Retomamos la matriz de una transformación lineal.

$T: V \to W \quad \dim(V) = n \quad \dim(W) = m$

una TL

$B_1 = \{v_1, v_2, \dots v_n\}$ base de V

$B_2 = \{u_1, u_2, \dots u_m\}$ base de W

$$\Rightarrow [T]_{B_1}^{B_2} = \left([T(v_1)]^{B_2} \,\vdots\, [T(v_2)]^{B_2} \,\vdots\, \dots \,\vdots\, [T(v_n)]^{B_2} \right) \in K^{m\times n} \quad (K = \mathbb{R} \text{ ó } \mathbb{C})$$

Obs :

$$[T]_{B_1}^{B_2} \cdot [v]^{B_1} = [T(v)]^{B_2}$$

Ejemplo :

$T: \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3 \;/\; B_1 = \{1, 1+x, 1-x^2\}$ base de $\mathbb{R}_2[x]$

y $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\}$ base de $\mathbb{R}^3$

y $[T]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) $T(2 - x + 3x^2)$

b) Hallar, si existen, $p \in \mathbb{R}_2[x] \,/\, T(p) = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

c) Hallar la fórmula explícita de T

• Buscamos $[2 - x + 3x^2]^{B_1}$

$2 - x + 3x^2 = \alpha(1) + \beta(1+x) + \lambda(1-x^2)$

$2 - x + 3x^2 = (\alpha + \beta + \lambda) + \beta x + (-\lambda)x^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \lambda = 2 \Rightarrow \alpha = 2 - \beta - \lambda = 2 + 1 + 3 = 6 \\ \beta = -1 \rightarrow \beta = -1 \\ -\lambda = 3 \rightarrow \lambda = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow [2 - x + 3x^2]^{B_1} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Uso $[T]_{B_1}^{B_2}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow T(2 - x + 3x^2) = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} ? \text{ ¡No!}$$

$$\Rightarrow T(2 - x + 3x^2) = 8\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}13\\13\\8\end{pmatrix}$$

b) ¿$\exists\, p \in \mathbb{R}_2[x] \,/\, T(p) = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$?

Como $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} [p]^{B_1} = [T(p)]^{B_2}$ si $[p]^{B_1} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

entonces $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$? No!!

$$\left[\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right]^{B_2} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$\begin{cases} 2a + b + c = 0 \Rightarrow c = -2a + a = -a \\ a + b = 0 \Rightarrow b = -a \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -a \\ -a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\-a\\-a\end{pmatrix} \Rightarrow p(x) = a(1) + (-a)(1+x) + (-a)(1-x^2)$$

$$p(x) = a(1-1-x-1+x^2)$$

$$p(x) = a(-1-x+x^2) \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$\therefore \; T\left(a(-1-x+x^2)\right) = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

T no es monom.

$\in Im(T) \therefore Im(T) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

Obs: $\dim Nu(T) + \dim Im(T) = \dim V$

$$\underbrace{\dim Nu(T)}_{\geq 1} + \underbrace{\dim Im(T)}_{\leq 2} = 3 = \dim \mathbb{R}_2[x]$$

3

Como $Im(T) \subset \mathbb{R}$ y $\dim Im(T) \neq 3$

$\Rightarrow$ T NO ES EPIMORFISMO

(c) $B_1 = \{1, 1+x, 1-x^2\}$ con $[T]^{B_2}_{B_1} = \begin{pmatrix}2&1&1\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$B_2 = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$

Busco $T(a+bx+cx^2)$

Obs: $T(1) = 2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}$

$T(1+x) = 1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$

$T(1-x^2) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$$a+bx+cx^2 = \alpha(1) + \beta(1+x) + \lambda(1-x^2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \alpha+\beta+\lambda & \Rightarrow \alpha = a-b+c \\ b = \beta & \Rightarrow \beta = b \\ c = -\lambda & \Rightarrow \lambda = -c \end{cases}$$

$$\Rightarrow [a+bx+cx^2]^{B_1} = \begin{pmatrix}a-b+c\\b\\-c\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T(a+bx+cx^2) = (a-b+c)T(1) + bT(1+x) + (-c)T(1-x^2)$$

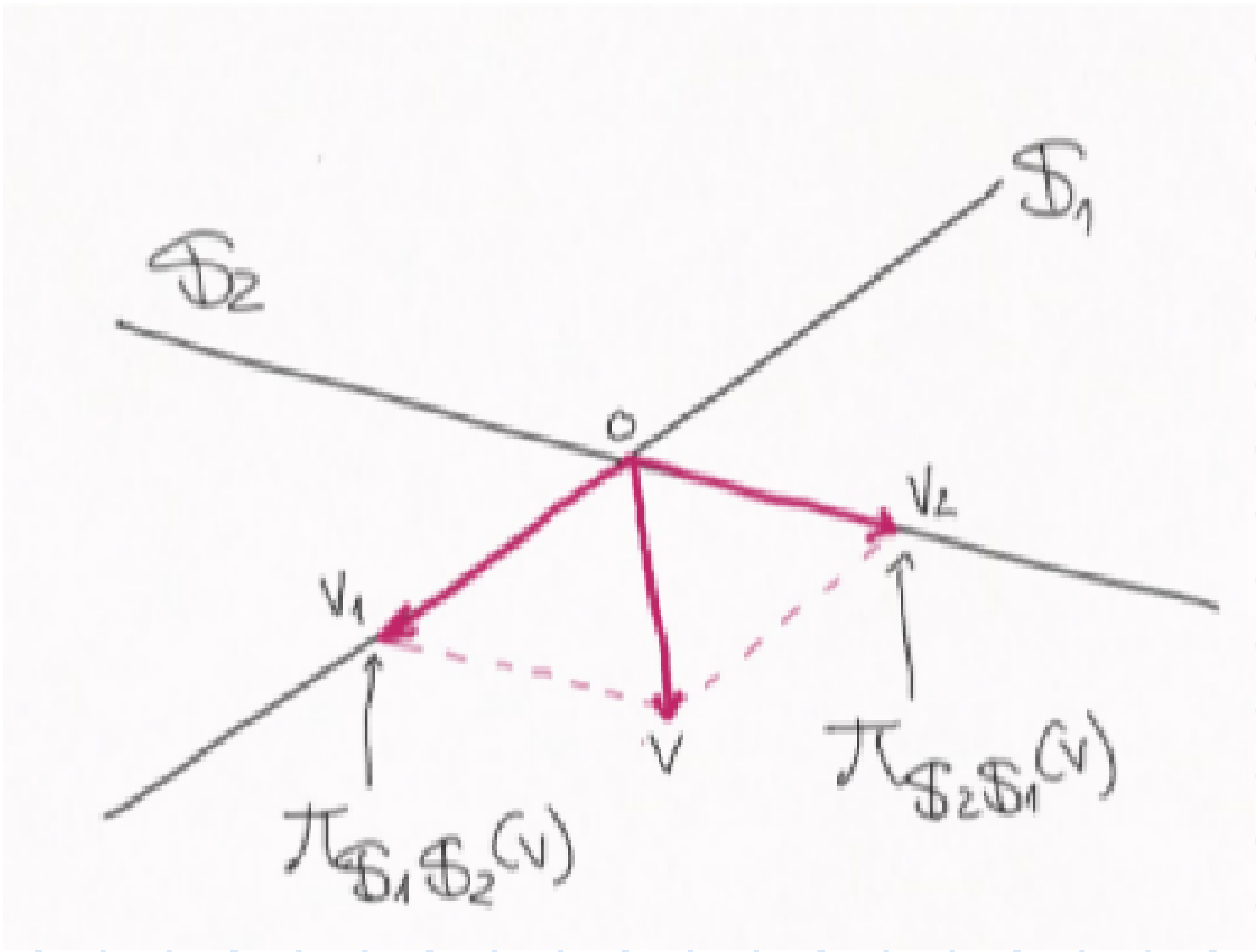
$$\Rightarrow T(a+bx+cx^2) = (a-b+c)\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} + (-c)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix}3a-3b+3c+2b-c\\3a-3b+3c+2b-c\\2a-2b+2c+b-c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3a-b+2c\\3a-b+2c\\2a-b+c\end{pmatrix}$$

