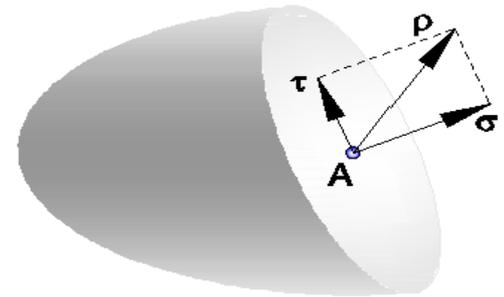
$$(2) \quad 0 = \int_F \tau_{zy} . dF$$

$$(3) \quad 0 = \int_F \tau_{zx} . dF$$

$$(4) \quad 0 = \int_F (\tau_{zx} y + \tau_{zy} x) . dF$$

$$(5) \quad M_x = \int_F \sigma . y . dF$$

$$(6) \quad 0 = \int_F \sigma . x . dF$$



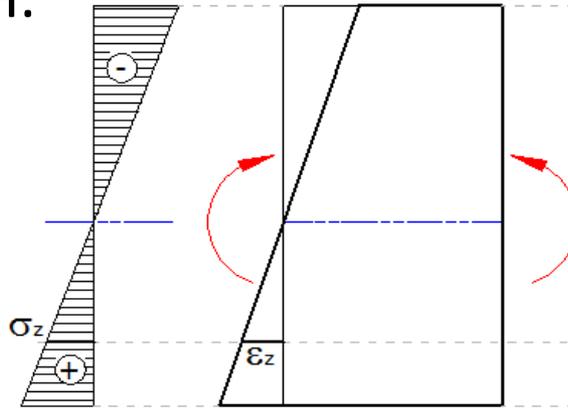
Flexión pura normal

► Al mantenerse planas las secciones no hay distorsión, y por ser $\tau = \gamma \cdot G$ no existen tensiones tangenciales; con lo cual las ecuaciones 2-3 y 4 son idénticamente nulas.

► De acuerdo a la HBN y La L.H.

$$\frac{\varepsilon_z}{y} = \frac{\bar{\varepsilon}_z}{1} \Rightarrow \varepsilon_z = \bar{\varepsilon}_z \cdot y$$

$$\sigma_z = E \cdot \varepsilon_z \Rightarrow \sigma_z = \bar{\sigma} \cdot y$$



$$(1) \quad \blacktriangleright \quad 0 = \int_F \sigma_z \cdot dF$$

$$(2) \quad \blacktriangleright \quad 0 = \int_F \tau_{zy} \cdot dF$$

$$(3) \quad \blacktriangleright \quad 0 = \int_F \tau_{zx} \cdot dF$$

$$(4) \quad \blacktriangleright \quad 0 = \int_F (\tau_{zx} \cdot y + \tau_{zy} \cdot x) \cdot dF$$

$$(5) \quad M_x = \int_F \sigma \cdot y \cdot dF$$

$$(6) \quad \blacktriangleright \quad 0 = \int_F \sigma \cdot x \cdot dF$$

► La 1° de las EE, nos dice que el eje neutro es baricentrico.

$$0 = \int_F \sigma_z \cdot dF = \bar{\sigma} \cdot \int_F y \cdot dF \quad \overline{Sx}$$

► la 6° de las EE Indica que x e y son conjugados de inercia.

Por ser flexión Pura Normal, el eje y es principal de inercia y por lo tanto x e y están a 90°.

$$0 = \int_F \sigma_z \cdot x \cdot dF = \bar{\sigma} \int_F y \cdot x \cdot dF \quad J_{xy}$$

