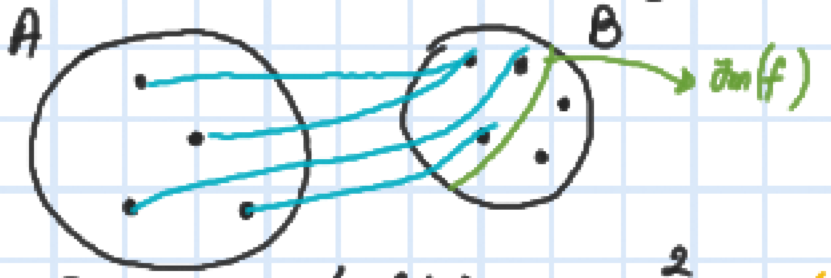
PRELIMINARES + NOTACIONES (ver)

Recordamos :

$f : A \to B$ es una función $\forall x \in A \; \exists! y \in B : f(x) = y$

dominio (A) — codominio (B)

$Im(f) = \{ y \in B : f(x) = y, \, x \in A \}$

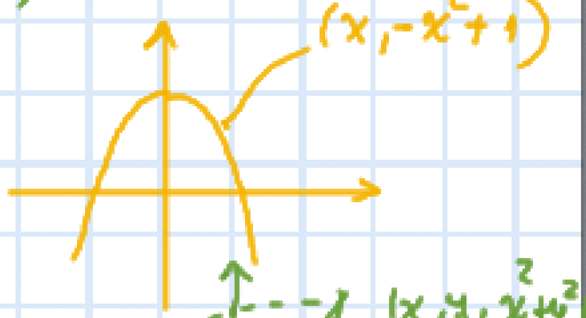


Ej: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \; / \; f(x) = -x^2 + 1$ (1)

Ej: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \; / \; f(x,y) = x^2 + y^2$ (2)

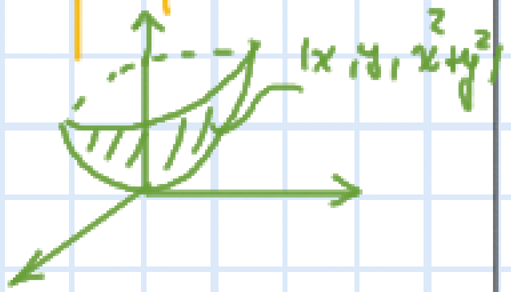
$f : A \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R} \; / \; f(x) = y$

$Gr(f) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x) \}$

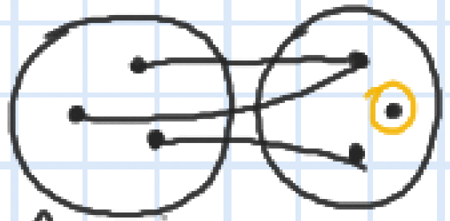


$f : A \subset \mathbb{R}^2 \to B \subset \mathbb{R} \; / \; f(x,y) = z$

$Gráf(f) = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x,y) \}$



- $f : A \to B$ es inyectiva si $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
- $f : A \to B$ es sobreyectiva si $Im(f) = B$



