1.19 Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz tal que $\mathrm{col}(A) = \mathrm{gen}\left\{\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}1 & -1 & 2\end{bmatrix}^T\right\}$ y $\mathrm{nul}(A) = \mathrm{gen}\left\{\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\end{bmatrix}^T\right\}$, y sea $b = \begin{bmatrix}1 & -7 & 0\end{bmatrix}^T$. $(C_1\ C_2\ C_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = x_1C_1 + x_2C_2 + x_3C_3$

(a) Explicar por qué el sistema lineal $Ax = b$ es compatible.

(b) Explicar por qué el sistema lineal $Ax = b$ no puede tener una única solución.

---

a) Ax es una comb. de las columnas de $A \Rightarrow Ax \in Col(A)$

$b = \begin{pmatrix}1\\-7\\0\end{pmatrix} \overset{?}{=} \alpha\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ ¿$b \in Col(A)$?

$$\begin{cases}\alpha + \beta = 1\\ 2\alpha - \beta = -7\\ 3\alpha + 2\beta = 0\end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & -7\\ 3 & 2 & 0\end{array}\right) \begin{array}{l}\\ F_2 - 2F_1\\ F_3 - 3F_1\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 1\\ 0 & -3 & -9\\ \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{-3}\end{array}\right) \quad F_3 = \tfrac{1}{3}F_2$$

SC. Determ. $\beta = 3$ $\alpha = -2$ ¡SI!

$\Rightarrow$ $Ax = b$ es un sistema compatible

b) Supongamos que x_1 es una solución de

$Ax = b \Rightarrow Ax_1 = b$ $\in Nul(A)$

Sea ahora $x_2 = x_1 + a\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$ Con $a \neq 0$ $x_2 \neq x_1$

$Ax_2 = A\left(x_1 + a\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\right) = Ax_1 + a\underline{A\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}} = b + \underline{0}$ $\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} \in Nul(A)$

$\Rightarrow$ la solución del sistema no es única

OBS: con los datos del problema no podemos obtener x.

1.20 Hallar una base de cada uno de los cuatro subespacios fundamentales de la matriz

$$A = \begin{bmatrix}1 & i\\ i & -1\end{bmatrix}.$$

Sea $b = \begin{bmatrix}2-3i\\ 3+2i\end{bmatrix}$, ¿existe $x \in \mathbb{C}^2$ tal que $Ax = b$? Si la respuesta es afirmativa, hallar todas las soluciones del sistema $Ax = b$.

$Col(A) = gen\left\{\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i\\-1\end{pmatrix}\right\} \subseteq \mathbb{C}^2$

Si consideramos $K = \mathbb{R}$ $\left\{\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i\\-1\end{pmatrix}\right\}$ LI

Si consideramos $K = \mathbb{C}$ $\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix} = -i\begin{pmatrix}i\\-1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \left\{\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i\\-1\end{pmatrix}\right\}$ LD

$\Rightarrow$ Base $Col(A)$ considerando $K = \mathbb{R}$ $\left\{\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i\\-1\end{pmatrix}\right\}$

considerando $K = \mathbb{C}$ $\left\{\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}\right\}$

Como $A = A^T \Rightarrow Fil(A) = Col(A)$

$Ax = b$ $\begin{pmatrix}1 & i\\ i & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-3i\\3+2i\end{pmatrix}$

$$\begin{cases}x_1 + ix_2 = 2-3i & E_1\\ ix_1 - x_2 = 3+2i & E_2\end{cases}$$

$$v \in \mathbb{C}^2$$

$$\begin{pmatrix} a+bi \\ c+di \end{pmatrix} = (a+bi)\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} + (c+di)\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ $\dim \mathbb{C}^2 = 2$

$$\begin{pmatrix} a+bi \\ c+di \end{pmatrix} = a\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} + b\underline{\begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}} + c\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} + d\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}}$$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $\dim \mathbb{C}^2 = 4.$

$$\left\{\begin{array}{ll} x_1 + i x_2 = 2 - 3i & E_1 \\ i x_1 - x_2 = 3 + 2i & E_2 \end{array}\right.$$

$$i E_1 \rightarrow E_2$$

$$\Rightarrow \quad x_1 + i x_2 = 2 - 3i \qquad x_1 = 2 - 3i - i x_2$$

$$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 2-3i-ix_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-3i \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in \mathrm{Nul}(A)} \qquad \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$x_2 \in \mathbb{C}$

1.21 Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 5}$ la matriz definida por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & 10 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Hallar una base de cada uno de los cuatro subespacios fundamentales de la matriz A.

(b) Sea $b = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 5 & 7 \end{bmatrix}^T$, ¿existe $x \in \mathbb{R}^5$ tal que $Ax = b$? Si la respuesta es afirmativa, hallar todas las soluciones del sistema $Ax = b$.

