Complemento ortogonal de un subespacio de dimensión finita.

$S^{\perp} = \{v \in \mathbb{V} : \langle v, u \rangle = 0 \ \forall u \in S\}$

> Si S es un subespacio de $\mathbb{V}$, $S = \text{gen}\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$
> $S^{\perp} = \{v \in \mathbb{V} / \langle v_i, v \rangle = 0 \ \ i = 1, \ldots k.\}$

Para demostrar esta igualdad entre subespacios vamos a demostrar la doble inclusión.
Si $w \in S^{\perp} \Rightarrow \langle w, v_S \rangle = 0 \ \forall v_S \in S \Rightarrow \langle w, v_i \rangle = 0, \ i = 1, \ldots k.$
Así demostramos que

$$w \in \{v \in \mathbb{V} / \langle v_i, v \rangle = 0 \text{ para cada } i = 1, \ldots k.\} \Rightarrow$$

$$\boxed{S^{\perp} \subseteq \{v \in \mathbb{V} / \langle v_i, v \rangle = 0 \ \forall\, i = 1, \ldots k.\}}$$

La otra inclusión, también es directa:
Sea $w \in \{v \in \mathbb{V} / \langle v_i, v \rangle = 0 \ \forall\, i = 1, \ldots k.\}$
Si $v_S \in S \Rightarrow v_S = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$. Entonces:

$$\begin{aligned}\langle w, v_s \rangle &= \langle w, \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k \rangle \\ &= \bar{\alpha_1} \underbrace{\langle w, v_1 \rangle}_{=0} + \bar{\alpha_2} \underbrace{\langle w, v_2 \rangle}_{=0} + \cdots + \bar{\alpha_k} \underbrace{\langle w, v_k \rangle}_{=0} \\ &= 0 \Rightarrow w \in S^{\perp}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\{v \in \mathbb{V} / \langle v_i, v \rangle = 0 \ \forall\, i = 1, \ldots k.\} \subseteq S^{\perp}}$$

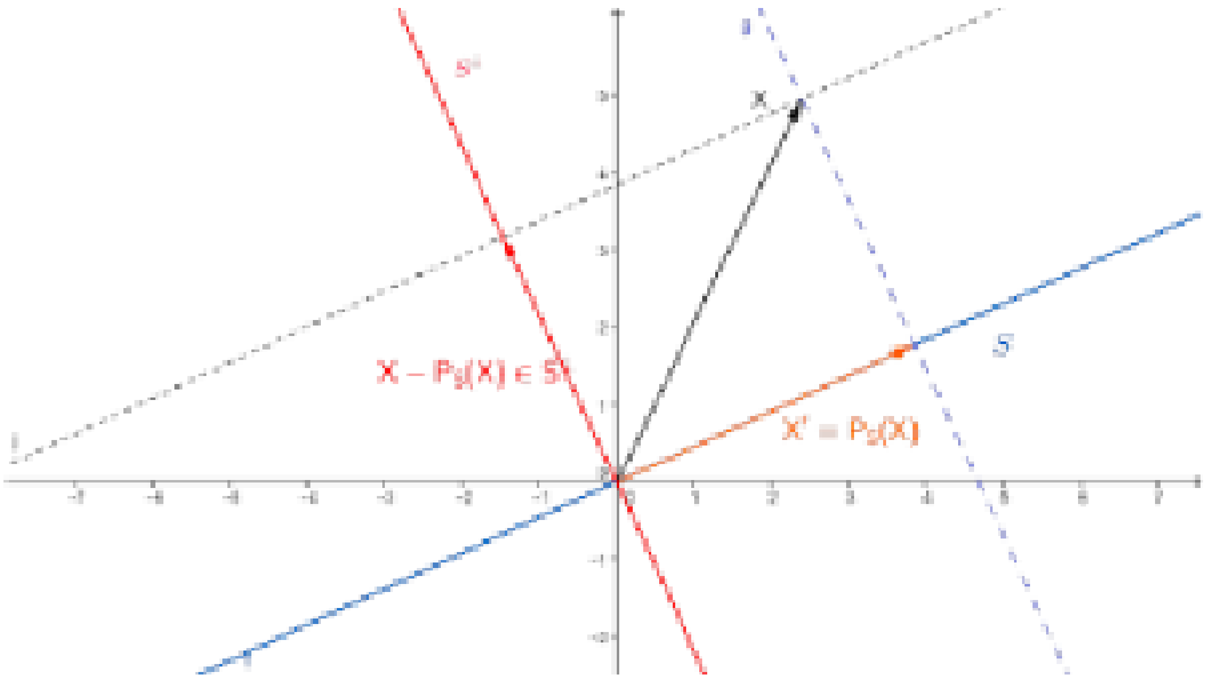
Luego :

$$\boxed{S^{\perp} = \{v \in \mathbb{V} / \langle v_i, v \rangle = 0 \ \ i = 1, \ldots k.\}}$$

Nota : En los ejercicios nos dice como hallar $S^{\perp}$

En TL :
$S_1 \oplus S_2 = \mathbb{V}$
$\Pi_{S_1 S_2}(v) = \begin{cases} v & v \in S_1 \\ 0 & v \in S_2 \end{cases}$
⋮
$S \oplus S^{\perp} = \mathbb{V}$
$\Pi_S(v) = \begin{cases} v & v \in S \\ 0_V & v \in S^{\perp} \end{cases}$

Proyección Ortogonal



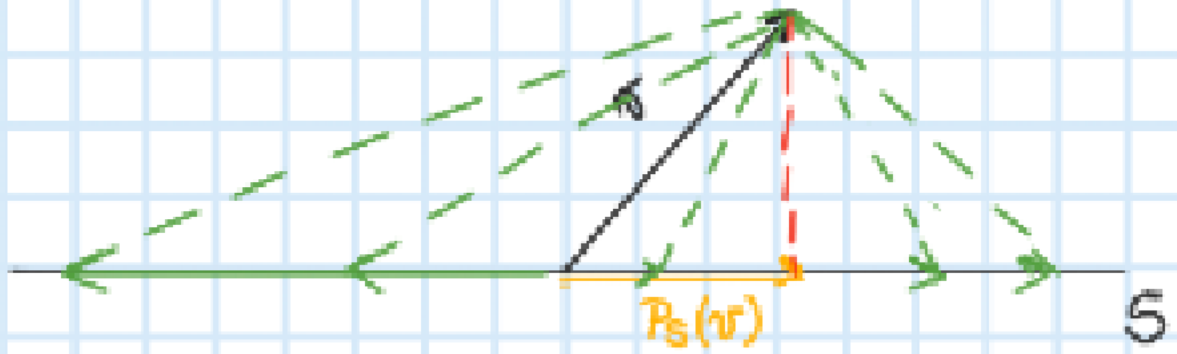
> Sea $S \subseteq \mathbb{V}$ un subespacio de $\mathbb{V}$ y $v \in \mathbb{V}$, se dice que v' es la **proyección ortogonal** de v sobre S si:
> 1. $v' \in S$. es un vector
> 2. $v - v' \in S^{\perp}$.
>
> Notación: Se escribe $P_S(v) = v'$ $\quad \Pi_S(v) = v'$