f NO INYECTIVA ; NI SOBREYECTIVA

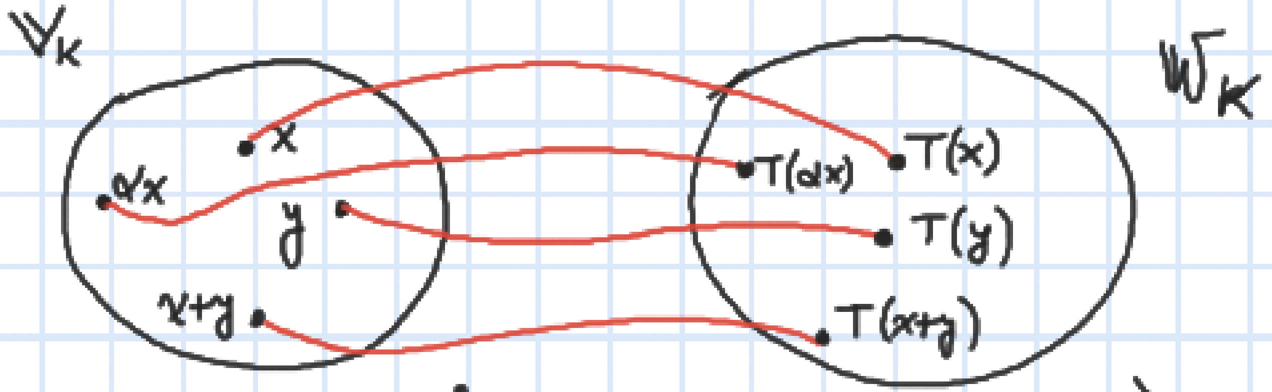
Transformaciones lineales

Sean $\mathbb{V}_K$ y $\mathbb{W}_K$ dos espacios vectoriales definidos sobre el mismo cuerpo de escalares K.

La función $T : \mathbb{V}_K \to \mathbb{W}_K$ es una transformación lineal si y sólo si cumple:

i. $T(x + y) = T(x) + T(y), \; \forall x, y \in \mathbb{V}_K$

ii. $T(\alpha x) = \alpha T(x), \; \forall \alpha \in K, \forall x \in \mathbb{V}_K$



Ejemplo : $T : \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}^2 \; / \; T(a + bx) = \begin{pmatrix} a \\ a+b+1 \end{pmatrix}$, es TL ?

1) $\forall p \, \forall q \in \mathbb{R}_1[x] : T(p+q) = T(p) + T(q)$?

$p(x) = a + bx \qquad q(x) = c + dx$

Por un lado :

$T(p+q) = T\big((a+c) + (b+d)x\big) = \begin{pmatrix} a+c \\ a+c+b+d+1 \end{pmatrix}$ $\; = ?$ (No)

Por otro lado :

$T(p) + T(q) = \begin{pmatrix} a \\ a+b+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ c+d+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ a+b+c+d+2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ T NO es una TL

Obs : La definición de TL es equivalente a probar

$T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y) \quad \forall x \forall y \in \mathbb{V}_K \; \forall \alpha \in K$

Transformaciones lineales especiales

- Transformación identidad

$$I_{\mathbb{V}_K} : \mathbb{V}_K \to \mathbb{V}_K : I_{\mathbb{V}_K}(x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{V}_K$$

$$I_{\mathbb{W}_K} : \mathbb{W}_K \to \mathbb{W}_K : I_{\mathbb{W}_K}(x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{W}_K$$

- Transformación nula

$$O_{\mathcal{L}} : \mathbb{V}_K \to \mathbb{W}_K : O_{\mathcal{L}}(x) = 0_{\mathbb{W}_K} \quad \forall x \in \mathbb{V}_K$$

(O_k)

- Transformaciones matriciales

Dada la matriz $A \in K^{m\times n}$ la aplicación $T : K^n \to K^m : T(x) = Ax$ es una transformación lineal.

$A \in K^{m\times n}$

Funcional lineal (ϕ)

Definición: Sea $\mathbb{V}_K$ un espacio vectorial definido sobre el cuerpo de escalares K.

Se llama *funcional lineal* sobre $\mathbb{V}_K$ a una función $f : \mathbb{V}_K \to K$ que cumple: ($\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$)

i. $f(x+y) = f(x) + f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{V}_K$

ii. $f(\alpha x) = \alpha f(x), \ \forall \alpha \in K, \forall x \in \mathbb{V}_K$

Ej: $\phi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R} \ / \ \phi(a+bx+cx^2) = -a+2b+c$

Propiedades de las transformaciones lineales

1. $T_{\mathbb{V}_K} : \mathbb{V}_K \to \mathbb{W}_K$ es una transformación lineal, entonces $T(0_{\mathbb{V}_K}) = 0_{\mathbb{W}_K}$.

$$\left(T \text{ es TL} \Longrightarrow \underbrace{T(0_V) = 0_W}_{\text{condición necesaria}}\right)$$

En $\mathbb{V}_K$: $0_V + 0_V = 0_V \Rightarrow T(0_V + 0_V) = T(0_V)$ aplico T

$\Rightarrow \underbrace{T(0_V)}_{\in W_K} + \underbrace{T(0_V)}_{\in W_K} = \underbrace{T(0_V)}_{\in W_K} \Rightarrow T(0_V) = 0_W$

Útil:

Ej: $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \ / \ T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \\ 1 \end{pmatrix}$ es TL?

