Sea $\mathbb{S}_a \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}$ el subespacio definido por

$$\mathbb{S}_a = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} -2 & a-9 \\ a-7 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & a-3 \\ a-3 & a-5 \end{bmatrix} \right\}$$

, con $a \in \mathbb{R}$. A_1 A_2 A_3

Seleccione una:

- a. $\dim(\mathbb{S}_a) = 3$ si y solamente si $a \notin \{5, 7\}$. ✓
- b. $\dim(\mathbb{S}_a) = 3$ si y solamente si $a \notin \{2, 5\}$.
- c. $\dim(\mathbb{S}_a) = 3$ si y solamente si $a \notin \{2, 7\}$. NO
- d. $\dim(\mathbb{S}_a) = 3$ si y solamente si $a \notin \{3, 5\}$.

$\dim S_a = 3 \iff \{A_1, A_2, A_3\}$ LI

Analizemos coordenadas en E

$$[A_1]_E = \begin{pmatrix} -2 \\ a-9 \\ a-7 \\ -2 \end{pmatrix} \quad [A_2]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad [A_3]_E = \begin{pmatrix} 0 \\ a-3 \\ a-3 \\ a-5 \end{pmatrix}$$

$$\alpha [A_1]_E + \beta [A_2]_E + \gamma [A_3]_E = 0_{\mathbb{R}^4}$$

$$\begin{cases} -2\alpha + \beta = 0 & \beta = 2\alpha \ * \\ (a-9)\alpha + \beta + (a-3)\gamma = 0 \\ (a-7)\alpha + (a-3)\gamma = 0 \\ -2\alpha + \beta + (a-5)\gamma = 0 \end{cases}$$

$* \quad (a-5)\gamma = 0 \quad a \neq 5 \Rightarrow \gamma = 0$

$(a-7)\alpha = 0 \quad a \neq 7 \quad \alpha = 0$

Descarto $\{2, 7\}$

Si las coordenadas forman un conj. LI $\Rightarrow$ el conj. de vectores es LI

De otra forma:

$$\begin{pmatrix} -2 & a-9 & a-7 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a-3 & a-3 & a-5 \end{pmatrix} \xrightarrow{2F_2 + F_1} \overset{(*)}{\begin{pmatrix} -2 & a-9 & a-7 & -2 \\ 0 & a-7 & a-7 & 0 \\ 0 & a-3 & a-3 & a-5 \end{pmatrix}}$$

$a \neq 7 \quad (a-3)F_2 - (a-7)F_3$

$$\begin{pmatrix} -2 & a-9 & a-7 & -2 \\ 0 & a-7 & a-7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(a-5)(a-7) \end{pmatrix}$$

$a \neq 5$

Obs: $a \neq 7 \wedge a \neq 5 \Rightarrow$ 3 filas li

ojo! $a = 7$ En $(*)$
$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{2 filas li}$$

Sean $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y $B \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ dos matrices tales que

$$AB = \begin{bmatrix} 5 & -5 & -5 & 5 \\ 11 & -7 & -11 & 7 \\ 4 & -3 & -4 & 3 \end{bmatrix},$$

donde $\text{rango}(A) = 3$, y B satisface que

$B\,[1 \ \ 1 \ \ 0 \ \ 0]^T = \underbrace{[0 \ \ 4 \ \ 1]^T}$, $\in Col(B)$

$B\,[-1 \ \ 0 \ \ -1 \ \ 1]^T = \underbrace{[5 \ \ 7 \ \ 3]^T}$.

El conjunto solución de la ecuación

$Bx = [-5 \ \ 1 \ \ -1]^T$ es ...

$x \in \mathbb{R}^4 : x = x_p + x_h$

$x_h \in Nul(B)$

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B(1\,1\,0\,0)^T} + \beta \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}}_{B(-1\,0\,-1\,1)^T}$$

$\beta = -1 \qquad \alpha = 2$

una solución particular

$$2B\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - B\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

¿Es la única? Si el $\rho(B) = 3$ sí pero ...

Si $x \in Nul(B) \Rightarrow Bx = 0 \Rightarrow ABx = 0 \Rightarrow$

$x \in Nul(AB)$

$Nul(B) \subseteq Nul(AB)$

$\downarrow$ prop

$\Leftarrow ABX = 0 \Rightarrow BX \in Nul(A)$

* $Nul(A) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ ya que $rg(A) = 3$ $\Rightarrow Nul(AB) = Nul(B)$ EN ESTE CASO

$ABx = 0 \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 5 & -5 & -5 & 5 \\ 11 & -7 & -11 & 7 \\ 4 & -3 & -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 5 & -5 & -5 & 5 \\ 11 & -7 & -11 & 7 \\ 4 & -3 & -4 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 5F_2 - 11F_1 \\ 5F_3 - 4F_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 5 & -5 & -5 & 5 \\ 0 & 20 & 0 & -20 \\ \cancel{0} & \cancel{5} & \cancel{0} & \cancel{-5} \end{array} \quad F_3 = 4F_2$$