$(a \ b)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$
$a + b = 0 \quad a = -b$

Ej : $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$ con $\langle x, y \rangle = x^T \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} y$ producto interno
$S = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ ¿ El vector $\underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v'}$ podrá ser la $P_S\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$? No!
$v' \in S$ si $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \in S$
$S^{\perp} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \left\langle x, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ $\quad \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in S^{\perp}$? NO

- Sea $v \in \mathbb{V}$, **si existe** $P_S(v) = v' \Rightarrow$ es única. Demos en el pdf.

- Para todo $v \in \mathbb{V}$, $P_S(v)$ es el punto de S más cercano a v: $\forall v \in \mathbb{V}$ se cumple $d(v, P_S(v)) \le d(v, v_s)$ con $v_S \in S$.



- Si existe, $P_S(v)\ \forall v \in \mathbb{V}$:
  - ▶ $v - P_S(v) = P_{S^\perp}(v)$, $\forall v \in \mathbb{V}$.

    $v - P_{S^\perp}(v) = P_S(v)$

- $\mathbb{V} = S \oplus S^\perp \Leftrightarrow$ ▶ $v = P_S(v) + P_{S^\perp}(v)\ \forall v \in \mathbb{V}$.

Ej: $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$ $\quad S = gen\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$ y $S^\perp = gen\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ con el pi dado por $\langle x, y\rangle = x^T \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 4\end{pmatrix} y$

Obs: $S + S^\perp = gen\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$, $S \cap S^\perp = \{0_V\}$

y $\dim(S + S^\perp) = 2 = \dim \mathbb{R}^2 \quad \therefore \quad S \oplus S^\perp = \mathbb{R}^2$

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \exists!\ v_1 \in S,\ \exists!\ v_2 \in S^\perp : \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = v_1 + v_2$

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l}\alpha + \beta = x \Rightarrow \alpha = x + y\\ -\beta = y \Rightarrow \beta = -y\end{array}$

$\therefore \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \underbrace{(x+y)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}_{P_S\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}} + \underbrace{(-y)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}}_{P_{S^\perp}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}$ con este pi

- Además, si $\mathbb{V}$ es de dimensión finita $(S^\perp)^\perp = S$

Sea en $\mathbb{R}^3$ el conjunto de vectores $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\} = A \quad \#A = 2$

$A^\perp = \left\{v \in \mathbb{R}^3 / \left\langle v, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle = 0,\ \left\langle v, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle = 0\right\} \quad \neq z$

$v = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \quad a + b = 0 \quad b + c = 0 \quad \Rightarrow \quad A^\perp = \left\{v \in \mathbb{R}^3 / v = \begin{pmatrix}-b\\b\\-b\end{pmatrix}\right\}$

$\Rightarrow A^\perp = gen\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ Complemento ortg de un cj de vectores es un subespacio

$\left(gen\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}\right)^\perp = A^\perp$ S es subesp $(S^\perp)^\perp = S$

A q. demost $(A^\perp)^\perp = gen(A)$

$A^\perp = \{gen(A)\}^\perp$

Pregunta $(A^\perp)^\perp \overset{?}{=} gen(A)$ es un subespacio

para un subespacio $(S^\perp)^\perp = S$

Pregunta: $\mathbb{R}^2$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}_C$ ¿son ortogonales?

Depende del p.i definido

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ es paralelo al $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Sí el paralelismo es un concepto ABSOLUTO

$u \parallel v \iff \exists \alpha \in \mathbb{K} \mid u = \alpha v$

La ortogonalidad es un concepto relativo

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$

no sirve

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ Simetrica

$a_{11} > 0 \quad \det(A) > 0$

$(1 \;\; 0)\, A \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \qquad (1 \;\; 0) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} =$

$-1\, a_{11} + 2\, a_{12} = 0 \qquad (a_{11} \;\; a_{12}) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

$a_{11} = 2 a_{12} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Fie $(x_1 \;\; x_2) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad 2 \cdot 1(-1) + 2 + 0 + 0 = 0$ ✓ Alta

$(1 \;\; 0) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Si pido $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ y $\left\|\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\| = 1$

y $\left\|\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\right\| = 5$ ¿es único el pi? Sí

$$G_B = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1\rangle & \langle v_1, v_2\rangle \\ \langle v_2, v_1\rangle & \langle v_2, v_2\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}$$

$$B = \Big\{ \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}_{v_1} \underbrace{\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}}_{v_2} \Big\} \qquad \langle \underbrace{x}_{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}} ; \underbrace{y}_{\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}} \rangle = \begin{pmatrix} x_1 + x_2/2 & x_2/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 + y_2/2 \\ y_2/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$$

$\beta = x_2/2 \qquad \alpha - \beta = x_1$

$\alpha = x_1 + x_2/2$

Hallar un pi en $\mathbb{R}^3$: $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ sea una BON.

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad v_1 \quad v_2 \quad v_3$

$v_1 \perp v_2 \qquad v_1 \perp v_3 \qquad v_2 \perp v_3$

$\|v_i\| = 1 \qquad 1 \leq i \leq 3$

$G_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ¿Cómo encuentro la fórmula del pi?

$([x]^B)^T G_B [y]^B$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\alpha + \beta + \gamma = x_1$

$\beta + \gamma = x_2$

$\gamma = x_3$

$\beta = x_2 - x_3$

$\alpha = x_1 - \cancel{x_3} - x_2 + \cancel{x_3}$

$(x_1 - x_2 \quad x_2 - x_3 \quad x_3) \, I \begin{pmatrix} y_1 - y_2 \\ y_2 - y_3 \\ y_3 \end{pmatrix} =$

$(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 - y_3) + x_3 y_3 =$

$= \langle x \; y \rangle$

Método de Ortogonalización de Gram Schmidt (G-S)

Sea V un espacio con producto interno $\langle , \rangle$ y $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ un conjunto linealmente indep de V.