Como $T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ no cumple condición necesaria $\therefore$ T no es una TL

2. Sea $\{v_1, ..., v_k\}$ un conjunto de vectores de $\mathbb{V}_K$. Entonces

$$T\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i T(v_i), \alpha_i \in K$$

Sea $w = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k$

$T(w) = T(\underbrace{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k}_{\in V_K}) = \underbrace{T(\alpha_1 v_1)}_{\in W_K} + \dots + \underbrace{T(\alpha_k v_k)}_{\in W_K} = \alpha_1 T(v_1) + \dots + \alpha_k T(v_k)$

$= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i T(v_i)$

3. Sean $f : \mathbb{V}_K \to \mathbb{W}_K$ y $g : \mathbb{V}_K \to \mathbb{W}_K$ dos transformaciones lineales sobre el mismo cuerpo K. Las funciones $f \pm g : \mathbb{V}_K \to \mathbb{W}_K$ son transformaciones lineales.

$\forall x \in V_K$: $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$

4. Sea $f : \mathbb{V}_K \to \mathbb{W}_K$ y $\alpha \in K$. Entonces la función $\alpha f : \mathbb{V}_K \to \mathbb{W}_K$ es una transformación lineal.

$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$

Ejemplos: $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$ $\left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$

(para aclarar las propiedades)

y sea una TL $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 / T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+y\\x+z\end{pmatrix}$

Prop 2: $T\left(\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right) = \alpha T\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\beta T\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\lambda T\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

Por un lado: $T\begin{pmatrix}\alpha+\lambda\\\alpha+\beta+2\lambda\\\beta+\lambda\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha+\lambda+\alpha+\beta+2\lambda\\\alpha+\lambda+\beta+\lambda\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\alpha+\beta+3\lambda\\\alpha+\beta+2\lambda\end{pmatrix}$

Por otro lado: $\alpha T\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\beta T\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\lambda T\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}2\alpha+\beta+3\lambda\\\alpha+\beta+2\lambda\end{pmatrix}$ $=$ ✓

Prop 4: $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 / T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+y\\x+z\end{pmatrix}$ es una TL

$\Rightarrow \alpha T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ es TL $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

por ej: $\alpha = 4$ $\quad 4T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 / (4T)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 4T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

Prop 3: $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 / T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+y\\x+z\end{pmatrix}$ es TL

$G: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 / G\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x-y\\0\end{pmatrix}$ es TL

$\Rightarrow T+G: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 / (T+G)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+y\\x+z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x-y\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x\\x+z\end{pmatrix}$

$(T-G)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+y\\x+z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x-y\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2y\\x+z\end{pmatrix}$

También son TL

Obs:

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 / T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+y\\x+z\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}}_{2\times 3}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

Gral:

$T: K^n \to K^m / T(x) = AX \quad x \in K^n \quad A \in K^{m\times n}$ es una TL

ya que: $X, Y \in K^n, \alpha \in K$

(1) $T(X+Y) = A(X+Y) = AX+AY = T(X)+T(Y)$ ✓

(2) $T(\alpha X) = A(\alpha X) = \alpha(AX) = \alpha T(X)$ ✓

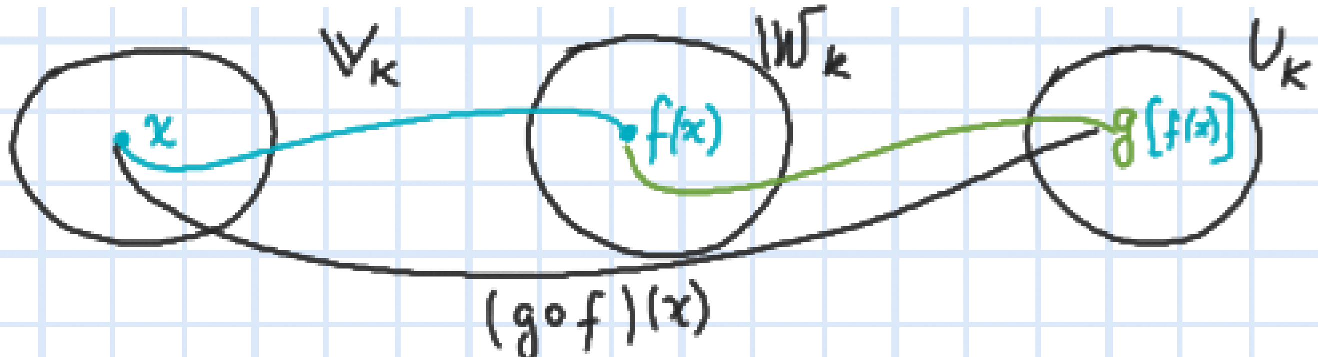
Ej: $T: \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}^{2\times 2} / T(a+bx) = \begin{pmatrix}a+b & a\\0 & b\end{pmatrix}$ es una TL (no se puede escribir como $T(x) = AX$)