Obs: $[T]^{E_{\mathbb{R}^3}}_{E_{\mathbb{R}_2[x]}} = \left([T(1)]^{E_{\mathbb{R}^3}} \,\vdots\, [T(x)]^{E_{\mathbb{R}^3}} \,\vdots\, [T(x^2)]^{E_{\mathbb{R}^3}}\right) = \begin{pmatrix}3&-1&2\\3&-1&2\\2&-1&1\end{pmatrix}$

2.19 Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sean $\mathbb{S}_1, \mathbb{S}_2$ dos subespacios suplementarios de $\mathbb{V}$, esto es, todo vector $v \in \mathbb{V}$ se escribe de manera única como $v = v_1 + v_2$ con $v_1 \in \mathbb{S}_1$ y $v_2 \in \mathbb{S}_2$.

$S_1 \oplus S_2 = \mathbb{V}$



únicos

$\forall v \in \mathbb{V} : v = v_1 + v_2 \quad v_1 \in S_1, v_2 \in S_2$

- *La proyección de $\mathbb{V}$ sobre $\mathbb{S}_1$ en la dirección de $\mathbb{S}_2$*, denotada por $\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}$, es la transformación lineal de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{V}$ definida por

sobre dirección

$$\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}(v) := v_1.$$

Análogamente, se define $\Pi_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1}$ por $\Pi_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1}(v) := v_2$.

Π : nombre de la TL

(a) Explicar por qué $\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}$ es la única transformación lineal de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{V}$ tal que

$$\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}(v) = \begin{cases} v & \text{si } v \in \mathbb{S}_1, \\ 0 & \text{si } v \in \mathbb{S}_2, \end{cases}$$

- $v \in S_1$ como $v = \underbrace{v}_{\in S_1} + \underbrace{0_V}_{\in S_2} \Rightarrow \pi_{S_1S_2}(v) = v$
- $v \in S_2$ como $v = \underbrace{0_V}_{\in S_1} + \underbrace{v}_{\in S_2} \Rightarrow \pi_{S_1S_2}(v) = 0_V$

UNICIDAD DE $\pi_{S_1S_2}$

Suponemos que $\exists\, T_{S_1S_2}(x) = \begin{cases} x & x \in S_1 \\ 0_V & x \in S_2 \end{cases}$ como $S_1 \oplus S_2 = \mathbb{V}$

$\exists$ únicos $x_1 \in S_1, x_2 \in S_2 : x = x_1 + x_2 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{V}$ es

$T_{S_1S_2}(x) = T_{S_1S_2}(x_1) + T(x_2) = x_1 + 0_V = x_1 \Rightarrow T = \pi_{S_1S_2}$

$\pi \circ \pi$

(b) Comprobar que $\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}$ posee la propiedad de *idempotencia*: $\Pi^2_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2} = \Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}$.

$\forall v \in V: \quad v = v_1 + v_2 \quad v_1 \in S_1 \quad v_2 \in S_2$

(1) $\pi^2_{S_1S_2}(v) = \pi^2_{S_1S_2}(v_1 + v_2) = \pi\left[\pi_{S_1S_2}(v_1+v_2)\right] = \pi\left[\pi(v_1) + \pi(v_2)\right] = \pi_{S_1S_2}(v_1 + 0_V) = \pi_{S_1S_2}(v_1) = v_1$

(2) $\pi_{S_1S_2}(v) = \pi_{S_1S_2}(v_1 + v_2) = \underbrace{\pi(v_1)}_{v_1 \in S_1} + \underbrace{\pi(v_2)}_{v_2 \in S_2} = v_1 + 0_V = v_1$ =

comprobar que $\mathbb{V} = \mathrm{Im}(\Pi_{S_1S_2}) \oplus \mathrm{Nu}(\Pi_{S_1S_2})$.

