

Práctica de Péndulo ideal y elástico

Objetivos (péndulo ideal).....	2
Pre - requisitos para realizar la práctica	2
Bibliografía recomendada en referencia la modelo teórico	2
Competencias a desarrollar por el alumno	2
Introducción teórica	2
Desarrollo de la práctica.....	4
Materiales.....	4
Procedimiento y recomendaciones en el desarrollo de la práctica	4
Análisis del modelo.....	5
Procedimiento con la longitud fija	6
Cálculo de g por regresión lineal	7
Anexo 1. Análisis de la dependencia del período con la amplitud, masa y longitud.....	8
Anexo 2. Aproximaciones en la aplicación del modelo de péndulo ideal	9
Objetivos (péndulo elástico)	11
Pre - requisitos para realizar la práctica	11
Competencias a desarrollar por el alumno	11
Introducción teórica	11
Desarrollo de la práctica (péndulo elástico)	11
Método estático	12
Método dinámico.....	13
Recomendaciones.....	13

- ✓ **Estudio de la dependencia del período del péndulo ideal con la amplitud, la longitud y la masa (Anexo 1).**
- ✓ **Determinación de la aceleración de la gravedad mediante un péndulo ideal, con un error máximo prefijado (2%).**

Pre-requisitos para realizar la práctica

- ✓ Movimiento armónico simple. Modelos del péndulo elástico e ideal.
- ✓ Expresión de una medida con sentido físico.
- ✓ Propagación de incertezas en mediciones indirectas.
- ✓ Estimación de cifras apropiadas de una constante.
- ✓ Mediciones comparables.

Bibliografía recomendada en referencia al modelo teórico

Bibliografía indicada en la página de la materia:

<http://www.fi.uba.ar/materias/6201/bibliografia.htm>

Se sugiere consultar:

Roederer J., Mecánica Elemental, Buenos Aires, EUDEBA, 2002.

Reese R., Física Universitaria. Tomo I, México, Thomson, 2002.

Competencias a desarrollar por el alumno

- ✓ Identificar y analizar las fuentes de incertezas que intervienen en el proceso de medición.
- ✓ Reconocer el límite de los modelos teóricos en su aplicación a situaciones experimentales.
- ✓ Capacitarse para establecer relaciones funcionales entre variables.
- ✓ Estimar, previamente al desarrollo experimental, las incertezas en las mediciones.

Introducción teórica

Recordamos que la ecuación que caracteriza a un movimiento armónico simple en una dimensión es:

$$(1) \quad a = \frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

Donde a es la aceleración de la partícula, x es su desplazamiento respecto del punto de equilibrio y ω es la frecuencia angular o pulsación cumpliéndose que:

$$(2) \quad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Donde f es la frecuencia y T el período del movimiento. Una solución de la ecuación diferencial (1) es:

$$(3) \quad x(t) = A_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$$

- ✓ ¿Cuáles son las variables en la ecuación y cuáles los parámetros?
- ✓ ¿Cuáles de los parámetros son característicos del sistema oscilante y cuáles dependen de un agente externo?
- ✓ Verificar que (3) es solución de la ecuación diferencial (1) e indicar otra solución posible.

Si aplicamos las leyes de Newton para un péndulo ideal (Fig. 1) obtenemos la siguiente ecuación diferencial:

$$(4) \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin(\theta)$$

Donde g es la aceleración de la gravedad y L la longitud del hilo.

- ✓ Hallar la ecuación diferencial (4). Especificar el sistema de coordenadas utilizado.

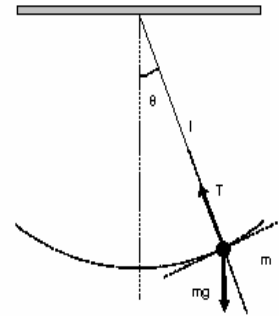


Figura 1

Esta ecuación no es del tipo (1). Esto significa que el movimiento de un péndulo, en general, no corresponde a un movimiento armónico simple. Aunque sí se puede demostrar que es periódico.