(c) Para $b = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 5 & 7 \end{bmatrix}^T$, ¿existe $x \in \mathrm{fil}(A)$ tal que $Ax = b$? Si la respuesta es afirmativa, hallar todas las soluciones del sistema $Ax = b$ pertenecientes a $\mathrm{fil}(A)$.

a) El sistema de ecuaciones $\quad Ax = 0 \qquad x \in \mathrm{Nul}(A)$

$$\left\{\begin{array}{l} 1x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 4x_4 + 0x_5 = 0 \\ 1x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 1x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 10x_4 + 0x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 8x_4 + 1x_5 = 0 \end{array}\right.$$

La solución general: $X = \begin{pmatrix} 10x_3 - 8x_4 \\ -5x_3 + 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \\ 0 \end{pmatrix}$

El sistema fundamental de soluciones: $\{x_3 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1} + x_4 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_2}\}$

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Nul}(A)} = \{v_1, v_2\} \subset \mathbb{R}^5$$

$$\underbrace{\dim \mathrm{Nul}(A)}_{2} + \underbrace{\dim \mathrm{Col}(A)}_{3} = 5$$

$$\rho(A) + \dim \mathrm{Nul}(A) = \#\text{ de columnas de } A$$

$$\rho(A) + 2 = 5 \Rightarrow \rho(A) = \dim \mathrm{Col}(A) = \dim \mathrm{Fil}(A) = 3$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & 10 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 8 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\mathrm{Col}(A) \subset \mathbb{R}^4$$

$$\mathrm{Col}(A) = \mathrm{gen}\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 4 & 2 & 10 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ F_2 - 2F_1 \\ \\ F_4 - 4F_1 \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{5} & \cancel{-5} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{-2} & \cancel{2} & \cancel{0} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ 5F_2 \\ -2F_2 \\ F_5 - F_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{B}_{\mathrm{Col}(A)} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\mathrm{Fil}(A) \subset \mathbb{R}^5$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & 10 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 8 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 2F_1 \\ F_4 - 2F_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad F_3 + F_2 = F_4$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{B}_{\mathrm{Fil}(A)} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

b) $Ax = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

El sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l} 1x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 4x_4 + 0x_5 = 3 \\ 1x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 1x_5 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 10x_4 + 0x_5 = 5 \\ 2x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 8x_4 + 1x_5 = 7 \end{array}\right.$$

La solución general: $X = \begin{pmatrix} 1 + 10x_3 - 8x_4 \\ 1 - 5x_3 + 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{particular}} + x_3 \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$x_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$Ax = b$ $\quad A \in \mathbb{K}^{m \times n}$

Compatible? $\begin{cases} \text{si} & b \in Col(A) \; (*) \\ \text{no} & b \notin Col(A) \quad \text{FIN Incomp.} \end{cases}$

(*) Determinado la solución es única $\Rightarrow$ las columnas de A tienen que formar un cj LI

n columnas $\{C_1 \dots C_n\}$ es LI $\Rightarrow$ dim $Col(A) = n$

$\Rightarrow$ dim $Nul(A) = 0$ $\Rightarrow$ $Nul(A) = \{0\}$.

(*) Indeterminado $\{C_1, C_2 \dots C_n\}$ LD $\Rightarrow$

dim $Nul(A) > 0$

Supongamos $v \in \text{Nul}(A)$ $\quad v \neq 0$
(dim Nul$(A) > 0$)

$A v = 0 \qquad A \alpha v = 0$
(Considerando Nul(A) = gen$\{v\}$)

$\alpha \in \mathbb{K}$

$\Rightarrow$ Si tengo una solución part. x_1 y otra x_2

$$A x_1 = A x_2 = b \Rightarrow$$

$$A(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 \in \text{Nul}(A)$$

$$x_1 - x_2 = \alpha v \Rightarrow x_1 = x_2 + \alpha v$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

particular $\quad v_1 \quad v_2$

$\mathrm{Nul}(A) = \mathrm{gen}\{v_1, v_2\}$.

$$v_1 + v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_1 - v_2 = \begin{pmatrix} 18 \\ -7 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{gen}\{\underbrace{v_1 + v_2}_{u_1} ; \underbrace{v_1 - v_2}_{u_2}\} = \mathrm{Nul}(A)$$

Solución $\quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha u_1 + \beta u_2$

La solución general: $X = \begin{pmatrix} 1 + 10x_3 - 8x_4 \\ 1 - 5x_3 + 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathcal{B}_{Fil(A)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Si $X \in Fil(A)$

$$\Rightarrow X = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\alpha = 1 + 10x_3 - 8x_4$ (1)

$2\alpha + \beta = 1 - 5x_3 + 2x_4$ (3)