Flexión pura normal

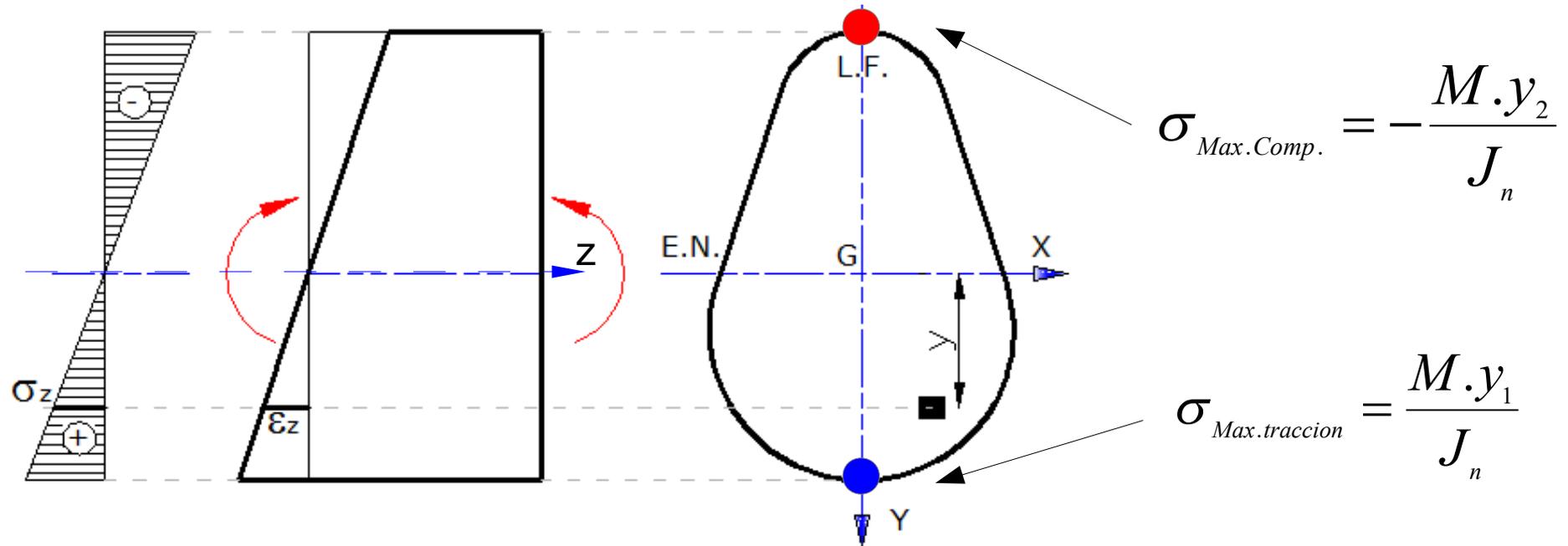
► Trabajando con la 5ª de las EE

$$M = \int_F \sigma_z \cdot y \cdot dF = \bar{\sigma} \int_F y^2 \cdot dF \Rightarrow \sigma_z = \frac{M \cdot y}{J_n}$$

$$\sigma_z = \frac{M \cdot y}{J_n}$$

$$\sigma_{Max} = \frac{M}{J_n} \cdot y_{Max} \leq \sigma_{Adm}$$

► Estamos ante la siguiente situación



Flexión pura normal

Módulo resistente

Si el eje neutro es de simetría $y_1=y_2$

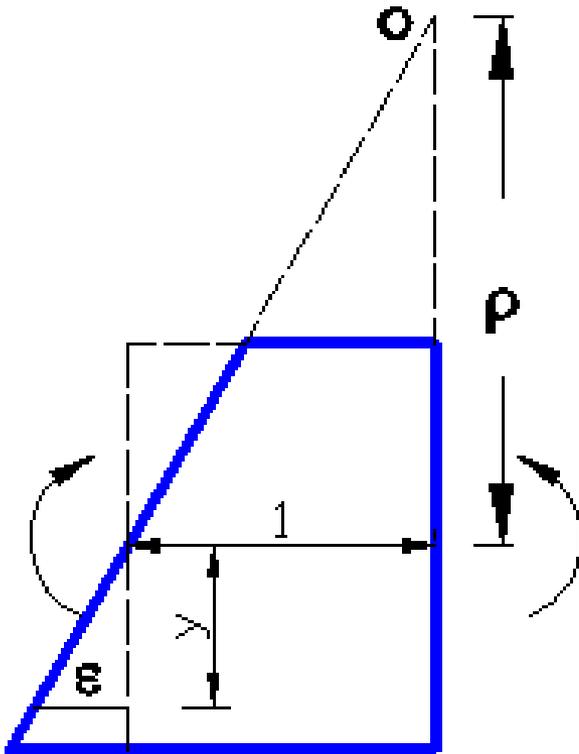
$$\sigma_{Max} = \pm \frac{M \cdot y_{Max}}{J_n}$$