$\mathbb{V} = S_1 \oplus S_2$

$\pi : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$

$\pi^2 = \pi$

$\Updownarrow$

1) $\mathrm{Im}(\pi_{S_1S_2}) \cap \mathrm{Nu}(\pi_{S_1S_2}) = \{0_V\}$

2) $\mathrm{Im}(\pi_{S_1S_2}) + \mathrm{Nu}(\pi_{S_1S_2}) = \mathbb{V}$

$\pi : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$

$\mathrm{Nu}(\pi) \subset \mathbb{V}$ SE de $\mathbb{V}$

$\mathrm{Im}(\pi) \subset \mathbb{V}$ SE de $\mathbb{V}$

1) $\{0_V\} \subset \mathrm{Im}(\pi) \cap \mathrm{Nu}(\pi)$ $\quad 0_V \in \mathrm{Im}(\pi)$, $0_V \in \mathrm{Nu}(\pi) \Rightarrow 0_V \in \mathrm{Im}(\pi) \cap \mathrm{Nu}(\pi)$

Sea $x \in \mathbb{V} : \underline{x \in \mathrm{Im}(\pi) \cap \mathrm{Nu}(\pi)} \Rightarrow$ q. probar que $x = 0_V$

- $x \in \mathrm{Im}(\pi) \Rightarrow \exists z \in \mathbb{V} : \underline{\pi(z) = x}$ (1)
- $x \in \mathrm{Nu}(\pi) \Rightarrow \pi(x) = 0_V$

En (1) componemos con π: $\pi(\pi(z)) = \pi(x) \Rightarrow \underbrace{\pi(z)}_{\pi^2 = \pi} = 0_V \Rightarrow x = 0_V$

2) $\underbrace{\underbrace{\mathrm{Im}(\pi)}_{\text{SE de } \mathbb{V}} + \underbrace{\mathrm{Nu}(\pi)}_{\text{SE de } \mathbb{V}}}_{\text{SE de } \mathbb{V}} \subset \mathbb{V}$ ✓ $\wedge$ $\mathbb{V} \subset \mathrm{Im}(\pi) + \mathrm{Nu}(\pi)$

$\Updownarrow$

$\forall v \in \mathbb{V} \Rightarrow v = \underbrace{v_1}_{\in \mathrm{Im}(\pi)} + \underbrace{v_2}_{\in \mathrm{Nu}(\pi)}$

Escribimos convenientemente a

$\forall v \in \mathbb{V} : v = \underbrace{\pi_{S_1S_2}(v)}_{\in \mathrm{Im}\,\pi \text{ es } v_1} + (v - \pi_{S_1S_2}(v))$ podrá ser v_2? sí

Como:

$\pi_{S_1S_2}(v - \pi_{S_1S_2}(v)) = \pi_{S_1S_2}(v) - \pi^2_{S_1S_2}(v) = \pi_{S_1S_2}(v) - \pi_{S_1S_2}(v) = 0_V$

Ejemplo

En $\mathbb{V} = \mathbb{R}_1[x]$ sean $S_1 = \mathrm{gen}\{1+x\}$ y $S_2 = \mathrm{gen}\{1-x\}$

Hallar $[\pi_{S_1S_2}]^{E_{\mathbb{R}_1[x]}}_{E_{\mathbb{R}_1[x]}}$

Obs: $\mathbb{R}_1[x] = S_1 \oplus S_2$ $\quad \{1+x, 1-x\}$ es una base de $S_1 + S_2 = \mathbb{R}_1[x]$

$[\pi]^{E_{\mathbb{R}_1[x]}}_{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} \pi(1+x) = 1+x \\ \pi(1-x) = 0_{\mathbb{R}_1[x]} \end{cases}$ con $B = \{1+x, 1-x\}$ base de $\mathbb{R}_1[x]$

$\Rightarrow [\pi_{S_1S_2}]^B_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Como buscábamos

$[\pi_{S_1S_2}]^{E_{\mathbb{R}_1[x]}}_{E_{\mathbb{R}_1[x]}} = [M]^{E_{\mathbb{R}_1[x]}}_{B} \cdot [\pi_{S_1S_2}]^B_B \cdot [M]^B_{E_{\mathbb{R}_1[x]}}$

$[\pi_{S_1S_2}]^{E_{\mathbb{R}_1[x]}}_{E_{\mathbb{R}_1[x]}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$

Realizando esta multiplicación:

Obs: $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ $\quad (\pi^2_{S_1S_2} = \pi_{S_1S_2})$

(c) Observar que $\Pi_{S_1S_2} + \Pi_{S_2S_1} = I_{\mathbb{V}}$. $\Leftrightarrow (\pi_{S_1S_2} + \pi_{S_2S_1})(v) = v \ \forall v \in \mathbb{V}$

$v = v_1 + v_2$ $(v_1 \in S_1, v_2 \in S_2)$ Tomo lado izquierdo

$\pi_{S_1S_2}(v_1 + v_2) + \pi_{S_2S_1}(v_1 + v_2) = \underbrace{\pi_{S_1S_2}(v_1)}_{v_1} + \underbrace{\cancel{\pi_{S_1S_2}(v_2)}}_{0_V} + \underbrace{\cancel{\pi_{S_2S_1}(v_1)}}_{0_V} + \underbrace{\pi_{S_2S_1}(v_2)}_{v_2} = v$

Retomando el ejemplo de $\mathbb{V} = \mathbb{R}_1[x]$ con $S_1 = \text{gen}\{1+x\}$ y $S_2 = \text{gen}\{1-x\}$

Si ahora pensamos $\Pi_{S_2S_1}(p) = \begin{cases} 0 & p \in S_1 \\ p & p \in S_2 \end{cases}$

o sea $\Pi_{S_2S_1}(1-x) = 1-x$ y $\Pi_{S_2S_1}(1+x) = 0_{\mathbb{R}_1[x]}$

$$\Rightarrow \left[\Pi_{S_2S_1}\right]^{E_{\mathbb{R}_1[x]}}_{E_{\mathbb{R}_1[x]}} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \quad (\text{verificar})$$

Obs: $\underset{\Pi_{S_1S_2}}{\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}} + \underset{\Pi_{S_2S_1}}{\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(d) Mostrar que $\Sigma_{S_1S_2} := I_{\mathbb{V}} - 2\Pi_{S_2S_1}$ es la única transformación lineal de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{V}$ tal que

$$\Sigma_{S_1S_2}(v_1+v_2) = v_1 + v_2 - 2\,\Pi_{S_2S_1}(v_1+v_2) = v_1 + v_2 - 2(0_V + v_2) = v_1 - v_2 \qquad \Pi_{S_2S_1}(v) = \begin{cases} v & v \in S_2 \\ 0 & v \in S_1 \end{cases}$$

$$\Sigma_{S_1S_2}(v) = \begin{cases} v & \text{si } v \in S_1, \\ -v & \text{si } v \in S_2, \end{cases}$$

razón por la cual $\Sigma_{S_1S_2}$ de denomina *la simetría de $\mathbb{V}$ con respecto a S_1 en la dirección de S_2*.