Composición de transformaciones lineales

Definición: Sean $f : \mathbb{V}_K \to \mathbb{W}_K$ y $g : \mathbb{W}_K \to \mathbb{U}_K$ dos transformaciones lineales sobre el mismo cuerpo de escalares K. Entonces se define la *composición* de g con f, y se denota $g \circ f$, como

$$(g \circ f) : \mathbb{V}_K \to \mathbb{U}_K : (g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right), \quad \forall x \in \mathbb{V}_K$$

Propiedad: La composición de transformaciones lineales es también una transformación lineal.



Ej: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_1[x] \;/\; f\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a + (a+b)x$ TL

$g : \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}^3 \;/\; g(a+bx) = \begin{pmatrix} a+b \\ -2a \\ a-b \end{pmatrix}$ TL

$\Rightarrow g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \;/\; (g\circ f)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = g\left[f\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right]$ es otra TL

donde $(g\circ f)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = g\left[f\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right] = g\left(a + (a+b)x\right) = \begin{pmatrix} a+a+b \\ -2a \\ a-(a+b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b \\ -2a \\ -b \end{pmatrix}$

Prop: $g\circ f : \mathbb{V}_K \to \mathbb{U}_K$ es una TL $\Leftrightarrow$ $(g\circ f)(x+y) = (g\circ f)(x) + (g\circ f)(y)$ (1)
$\forall x \forall y \in \mathbb{V}_K\ \forall \alpha \in K$ $\quad (g\circ f)(\alpha x) = \alpha (g\circ f)(x)$

(1) $(g\circ f)(x+y) \underset{\text{def } g\circ f}{=} g[f(x+y)] \underset{f \text{ es TL}}{=} g[\underbrace{f(x)}_{\in \mathbb{W}_K} + \underbrace{f(y)}_{\in \mathbb{W}_K}] \underset{g \text{ es TL}}{=} g[f(x)] + g[f(y)]$
$= (g\circ f)(x) + (g\circ f)(y)$ $\quad$ (2) (probar)

Imagen de una transformación lineal

Definición: La *imagen* de una transformación lineal $T : \mathbb{V}_K \to \mathbb{W}_K$ es el subconjunto de $\mathbb{W}_K$, denotado $\text{Im}(T)$ tal que $\text{Im}(T) = \{w \in \mathbb{W}_K : w = T(x),\ x \in \mathbb{V}_K\}$.

Ej: $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \;/\; T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ es una TL

¿$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Im}\,T$? ¿$\exists \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$?

Como $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 0 = 1$ (Abs) $\quad \therefore \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \text{Im}(T)$

Propiedad: $\text{Im}(T)$ es un SE de $\mathbb{W}_K$ $\qquad T : \mathbb{V}_K \to \mathbb{W}_K$ una TL

1) $0_W \in \text{Im}(T)$ porque $\exists\, 0_V \in \mathbb{V}_K : T(0_V) = 0_W$ porque T es TL