Objetivo: Construir un conjunto $\{w_1, w_2, \dots w_k\}$ donde $\langle w_i, w_j \rangle = 0$, $i \neq j$; $\{w_1, w_2, \dots w_m\}$

Este procedimiento se realiza de manera recursiva

- $gen\{v_1, v_2, \cdots, \underline{v_k}\} = gen\{w_1, w_2, \cdots, \underline{w_k}\}, \quad k = 1, \cdots m$

- Elijamos $w_1 = v_1$.
  Ciertamente se satisface $gen\{v_1\} = gen\{w_1\}$

Para elegir w_2 tengamos en cuenta que debe ser

$$gen\{v_1, v_2\} = gen\{w_1, w_2\}$$

$$\Rightarrow \quad w_2 = c_1 v_1 + c_2 v_2. \quad \text{y además}$$

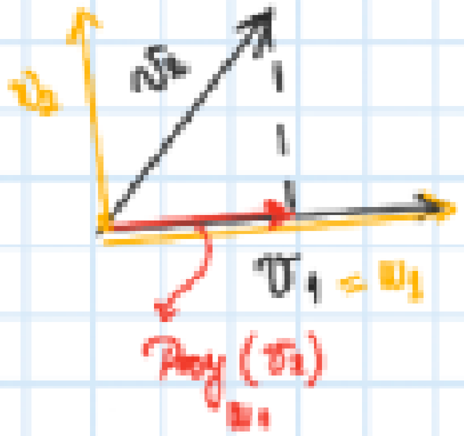
$$\langle w_2, w_1 \rangle = \langle c_1 v_1 + c_2 v_2, v_1 \rangle = 0$$

$$\langle c_1 v_1 + c_2 v_2, v_1 \rangle = c_1 \langle v_1, v_1 \rangle + c_2 \langle v_2, v_1 \rangle = 0 \Rightarrow \underset{\forall c_2}{c_1} = -c_2 \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2}$$

Notemos que no puede ser $c_2 = 0$ ya que en ese caso no valdría (1), entonces si elegimos $\underline{c_2 = 1}$ podemos despejar $c_1 = -\frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2}$ y obtener

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 = v_2 - \frac{\langle v_2, \overset{w_1}{v_1} \rangle}{\|\underset{w_1}{v_1}\|^2} w_1$$

$P(v_2)$
$gen\{w_1\} = gen\{v_1\}$



$gen\{v_1, v_2\} = gen\{w_1, w_2\}$ donde

$w_1 \perp w_2$

Si ahora tenemos $gen\{v_1, v_2, v_3\} = gen\{w_1, w_2, \overset{w_3}{v_3}\}$

con $w_3 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \ / \ \langle w_3, w_1 \rangle = 0 \ \wedge \ \langle w_3, w_2 \rangle = 0$

Podemos definir $w_3 = v_3 - \underset{gen\{w_1, w_2\}}{P}(v_3)$.

$$\wedge \quad \underset{gen\{w_1, w_2\}}{P}(v_3) = \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 + \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2$$

esta cuenta solo vale

OJO esto es posible porque $w_1 \perp w_2$

Así recursivamente definimos :

$$\text{gen}\{v_1, v_2, \dots v_k\} = \text{gen}\{w_1, w_2, \dots w_k\}$$

donde $w_k = v_k - \underset{\text{gen}\{w_1, w_2, \dots, w_{k-1}\}}{P}(v_k)$ son ortogonales

Es decir

$$w_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle v_k, w_j \rangle}{\|w_j\|^2} \cdot w_j \qquad \{w_j\}_{j=1,\dots k-1} \text{ BOG}$$

Ejemplo 1 :

En $\mathbb{V} = \mathbb{R}_2[x]$ con el pic $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$

Sea $B = \{1, x\}$ una base de $S = \text{gen}\{\underset{v_1}{1}, \underset{v_2}{x}\} = \mathbb{R}_1[x]$

Construimos una BOG de S

Obs : $\langle v_1, v_2\rangle = \int_0^1 1 \cdot x \, dx = \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \neq 0 \therefore v_1 \not\perp v_2 \therefore 1 \not\perp x$

Algoritmo de GS : $w_1 = 1$

$$w_2 = x - \frac{\langle x, 1\rangle}{\|1\|^2} \cdot 1 \qquad \underset{\text{gen}\{1\}}{P}(x)$$

donde $\langle x, 1 \rangle = \int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}$ $\quad \langle 1, 1\rangle = \int_0^1 dx = 1$

y así $w_2 = x - \frac{\frac{1}{2}}{1} \cdot 1 = x - \frac{1}{2}$

$\text{gen}\{1, x\} = \text{gen}\{1, x - \frac{1}{2}\}$ $\perp$

$\Rightarrow \text{gen}\{1, x\} = \text{gen}\{1, x - \frac{1}{2}\} = \text{gen}\{1, 2x - 1\}$ $\perp$

$B = \{1, x\} \xrightarrow{GS} B^* = \{1, 2x-1\}$ BOG de $S = \mathbb{R}_1[x]$

Si quiero una BON debo dividir c/u por su norma

$\|1\| = 1$ $\quad \|2x-1\|^2 = \int_0^1 (2x-1)^2 dx = \int_0^1 (4x^2 - 4x + 1) dx = 4/3 - 2 + 1 = 1/3$

BON $= \{1, (2x-1)\sqrt{3}\}$

Ejemplo 2 :

En $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$ y con el pic construir una BOG a partir de la base $\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}_{v_1} \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}_{v_2} \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}_{v_3} \right\}$

Algoritmo G-S :

$$w_1 = v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle} \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow$$

EN

$$w_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \underbrace{\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}_{\underset{\text{gen}\{v_1\} = \text{gen}\{w_1\}}{P}(1\ 1\ 0)^T} = \begin{pmatrix}1/3\\1/3\\-2/3\end{pmatrix} \rightarrow \underset{(\text{gen}\{v_1\})^\perp}{\text{Proy}} (1\ 1\ 0)^T$$

Obs : $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\|w_2\|^2} w_2 \longrightarrow$$

$$w_3 = v_3 - \underbrace{\sum_{j=1}^{2} \frac{\langle v_3, w_j\rangle}{\|w_j\|^2} w_j}_{\underset{\text{gen}\{w_1, w_2\}}{\text{Proy}}(v_3)}$$

$$\{1,\ 2x-1\}$$

$$\|1\| = \sqrt{\langle 1,1\rangle} = \left(\int_0^1 1^2\,dx\right)^{1/2} = 1$$

$$\|2x-1\| = \left(\int_0^1 (2x-1)^2\,dx\right)^{1/2} = 1/\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{2x-1}{1/\sqrt{3}} = \sqrt{3}\,(2x-1)$$

$$w_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle} \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1/3\\1/3\\-2/3\end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix}1/3\\1/3\\-2/3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1/3\\1/3\\-2/3\end{pmatrix} \right\rangle} \begin{pmatrix}1/3\\1/3\\-2/3\end{pmatrix}$$

$$w_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1/3}{\frac{6}{9}}\begin{pmatrix}1/3\\1/3\\-2/3\end{pmatrix} =$$

$$w_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1/3\\1/3\\-2/3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\0\end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\} \xrightarrow{GS} \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1/3\\1/3\\-2/3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\0\end{pmatrix} \right\}$$