Si suponemos que $\theta \ll 1$ y empleando un desarrollo de Taylor, podemos hacer una aproximación de 1º orden, $\sin(\theta) \cong \theta$. La ecuación (4) se reescribe como:

$$(5) \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \theta$$

¿A qué tipo de movimiento corresponde? Escribir una solución $\theta(t)$

Si comparamos con la ecuación (1) y utilizamos (2) obtenemos:

$$(6) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Desarrollo de la práctica

Materiales a utilizar

Cinta métrica o regla
Calibre
Cronómetro manual
Transportador
Esfera
Hilo
Soporte

Procedimiento y recomendaciones en el desarrollo de la práctica

En la práctica profesional es muy común, al abordar problemas experimentales, la necesidad de medir magnitudes con un error prefijado.

¿Podemos esperar obtener un valor de g con un error menor al 2% con los elementos indicados en el apartado anterior? Si mediante algunos cálculos aproximados llegamos a la conclusión de que la respuesta es no, entonces nos ahorraremos el tiempo y el costo de realizar esa experiencia. Optaremos por pensar y diseñar un mecanismo que tenga alguna posibilidad de lograr una medición en donde el valor de g tenga el error buscado.

Despejando g de la ecuación (6) y propagando errores obtenemos:

$$(7) \quad \frac{\Delta g}{g_0} = \frac{\Delta L}{L_0} + 2 \frac{\Delta T}{T_0}$$

donde L_0 y T_0 son la longitud de hilo y el período de oscilación.

¿Qué identifican ΔL y ΔT ?
Obtener la expresión (7)

De acuerdo al error solicitado vamos a estimar las incertezas necesarias, para cada magnitud, con algunos supuestos. Por ejemplo, suponemos que la longitud del hilo puede seleccionarse de modo que su error relativo sea menor o igual a 0.01. Para ello si el error absoluto es de 0,01 m, necesitamos que la longitud del hilo sea al menos de 1,00 m.

El período del péndulo lo podemos estimar sabiendo que si $L \approx 1,00 \text{ m}$ y el valor de $g \approx 10 \text{ m/s}^2$ entonces el $T \approx 2,0 \text{ s}$. ¿Por qué?

¿Qué valor asignar a la incerteza en la medición de un intervalo de tiempo? Cuando se emplea un cronómetro de mano se debe tener en cuenta el tiempo de reacción del observador. El valor estimado es de 0,2 a 0,3 s (dependiendo de la persona que mide). Para hacer los cálculos asignaremos el valor 0,2 s.

Por lo tanto $\Delta T/T \approx 0,1$ es 20 veces mayor al necesario para cumplir con la incerteza requerida.

¿Cómo reducimos el error del tiempo? Una opción sería comprando un sensor que mejore la incerteza debida a la reacción del operador, de modo de reducir el error de 0,2 s.

Otra manera es emplear una **forma de medir** el período que reduzca dicho error.

▪ Reducción del error de medición del período

Si quisiéramos determinar el diámetro de un alambre, en vez de medirlo directamente con un calibre, se podría enrollarlo en una varilla, medir las “n” vueltas y luego dividir por “n”. Del mismo modo, podemos reducir el error de medición del tiempo con el cronómetro de mano mediante la medición del intervalo de tiempo de “n” períodos y luego dividir por “n”. Con lo que el período se puede obtener como:

$$(9) \quad T = t/n$$

donde t es el tiempo total de los n períodos medidos.

Empleando (9) se puede ver que el error en la medición del período es:

$$(10) \quad \Delta T = \Delta t/n$$

- ¿Qué valor tiene Δt ?
- ¿Cuál es el número de oscilaciones necesario de modo de reducir el error relativo del período para calcular g con el 2%?
- Analizar la veracidad de la siguiente afirmación: “Cuándo más períodos midamos, es mejor ya que reducimos cada vez más el error relativo”.

▪ Análisis del modelo

A continuación se indican dos aspectos para tener en cuenta en la realización de la práctica.

El modelo de péndulo ideal supone que la masa en suspensión es puntual.

Esto no es cierto ya que en la experiencia empleamos esferas de aproximadamente 1,7 cm de radio. Esto introduce un aumento de la incerteza en la medición de L .