2) $w_1, w_2 \in \text{Im}(T)$ q.v.q $w_1 + w_2 \in \text{Im}(T)$

$w_1 \in \text{Im}(T) \Rightarrow \exists\, v_1 \in \mathbb{V}_K : T(v_1) = w_1$ (*)
$w_2 \in \text{Im}(T) \Rightarrow \exists\, v_2 \in \mathbb{V}_K : T(v_2) = w_2$
$T(v_1) + T(v_2) = w_1 + w_2 \Rightarrow$ como T es TL
$\Rightarrow T(\underbrace{v_1 + v_2}_{\in \mathbb{V}_K}) = w_1 + w_2 \Rightarrow \exists\, v_1 + v_2 \in \mathbb{V} : T(v_1 + v_2) = w_1 + w_2$
$\Rightarrow w_1 + w_2 \in \text{Im}(T)$

3) $\alpha \in K$ $\quad w_1 \in \text{Im}(T)$ q.v.q $\alpha w_1 \in \text{Im}(T)$
En (*) $\alpha T(v_1) = \alpha w_1 \Rightarrow T(\underbrace{\alpha v_1}_{\in \mathbb{V}}) = \alpha w_1 \Rightarrow \exists\, \alpha v_1 \in \mathbb{V} : T(\alpha v_1) = \alpha w_1$

Ej: Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_1[x] \,/\, T\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = (a+b)+(b+c)x$ una TL

$\Rightarrow Im(T) \subset \mathbb{R}_1[x]$

$T\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \underbrace{(a+b)+(b+c)x}_{\in Im(T)} = a\cdot 1 + b(1+x) + cx$ $\quad a,b,c \in \mathbb{R}$

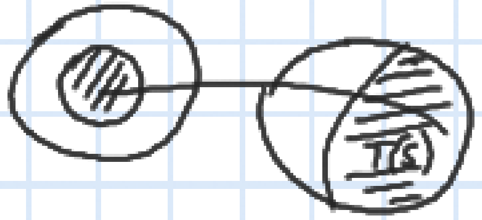
$\Rightarrow Im(T) = gen\{1, 1+x, x\}$

$\wedge \{1, 1+x, x\}$ es LD $\quad 1+x = 1.1 + 1.x$

$\Rightarrow Im(T) = gen\{1, x\} \wedge \{1,x\}$ es li

$\Rightarrow \mathcal{B}(Im\,T) = \{1, x\} \wedge \dim Im(T) = 2$

Prop: $T(S)$ es SE de W_K $\qquad T(S) = \{w \in W_K : T(v) = w, v \in S\}$



Debo ver que:

1) $0_W \in T(S)$

2) $w_1 \in T(S) \wedge w_2 \in T(S) \Rightarrow w_1 + w_2 \in T(S)$

3) $\alpha \in K$, $w_1 \in T(S) \Rightarrow \alpha w_1 \in T(S)$ $\qquad K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$

1) $0_W \in T(S)$ ya que $T(0_V) = 0_W \wedge 0_V \in S$

2) $w_1 \in T(S) \Rightarrow \exists\, v_1 \in S : T(v_1) = w_1$

$w_2 \in T(S) \Rightarrow \exists\, v_2 \in S : T(v_2) = w_2$ $\quad$ suma

$T(v_1) + T(v_2) = w_1 + w_2$

$T(\underbrace{v_1 + v_2}_{\in S}) = w_1 + w_2$

S es SE $\Rightarrow \in S$ $\qquad \Downarrow\; w_1 + w_2 \in T(S)$

3) $\alpha \in K \quad T(v_1) = w_1$

$\alpha T(v_1) = \alpha w_1 \Rightarrow T(\underbrace{\alpha v_1}_{\in S}) = \alpha w_1 \Rightarrow \alpha w_1 \in T(S)$

- Para la $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \,/\, T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1 + x_2\\x_1 - x_2\\0\end{pmatrix}$ $\qquad$ EN ESTE CASO $S = V = \mathbb{R}^2$

$V = \mathbb{R}^2 = gen\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$

$\Rightarrow T(\mathbb{R}^2) = gen\left\{T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\} = Im(T)$

$\Rightarrow Im(T) = gen\left\{\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\right\} = Im(T) \subset \mathbb{R}^3$

Proposición

Sea $T : \mathbb{V}_K \to \mathbb{W}_K$ una transformación lineal. Entonces, si S es un subespacio de $\mathbb{V}_K$, se verifica que $T(S)$, la imagen del subespacio S a través de la transformación T, es un subespacio de $\mathbb{W}_K$.