También es una BOG con el pic $\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}_{w_1} \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}}_{w_2} \underbrace{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}}_{w_3} \right\}$

$\|w_1\| = \sqrt{3}$ $\quad \|w_3\| = \sqrt{2}$

$\|w_2\| = \sqrt{6}$

De una BOG a una BON : B^*

$$B^* = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \right\}$$

Observaciones

- Cada w_k es CL de v_k y de $w_1, w_2, \dots w_{k-1}$
- Como $\text{gen}\{v_1, v_2, \dots v_{k-1}\} = \text{gen}\{w_1, w_2, \dots w_{k-1}\}$

Cada w_k es CL de $\{v_1, v_2, \dots v_k\}$

Nota : El Algoritmo puede usarse aunque el conjunto original no sea L.I.

Ej: $S = \text{gen}\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}_{v_1} \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}}_{v_2} \underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}}_{v_3} \right\}$ con el pic $\quad P_{\text{gen}\{v_1, v_2\}}(v_3) = v_3$

$v_3 = v_1 + v_2 \quad \Rightarrow v_3 - v_3 = 0$

- $w_1 = v_1$
- $w_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} - \dfrac{\left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} - \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/2\\1/2\\-1\end{pmatrix}$
- $w_3 = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} - \dfrac{\left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle}{2} \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \dfrac{\left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1/2\\1/2\\-1\end{pmatrix} \right\rangle}{\frac{3}{2}} \begin{pmatrix}-1/2\\1/2\\-1\end{pmatrix}$

$$w_3 = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\begin{pmatrix}-1/2\\1/2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \checkmark$$

Obs $\quad \text{Proy}_{S = \text{gen}\{w_1, w_2\}}(v_3) = v_3 \iff v_3 \in S$

Ejemplo: En $\mathbb{V}=\mathbb{R}^3$ sea el pi dado por $\langle X,Y\rangle = \underbrace{X^T G Y}_{S}$ $\quad \left([X]^E\right)^T G_E [Y]^E$

con $G_E = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Dado $S = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$. Hallar $\text{Proy}_S\,(1\ 2\ 2)^T$

Obs: • $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ es li en $\mathbb{R}^3$ $\therefore B=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ es una base de S

$\therefore \dim(S)=2$. Como $S\oplus S^\perp=\mathbb{R}^3$ $\therefore \dim(S^\perp)=1$

• Para hallar $\text{Proy}_S\,(1\ 2\ 2)^T$ usando la fórmula de cálculo debo tener una BOG de S

Calculo $\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle = (1\ \ 1\ \ 0)\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} =$

$= (2\ \ 0\ \ 0)\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow B=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ es una BOG de S

• $\text{Proy}_S\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} = \dfrac{\left\langle\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\|^2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \dfrac{\left\langle\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\|^2}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

Caux:

$\left\langle\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle = (1\ \ 2\ \ 2)\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = (1\ \ 2\ \ 2)\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} = 2$

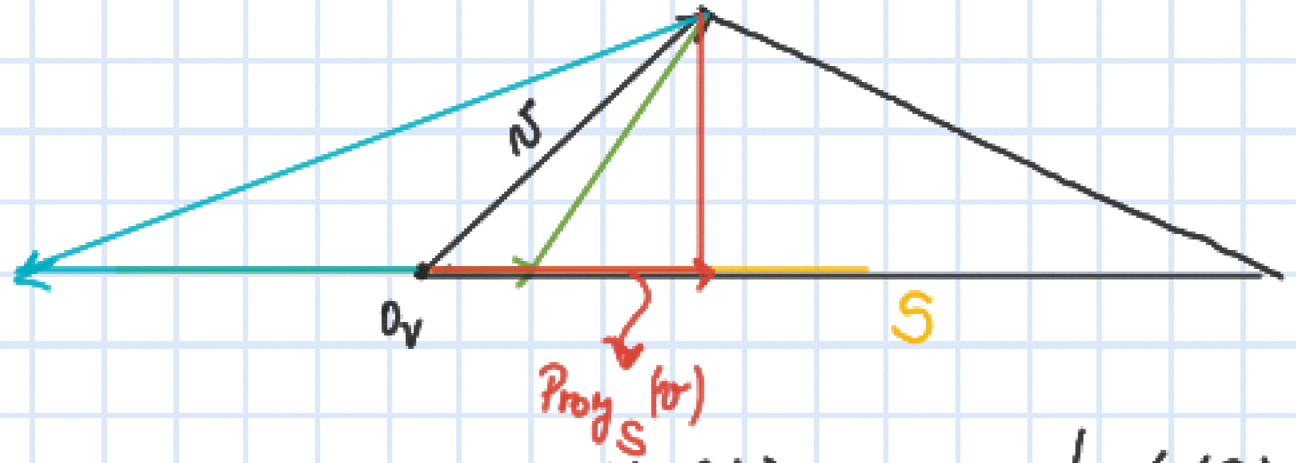
$\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle = (1\ \ 1\ \ 0)\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = (2\ \ 0\ \ 0)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = 2$

$\left\langle\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle = (1\ \ 2\ \ 2)\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = (1\ \ 2\ \ 2)\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix} = -3$

$\left\langle\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle = (0\ \ 1\ \ -1)\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix} = 3$

$\therefore \text{Proy}_S\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} = \dfrac{2}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \dfrac{(-3)}{3}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

Obs: $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\in S \wedge \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\in S^\perp$



Sabiendo $S = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$, busco $S^\perp = \left\{\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 : \left\langle\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle = 0\right.$

$\left.\wedge \left\langle\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle = 0\right\}$

$(a\ \ b\ \ c)\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (a\ b\ c)\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2a = 0 \Rightarrow a = 0$

$(a\ \ b\ \ c)\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (a\ b\ c)\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \cancel{-a}+b-2c=0$

$\therefore S^\perp = \left\{\begin{pmatrix}0\\2c\\c\end{pmatrix}, c\in\mathbb{R}\right\} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$ $\quad P_{S^\perp}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} = \dfrac{\left\langle\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\right\|^2}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$:

$\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\in S^\perp$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 + 4 = 6$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 + 2 = 6$$

$$P_{S^\perp} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{6}{6} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad P_S \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$S = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\} \longrightarrow \text{Ecuación}:$$

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases}\alpha = x\\ \alpha+\beta = y\\ -\beta = z\end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c}1&0&x\\1&1&y\\0&-1&z\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c}1&0&x\\0&1&-z\\1&1&y\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c}1&0&x\\0&1&-z\\0&1&y-x\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c}1&0&x\\0&1&-z\\0&0&y-x+z\end{array}\right)$$

$$0.\alpha+0.\beta = -x+y+z$$

$$\therefore\ S = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 : -x+y+z=0\right\}$$

Obs: $S^{\perp} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$

Busquemos un conjunto generador de S no necesariamente ortogonal:

$$S = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$\left\langle\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle = \begin{pmatrix}-1 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-1&0\\-1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-1 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix} = -3-1-4 = -8$$

$\therefore \left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ es base de S, NO es BOG de S

$$S = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

- Extiendo una base de S a una base de $\mathbb{R}^3$ conveniente

$$\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\underbrace{\begin{pmatrix}v\end{pmatrix}}_{\text{l.i. con los de } S}\right\}$$

$\not\perp$ $\quad v\in S^{\perp}$

porque $S\oplus S^{\perp} = \mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B} = \left\{\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}_{\in S}\underbrace{\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}}_{\in S^{\perp}}\right\}$$

$$\alpha\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}-\alpha+\beta = 1\\ \alpha+2\lambda = 2\\ -2\alpha+\beta+\lambda = 2\end{cases}$$

$\ldots\ \alpha=0\ \ \beta=1\ \ \lambda=1$

$$\therefore\ \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}_{Proy_S\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}}+\underbrace{\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}}_{Proy_{S^{\perp}}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$$

Obs: $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ BOG de S $\xrightarrow[\text{extiendo a una base de } \mathbb{R}^3]{}$ $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}_{\text{l.i. con los de } S}\right\}$

$S\oplus S_1 = \mathbb{R}^3$

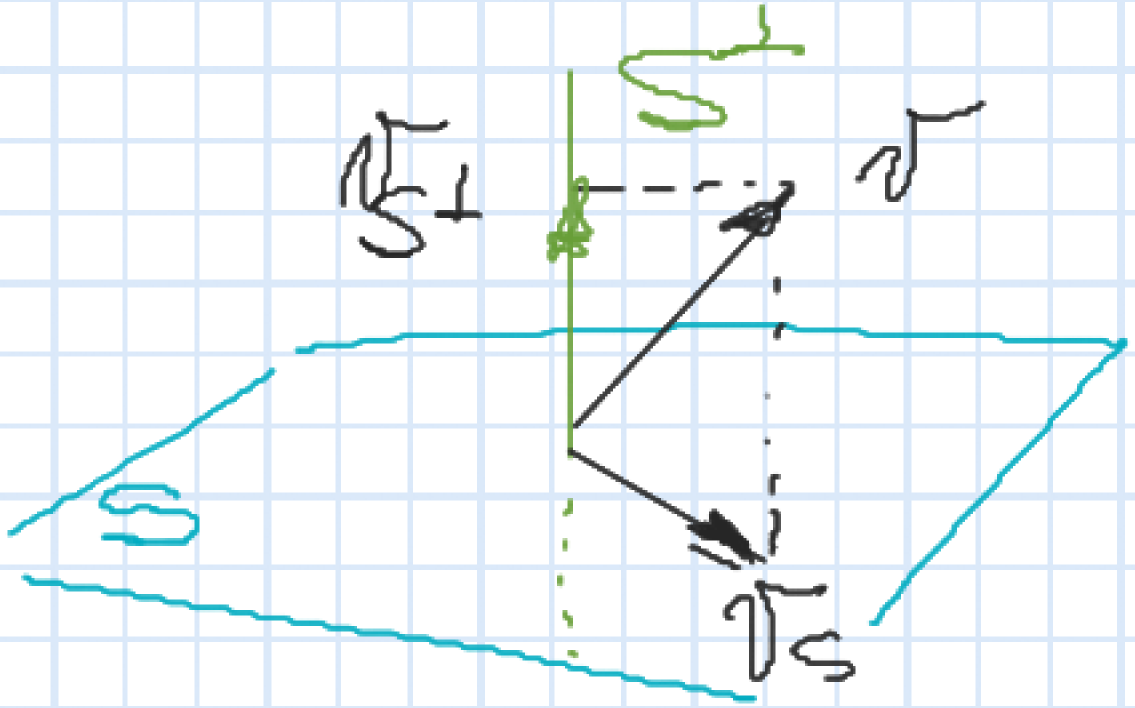
donde $S_1 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$

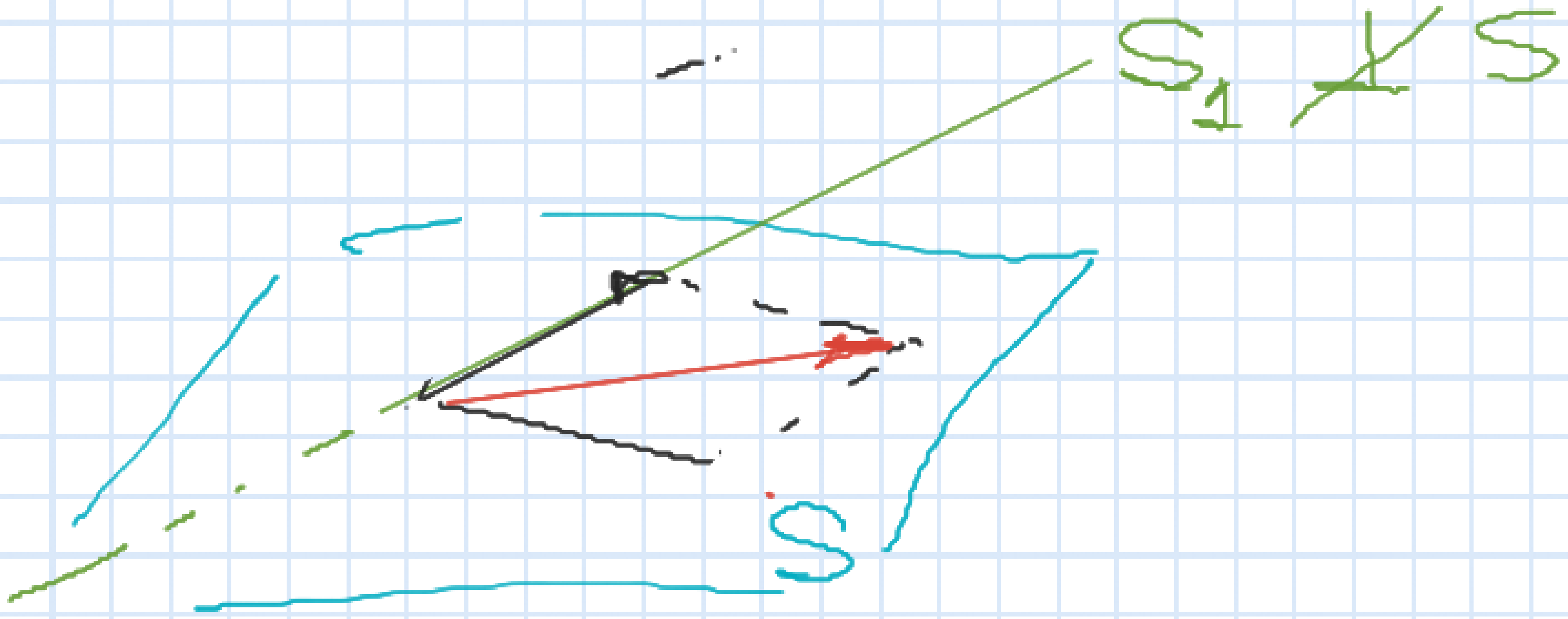
Es cierto que $\exists!\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$:

$$\underbrace{\underbrace{\alpha_1}_{4}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\underbrace{\alpha_2}_{-2}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}}_{\in S}+\underbrace{\alpha_3}_{-3}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$$

No es la $Proy_S\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$

OJO!





$$S \oplus S^\perp = \mathbb{R}^3 \qquad\qquad S \oplus S_1 = \mathbb{R}^3$$

PTC

$$S\,\text{gen} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$S_1 = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$S^\perp \oplus S = \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

CUADRADOS MÍNIMOS : P.I.C en $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$

3.13 [*herramienta*] Sean $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ y $(\mathbb{R}^m, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ los $\mathbb{R}$-espacios euclídeos canónicos de dimensiones n y m, respectivamente, sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Por definición, resolver la ecuación $Ax = b$ por mínimos cuadrados significa determinar el conjunto $\arg\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|b - Ax\|$ de todos los $x \in \mathbb{R}^n$ cuyas imágenes por A minimizan la distancia al vector b.

$$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \,/\, T(x) = \underbrace{A}_{m\times n} x$$

Para introducir el tema recordamos algunas ideas desarrolladas en la Unidad 1

- $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m \Rightarrow \underbrace{Ax = b}_{\text{es una CL de las columnas de } A}$ forma matricial de un sistema de ecuaciones lineales
- $Ax = b$ es COMPATIBLE $\Leftrightarrow b \in Col(A)$

Ej: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $b \in Col(A)$

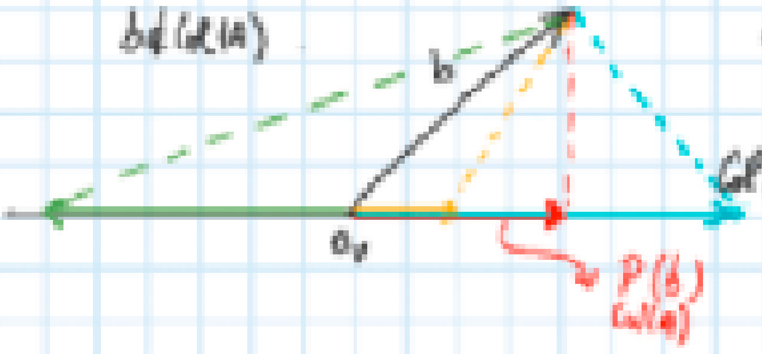
con $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to 0.x_1 + 0x_2 = 1$ (Abs)

$\therefore \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin Col(A)$ y el sistema es INCOMPAT.

(a) Explicar por qué

$$\arg\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|b - \underbrace{Ax}_{\in Col(A)}\| = \{\hat{x} \in \mathbb{R}^n : A\hat{x} = P_{col(A)}(b)\}.$$



a) Buscamos $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$:

$\|b - A\hat{x}\| \leq \|b - Ax\| \quad \forall Ax \in Col(A)$

sabemos, por lo visto hasta ahora que se logra si $\underbrace{A\hat{x} = P_{Col(A)}(b)}$, donde **!**

$b = P_{Col(A)}(b) + P_{Col(A)^\perp}(b) \quad \forall b \in \mathbb{R}^m$

$\therefore$ Este problema tiene solución.

vacío

(b) Observar que $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = P_{col(A)}(b)\} \neq \emptyset$. Motivo por el cual para cualquier $b \in \mathbb{R}^m$ existe al menos una solución por mínimos cuadrados de la ecuación $Ax = b$.

b) **!** $Col(A) \subset \mathbb{R}^m$ y el sistema $A\hat{x} = P_{Col(A)}(b)$ es COMPATIBLE por lo que el conjunto solución del mismo es $\neq \emptyset$ cualquiera sea $b \in \mathbb{R}^m$

Ej: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Resolver por CM $Ax = b$ es hallar $\hat{x}$: $A\hat{x} = P_{Col(A)}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

donde $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = P_{Col(A)}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + P_{Col(A)^\perp}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$Col(A) = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ $Col(A)^\perp = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ PIC $\mathbb{R}^3$

$$\underset{m \times n}{A} \cdot \underset{n \times 1}{x} = \underset{m \times 1}{b}$$

m ecuaciones con n incógnitas $x_1, x_2 \dots x_n$

m filas n columnas.