Una opción sería, en vez de emplear (6), introducir una corrección en la fórmula para el período que tenga en cuenta una masa esférica de radio r :

$$(11) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{L + \frac{2r^2}{5L}}{g}}$$

Con los datos supuestos, determinar la diferencia porcentual con el período calculado empleando las ecuaciones (6) y (11). Analizar la conveniencia de aplicar esta última.

La longitud del hilo deberá medirse desde el punto de suspensión hasta el centro de la esfera.

Para el caso de grandes oscilaciones se puede demostrar que el período del péndulo se puede escribir como:

$$(13) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\prod_{m=1}^n (2m-1)}{\prod_{m=1}^n (2m)} \right]^2 \sin^{2n} \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \right)$$

Donde θ_0 es el ángulo máximo de desplazamiento. Una muy buena aproximación para cualquier ángulo se logra tomando los primeros cuatro términos de la serie de Taylor, o sea:

$$(14) \quad T \approx 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \left[1 + \frac{1}{4} \sin^2 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) + \frac{9}{64} \sin^4 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) + \frac{225}{2304} \sin^6 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \right]$$

➤ Emplear las ecuaciones (6) y (14) para determinar la diferencia porcentual en el período cuando la máxima amplitud es 5 grados, 30 grados y 50 grados.

Nota: para visualizar bien estos cálculos conviene trabajar con una planilla de cálculo.

▪ Procedimiento con la longitud del péndulo fija

Antes de armar y medir, discutir en el grupo:

- ¿Entre qué puntos se debe medir la longitud del péndulo?
- ¿Cuántos períodos se van a medir?
- ¿Cuál es el valor máximo de la amplitud que puede emplearse, en función del objetivo propuesto?
- ¿Qué masa es conveniente emplear, la más liviana, la más pesada ó es indistinta?
- ¿Cuál es la longitud mínima del péndulo que se puede emplear?

En base a las respuestas anteriores armar un péndulo (fig.1).

Al hacer oscilar al péndulo tener en cuenta que debe hacerlo en un plano.

A partir de (6) obtener T , calcular el valor de g y su error. Verificar que sea repetible. ¿Se cumple la condición que el error sea inferior al 2%?

▪ Cálculo de g por regresión lineal

Otra forma de determinar g es analizar la variación del período del péndulo cuando se cambia su longitud ([ver Anexo 1](#)).

De acuerdo a (6), ¿cómo es la dependencia del período con la longitud?

Si graficamos el período (T) en función de la longitud (L), ¿los puntos están alineados?

Este tipo de problemas ocurren muy a menudo en la práctica y para resolverlos se utiliza un método llamado *regresión lineal*. Este método parte de seleccionar las variables en juego de modo que la representación gráfica sea una recta. Para este caso resulta:

$$(14) \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{g} L$$

Discutir en grupo:

- ¿Se puede determinar la aceleración de la gravedad a partir del gráfico $T^2 = f(L)$?
- ¿Cómo?
- Indicar las incertezas de las variables y expresar “g” con sentido físico.

Análisis de resultados y conclusiones¹

Representar los valores obtenidos de “g” con sus respectivas incertezas. Decir si son comparables. Elegir un valor de g representativo.

Verificar que, con los valores medidos, la expresión de “g” esté dada con una incerteza relativa porcentual menor o igual al 2%.

En base a las mediciones hechas elegir un valor de “g”, que será de ahora en más usado por el grupo en la realización de trabajos prácticos.

Mencionar, si los hubo, problemas en la realización de la práctica. En base a la experiencia adquirida proponer mejoras al trabajo práctico.

¹ Ver conclusiones de anexo 1

Anexo 1**Análisis de la dependencia del período con la amplitud, la masa y la longitud.²**

¿Qué dice el modelo en cuanto a la dependencia del período con cada una de estas magnitudes?, ¿cómo realizar un correcto control de variables?

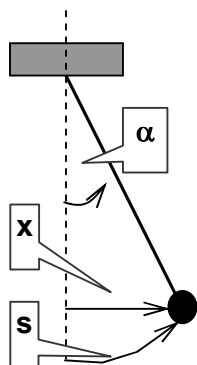
Seleccionar un número adecuado de mediciones para realizar las gráficas.