$x_2 = x_4 \qquad x_1 = x_3$

$$Nu(B) = gen\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\Rightarrow x = \overbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}^{\text{particular}} + \underbrace{\alpha\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{homogénea}}$$

$A \in K^{n \times m}$

- $\dim Nul(A) + rg(A) = m$ (Nº de columnas de A)

  $rg(A) = \dim Col(A) = \dim(Fil(A))$

  Si $rg(A) = m \Rightarrow \dim Nul(A) = 0 \Rightarrow Nul(A) = \{0_{K^m}\}$

- $Nul(B) \subset Nul(AB)$

- $Col(AB) \subset Col(A)$

- $Nul(AB)$. $X \in Nul(AB) \Rightarrow A(BX) = 0 \Rightarrow BX \in Nul(A) \wedge Nul(A) = \{0\}$

  $\Rightarrow X \in Nul(B)$

  $Nul(AB) \subset Nul(B)$ si $rg(A) =$ nº de columnas de A

  $\Rightarrow Nul(AB) = Nul(B)$

Sean $\mathbb{U}$ y $\mathbb{S}$ los subespacios de $\mathbb{R}_3[x]$ definidos por

$\dim U = 3$

$\mathbb{U} = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p'(3) = 0\}$ y

$\mathbb{S} = \text{gen}\,\{\underset{p_1}{1 - 6x + x^2}, \underset{p_2}{2 - 27x + x^3}\}$. $\dim S = 2$ *

Un subespacio $\mathbb{T}$ de $\mathbb{R}_3[x]$ tal que $\mathbb{S} \oplus \mathbb{T} = \mathbb{U}$ es ...

* $\dim(T) = 1$

$S \subseteq U$

Seleccione una:

- a. $\mathbb{T} = \text{gen}\,\{\underset{q_1}{-5 - 9x^2 + 2x^3}\}$.
- b. $\mathbb{T} = \text{gen}\,\{\underset{q_2}{-9x^2 + 2x^3}\}$ ✓ $T \subseteq U$
- c. $\mathbb{T} = \text{gen}\,\{\underset{q_3}{13 + 9x^2 + 2x^3}\}$. NO
- d. $\mathbb{T} = \text{gen}\,\{\underset{q_4}{9x^2 + 2x^3}\}$. NO

¿$p_1 \in U$? ¿$p_2 \in U$?

$p_1' = -6 + 2x$ $\quad$ $p_2' = -27 + 3x^2$

$-6 + 2\cdot 3 = 0$ ✓ $\quad$ $-27 + 3\cdot 9 = 0$ ✓

$S \subseteq U$ ✓

$q_1 \in U$? $\quad -18\cdot 3 + 6\cdot 9$ ✓

$q_2 \in U$? $\quad -18\cdot 3 + 6\cdot 9$ ✓

$q_3 \in U$? $\quad 18\cdot 3 + 6\cdot 9 \neq 0$

$q_4 \in U$? $\quad 18\cdot 3 + 6\cdot 9 \neq 0$

$S = \text{gen}\{1 - 6x + x^2, 2 - 27x + x^3\}$

$S \subseteq U$

¿q_1 o q_2? el que genere T no debe pertenecer en S

$q_2 = -9x^2 + 2x^3 \overset{?}{=} \alpha(1 - 6x + x^2) + \beta(2 - 27x + x^3)$ incomp

$q_2 \notin S$

$q_1 = -5 - 9x^2 + 2x^3 = \underset{-9}{\alpha}(1 - 6x + x^2) + \underset{2}{\beta}(2 - 27x + x^3)$

$q_1 \in S$ no sirve

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = a_0 \\ -6\alpha - 27\beta = a_1 \\ \alpha = a_2 \\ \beta = a_3 \end{cases}$$

$\Rightarrow T = \text{gen}\{q_2\}$

Veamos la condición de U

$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$

$p'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2$

$p'(3) = 0 = \underline{a_1 + 6a_2 + 27a_3}$

Elegir un $p(x) \in U \wedge p(x) \notin S$

$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \left(\frac{-a_1 - 6a_2}{27}\right) x^3$

OTRO: $p(x) = 1 + 3x + 4x^2 - x^3$

$p'(x) = 3 + 8x - 3x^2$ $\quad$ $p'(3) = 3 + 24 - 27 = 0$ ✓

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = a_0 \\ -6\alpha - 27\beta = a_1 \\ \alpha = a_2 \\ \beta = a_3 \end{cases}$$

$\neq 3$

$p(x) = 4 - 33x + x^2 + x^3$

$a_3 = 1 = \beta$

$a_2 = 1 = \alpha$

$p'(x) = -33 + 2x + 3x^2$

$p'(3) = -33 + 6 + 27 = 0$ ✓

Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R}^3)$ y sea $[T]_B^C = \begin{bmatrix}0 & -1 & -2\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{bmatrix}$

la matriz de T con respecto a las bases

$B = \{\underbrace{\tfrac{1}{2}(x-1)(x-2)}_{p_1}, \underbrace{-x(x-2)}_{p_2}, \underbrace{\tfrac{1}{2}x(x-1)}_{p_3}\}$ de

$\mathbb{R}_2[x]$ y $C = \left\{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}\right\}$ de $\mathbb{R}^3$.