Compatible? $\nearrow$ $b \in Col(A)$ Sí $\nearrow$ determinado $r(A) = n$ columnas l.i. un cj. LI

$\searrow$ $b \notin Col(A)$ no $\longrightarrow$ MC *

* Busco

$A\hat{x} = \underset{Col(A)}{P(b)}$ siempre es compatible

$A\hat{x} \in Col(A)$

Determinado $\left\{ \begin{array}{l} \rho(A) = n \\ \text{las columnas de } A \text{ forman un cj. LI} \\ Nul(A) = \{ 0_{\mathbb{R}^n} \} \end{array} \right.$

$$\rightarrow \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \underbrace{\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}_{P_{col(A)}(b)} + \underbrace{\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}}_{P_{col(A)^\perp}(b)} \qquad X = P_S(x) + P_{S^\perp}(x)$$

$$\begin{cases} \alpha+\lambda = 1 \\ \beta = 1 \\ \alpha-\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 1/2 \quad \lambda = 1/2$$

$$\therefore \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2\\1\\1/2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1/2\\0\\-1/2\end{pmatrix}$$

Ahora busco $\hat{x}$: $A\hat{x} = \begin{pmatrix}1/2\\1\\1/2\end{pmatrix}$ (Este sistema es compatible)

$$\hat{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} : \begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2\\1\\1/2\end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = 1/2 \quad x_2 = 1 \Rightarrow \hat{x} = \begin{pmatrix}1/2\\1\end{pmatrix}$$

$$P_{col(A)}(b) = \left(\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

Es solución por CM de $Ax = b$

(e) Verificar que nul(A) = fil(A)$^\perp$. Con ~~pic~~ $\langle x, y\rangle = Y^T X$

- $Nul(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0_{\mathbb{R}^m}\}$ $\quad A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $\quad Nul(A) \subset \mathbb{R}^n$, $Fil(A) \subset \mathbb{R}^n$

  $AX = 0_{\mathbb{R}^m} \iff Fil_j(A) \cdot X = 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, m$

  $\Rightarrow X \perp Fil_j(A) \quad \therefore \quad Nul(A) \subset Fil(A)^\perp \quad (1)$

- Además $\dim Nul(A) + rg(A) = n$

  $Fil(A) \oplus Fil(A)^\perp = \mathbb{R}^n \quad \dim Fil(A) + \dim Fil(A)^\perp = n$

  $rg(A) = \dim Fil(A)$

$\therefore \quad \dim Nul(A) = \dim (Fil(A))^\perp \ (2) \qquad$ De (1) y (2)

$$\boxed{Nul(A) = Fil(A)^\perp}$$

- $Nul(\quad) = Fil(\quad)^\perp$

$A \in \mathbb{R}^{m\times n} \qquad A^T \in \mathbb{R}^{n\times m}$

(c) Verificar que nul(A^T) = col(A)$^\perp$.

Llamemos a $A^T = B \qquad Nul(B) = Fil(B)^\perp$ ~~por~~ (e)

en $Fil(B) = Fil(A^T) = Col(A) \longrightarrow Nul(A^T) = Col(A)^\perp$

(d) Utilizando que $b - P_{col(A)}(b) \perp col(A)$, concluir que

$$\arg\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|b - Ax\| = \{\hat{x} \in \mathbb{R}^n : A^T A\hat{x} = A^T b\}.$$

$A^T(Ax - b) = 0$

! $Ax = b$ INCOMPATIBLE

Cualquier vector de $Col(A)$

$$\underbrace{b - P_{col(A)}(b)}_{P_{col(A)^\perp}(b)} = b - A\hat{x} \qquad \forall u \in \mathbb{R}^n \ \langle \underbrace{Au}_{\in Col(A)}, b - A\hat{x}\rangle = 0 \qquad k = \mathbb{R}$$

$\langle b - A\hat{x}, Au\rangle = 0 \iff (Au)^T(b - A\hat{x}) = 0$

OJO

pic

$\iff u^T A^T(b - A\hat{x}) = 0$

~~$Ax = b$ incomp~~

~~multiplico por~~

~~$A^T \Rightarrow$~~

~~$A^T A x = A^T b$~~

esto está mal

esto es incompatible

$\iff u^T A^T b - u^T A^T A\hat{x} = 0$

$\iff u^T(A^T b - A^T A\hat{x}) = 0 \qquad \forall u \in \mathbb{R}^n$

$\iff A^T b - A^T A\hat{x} = 0_{\mathbb{R}^n}$

$\iff A^T b = A^T A\hat{x} \longrightarrow$ ECUACIÓN NORMAL DEL PROBLEMA DE C.M.

Siempre resulta compatible

Repasamos lo visto hasta ahora sobre CM:

- Trabajamos con PIC en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ $\langle x, y\rangle = y^T x = x^T y$

Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$

$Ax = b$ es la forma matricial de un sistema de ecuaciones lineales

m ecuaciones   n incógnitas

→ $b \in Col(A) \Leftrightarrow \exists x : Ax = b \Leftrightarrow$ El sistema es COMPATIBLE

→ $b \notin Col(A)$ como el sistema de ecuaciones $Ax = b$ es INCOMPATIBLE . . .

resolver la ecuación $Ax = b$ por mínimos cuadrados significa determinar el conjunto $\arg\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|b - Ax\|$ de todos los $x \in \mathbb{R}^n$ cuyas imágenes por A minimizan la distancia al vector b.

Notación: $\hat{x}$

$\hat{x} \in \mathbb{R}^m$: $A\hat{x} = P_{Col(A)}(b)$

$\hat{x}$ satisface la ecuación normal dada por $A^T A \hat{x} = A^T b$

: $A\hat{x} = P_{Col(A)}(b)$

(f) Utilizando que todo $x \in \mathbb{R}^n$ se descompone de manera única en la forma

$$x = x_f + x_h, \text{ con } x_f \in \text{fil}(A), \text{ y } x_h \in \text{nul}(A), = Fil(A)^\perp$$

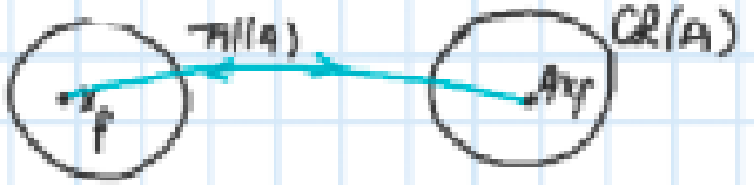
deducir que la aplicación $x_f \mapsto Ax_f$ es una biyección de fil(A) en col(A).