$5\beta = x_3$ • $\beta = x_3/5$ (2)

$4\alpha - 2\beta = x_4$ (4)

$\gamma = 1$

(1) y (2) en (3) $\quad 2 + 20x_3 - 16x_4 + x_3/5 = 1 - 5x_3 + 2x_4$

- $\frac{126}{5} x_3 - 18x_4 = -1$

(1) y (2) en (4) $\quad 4 + 40x_3 - 32x_4 - 2/5\, x_3 = x_4$

- $\frac{198}{5} x_3 - 33x_4 = -4$

$\begin{pmatrix} \frac{65}{198} \\ \frac{17}{33} \end{pmatrix}$ $\longrightarrow x_3$, $\longrightarrow x_4$

$$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 46/99 \\ 7/18 \\ 65/198 \\ 17/33 \\ 1 \end{pmatrix} \in Fil(A)$$

De todas las soluciones particulares encontramos la que pertenece a $Fil(A)$

1.22 Lucas y Monk resolvieron el sistema lineal $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Lucas encontró la solución

$$S_L = \underbrace{[1\ 0\ 0\ 1]^T}_{x_1} + \text{gen}\underbrace{\{\overbrace{[1\ 0\ 0\ -1]^T}^{v_1}, \overbrace{[0\ 1\ 1\ -2]^T}^{v_2}\}}_{LI},$$

y Monk la solución

$$S_M = \underbrace{[0\ 1\ 1\ 0]^T}_{x_2} + \text{gen}\underbrace{\{\overbrace{[2\ -1\ -1\ 0]^T}^{u_1}, \overbrace{[-3\ 1\ 1\ 1]^T}^{u_2}\}}_{LI}.$$

¿Alguno de los dos encontró la solución correcta?

$Av_1 = 0$

$Av_2 = 0$

$\Rightarrow \text{gen}\{v_1, v_2\} \subset Nul(A)$

$\rho(A) = 2 \quad$ #columnas $= 4$

$\rho(A) + \dim Nul(A) = 4$

$2 + 2 = 4$

$v_1 = -u_1 - u_2 \qquad v_2 = -3u_1 - 2u_2$

$\Rightarrow \text{gen}\{v_1, v_2\} = \text{gen}\{u_1, u_2\} \overset{?}{=} Nul(A) \quad \Rightarrow \text{gen}\{v_1, v_2\} = Nul(A)$

$Ax_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad Ax_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1$ y x_2 son soluciones de $Ax = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ambos están en lo correcto

1.23 Sean $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y $B \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ dos matrices tales que:

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

donde rango$(B) = 2$. Hallar una base de nul(B).

Si $\underbrace{x}_{\in \mathbb{R}^4} \in Nul(B) \Rightarrow Bx = 0_{\mathbb{R}^3}$

$\Rightarrow ABx = A0_{\mathbb{R}^3} = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow$

$x \in Nul(AB)$

$\Rightarrow Nul(B) \subseteq Nul(AB)$ siempre

#columnas de $B = 4 \quad \rho(B) = 2 \Rightarrow$

$\dim(Nul(B)) = 2$

$\dim Nul(AB) = 2$

$\Rightarrow Nul(AB) = Nul(B)$

$ABx = 0 \Rightarrow$

El sistema de ecuaciones

La solución general: $X =$

$$\Rightarrow Nul(B) = \underbrace{\text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}_{\text{Base}}$$

AB si $x \in \text{Nul}(B) \Rightarrow ABx = A0 = 0 \Rightarrow$

$x \in \text{Nul}(AB) \Rightarrow \text{Nul}(B) \subseteq \text{Nul}(AB)$

$x \notin \text{Nul}(B)$ $Bx = y$ $A\underbrace{Bx}_{\neq 0} = Ay$

puede pasar que $Bx \in \text{Nul}(A) \Rightarrow x \in \text{Nul}(AB)$

$S_1 \subseteq S_2$ $\wedge$ $\dim S_1 = \dim S_2$

$\Rightarrow S_1 = S_2$

$$AB = \underbrace{\begin{pmatrix} | & | & | \\ C_1 & C_2 & C_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}}_{3\times 3} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{31} & \cdot & \cdot & a_{44} \end{pmatrix}}_{3\times 4} = \begin{pmatrix} \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{pmatrix}$$

$\in Col(A)$

$$A \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = \underbrace{a_{11} C_1 + a_{21} C_2 + a_{31} C_3}_{\in Col(A)}$$

Cada columna de $A \cdot B$ es una CL de las columnas de A

primer columna de AB

$$\begin{array}{cc} C_1 & C_2 \end{array}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 C_1 + 0 C_2 & \cdots \end{pmatrix}$$