Si $\mathbb{S} = \text{gen}\{1-x, 1+x\}$, entonces ...

Seleccione una:

- a. $T(\mathbb{S}) = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}-3\\10\\8\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-6\\11\\10\end{bmatrix}\right\}$.
- b. $T(\mathbb{S}) = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}11\\18\\10\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}15\\23\\13\end{bmatrix}\right\}$.
- c. $T(\mathbb{S}) = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}7\\12\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}9\\14\\1\end{bmatrix}\right\}$.
- d. $T(\mathbb{S}) = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}7\\2\\12\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}9\\1\\14\end{bmatrix}\right\}$. ✓

$[T]_B^C \, [p]^B = [T(p)]^C$

Obs: $[T]_B^C \, [p]^B = [T(p)]^C$

$p_1(0) = 1 \quad p_1(1) = 0 \quad p_1(2) = 0$

$p_2(0) = 0 \quad p_2(1) = 1 \quad p_2(2) = 0$

$p_3(0) = 0 \quad p_3(1) = 0 \quad p_3(2) = 1$

$[\underbrace{1-x}_{q_1}]^B = \begin{pmatrix}q_1(0)\\q_1(1)\\q_1(2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ $\qquad q_1(x) = 1-x$

$[\underbrace{1+x}_{q_2}]^B = \begin{pmatrix}q_2(0)\\q_2(1)\\q_2(2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ $\qquad q_2(x) = 1+$

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & -2\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -8\\ -1 & 7\\ -2 & 12\end{pmatrix}$$

$[T(1-x)]^C = \begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix} \Rightarrow$

$[T(1+x)]^C = \begin{pmatrix}-8\\7\\12\end{pmatrix}$

$T(1-x) = 2\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$

$T(1-x) = \begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix}$

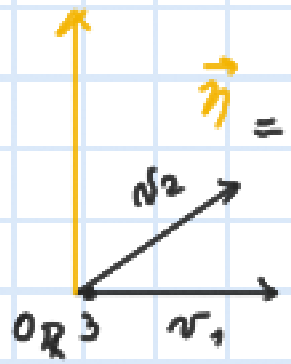
$T(1+x) = \begin{pmatrix}16\\3\\26\end{pmatrix}$

$$\overbrace{M_C}^{\in \mathbb{R}^3} \quad \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2 & -8\\ -1 & 7\\ -2 & 12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & 16\\ 1 & 3\\ -2 & 26\end{pmatrix}$$

$S = \text{gen}\{v_1, v_2\}$

$T(S) = \text{gen}\{T(v_1)\ T(v_2)\} \Rightarrow$

$T(S) = \text{gen}\left\{\underbrace{\begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix}}_{v_1} \underbrace{\begin{pmatrix}16\\3\\26\end{pmatrix}}_{v_2}\right\} = \{x \in \mathbb{R}^3 : 32x + 20y - 22z = 0\}$



$\vec{n} = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k}\\ -2 & 1 & -2\\ 16 & 3 & 26\end{vmatrix}$

Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ la proyección de $\mathbb{R}_2[x]$ sobre el subespacio $\text{gen}\{x - x^2\}$ en la dirección del subespacio $\text{gen}\{1 - 2x, 1 + x^2\}$. La matriz de T con respecto a la base canónica $\{1, x, x^2\}$ es ...

Seleccione una:

- a. $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.
- b. $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.
- c. $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.
- d. $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -4 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

no cumplen *

$T(x - x^2) = x - x^2$

$T(1 - 2x) = 0$

$T(1 + x^2) = 0$

$p_1(x) = x - x^2$

$\text{Im}(T) = \text{gen}\{x - x^2\} \Rightarrow$

$\rho[T] = 1$ *

$p_2(x) = 1 - 2x$

$p_3(x) = 1 + x^2$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}}_{[T]_E^E} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$[1-2x]^E$ $\quad [x - x^2]^E$ $\quad [x + x^2]^E$

Proyección sobre S_1 en la dirección de S_2

$\text{Im}(T) = S_1 \Rightarrow \dim \text{Im}(T) = \dim S_1 = \rho[T]_{B_1}^{B_2}$

$\Rightarrow$ EN ESTE EJ: $\rho[T]_{B_1}^{B_2} = 1$

Veamos ahora como hubiésemos encontrado $[T]_E^E$. Tomo $B = \{p_1, p_2, p_3\}$

$[T]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$[T]_E^E = [C]_B^E [T]_B^B [C]_E^B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\left([C]_B^E\right)^{-1}$

$[T]_B^E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad [T]_E^E = [T]_B^E \, C_E^B$