Modulo resistente

$$W = \frac{J_n}{y_{max}}$$

$$\sigma_{Max} = \frac{M}{W}$$

Deformación (flecha) en Flexión pura normal

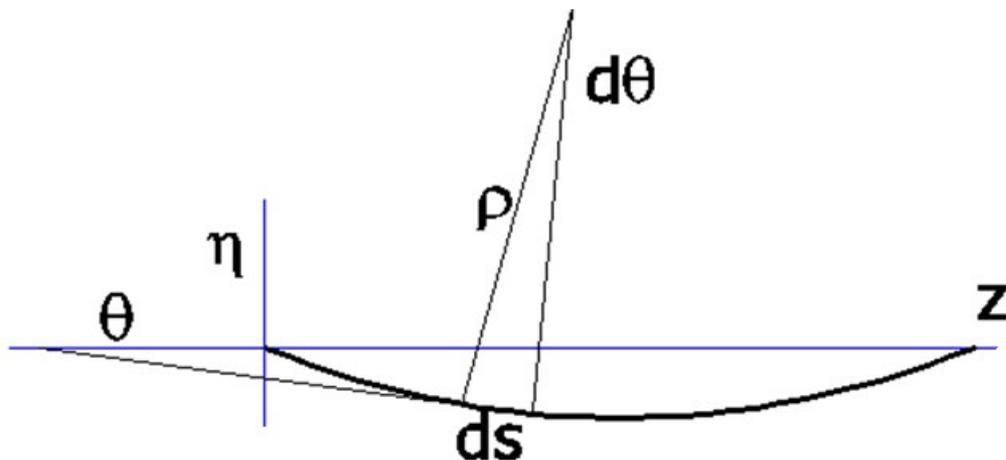


$$\frac{1}{\rho} = \frac{\epsilon}{y} \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{M}{J_n E}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{J_n E}$$

Ecuación fundamental de las deformaciones por flexión

Deformación (flecha) en Flexión pura normal



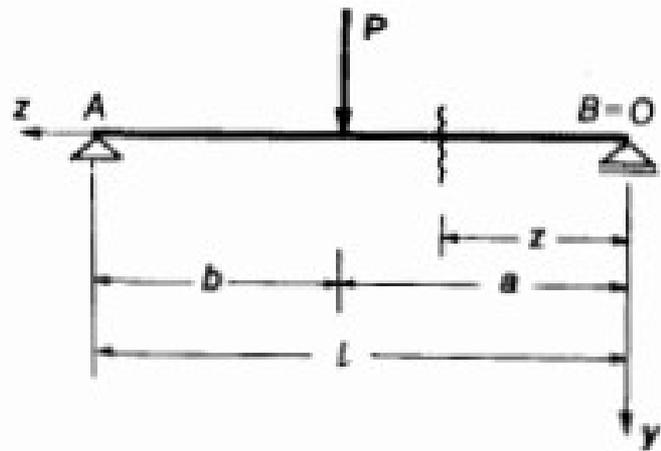
$$\operatorname{tg} \theta = \frac{d\eta}{dz} \Rightarrow \theta \cong \frac{d\eta}{dz} \Rightarrow \frac{d\theta}{dz} \cong \frac{d^2\eta}{dz^2}$$

$$ds = \rho \cdot d\theta \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} \Rightarrow \frac{1}{\rho} \cong \left| \frac{d\theta}{dz} \right|$$

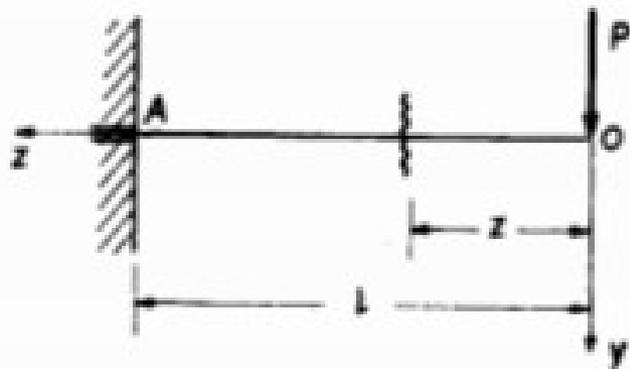


considerando M + según la figura y para los ejes adoptados:

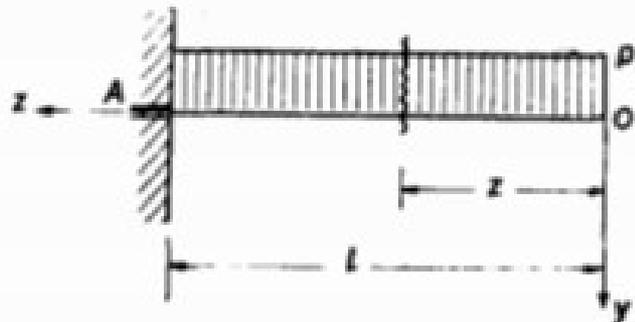
$$\frac{d^2\eta}{dz^2} = -\frac{M}{J_n E}$$



$$y = \frac{Pl^3}{48EJ_n}$$



$$y_{\text{máx.}} = \frac{Pl^3}{3EJ_n}$$



$$y_{\text{máx.}} = \frac{pl^4}{8EJ_n}$$

Flexión pura oblicua

La línea de fuerzas no coincide con un eje principal de inercia.