$\in Col(A)$ $\quad$ $\in Col(A)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{3\times 3}{A}\ \underset{3\times 4}{B} = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ AC_1(B) & AC_2(B) & AC_3(B) & AC_4(B) \\ | & | & | & | \end{pmatrix}$$

3×4

$\in Col(A)$

Si $x \in Col(AB) \Rightarrow x \in Col(A)$

$\in \mathbb{R}^3$

$Col(AB) \subset Col(A)$

Si $y \in Nul(B) \Rightarrow By = 0 \Rightarrow ABy = A0 = 0$

$y \in \mathbb{R}^4$

$\Rightarrow y \in Nul(AB)$

$\Rightarrow Nul(B) \subset Nul(AB)$

1.24 Sean $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y $B \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ dos matrices tales que

$A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ y rango$(A) = m$
$Ax = b$ es un SC Det.
$x = A^{-1}b \Rightarrow \exists A^{-1}$

$ABx = 0$
$A^{-1}ABx = A^{-1}0 = 0$
$Bx = 0$

$$AB = \begin{bmatrix} 10 & -10 & -5 & 5 \\ 11 & -11 & -4 & 7 \\ 11 & -11 & -5 & 6 \end{bmatrix},$$

donde rango$(A) = 3$, y B satisface que

$$\underbrace{B\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T}_{C_1(B)+C_2(B)+C_3(B)+C_4(B)} = \begin{bmatrix}0 & 3 & 1\end{bmatrix}^T \in Col(B), \quad \underbrace{B\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}^T}_{C_1(B)+C_3(B)} = \begin{bmatrix}5 & 7 & 6\end{bmatrix}^T \in Col(B).$$

Hallar todas las soluciones del sistema $Bx = \begin{bmatrix}5 & 1 & 4\end{bmatrix}^T$.

Siempre $Nul(B) \subseteq Nul(AB)$

Como $\rho(A) = 3 \Rightarrow Nul(A) = \{0_{\mathbb{R}^3}\} \rightarrow$ En este ejercicio $Nul(AB) \subseteq Nul(B)$

$Nul(AB) = Nul(B)$

$A(Bx) = 0 \Rightarrow Bx = 0$

El sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 10x_1 + -10x_2 + -5x_3 + 5x_4 = 0 \\ 11x_1 + -11x_2 + -4x_3 + 7x_4 = 0 \\ 11x_1 + -11x_2 + -5x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

El sistema fundamental de soluciones: $\{x_2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}}_{v_1} + x_4 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}}_{v_2}\}$

$\Rightarrow \dim Nul(B) = 2$ # columnas de B $= 4$

$\Rightarrow \rho(B) = 2 \Rightarrow Col(B) = gen\left\{\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\7\\6\end{pmatrix}\right\}$

$$\begin{pmatrix}5\\1\\4\end{pmatrix} = \underset{-2}{\alpha}\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix} + \underset{1}{\beta}\begin{pmatrix}5\\7\\6\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}5\\1\\4\end{pmatrix} \in Col(B)$$

$B\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}0 & 3 & 1\end{bmatrix}^T, \quad B\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}5 & 7 & 6\end{bmatrix}^T.$

$$\Rightarrow B\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\\-2\end{pmatrix} + B\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-6\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\7\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\1\\4\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x_p = \begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\\-2\end{pmatrix}$ es una solución

$\Rightarrow x = x_p + \underbrace{a\,v_1 + b\,v_2}_{\in Nul(B)}$

$-2B\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-6\\-2\end{pmatrix}$

$\underset{2\times 3}{A}\ \underset{3\times 5}{B}$

$\mathrm{null}(A) \subseteq \mathbb{R}^3 \quad \mathrm{null}(AB) \subseteq \mathbb{R}^5$

$\mathrm{null}(B) \subseteq \mathbb{R}^5$

Coordenadas de un vector en una base

V finitamente generado $\quad \dim V = n$

$\mathbb{K}$-espacio vectorial . Sea $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ base de V

$\exists$ para cada vector v del V una CL :

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \qquad \alpha_i \in \mathbb{K}$$

Defino ahora $[v]^B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$

coordenadas de v en base B

$[\ ]^B : V \longrightarrow \mathbb{K}^n \qquad n = \dim V$

$V = \mathbb{R}_3[x] \quad \dim V = 4$

Base $V = \{1,\ 1+x;\ 1+x^2;\ x^3\} = B$

$p(x) = 2 + 6x - 7x^2 + x^3 = \alpha_1\ 1 + \alpha_2 (1+x)\ \alpha_3 (1+x^2) + \alpha_4 x^3$

$$\begin{cases} 2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ 6 = \alpha_2 \\ -7 = \alpha_3 \\ 1 = \alpha_4 \end{cases} \qquad \begin{aligned} 2 &= \alpha_1 + 6 - 7 \\ \alpha_1 &= 3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow [p(x)]^B = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

$q \in V \quad q(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 =$

$= \underbrace{\alpha_1}_{a_1}\ 1 + \underbrace{\alpha_2}_{a_2} (1+x) + \underbrace{\alpha_3}_{a_3} (1+x^2) + \alpha_4 x^3$

$a_0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$

$\alpha_1 = a_0 - a_1 - a_2$

$$[\overbrace{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3}^{\text{vector}}]^B = \begin{pmatrix} a_0 - a_1 - a_2 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

OJO ¡No confundir vector que en este caso es un polinomio con un vector de $\mathbb{R}^4$!