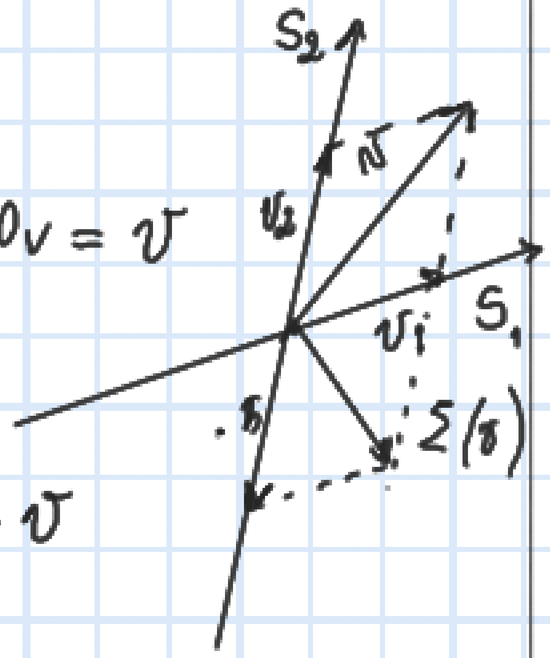
Siempre estamos trabajando $\mathbb{V} = S_1 \oplus S_2$

$v \in S_1 \Rightarrow$ como $v = \underbrace{v}_{\in S_1} + \underbrace{0_V}_{\in S_2}$

$$\Sigma_{S_1S_2}(v) = v - 2\,\Pi_{S_2S_1}(v + 0_V) = v - 2 \cdot 0_V = v$$

$v \in S_2 \Rightarrow$ como $v = \underbrace{0_V}_{\in S_1} + \underbrace{v}_{\in S_2}$

$$\Sigma_{S_1S_2}(v) = v - 2\,\Pi_{S_2S_1}(v) = v - 2v = -v$$



Ejemplo:

En $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$ sean $S_1 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ y $S_2 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$

Hallar $\left[\Sigma_{S_1S_2}\right]^{E_{\mathbb{R}^2}}_{E_{\mathbb{R}^2}}$

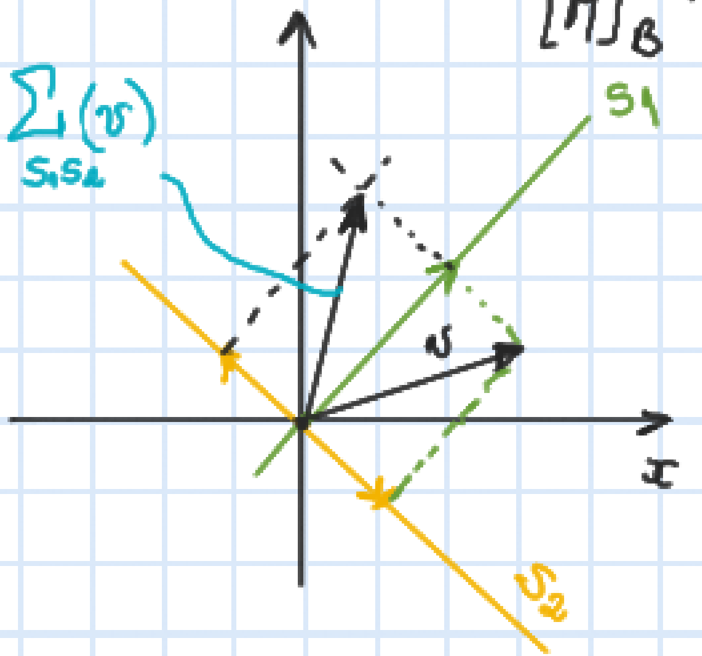
Obs: $\mathbb{R}^2 = S_1 \oplus S_2$ $\quad \Sigma_{S_1S_2}(v) = \begin{cases} v & v \in S_1 \\ -v & v \in S_2 \end{cases}$ $\quad \left[\Sigma_{S_1S_2}\right]^{E_{\mathbb{R}^2}}_{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\neq$

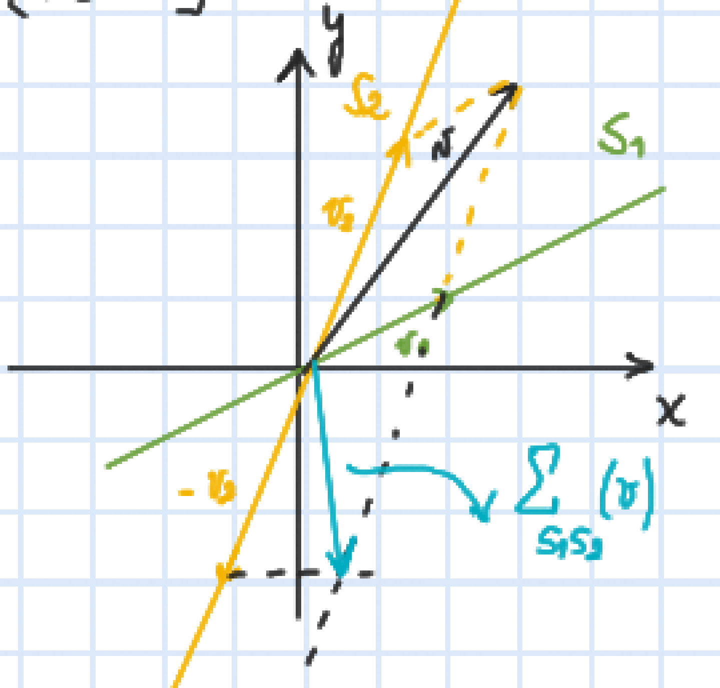
En este caso entonces:

$$\Sigma_{S_1S_2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \Sigma_{S_1S_2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Tomo $B = \left\{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in S_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\in S_2}\right\}$ base de $\mathbb{R}^2 \Rightarrow \left[\Sigma_{S_1S_2}\right]^{B}_{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\left[\Sigma_{S_1S_2}\right]^{E_{\mathbb{R}^2}}_{E_{\mathbb{R}^2}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{[M]^{E_{\mathbb{R}^2}}_{B}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}}_{\left[M_B^{E_{\mathbb{R}^2}}\right]^{-1}}$$