En este caso también existen fibras que conservan su longitud determinando la superficie neutra que corta a la sección definiendo el eje neutro. Teniendo en cuenta la Ley de Hooke la tensión es proporcional a la distancia n .

$$\frac{\sigma_z}{n} = k$$

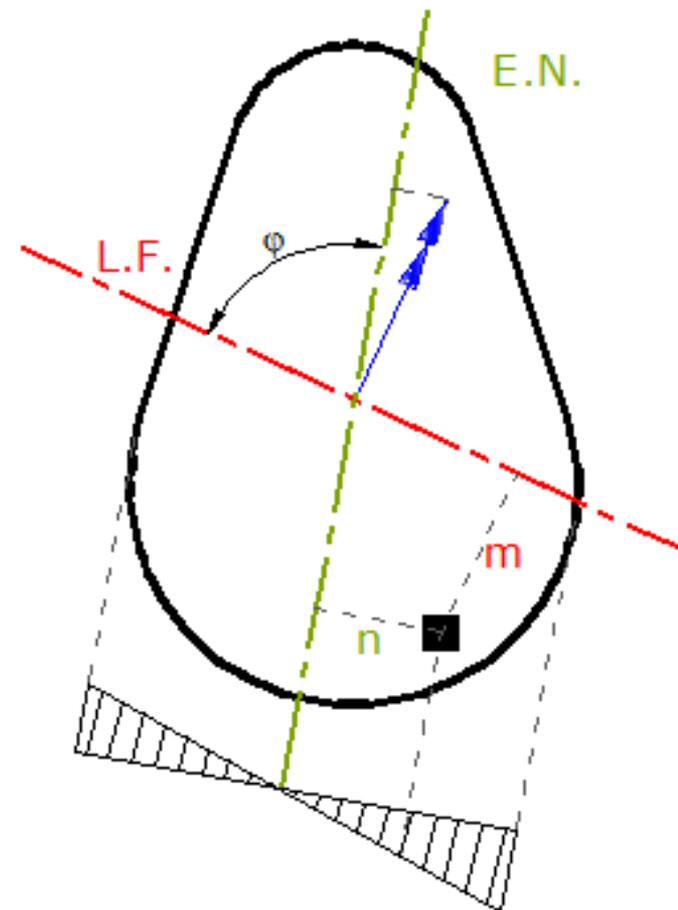
Considerando como **ejes de ref.** el E.N. y la L.F.

$$0 = \int_F \sigma_z . dF = k . \int_F n . dF \quad (1) \quad \underline{\text{el eje neutro es baricéntrico}}$$

$$0 = \int_F \sigma_z . m . dF = k \int_F m . n . dF \quad (6) \quad \underline{\text{el eje neutro y la línea de fuerzas son conjugados de inercia}}$$

$$M . \text{sen} \varphi = \int_F \sigma_z n . dF = k \int_F n^2 . dF \quad (5)$$