Obs: $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $Fil(A) \subset \mathbb{R}^n$ $Col(A) \subset \mathbb{R}^m$

$Fil(A) \oplus Fil(A)^\perp = \mathbb{R}^n$ ∧ $Nul(A) = Fil(A)^\perp$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n : x = x_f + x_h$

- $f : Fil(A) \to Col(A) \;/\; f(x_f) = Ax_f$ es biyectiva



Como dim $Fil(A)$ = dim $Col(A)$ = rg(A) alcanza con probar que f es inyectiva

f inyectiva si $f(x_{f_1}) = f(x_{f_2}) \Rightarrow x_{f_1} = x_{f_2}$

$f(x_{f_1}) = Ax_{f_1}$ ∧ $f(x_{f_2}) = Ax_{f_2}$ ∧ $Ax_{f_1} = Ax_{f_2} \Rightarrow$

$A(x_{f_1} - x_{f_2}) = 0$ ∴ $x_{f_1} - x_{f_2} \in Nul(A) = Fil(A)^\perp$

Por otro lado $x_{f_1} - x_{f_2} \in Fil(A)$ → $x_{f_1} - x_{f_2} = 0_{\mathbb{R}^n}$

$Fil(A) \cap Fil(A)^\perp = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$

$\Rightarrow x_{f_1} = x_{f_2}$

(g) Concluir que para cada $b \in \mathbb{R}^m$ existe un único $x_f(b) \in \text{fil}(A)$ tal que

$$\arg\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|b - Ax\| = \{x_f(b) + x_h : x_h \in \text{nul}(A)\}.$$

Utilizando el Teorema de Pitágoras observar que de todas las soluciones por mínimos cuadrados de la ecuación $Ax = b$, la solución $x_f(b)$ es la que tiene norma mínima.

Como ya vimos $A\hat{x} = P_{Col(A)}(b) \in Col(A)$ por (f) $\exists ! \, x_f(b) = \hat{x}$ $\quad x_f \leftrightarrow Ax_f \in Col(A)$

Así toda solución $\hat{x} = \underbrace{\hat{x} - x_F(b)}_{\in Fil(A)^\perp} + \underbrace{x_F(b)}_{\in Fil(A)}$

Por Teo de Pitágoras

$\Rightarrow \|\hat{x}\|^2 = \|\hat{x} - x_F(b)\|^2 + \|x_F(b)\|^2 \quad \therefore \|x_F(b)\|^2 \leq \|\hat{x}\|^2$

$\Rightarrow \|x_F(b)\| \leq \|\hat{x}\| \quad \forall \hat{x}$ solución por CM de $Ax = b$ $\quad x_f = \hat{x}$ si la solución es única (las columnas de A son LI)

(h) Observar que cuando $\dim(\text{col}(A)) = n$ la matriz $A^T A$ es inversible y que por lo tanto, $\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$ es la única solución por mínimos cuadrados de la ecuación $Ax = b$. Como $A\hat{x} = P_{\text{col}(A)}(b)$ se deduce que $A(A^T A)^{-1} A^T$ es la matriz en base canónica de la proyección ortogonal sobre $\text{col}(A)$.

Propiedad previa: $\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n} \Rightarrow A^TA \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es simétrica ya que

$(A^TA)^T = A^T (A^T)^T = A^TA$

En el episodio correspondiente a CM (p.d.f.) se prueba que $\boxed{Nul(A) = Nul(A^TA)}$ y de acá IMPORTANTE se deduce que $rg(A) = rg(A^TA) \quad \forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

Como $\hat{x}$ solución por CM de $Ax = b$ es solución de las ecuaciones normales dadas por $A^TA\hat{x} = A^Tb$ se deduce que: Si $rg(A) = n$ (n° de columnas de A), la matriz simétrica $A^TA \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tiene $rg(A^TA) = n \therefore \exists (A^TA)^{-1}$

y así $\hat{x} = (A^TA)^{-1}A^Tb$. $\quad A\hat{x} = Proy_{Col(A)}(b)$

La matriz $(A^TA)^{-1}A^T = A^\#$ se la llama pseudo-inversa de A.

Propiedad: $\underbrace{A^\# A}_{n\times n} = (A^TA)^{-1}A^TA = \underbrace{(A^TA)^{-1}(A^TA)}_{\text{asociando}} = I_{n\times n} \quad A^\# \in \mathbb{R}^{n\times m}$

Como $\underbrace{A\underbrace{((A^TA)^{-1}A^T)b}_{\hat{x}}}_{} = P_{Col(A)}(b)$

→ Matriz en la base canónica de la proyección sobre $Col(A)$

Es decir: $A \cdot A^\# = [P_{Col(A)}]_{E_{\mathbb{R}^m}}^{E_{\mathbb{R}^m}}$ $\qquad \underbrace{(A^TA)^{-1}A^T}_{A^\#} A = I$

$\underset{m\times n}{A} \quad \underset{n\times m}{A^T} \quad \underset{n\times n}{A^TA} \quad \rho(A) = \rho(A^TA)$ Si $\rho(A) = n \rightarrow \exists (A^TA)^{-1}$

Ejemplo:

$C_1 = -C_2 + C_3 \qquad C_1\ C_2\ C_3$

a) Hallar por CM la solución de $Ax=b$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) Buscar entre todas las soluciones el de norma mínima. $\rho(A) = 2$

Obs: $Col(A) = gen\left\{ \cancel{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = gen\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$\dim Col(A) = 2 \therefore rg(A) = 2 \neq 3 =$ nº de columnas de A

Además $\underbrace{\hat{x}} = x_{fil(A)} + x_n \quad x_n \in Nul(A)$

Obs: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin Col(A)$ el sistema es incompatible $\Rightarrow$ Resolvemos

1º) $A^T A \hat{x} = A^T b$ donde $A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^T b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2º) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 & (1) \\ -x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 1 \end{cases}$

Como $x_3 = 1 - x_1$; $x_2 = x_1$, en (1)

$\Rightarrow 2x_1 - (x_1) + (1 - x_1) = 1 = 1$ ✓

$\in Nul(A^TA)$

$$\therefore \underbrace{\hat{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ 1-x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ x_1 \in \mathbb{R}}_{\text{Todas las sol por CM de } Ax=b}$$

$\notin Fil(A)$ no son $\perp$

Obs: $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ✓

$A \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{sol. part}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{P_{Col(A)}(1\ 1\ 0)^T}$

3º) $\hat{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ 1-x_1 \end{pmatrix} \in Fil(A) = gen\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Busco $x_1 \in \mathbb{R}$: $\|\hat{x}\|$ mínima

con $\|\hat{x}\|^2 = x_1^2 + x_1^2 + (1-x_1)^2 = 2x_1^2 + 1 - 2x_1 + x_1^2$

$\|\hat{x}\|^2 = 3x_1^2 - 2x_1 + 1 = g(x_1)$

$g'(x_1) = 6x_1 - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3}$

$g''(x_1) = 6 > 0 \Rightarrow$ En $x_1 = \frac{1}{3}$, $g(x_1)$ tiene mínimo

$\therefore \hat{x}_f = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x_1 = 1/3$

Obs: $A \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = P_{Col(A)} (1\ 1\ 0)^T$

Otra

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ 1-x_1 \end{pmatrix} \in Fil \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ 1-x_1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$x_1 + x_1 - 1 + x_1 = 0 \quad x_1 = 1/3$