Proyectores

$\Pi : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ $\quad \mathbb{V} = S_1 \oplus S_2$

$\dim(\mathbb{V}) = n$

Tomo una base de S_1

$B_1 = \{v_1, v_2, \dots v_q\}$ $\quad \dim(S_1) = q$

Extendiendo esta base B_1 a una base de $\mathbb{V}$

$$B = \{\underbrace{v_1, v_2, \dots v_q}_{\in S_1}, \underbrace{v_{q+1} \dots v_n}_{\in S_2}\}$$

donde $B_2 = \{v_{q+1}, \dots v_n\}$ es base de S_2

- $\Pi_{S_1S_2}(v_1) = v_1$
- $\Pi_{S_1S_2}(v_2) = v_2$

$\vdots$

- $\Pi_{S_1S_2}(v_q) = v_q$
- $\Pi_{S_1S_2}(v_{q+1}) = 0_V$
- $\Pi_{S_1S_2}(v_{q+2}) = 0_V$
- $\Pi_{S_1S_2}(v_n) = 0_V$

$$\therefore \quad [\Pi_{S_1S_2}]_B^B = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ \hline & & & 0 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{array}\right) \in K^{n\times n}$$

$q \times q$ $\quad (n-q)\times(n-q)$

donde $q = \dim(S_1)$ y $n - q = \dim(S_2)$

Obs: $[\Pi_{S_1S_2}]_B^B = I_{n\times n}$ sólo cuando $S_1 = \mathbb{V}$

$[\Pi_{S_1S_2}]_B^B = 0_{n\times n}$ sólo cuando $S_2 = \mathbb{V}$

$S_1 \neq \mathbb{V}$ y $S_2 \neq \mathbb{V} \Rightarrow 0 < rg(\Pi_{S_1S_2}) < n$

Simetrías

$\Sigma : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ / $\mathbb{V} = S_1 \oplus S_2$

$\dim(\mathbb{V}) = n$

Tomo una base de S_1

$B_1 = \{v_1, v_2, \dots v_q\}$ $\quad \dim(S_1) = q$

Extendiendo esta base B_1 a una base de $\mathbb{V}$

$$B = \{\underbrace{v_1, v_2, \dots v_q}_{\in S_1}, \underbrace{v_{q+1} \dots v_n}_{\in S_2}\}$$

donde $B_2 = \{v_{q+1}, \dots v_n\}$ es base de S_2

- $\Sigma_{S_1S_2}(v_1) = v_1$
- $\Sigma_{S_1S_2}(v_2) = v_2$

$\vdots$

- $\Sigma_{S_1S_2}(v_q) = v_q$
- $\Sigma_{S_1S_2}(v_{q+1}) = -v_{q+1}$
- $\Sigma_{S_1S_2}(v_{q+2}) = -v_{q+2}$

$\vdots$

- $\Sigma_{S_1S_2}(v_n) = -v_n$

$$\therefore \quad [\Sigma_{S_1S_2}]_B^B = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & 1 \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ \hline & & & -1 & & \\ & 0 & & & -1 \ddots & \\ & & & & & -1 \end{array}\right)$$

$q \times q$ $\quad (n-q)\times(n-q)$

donde $\dim(S_1) = q$ (cantidad de unos)

$\dim(S_2) = n - q$ (cantidad de (-1))

EN TODOS LOS CASOS $\Sigma_{S_1S_2}$ es inversible o isomorfismo

(e) Explicar por qué $\Sigma^2_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2} = I_{\mathbb{V}}$.

$\Updownarrow \quad \Sigma^2_{S_1S_2}(v) = v \quad \forall v \in \mathbb{V}$

Como $v = v_1 + v_2 \quad v_1 \in S_1,\ v_2 \in S_2$, calculamos.

$$\sum_{S_1S_2}\left(\sum_{S_1S_2}(v)\right) = \sum\left(\sum(v_1+v_2)\right) = \sum\left(\sum_{S_1S_2}(v_1)+\sum_{S_1S_2}(v_2)\right)$$
$$= \sum_{S_1S_2}(v_1 - v_2) = \sum_{S_1S_2}(v_1) - \sum_{S_1S_2}(v_2)$$
$$= v_1 - (-v_2) = v_1 + v_2 = v$$

Comentario:

$$\Sigma^2 = \Sigma \circ \Sigma = Id$$
$$\Sigma^{2B}_{B} = \Sigma^{B} \circ \Sigma_{B}$$
$$\Sigma^{2B_2}_{B_1} = \Sigma^{B_2}_{O}\, \Sigma^{O}_{B_1} \quad \times$$

$$\Sigma\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad \Sigma\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \qquad B = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$[\Sigma]^{E_{\mathbb{R}^2}}_{B} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}}_{\Sigma^E_B \cdot \Sigma^E_B \neq \Sigma^2} = \begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix} \times$$

2.21. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ a matriz definida por

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 16 & 11 \\ 5 & 9 & 6 \\ 0 & 16 & 14 \end{bmatrix}$$

(a) Comprobar que $\mathbb{R}^3 = \operatorname{nul}(A) \oplus \operatorname{fil}(A)$.

(b) Hallar las matrices con respecto a la base canónica de las proyecciones y simetrías inducidas por la partición $\mathbb{R}^3 = \operatorname{nul}(A) \oplus \operatorname{fil}(A)$.