$$\sigma = \pm \frac{M . \text{sen} \varphi . n}{J_n}$$



Flexión oblicua

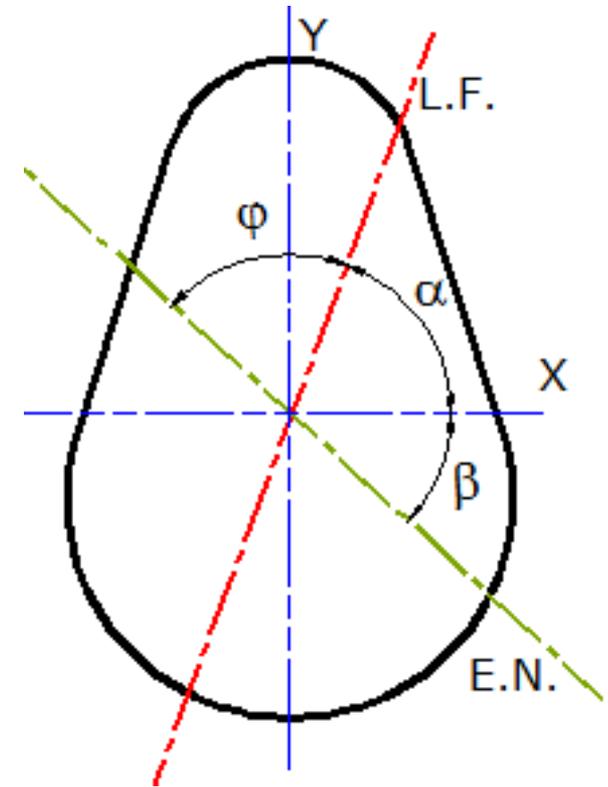
Determinación del eje neutro

El EN es conjugado de inercia de la LF: su determinación puede hacerse analíticamente según las expresiones halladas en la unidad de Geometría de las Masas:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{J_x - J_{xy} \operatorname{tg}\alpha}{J_{xy} - J_y \operatorname{tg}\alpha}$$

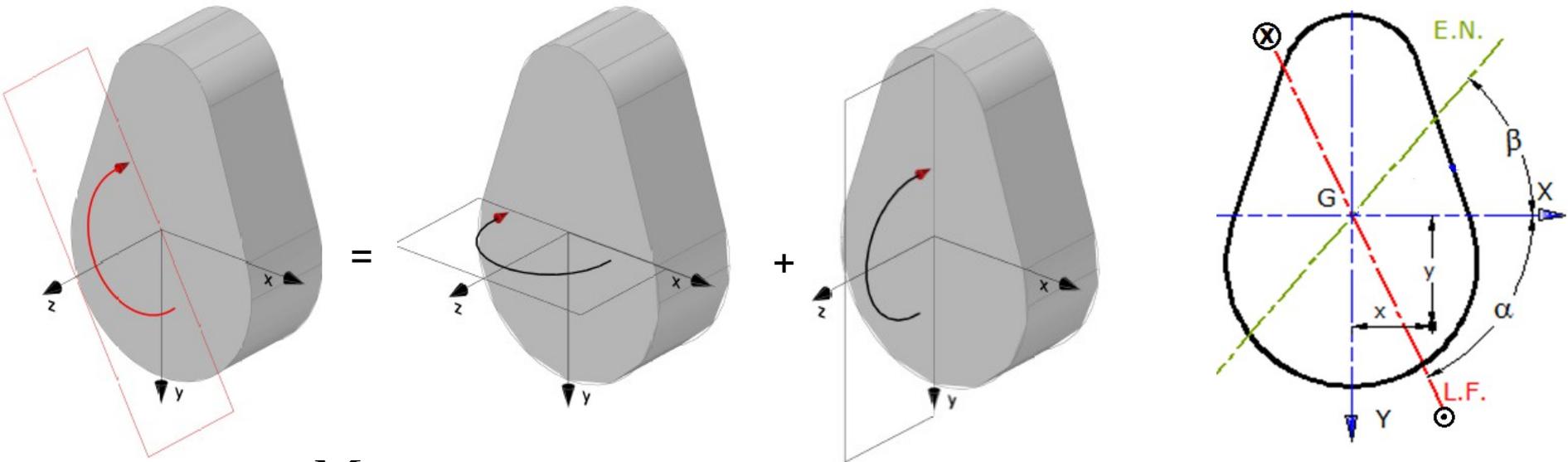
Si x e y son ejes principales de inercia

$$\operatorname{tg}\beta = -\frac{J_x}{J_y \operatorname{tg}\alpha}$$



Flexión oblicua

Descomposición en dos flexiones normales (signo por inspección):
Otra forma de resolver la F.S.O. es como la suma de dos flexiones normales, sobre los **ejes x e y** (que son principales de inercia).



$$\sigma_z = \frac{M_x \cdot y}{J_x} + \frac{M_y \cdot x}{J_y}$$

Los signos de los dos términos se deducen considerando los efectos que producen **M_x** y **M_y**

Determinación del eje neutro

$$M_x = M \cdot \text{sen} \alpha$$

$$M_y = M \cdot \text{cos} \alpha$$

$$\frac{\text{sen} \alpha \cdot y}{J_x} = - \frac{\text{cos} \alpha \cdot x}{J_y}$$

$$y = - \frac{J_x}{J_y} \cot \alpha \cdot x$$

Verificación y proyecto a Flexión Oblicua

Pueden presentarse 2 problemas

- **Verificación:** se pueden utilizar ambas expresiones vistas.