$$T(S) = \{ w \in \mathbb{V}_K : T(v) = w \ , \ v \in S \}$$

Ej: $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \ / \ T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Dado $S = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow T(S) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in S \right\}$

$\Rightarrow T\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow T(S) = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ⊙ hoja anterior

$\alpha \in \mathbb{R}$

Propiedad: $T(S)$ es SE de $\mathbb{W}_K$ siendo S SE de $\mathbb{V}_K$ (PROBAR)

Propiedad (útil para la práctica): $S = \text{gen}\{v_1, v_2, \dots v_k\} \subset \mathbb{V}_K \Rightarrow$

$T(S) = \text{gen}\{T(v_1), T(v_2), \dots T(v_k)\}$

Obs: $S = \mathbb{V}_K \Rightarrow T(S) = \text{Im}(T)$

$T(S) = \{ w \in W_K : T(v) = w \ , \ v \in S \}$

Como $v \in S \Rightarrow v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i \Rightarrow T(v) = T\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i \right)$

$\Rightarrow T(v) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \underbrace{T(v_i)}_{\in W} \in T(S)$

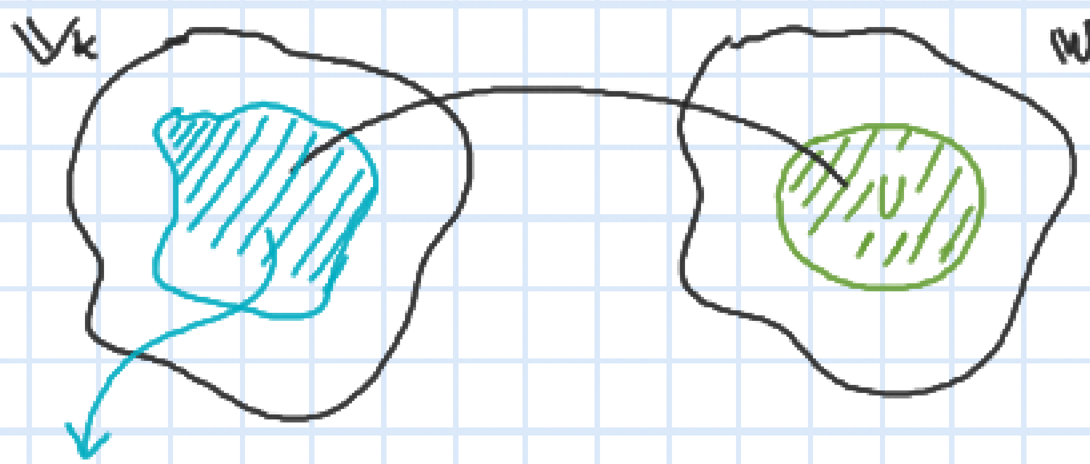
$\wedge \ \alpha_i T(v_i) \in W \ \forall i = 1, \dots k$

Preimagen de un subespacio de W_K

Definición: La *preimagen* de un subconjunto de W_K a través de una transformación lineal $T : \mathbb{V}_K \to \mathbb{W}_K$ consta de todos los vectores de $\mathbb{V}_K$ que se transforman en vectores de U a través de la transformación lineal T, y se denota $T^{-1}(U)$ (no confundir con inversa, que, de hecho, podría no existir). ⊙ → ejemplo en la última hoja

La preimagen de un subespacio

Proposición: Sea $T : \mathbb{V}_K \to \mathbb{W}_K$ una transformación lineal. Entonces, si U es un subespacio de $\mathbb{W}_K$, se verifica que $T^{-1}(U)$, la preimagen del subespacio U a través de la transformación T, es un subespacio de $\mathbb{V}_K$.



$T^{-1}(U) = \{ v \in \mathbb{V} : T(v) \in U \}$ definición de pre-imagen de U

Ej: $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 / T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \end{pmatrix}$ una TL.