1. Período en función de la amplitud.

Armar el péndulo con una de las masas.

- ¿Cómo medir la amplitud? ¿Es equivalente medir la longitud de arco, la distancia horizontal o el ángulo para su determinación? Explicar.
- ¿Qué longitud de hilo conviene usar? ¿Por qué?
- Armar una tabla con distintos valores de amplitud. ¿Qué rango conviene seleccionar?
- Medir el período (Ver ejemplo en Tabla 1)

Graficar $T = f(A)$ a mano alzada (en el informe hacerlo con una planilla de cálculo) y analizar dicha dependencia.



¿En qué unidades se miden α , x , s ?

2. Período en función de la masa.

Con el mismo dispositivo, variar las masas manteniendo siempre la misma amplitud.

- ¿Es lo mismo utilizar cualquier valor de amplitud?
- Al igual que antes, armar una tabla y graficar los puntos obtenidos.

²

Hacer todos los cálculos hasta el final antes de retirarse del laboratorio.

- Graficar $T = f(M)$ a mano alzada (en el informe hacerlo con una planilla de cálculo) y analizar la dependencia del período con la masa.
- Identificar las principales fuentes de error de estas mediciones.
- ¿Con qué masa la medición presenta más error? ¿Por qué?

3. Período en función de la longitud.

Variar la longitud del péndulo, dejando la amplitud angular y la masa constante. Considerar, por ejemplo, valores de longitud de péndulo: 1100, 1000, 900, 800 y 700 mm (o cercanos a estos), ¿por qué?

- ¿Cómo se hace para mantener la amplitud constante? Justificar.
- Graficar $T = f(L)$ a mano alzada (en el informe hacerlo con una planilla de cálculo) y analizar la dependencia del período con la longitud.

Análisis de las mediciones obtenidas y conclusiones.

Analizar los tres gráficos obtenidos y extraer conclusiones comparando el modelo teórico con los resultados experimentales.

¿Coinciden las mediciones con lo que predice la teoría? Si no coinciden, analizar las causas de las discrepancias.
¿Cuáles son las fuentes principales de error? Listar y explicar. ¿Cómo se reducirían estos errores?
La expresión teórica para el período del péndulo ideal supone una aproximación ¿Cuál es?
¿Por qué se hace esa aproximación? ¿Qué ventaja trae hacerla?
Si uno lanza el péndulo desde un ángulo de 60° ¿puede utilizar la fórmula del péndulo ideal?
¿Por qué? ¿Y si lo lanza de 10° ?

Anexo 2

Aproximaciones hechas en el Modelo de Péndulo Ideal.

Consideraciones a tener en cuenta cuando se realiza la experiencia en forma real.

Al realizar la experiencia en forma real, vemos que hay diferencias entre el sistema real y el modelo teórico. En el modelo teórico se hicieron las siguientes aproximaciones o suposiciones:

- a- El péndulo oscila en un sistema inercial.
- b- La masa se puede considerar concentrada en un punto
- c- La amplitud de oscilación es muy pequeña
- d- El rozamiento con el aire es despreciable
- e- El hilo es inextensible.
- f- El rozamiento entre el punto de sujeción y el hilo es despreciable.
- g- El hilo tiene masa despreciable con respecto a la masa oscilante.

Determinación de la constante elástica de un resorte para un sistema masa-resorte

Pre-requisitos y bibliografía.

Competencias a desarrollar por el alumno

- ✓ Analizar las diferencias que se obtienen al medir el mismo objeto con distintos métodos y utilizando diferentes herramientas para trabajar los datos de una medición.
- ✓ Propagar incertezas. Criterios para minimizarlas.

Introducción teórica.