Observación $\mathbb{R}^n \qquad B = E \qquad \mathbb{K} = \mathbb{R}$

$[v]^E = v \qquad$ Sólo en este caso

$\mathbb{C}^n \quad \mathbb{K} = \mathbb{C}$ y $B = E$ canónica

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right]^E = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}_2[x] \qquad \mathbb{K} = \mathbb{R} \qquad E = \{1; x; x^2\}$

$$[\underbrace{a_0 + a_1 x + a_2 x^2}_{p(x) \in \mathbb{R}_2[x]}]^E = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

1.25 Sean $\mathbb{B} = \left\{ \overset{v_1}{\begin{bmatrix}2i\\1\\0\end{bmatrix}}, \overset{v_2}{\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}}, \overset{v_3}{\begin{bmatrix}0\\1+i\\1-i\end{bmatrix}} \right\}$ y $v = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$. Comprobar que $\mathbb{B}$ es una base de $\mathbb{C}^3$ y determinar el vector de coordenadas de v respecto de la base $\mathbb{B}$.

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Si un conjunto de tres vectores en $\mathbb{C}^3$ es base el cuerpo debe ser $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ una base para $\mathbb{C}^3$ necesita 6 vectores

Como $\dim(\mathbb{C}^3; +; \mathbb{C}; \cdot) = 3 \Rightarrow$ 3 vectores LI es una base

$$\frac{1}{i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{i}{(-1)}$$

$$\alpha \begin{pmatrix}2i\\1\\0\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix}0\\1+i\\1-i\end{pmatrix} = 0$$

$$\alpha 2i + 2\beta = 0 \qquad \alpha = -\frac{\cancel{2}\beta}{\cancel{2}i} = i\beta = -\frac{\beta}{i}\cdot\frac{i}{i} \quad (-1)$$

$$\overset{\alpha}{i\beta} - \beta + \gamma(1+i) = 0 \qquad \beta = \frac{\gamma(1+i)}{1-i}\cdot\frac{(1+i)}{(1+i)} =$$

$$\beta = \frac{\gamma 2i}{2} = i\gamma$$

En la última ecuación $\beta + (1-i)\gamma = 0$

$i\gamma + (1-i)\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 0 = \beta = \alpha$

$\Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\}$ es LI y base de $(\mathbb{C}^3; +; \mathbb{C}; \cdot)$

Un vector genérico de $\mathbb{C}^3$

$$\begin{pmatrix}a+bi\\c+di\\e+fi\end{pmatrix} = \underbrace{(a+bi)}_{\in\mathbb{C}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \underbrace{(c+di)}_{\in\mathbb{C}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \underbrace{(e+fi)}_{\in\mathbb{C}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Si el cuerpo es real

$$\begin{pmatrix}a+bi\\c+di\\e+fi\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}i\\0\\0\end{pmatrix} + \cdots\cdots$$

Si el cuerpo es $\mathbb{R}$ forman un cj. LI

$$\text{Base } (\mathbb{C}^3; +; \mathbb{R}; \cdot) = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\i\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\i\end{pmatrix}\right\}$$

$$v = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 \qquad [v]^B = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$$

$$2i\alpha + 2\beta = x$$
$$\alpha - \beta + (1+i)\gamma = y$$
$$\beta + (1-i)\gamma = z$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2i & 2 & 0 & x \\ 1 & -1 & (1+i) & y \\ 0 & 1 & (1-i) & z \end{array}\right) \quad 2iF_2 - F_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2i & 2 & 0 & x \\ 0 & -2i-2 & -2+2i & 2iy-x \\ 0 & 1 & (1-i) & z \end{array}\right)$$

$F_3(2+2i) + F_2$

terminar...

Raíces 0 1 2

1.26 Sean $p_1(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-2)$, $p_2(x) = -x(x-2)$ y $p_3(x) = \frac{1}{2}x(x-1)$.