Sea $U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ (conjunto) $\Rightarrow T^{-1}(U) = ?$

$T^{-1}(U) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

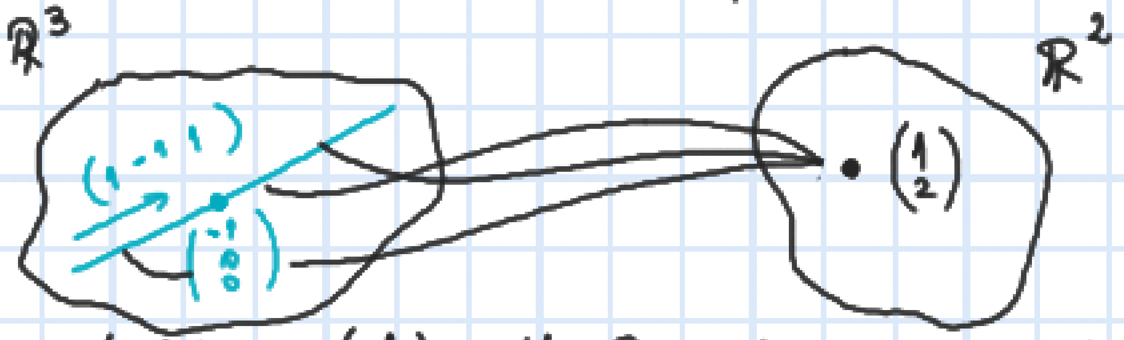
$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y = 1 \\ y+z = 2 \end{cases} \Rightarrow y = 2 - z$

$x = 1 - 2 + z = -1 + z$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}: T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+z\\-z\\z\end{pmatrix} \quad z\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow T^{-1}\left(\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}\right)=\left\{\begin{pmatrix}-1+z\\-z\\z\end{pmatrix}, z\in\mathbb{R}\right\}\subset\mathbb{R}^3$$

Obs: $T^{-1}\left(\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}\right)$ No es SE. de $\mathbb{R}^3$ porque pe $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\notin T^{-1}\left(\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}\right)$



(*) $\begin{pmatrix}-1+z\\-z\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \quad \forall z\in\mathbb{R}$ (Ec de una recta)

Si en cambio $U=gen\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$ (SE de $\mathbb{R}^2$)

$$T^{-1}(U)=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 : T\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in U\right\}$$

para el SE $U=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 : x_2=2x_1\right\}$

pedir que $T\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b\\b+c\end{pmatrix}\in U \iff b+c=2(a+b)$
$\Rightarrow 0=2a+b-c$

$$\Rightarrow c=2a+b \Rightarrow \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\2a+b\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \quad a,b\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow T^{-1}\left(gen\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}\right)=gen\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Prop: $T: \mathbb{V}_k\to\mathbb{W}_k$ una TL, U SE de $\mathbb{W}_k$ $\Rightarrow$ $T^{-1}(U)$ es SE de $\mathbb{V}_k$

$$T^{-1}(U)=\{v\in\mathbb{V}_k : T(v)\in U\}$$

1) $0_V\in T^{-1}(U)$ porque $\underbrace{T(0_V)=0_W}_{\text{por ser TL}}\in U$ (U SE de $\mathbb{W}$)

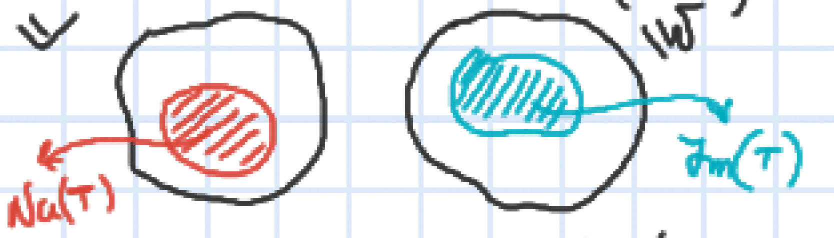
2) $v_1,v_2\in T^{-1}(U)\Rightarrow v_1+v_2\in T^{-1}(U)$

Como $v_1\in T^{-1}(U)\Rightarrow T(v_1)\in U$ y Como U es SE de $\mathbb{W}$
$v_2\in T^{-1}(U)\Rightarrow T(v_2)\in U$

$\Rightarrow T(v_1)+T(v_2)\in U \underset{T\text{ es TL}}{\Rightarrow} T(v_1+v_2)\in U \underset{\text{por def.}}{\Rightarrow} v_1+v_2\in T^{-1}(U)$