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 8 & 16 & 11 \\ 5 & 9 & 6 \\ 0 & 16 & 14 \end{pmatrix} = 2 \qquad \begin{pmatrix} 8 & 16 & 11 \\ 5 & 9 & 6 \\ 0 & 16 & 14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 8 & 16 & 11 \\ 0 & -1 & \frac{-7}{8} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ (*)$$

Nu(A):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 16 & 11 & 0 \\ 5 & 9 & 6 & 0 \\ 0 & 16 & 14 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} 8\cdot x_1 + 16\cdot x_2 + 11\cdot x_3 = 0 \\ -1\cdot x_2 - \frac{7}{8}\cdot x_3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$(*)\ Fil(A) = gen\underbrace{\left\{\begin{pmatrix}8\\16\\11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\8\\7\end{pmatrix}\right\}}_{es\ li}$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{3}{8}\cdot x_3 \\ \frac{-7}{8}\cdot x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow Nul(A) = gen\left\{\begin{pmatrix}3\\-7\\8\end{pmatrix}\right\}$$

dim Nul(A) = 1

$r(A) = 2$

$$Nul(A) + Fil(A) = gen\left\{\begin{pmatrix}3\\-7\\8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\16\\11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\8\\7\end{pmatrix}\right\} \wedge \left\{\begin{pmatrix}8\\16\\11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\8\\7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-7\\8\end{pmatrix}\right\} \text{ es li.}$$

Base de $Nul(A) + Fil(A)$: $B = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow$ base de $\mathbb{R}^3$

$$\therefore \quad \mathbb{R}^3 = \underbrace{Nul(A)}_{S_1} \oplus \underbrace{Fil(A)}_{S_2}$$

- $\pi_{S_1S_2}\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \pi_{S_1S_2}\begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \pi_{S_1S_2}\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \left[\pi_{S_1S_2}\right]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \qquad \pi^2 = \pi$$

- $\pi_{S_2S_1}\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \pi_{S_2S_1}\begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 11 \end{pmatrix} \quad \pi_{S_2S_1}\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \left[\pi_{S_2S_1}\right]_B^B = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

- $\Sigma_{S_1S_2}\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix} \wedge \Sigma_{S_1S_2}\begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 11 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 11 \end{pmatrix} \quad \Sigma_{S_1S_2}\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \left[\Sigma_{S_1S_2}\right]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \qquad (\Sigma)^2 = I$$

- $\Sigma_{S_2S_1}\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix} \wedge \Sigma_{S_2S_1}\begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 11 \end{pmatrix} \quad \Sigma_{S_2S_1}\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \left[\Sigma_{S_2S_1}\right]_B^B = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \qquad (\Sigma)^2 = I$$

2.23 Verificar las siguientes afirmaciones.

(a) Si $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ es tal que $T^2 = T$, entonces T es la proyección de $\mathbb{V}$ sobre $\operatorname{Im}(T)$ en la dirección de $\operatorname{Nu}(T)$. $\Longrightarrow$

$$T(v) = \pi_{S_1S_2}(v) = \begin{cases} v & v \in Im(T) \\ 0_V & v \in Nu(T) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad Nu(T) \oplus Im(T) = \mathbb{V}$$

$S_1 = Im(T)$
$S_2 = Nu(T)$

Para probar $Nu(T) \oplus Im(T) = \mathbb{V} \Leftrightarrow Nu(T) \cap Im(T) = \{0_V\}$, $Nu(T) + Im(T) = \mathbb{V}$ ✓

- $x \in Nu(T) \cap Im(T) \Rightarrow T(x) = 0 \wedge x = T(z) \quad z \in \mathbb{V}$

$\Rightarrow T(x) = T^2(z) = T(z) = 0 = x$

- $x = \underbrace{T(x)}_{\in Im(T)} + \underbrace{x - T(x)}_{\in Nu(T)}$ ✓

Obs: Si $T^2 = T \Rightarrow w \in Im(T) \Rightarrow T(w) = w$ $\qquad T: \pi$, $S: \Sigma$

(b) Si $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ es tal que $T^2 = T$, entonces $S = I_{\mathbb{V}} - 2T$ es tal que $S^2 = I_{\mathbb{V}}$.

$T: \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ es una TL $\qquad S: \Sigma$

$$S^2(v) = S[S(v)] = (I_V - 2T)\left[(I_V - 2T)(v)\right]$$
$$= (I_V - 2T)(v - 2T(v))$$
$$= v - 2T(v) - 2T(v - 2T(v)) \qquad T^2 = T$$
$$= v - 2T(v) - 2T(v) + 4T^2(v) = v \quad \forall v \in \mathbb{V}$$

(c) Si $S \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ es tal que $S^2 = I_{\mathbb{V}}$, entonces $T = \frac{1}{2}(I_{\mathbb{V}} - S)$ es tal que $T^2 = T$.

(c) $S : V \to V \;/\; S^2 = I_V \wedge T = \frac{1}{2}(I_V - S) \Rightarrow T^2 = T$

$$T(v_1 + v_2) = \frac{1}{2}(I_V - S)(v_1+v_2) = \frac{1}{2}\left[I_V(v_1+v_2) - S(v_1+v_2)\right]$$

def

$$= \frac{1}{2} v_1 + \frac{1}{2} v_2 - \frac{1}{2} S(v_1) - \frac{1}{2} S(v_2)$$

$$= \cancel{\frac{1}{2} v_1} + \frac{1}{2} v_2 - \cancel{\frac{1}{2} v_1} - \frac{1}{2}(-v_2) = \frac{1}{2} v_2 + \frac{1}{2} v_2 = v_2$$

Además $T^2(v_1+v_2)$

$$T\left[T(v_1+v_2)\right] = T\left(T(v_1) + T(v_2)\right) = T(v_2) = \frac{1}{2}(I_V - S)(v_2)$$

$$= \frac{1}{2} v_2 - \frac{1}{2} S(v_2) = \frac{1}{2} v_2 + \frac{1}{2} v_2 = v_2$$

$\therefore \; T^2(v) = T(v) \quad \forall v \in V$!!

(d) Si $S \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ es tal que $S^2 = I_{\mathbb{V}}$, entonces S es la simetría de $\mathbb{V}$ con respecto a $\mathrm{Nu}\left(\frac{1}{2}(I_{\mathbb{V}} - S)\right)$ en la dirección de $\mathrm{Im}\left(\frac{1}{2}(I_{\mathbb{V}} - S)\right)$.