(a) Verificar que $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[x]$. dim $\mathbb{R}_2[x] = 3 \Rightarrow$ si $\mathcal{B}$ es un cj LI $\Rightarrow$ es base

(b) Observar que para cualquier polinomio $p \in \mathbb{R}_2[x]$ el vector de coordenadas de p respecto de la base $\mathcal{B}$ es

$$[p]^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{bmatrix}.$$

(c) Hallar el vector de coordenadas de $p(x) = x^2 - x + 1$ en la base $\mathcal{B}$.

p_1 tiene como raíces a $x = 1$, $x = 2$ $\quad p_1(0) = 1$

p_2 " " " a $x = 0$, $x = 2$ $\quad p_2(1) = 1$

p_3 " " " a $x = 0$, $x = 1$ $\quad p_3(2) = 1$

$$\alpha\, p_1(x) + \beta\, p_2(x) + \gamma\, p_3(x) = 0_{\mathbb{R}_2[x]}$$

Si $x = 1 \rightarrow \beta \underbrace{p_2(1)}_{} = 0(1) = 0 \Rightarrow \beta = 0$

Si $x = 0 \quad \alpha \underbrace{p_1(0)}_{} \overset{1}{=} 0 \Rightarrow \alpha = 0$

Si $x = 2 \quad \gamma \underbrace{p_3(2)}_{1} = 0 \Rightarrow \gamma = 0$

$\Rightarrow \{p_1, p_2, p_3\}$ es LI

$A = \{f_1(x) ; f_2(x)\}$ Si f_1 y f_2 son C^1

1) $\left| \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{pmatrix} \right| = W(x)$ Si encuentro x_0 / $W(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ puedo asegurar que A es LI

2) $\alpha f_1(x) + \beta f_2(x) = 0(x)$ Tiene que valer $\forall x \in D_{f_i}$

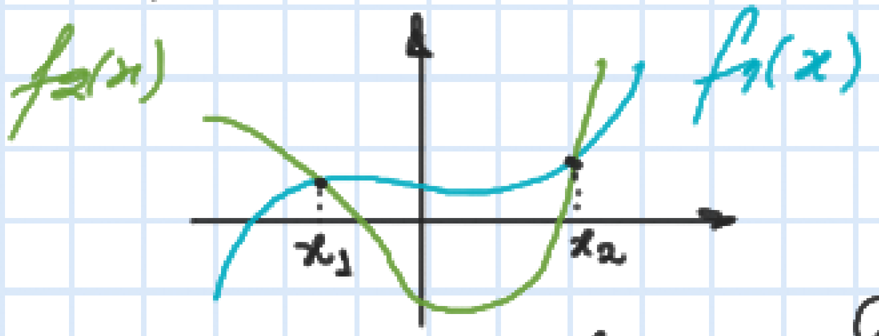
Tomo un par de valores x_1 y x_2

$f_1(x_1) = a \quad f_1(x_2) = b \quad f_2(x_1) = c \quad f_2(x_2) = d$

$0(x_1) = 0(x_2) = 0$

$\begin{cases} \alpha a + \beta c = 0 \\ \alpha b + \beta d = 0 \end{cases}$ Si $\left| \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \right| \neq 0 \Rightarrow \{f_1(x), f_2(x)\}$ es LI

Si el det. da cero no me sirve



$a = c$, $b = d$

y $\left| \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \right| = 0$ pero

entonces las funciones son LI

$$[p]^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{bmatrix}.$$

$$[p]^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 = \alpha p_1(x) + \beta p_2(x) + \gamma p_3(x)$$

$$p(0) = a_0 = \alpha p_1(0) + \beta \cancel{p_2(0)} + \gamma \cancel{p_3(0)}$$

$$p(1) = a_2 + a_1 + a_0 = \alpha \cancel{p_1(1)} + \beta p_2(1) + \gamma \cancel{p_3(1)}$$

$$p(2) = 4a_2 + 2a_1 + a_0 = \alpha \cancel{p_1(2)} + \beta \cancel{p_2(2)} + \gamma p_3(2)$$

(c) Hallar el vector de coordenadas de $p(x) = x^2 - x + 1$ en la base $\mathcal{B}$.

$$[\underbrace{x^2 - x + 1}_{p(x)}]^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ej. $\mathbb{R}_2[x]$

$$\mathcal{B} = \{ \underbrace{-1(x+1)(x-1)}_{p_1}, \underbrace{\tfrac{1}{2}x(x-1)}_{p_2}, \underbrace{\tfrac{1}{2}x(x+1)}_{p_3} \}$$

Raíces

$0 \quad -1 \quad 1$

$p_1(0) = 1 \qquad p_2(0) = p_3(0) = 0$

$p_1(-1) = 0 \qquad p_2(-1) = 1 \qquad p_3(-1) = 0$

$p_1(1) = 0 \qquad p_2(1) = 0 \qquad p_3(1) = 1$

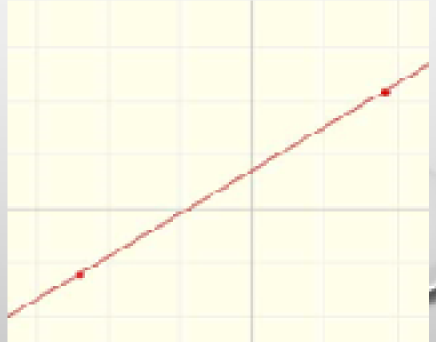
$$[\underbrace{5x^2 - 3x + 2}_{p(x)}]^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(-1) \\ p(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}$$