3) $\alpha\in K,\ v_1\in T^{-1}(U)\Rightarrow \alpha v_1\in T^{-1}(U)$
$v_1\in T^{-1}(U)\Rightarrow T(v_1)\in U\Rightarrow \alpha T(v_1)\in U$
$\Rightarrow T(\alpha v_1)\in U\Rightarrow \alpha v_1\in T^{-1}(U)$

COROLARIO: Si $U=\{0_W\}\Rightarrow T^{-1}(U)=\{v\in\mathbb{V} : T(v)=0_W\}$
$\underset{\text{definición}}{=} Nu(T)$



Ej: $T: \mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}^2 \,/\, T(a+bx+cx^2)=\begin{pmatrix}a+2b\\b-c\end{pmatrix}$ T.L

$Nu(T)=\left\{a+bx+cx^2\in\mathbb{R}_2[x] : T(a+bx+cx^2)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$ SE de $\mathbb{R}_2[x]$

$T(a+bx+cx^2)=\begin{pmatrix}a+2b\\b-c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a+2b=0\\b-c=0\end{cases}$ $\longrightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+2b=0 \\ b=c \end{cases} \quad a=-2b=-2c$$

$$\therefore \quad \underbrace{a+bx+cx^2 = (-2c)+c\cdot x + c\cdot x^2}_{\in Nu(T)} = c(-2+x+x^2)$$

$$\therefore \quad Nu(T) = \text{gen}\{-2+x+x^2\} \ \wedge \ \{-2+x+x^2\} \text{ es li } \quad (\neq 0_{\mathbb{R}_2[x]})$$

$$\Rightarrow \quad \text{Base}(Nu\,T) = \{-2+x+x^2\} \ \wedge \ \dim Nu(T) = 1$$

Obs:

$$\{-2+x+x^2\} \subset Nu(T)$$

$$¿\{-4+2x+2x^2\} \subset Nu(T)? \text{ sí}$$

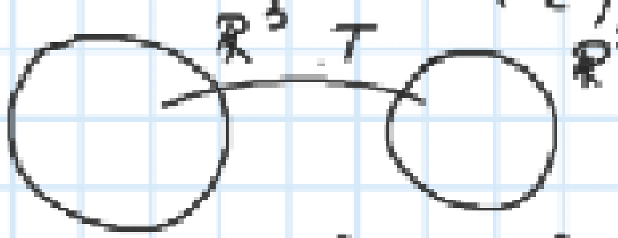
$$\{-2+x+x^2\} \neq \{-4+2x+x^2\}$$

$$Nu(T) = \{-2+x+x^2\} \longrightarrow \text{No}$$

$$Nu(T) = \text{gen}\{-2+x+x^2\} = \text{gen}\{-4+2x+x^2\}$$

$$= \text{gen}\{-2\sqrt{2}+\sqrt{2}x+\sqrt{2}x^2\}$$

Sea $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \,/\, T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ 0 \end{pmatrix}$ TL



Sea $U = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}^2 \Rightarrow T^{-1}(U) = ?$

$$T^{-1}(U) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,/\, T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underset{\text{Absurdo}}{0 = 1}$$

$$\therefore \quad T^{-1}(U) = \emptyset$$

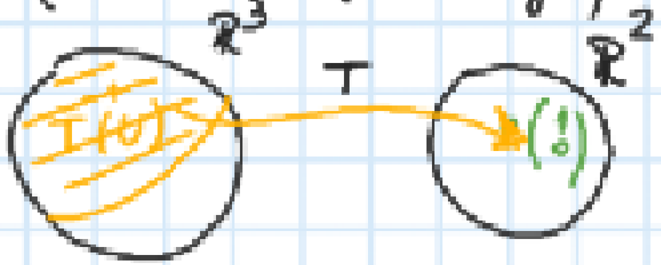
Ahora bien si $U = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \Rightarrow$

$$T^{-1}(U) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\Rightarrow T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to x+y+z=1$$

$$\Rightarrow z = 1-x-y$$

$$T^{-1}(U) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1-x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ x,y \in \mathbb{R}\right\}$$



Obs: U es un conjunto $\Rightarrow T^{-1}(U)$ puede ser $\emptyset$ y $T^{-1}(U) \neq \emptyset$

no es SE