El resorte es un cuerpo elástico que si le aplicamos fuerzas en sus extremos se deforma. Si al dejar de actuar las fuerzas el resorte recupera su longitud inicial se trata de un cuerpo elástico al que es posible aplicar la ley de Hooke (en módulo):

$$F = K \cdot \Delta X$$

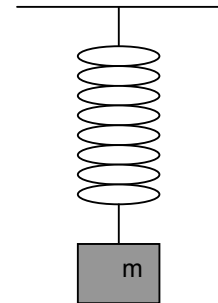


Figura 1

- ¿Qué indica K ?
- ¿Cómo se determina ΔX ?
- Si la masa m se halla en equilibrio, realizar su diagrama de cuerpo libre y escribir la ecuación correspondiente (indicar el sistema de coordenadas utilizado).
- Si la masa m oscila ahora alrededor de su posición de equilibrio (dentro de los límites elásticos para el resorte), ¿qué tipo de movimiento realiza el sistema masa-resorte?
- Escribir la ecuación diferencial para el caso anterior y obtener la expresión del período.

Desarrollo de la práctica

Materiales a utilizar

Cinta métrica o regla
Balanza
Cronómetro manual
Resorte
Juego de masas

Procedimiento y recomendaciones en el desarrollo de la práctica

▪ Método estático

En este caso se calculará la constante elástica del resorte a partir de medir la longitud que adquiere (en el equilibrio) un resorte al colocarle distintos valores de masas.

Es muy difícil medir el valor de la longitud natural (L_0) del resorte directamente. Así que en lugar de considerar el estiramiento del resorte respecto la longitud natural, se puede medir el estiramiento respecto a la longitud con una carga inicial. Si se coloca un extremo del resorte sobre un punto fijo y en el otro extremo una masa (m_1) como en la figura 1, el resorte se estira hasta que la fuerza elástica balancea al peso. De modo que:

$$(3) \quad k(L_1 - L_0) = m_1 g$$

L_1 es la longitud que adquiere el resorte con la masa m_1 .

Luego si se *agrega* una masa (m_2), el resorte aumenta su longitud para alcanzar una nueva posición de equilibrio.

$$(4) \quad k(L_2 - L_0) = (m_1 + m_2)g$$

Si restamos (4) y (3) se obtiene una ecuación que es independiente de L_0 :

$$(5) \quad k(L_2 - L_1) = m_2 g$$

Antes de armar y medir, discutir en grupo:

- ¿Cómo medir la longitud del resorte con las distintas cargas? ¿Cómo ponderar el error?
- ¿Es conveniente emplear masas de valores próximos a la del resorte?

En base a las respuestas anteriores armar en el laboratorio el dispositivo de la figura 1. A partir de estos datos (el estiramiento y el peso agregado) graficar $L_i - L_1$ en función de m_i .

Empleando la ecuación (5) se puede ver que la relación entre el estiramiento y la masa es:

$$(6) \quad (L_i - L_1) = \frac{g}{k} m_i$$

Esto permite obtener la constante elástica del resorte (y su error) a partir la pendiente de la gráfica resultante.

▪ Método dinámico

Se calculará la constante elástica del resorte a partir del cambio en el período de oscilación del sistema masa-resorte cuando se modifica el valor de la masa.

Como en el caso del péndulo ideal, el problema se linealiza reescribiendo (2) de la forma:

$$(7) \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{k} m$$

Antes de armar y medir, discutir en grupo:

- ¿Qué pasa si el resorte en vez de oscilar verticalmente oscila horizontalmente?
- ¿Qué problemas puede traer aparejado un peso muy liviano o por el contrario, uno muy pesado?
- Analizar qué valores de pesos son los más convenientes.

En base a las respuestas anteriores armar el dispositivo en el laboratorio, colocando un extremo del resorte en un punto fijo y en el otro extremo una masa.

Apartar la masa de la posición de equilibrio y determinar el período de oscilación para diferentes masas.

A partir de estos graficar T^2 en función de m_i y obtener la constante elástica del resorte (y su error).

Comparar los resultados obtenidos de la constante elástica del resorte para el caso estático y el caso dinámico.

Recomendaciones

Antes de imprimir el informe verificar que todas las magnitudes escritas estén expresadas correctamente, según las pautas propuestas en clase.

Como el resultado de una medición no es sólo el valor representativo, sino también su error, *todos los gráficos en los que se muestren mediciones deben incluir barras de errores*. Si los errores son tan pequeños que no pueden ser vistos en la escala del gráfico, indicarlo en un comentario.