Usando L.F./E.N. como ejes de referencia

Usando **x** e **y** (ppales) como ejes de referencia

$$\sigma = \pm \frac{M \cdot \text{sen} \varphi \cdot n}{J_n}$$

$$\sigma_z = \frac{M_x \cdot y}{J_x} + \frac{M_y \cdot x}{J_y}$$

- **Dimensionar la sección:** conviene aplicar la resolución por superposición de efectos y especialmente cuando la sección es simétrica. Por ejemplo, en secciones rectangulares y doble T se puede aplicar el siguiente procedimiento:

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{M_x}{W_x} \left(1 + \frac{W_x}{M_x} \frac{M_y}{W_y} \right) \quad \text{llamando} \quad \frac{W_x}{W_y} = k$$

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} \left(1 + k \frac{M_y}{M_x} \right)$$

NOTAS: El k se fija entre 6,5 y 10,67
En IPN lo recomendable es comenzar con k=8 y se dimensiona x aproximaciones sucesivas

Comparación de Solicitaciones

AXIL

TENSIONES

$$\sigma_z = N_z / F$$

DEFORMAC.

$$\Delta l = \frac{l \cdot N_z}{E \cdot F}$$

FLEXIÓN (FSO)

$$\sigma_z = \frac{M_x \cdot y}{J_x} + \frac{M_y \cdot x}{J_y}$$

$$\sigma = \pm \frac{M \cdot \text{sen} \varphi \cdot n}{J_n}$$

$$\frac{d^2 \eta}{dz^2} = - \frac{M}{J_n E} \quad \text{(FSN)}$$

Fórmulas y Gráficos de Tensiones

- Tensiones generadas (FSO):

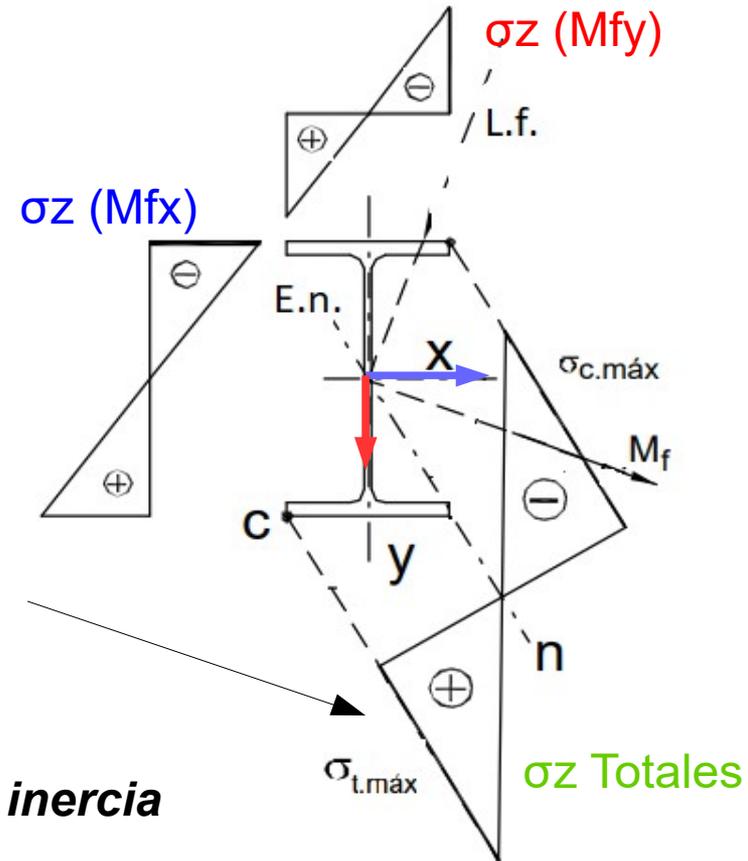
$$\sigma_z = \frac{M_x \cdot y}{J_x} + \frac{M_y \cdot x}{J_y}$$

$$\sigma = \pm \frac{M \cdot \text{sen} \varphi \cdot n}{J_n}$$

Utilizando el principio de superposición de los efectos para ejes principales: FSO como suma de 2 FSN

Utilizando la línea de fuerzas (L.f.) y el eje neutro (E.n.) como referencias

NOTA: *E.n.* y *L.f.* son ejes conjugados de inercia



- Deformaciones producidas (FSN):

$$\frac{d^2 \eta}{dz^2} = -\frac{M}{J_n E}$$



Elástica de deformación para barra simplemente apoyada