POLINOMIOS DE LAGRANGE

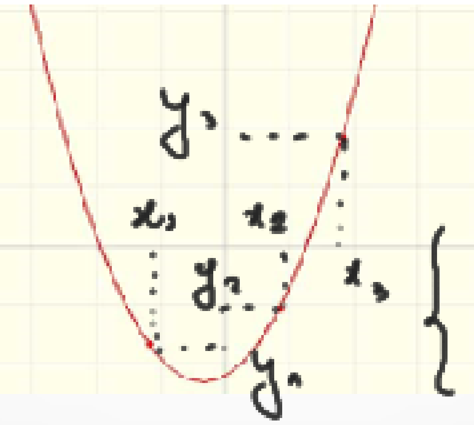
El objetivo es familiarizarnos con funciones polinómicas y relacionarlas con una de las técnicas de interpolación que llamamos polinomios de Lagrange.

Imaginemos un conjunto de puntos distintos del plano. Estos puntos tienen que tener diferente coordenada x, pues queremos hablar de funciones.

Dos puntos determinan una recta (y como función polinómica se trata de un polinomio de grado 1 o quizás 0 si la recta es horizontal y entonces la función es contante)



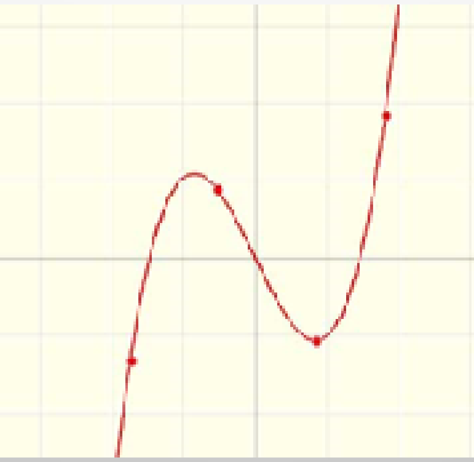
Tres puntos que no están alineados determinan una parábola (polinomio de grado 2).



$$ax^2 + bx + c = p(x)$$

$$\begin{cases} a x_1^2 + b x_1 + c = y_1 \\ a x_2^2 + b x_2 + c = y_2 \\ a x_3^2 + b x_3 + c = y_3 \end{cases}$$

Cuatro puntos en general determinan una función cúbica (polinomio de grado 3).



(x_1, y_1) $(x_2\ y_2)$ $\cdots$ (x_{n+1}, y_{n+1})

En general, $n+1$ puntos determinarán una función polinómica de grado n. Un modo de conseguir esto es usando los polinomios de interpolación de Lagrange.

$$p_i(x) = \prod_{k \neq i} \frac{x - x_k}{x_i - x_k} = \frac{x - x_1}{x_i - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_i - x_2} \cdots \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \cdot \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \cdots \frac{x - x_{n+1}}{x_i - x_{n+1}}$$

Polinomio de grado n $\qquad 1 \leq i, k \leq n+1$

Observemos que $p_i(x_i) = 1$ y $p_i(x_j) = 0 \quad (i \neq j)$

Entonces supongamos que queremos encontrar el polinomio de grado 1 que contiene a dos puntos: $(x_1, y_1); (x_2, y_2)$

Podemos escribir: $p(x) = p_1(x) y_1 + p_2(x) y_2$ contiene a ambos puntos.

$$p(x) = p_1(x) y_1 + p_2(x) y_2 + \cdots p_{n+1}(x)\, y_{n+1}$$

Veamos un ejemplo: $x_1 = 1$, $y_1 = 2$ $\qquad x_2 = 3$, $y_2 = 4$

Dados los puntos $(1, 2)$; $(3,4)$, los polinomios de Lagrange resultan:

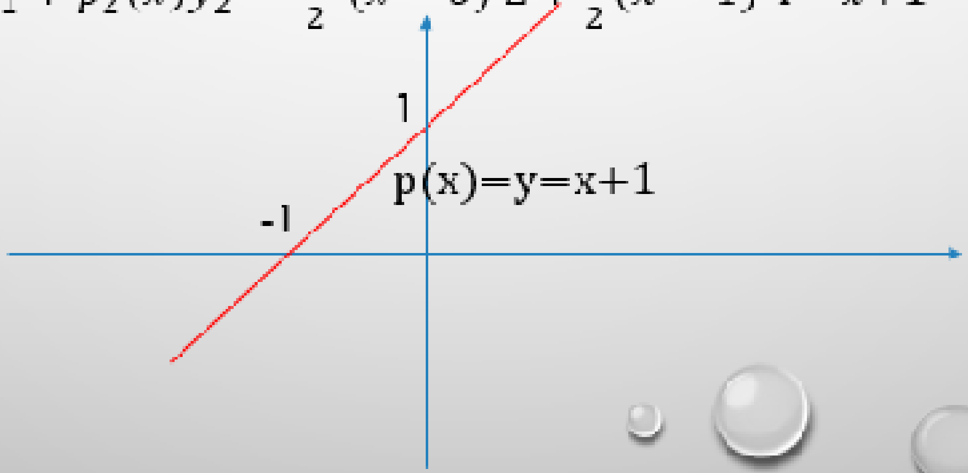
$$p_1(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{x-3}{1-3} = \frac{-1}{2}(x-3) \qquad p_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x-1}{3-1} = \frac{1}{2}(x-1)$$

Vemos que:

$p_1(x_1) = p_1(1) = 1$; $p_1(x_2) = p_1(3) = 0$

$p_2(x_1) = p_2(1) = 0$; $p_2(x_2) = p_2(3) = 1$

Así $p(x) = p_1(x) y_1 + p_2(x) y_2 = \frac{-1}{2}(x-3)\, 2 + \frac{1}{2}(x-1)\, 4 = x+1$



$\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3\}$

Si queremos encontrar el polinomio de grado 2 que contiene a tres puntos: $[p(x)]^{B} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

$(x_1, y_1); (x_2, y_2); (x_3, y_3)$

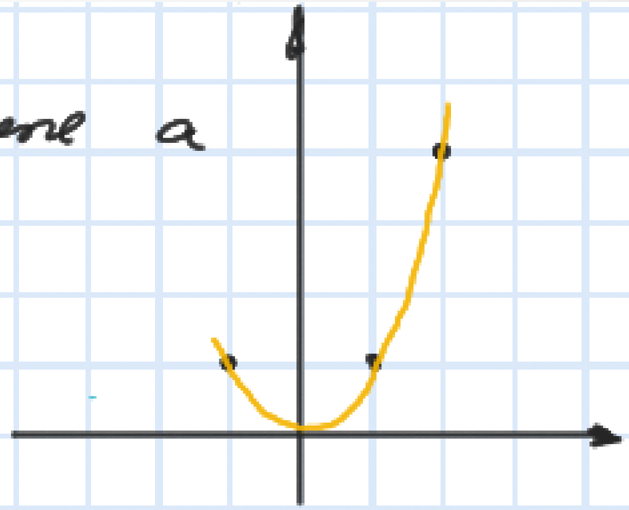
Resulta: $p(x) = p_1(x)y_1 + p_2(x)y_2 + p_3(x)y_3 = ax^2 + bx + c = p(x)$

$p(x_1) = p_1(x_1)\, y_1 \qquad y_2 = p(x_2) \qquad y_3 = p(x_3)$

Así podemos, en general, encontrar un polinomio de grado $n \;\; 1$ que contenga n puntos.

Con estos comentarios los invitamos a que intenten resolver el ejercicio 27 de la Práctica 1.

Encontrar la parábola que contiene a



$(-1, 1) \quad (1, 1) \quad (2, 4) \qquad f(x) = x^2$

$x_1 = -1 \qquad x_2 = 1 \qquad x_3 = 2$

$$p_1(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(-1-1)(-1-2)} = \frac{1}{6}(x-1)(x-2)$$

$$p_2(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{(1+1)(1-2)} = -\frac{1}{2}(x+1)(x-2)$$

$$p_3(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{(2+1)(2-1)} = \frac{1}{3}(x+1)(x-1)$$

$$p(x) = p_1(x) \cdot y_1 + p_2(x)\, y_2 + p_3(x)\, y_3 =$$
$$= p_1(x) + p_2(x) + 4\, p_3(x) =$$
$$= \frac{1}{6}(x^2 - 3x + 2) - \frac{1}{2}(x^2 - x - 2) + \frac{4}{3}(x^2 - 1) = x^2$$

- Coordenadas de un vector en una base

V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial $\qquad \dim V = n$

$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots v_n\}$ una base de V

$$\forall v \in V \quad v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \Rightarrow C_B(v) = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{K}^n} = [v]^B$$

$C_B : V \longrightarrow \mathbb{K}^n$

$V = \mathbb{R}^{2\times 2} \qquad \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \underset{1}{\alpha_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \underset{2}{\alpha_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \underset{3}{\alpha_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \underset{4}{\alpha_4} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_B(A) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$