(d) $S \in \mathcal{L}(V) \;/\; S^2 = I_V$ entonces S es la simetría de V con respecto a $Nu\left(\frac{1}{2}(I_V - S)\right)$ en la dirección de la $Im\left(\frac{1}{2}(I_V - S)\right)$

Para esto hay que probar que

$v \in Nu\left(\frac{1}{2}(I_V - S)\right) \Rightarrow S(v) = v$

y si $v \in Im\left(\frac{1}{2}(I_V - S)\right) \Rightarrow S(v) = -v$

- Sea $v \in Nu\left(\frac{1}{2}(I_V - S)\right) \Rightarrow \frac{1}{2}(I_V - S)(v) = 0_V$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} v - \frac{1}{2} S(v) = 0_V$$

$$\Rightarrow S(v) = v \checkmark$$

- Sea $v \in Im\left(\frac{1}{2}(I_V - S)\right) \Rightarrow \exists u \in V : \left(\frac{1}{2}(I_V - S)\right)(u) = v$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(u - S(u)) = v$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} u - \frac{1}{2} S(u) = v \quad (1)$$

aplicamos S: $S\left(\frac{1}{2} u - \frac{1}{2} S(u)\right) = S(v)$

$$\frac{1}{2} S(u) - \frac{1}{2} S^2(u) = S(v)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} S(u) - \frac{1}{2} I_V(u) = S(v)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} S(u) - \frac{1}{2} u = S(v) \quad (2)$$

De (1) y (2) $S(v) = -\left(\frac{1}{2} u - \frac{1}{2} S(u)\right) = -v$

(e) Si $S \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ es tal que $S^2 = I_{\mathbb{V}}$, entonces $\mathbb{V} = \mathrm{Nu}(S - I_{\mathbb{V}}) \oplus \mathrm{Nu}(S + I_{\mathbb{V}})$.

$S \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ $\quad S^2 = I_V \rightarrow \mathbb{V} = Nu(S - I_V) \oplus Nu(S + I_V)$

Se debe probar que (1) $Nu(S - I_V) \cap Nu(S + I_V) = \{0_V\}$

(2) $Nu(S - I_V) + Nu(S + I_V) = \mathbb{V}$

En ambos casos se debe probar la doble inclusión para justificar la igualdad $(A \subset B \wedge B \subset A \Leftrightarrow A = B)$

Para (1). $\{0_V\} \subset Nu(S - I_V) \cap Nu(S + I_V)$ es trivial porque el Nu de una TL es un subespacio y la intersección entre subespacios es subespacio por lo tanto

$0_V \in Nu(S - I_V) \cap Nu(S + I_V)$

- $Nu(S - I_V) \cap Nu(S + I_V) \subset \{0_V\}$

Para esta parte tomamos un vector v que pertenezca a la intersección y hay que probar que $v = 0_V$

$$v \in Nu(S - I_V) \cap Nu(S + I_V) \Rightarrow \underbrace{v \in Nu(S - I_V)}_{(a)} \wedge \underbrace{v \in Nu(S + I_V)}_{(b)}$$

De (a) $(S - I_V)(v) = 0_V \Rightarrow S(v) = v$

De (b) $(S + I_V)(v) = 0_V \Rightarrow S(v) = -v$ $\quad \therefore v = -v \Rightarrow$

$v = 0_V$

Para (2) Hay que probar que

(c) $Nu(S - I_V) + Nu(S + I_V) \subset \mathbb{V}$ y

(d) $\mathbb{V} \subset Nu(S - I_V) + Nu(S + I_V)$

es subespacio de $\mathbb{V}$.. Concretamente en este caso:

$v_1 \in Nu(S - I_V) \Rightarrow (S - I_V)(v_1) = 0_V \Rightarrow S(v_1) = v_1$

$v_2 \in Nu(S + I_V) \Rightarrow (S + I_V)(v_2) = 0_V \Rightarrow S(v_2) = -v_2$

$\therefore v = v_1 + v_2 = S(v_1) - S(v_2) = S(v_1 - v_2) \Rightarrow$

$v \in Im(S) \wedge Im(S) \subset \mathbb{V} \quad \therefore \quad v \in \mathbb{V}$

Para probar (d) tomamos un vector cualquiera $v \in \mathbb{V}$ y queremos probar que $v = v_1 + v_2$ con $v_1 \in Nu(S - I_V) \wedge v_2 \in Nu(S + I_V)$

Vamos a escribir trivialmente a v como

$$v = \frac{v + S(v)}{2} + \frac{v - S(v)}{2}$$

Si probamos que $\underbrace{\frac{v+S(v)}{2}}$ $\in Nu(S-I_V)$ podremos llamarlo

y si probamos que $\underbrace{\frac{v-S(v)}{2}}$ $\in Nu(S+I_V)$ podremos llamarlo

Calculamos entonces

$$(S-I_V)\left(\frac{v+S(v)}{2}\right)=(S-I_V)\left(\frac{v}{2}\right)+(S-I_V)\left(\frac{S(v)}{2}\right)$$

$$=\cancel{S\left(\frac{v}{2}\right)}-\frac{v}{2}+\frac{S^2(v)}{2}-\cancel{\frac{S(v)}{2}}$$

$$(\text{como } S^2=I)=-\frac{v}{2}+\frac{v}{2}=0_V \text{ efectivamente}$$

$$\frac{v+S(v)}{2}\in Nu(S-I_V)$$

Analogamente con $\frac{v-S(v)}{2}$

$$(S+I_V)\left(\frac{v-S(v)}{2}\right)=(S+I_V)\left(\frac{v}{2}\right)+(S+I_V)\left(-\frac{S(v)}{2}\right)$$

$$=\cancel{S\left(\frac{v}{2}\right)}+I_V\left(\frac{v}{2}\right)-\frac{S^2(v)}{2}-\cancel{\frac{S(v)}{2}}$$

$$=I_V\left(\frac{v}{2}\right)-I_V\left(\frac{v}{2}\right)=0_V$$

efectivamente $\frac{v-S(v)}{2}\in Nu(S+I_V)$

queda probada así la doble inclusión y ∴

$$Nu(S-I_V)\oplus Nu(S+I_V)=V$$

2.24 Sean $T,S\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ las transformaciones lineales definidas por

$$T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right):=\underbrace{\begin{bmatrix}1/2&0&-1/2\\0&0&0\\-1/2&0&1/2\end{bmatrix}}_{A=[T]_{E_{\mathbb{R}^3}}^{E_{\mathbb{R}^3}}}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} \quad \text{y} \quad S\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right):=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&-1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

alcanza con mostrar que $A^2=A$

(a) Comprobar que T es una proyección y hallar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&\frac{-1}{2}\\0&0&0\\\frac{-1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&\frac{-1}{2}\\0&0&0\\\frac{-1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&\frac{-1}{2}\\0&0&0\\\frac{-1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\Rightarrow A^2=A$$

(a) Si $T\in\mathcal{L}(\mathbb{V})$ es tal que $T^2=T$, entonces T es la proyección de $\mathbb{V}$ sobre $\mathrm{Im}(T)$ en la dirección de $\mathrm{Nu}(T)$. $\Longrightarrow$

$Nu(T) = \{ x \in \mathbb{R}^3 : T(x) = 0_{\mathbb{R}^3} \} = \{ x \in \mathbb{R}^3 ; Ax = 0_{\mathbb{R}^3} \}$

$= Nul(A)$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 = 0 \\ -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ \forall x_3 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow Nul(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}, x_1, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

o $Nul(A) = gen \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Como $\dim Nul(A) = 2 \wedge \dim Nul(A) + rg(A) = 3$

$\Rightarrow rg(A) = 1 \Rightarrow \dim Im(T) = 1$

En este caso $Im(T) = Col(A) = gen \left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} \right\} = gen \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

$\Pi_{S_1 S_2}$ con $S_1 = Im(T)$ y $S_2 = Nu(T)$ en este caso

$$\therefore \mathcal{B} = \Big\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{Im(T)} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{Nul(T)} \Big\}$$

$$\Rightarrow [\Pi_{S_1 S_2}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Π : Proyección sobre $Im(T)$ en la dirección de $Nu(T)$

$$S\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) := \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A = [S]_{E_{\mathbb{R}^3}}^{E_{\mathbb{R}^3}}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

$A^2 = I_{3\times 3}$

(b) Comprobar que S es una simetría y hallar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$[S]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(d) Mostrar que $\Sigma_{S_1S_2} := I_V - 2\Pi_{S_2S_1}$ es la única transformación lineal de V en V tal que

$$\Sigma_{S_1S_2}(v) = \begin{cases} v & \text{si } v \in S_1, \\ -v & \text{si } v \in S_2, \end{cases}$$

razón por la cual $\Sigma_{S_1S_2}$ de denomina *la simetría de V con respecto a S_1 en la dirección de S_2*.

(d) Si $S \in \mathcal{L}(V)$ es tal que $S^2 = I_V$, entonces S es la simetría de V con respecto a $Nu\left(\frac{1}{2}(I_V - S)\right)$ en la dirección de $Im\left(\frac{1}{2}(I_V - S)\right)$.

$$\overset{A}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \cdot \overset{A}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}} = \overset{I}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \checkmark$$

$$S\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$ simetría respecto de Nul $\frac{1}{2}(I_V - S)$ en la dirección de Im $\frac{1}{2}(I_V - S)$

$$I\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} - S\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = (I-A)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}(I-A)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1/2&0&-1/2\\0&1&0\\1/2&0&-1/2\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}(I-A) = \left[\frac{1}{2}(I_V - S)\right]_{E_{\mathbb{R}^3}}^{E_{\mathbb{R}^3}}$$

$$\text{Nul}\left(\frac{1}{2}(I-A)\right): \begin{cases}\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3 = 0 \Rightarrow \underline{x_1 = x_3}\\ \overline{x_2 = 0}\\ \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3 = 0\end{cases}$$

$$\therefore \text{Nul}\left(\frac{1}{2}(I-A)\right) = \text{gen}\left\{\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}_{v_1}\right\}$$

$$\text{Im}\ \frac{1}{2}(I-A) = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1/2\\0\\1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1/2\\0\\-1/2\end{pmatrix}\right\} = \text{gen}\left\{\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}_{v_2}\underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}_{v_3}\right\}$$

Obs: Si $B = \{v_1, v_2, v_3\} \Rightarrow [S]_B^B = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

$S(v_1) = v_1 \quad S(v_2) = -v_2$
$\wedge\ S(v_3) = -v_3$

Ejercicio :

Definir la TL que realiza la proyección de $\mathbb{R}_2[x]$ sobre $S_1 = \text{gen}\{1+x, 1-x^2\}$ en la dirección de $S_2 = \text{gen}\{2+x-3x^2\}$

Hallar la matriz de la TL en la base canónica

Obs : $S_1 \oplus S_2 = \mathbb{R}_2[x]$

Si $\{\underbrace{1+x, 1-x^2}_{\in S_1}, \underbrace{2+x-3x^2}_{\in S_2}\}$ es l.i. $\Rightarrow B = \{1+x, 1-x^2, 2+x-3x^2\}$ es base de $\mathbb{R}_2[x]$

$\{1+x, 1-x^2, 2+x-3x^2\}$ es l.i. en $\mathbb{R}_2[x] \Leftrightarrow \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}\right\}$ es l.i. en $\mathbb{R}^3$ con $B = \{1, x, x^2\}$

Planteo: $\alpha_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}1&1&2\\1&0&1\\0&-1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1&1&2\\1&0&1\\0&-1&-3\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&-1&-3\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&-2\end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l}\alpha_1=0\\\alpha_2=0\\\alpha_3=0\end{array}$

$\therefore B = \{1+x, 1-x, 2+x-3x^2\}$ base de $\mathbb{V} = \mathbb{R}_2[x]$

$\Rightarrow S_1 \oplus S_2 = \mathbb{R}_2[x]$

$\Pi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ /

$\Pi(1+x) = 1+x$

$\Pi(1-x^2) = 1-x^2$

$\Pi(2+x-3x^2) = 0_{\mathbb{R}_2[x]}$

Proyección de $\mathbb{R}_2[x]$ sobre S_1 en la dirección de S_2

$E_{\mathbb{R}^3} = \{1, x, x^2\}$

Obs: $[\Pi]_B^{E_{\mathbb{R}^3}} = \begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix} = A$

$A.A = \begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix} \neq A$

¡Solo al considerar $[\Pi]_B^B$ ocurre $\left([\Pi]_B^B\right)^2 = [\Pi]_B^B$ para cualquier B base de $\mathbb{R}_2[x]$

En este caso $[\Pi]_B^B = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

y $[T]_{E_{\mathbb{R}_2[x]}}^{E_{\mathbb{R}_2[x]}} = M_B^{E_{\mathbb{R}_2[x]}} \cdot [T]_B^B \cdot M_{E_{\mathbb{R}_2[x]}}^B$

$= \begin{pmatrix}1&1&2\\1&0&1\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&2\\1&0&1\\0&-1&1\end{pmatrix}^{-1}$