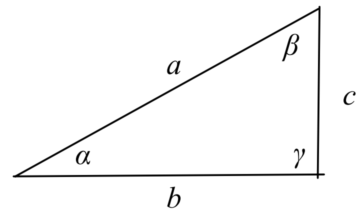
ELEMENTOS DE TRIGONOMETRÍA Y DE CÁLCULO DIFERENCIAL

Dr. CARLOS MOSQUERA

TRIGONOMETRÍA

a) Relaciones trigonométricas

En un triángulo rectángulo



$sen\,\alpha = c/a \qquad \cos\alpha = b/a$

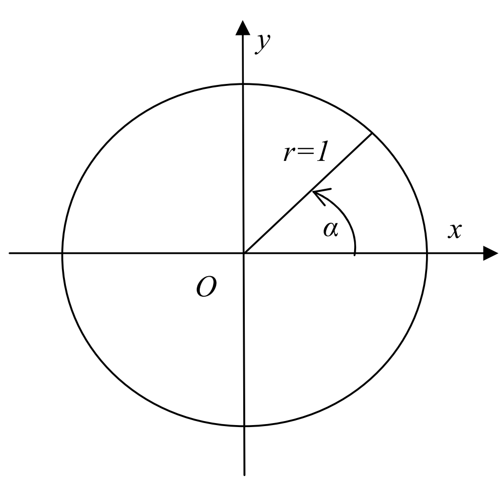
$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = (c^2 + b^2)/a^2$

Por Pitágoras $c^2 + b^2 = a^2$ y, por lo tanto, dividiendo todo por a^2, se obtiene la que denominamos ***relación trigonométrica fundamental***: $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Además $sen\,\alpha = \dfrac{c}{a} = \cos\beta$ dado que los ángulos α y β son complementarios (su suma es igual a 90° ó π/2 radianes). Por eso decimos que el seno de un ángulo es igual al coseno de su complemento.

Tener en cuenta:
i.- Angulo es el conjunto de puntos del plano común a la intersección de dos semiplanos. Se los mide en grados sexagesimales, grados centesimales o radianes. Un ángulo de un radián es aquel en que el arco que subtiende, trazado con centro en el vértice del ángulo, es igual al radio.
ii.- Los argumentos de las funciones trigonométricas son ángulos.
iii.- Las funciones trigonométricas son números sin unidad de medida. Surgieron como relaciones entre las medidas de los segmentos que forman los lados del triángulo rectángulo.

Definición
La circunferencia trigonométrica es una circunferencia de radio unidad en la que se inscriben los ángulos, con el vértice en su centro. También en su centro se ubica el origen de un sistema de coordenadas ortogonales (x, y). En la circunferencia trigonométrica se considera que los ángulos están ***orientados;*** se atribuye un signo al sentido de giro: si los ángulos se miden desde el eje *x,* crecen positivamente en sentido contrario al de las agujas del reloj. Por lo tanto, si se miden en sentido horario, los ángulos serán negativos.



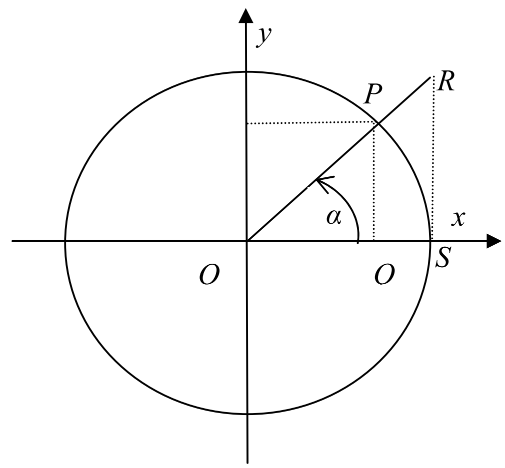
Por lo tanto, en una circunferencia trigonométrica será:

$P \equiv P(x, y) \qquad Q \equiv Q(x,0)$

$sen\alpha = \frac{PQ}{OP} = PQ = y$

$\cos\alpha = \frac{OQ}{OP} = OQ = x$

$tg\alpha = \dfrac{RS}{OS} = RS$

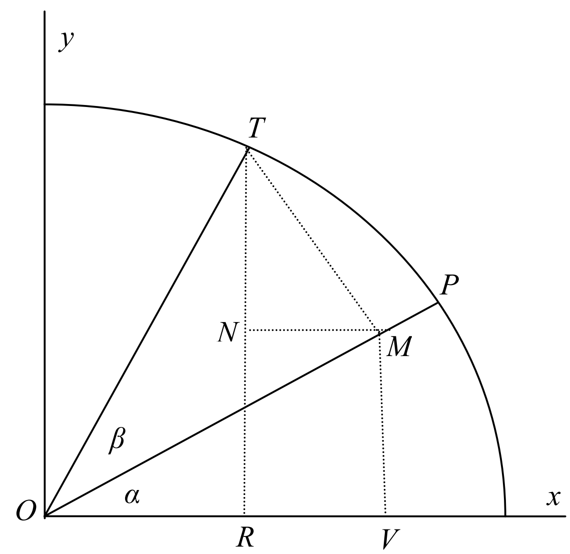


Por ser *OP=OS=1* (por definición). Tanto *RS*, como *OQ=x* y *PQ=y* son las medidas de los segmentos en las mismas unidades en las que se mide el radio de la circunferencia.

De aquí se obtiene $tg\alpha = \dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{y}{x}$.

b) Funciones trigonométricas de la suma y diferencia de ángulos

i.- $sen(\alpha + \beta)$



En la circunferencia trigonométrica (radio igual a la unidad) el ángulo *QOP=α*. El segmento *TM* es perpendicular al *OP* y el *TR* al *OV;* por lo tanto el ángulo *MTR=α,* pues ángulos agudos entre lados respectivamente perpendiculares son congruentes. El ángulo *TOP=β.* Además, el ángulo *NMO=α,* por alternos internos entre paralelas.

$sen(\alpha + \beta) = TR = TN + NR = TN + MV$

$TN = MT.\cos\alpha = sen\beta.\cos\alpha$

$MV = OM.sen\alpha = \cos\beta.sen\alpha$

$\therefore$

$sen(\alpha + \beta) = sen\alpha\cos\beta + sen\beta\cos\alpha$

Si $\alpha=\beta \Rightarrow \quad sen2\alpha = 2.sen\alpha\cos\beta$

ii.-

$\cos(\alpha + \beta) = OR = OV - RV$

$OV = OM.\cos\alpha = OT.\cos\beta.\cos\alpha = \cos\beta.\cos\alpha$

$RV = NM = TM.sen\alpha = sen\beta.sen\alpha$

$\therefore \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha.\cos\beta - sen\alpha.sen\beta$

Si $\alpha=\beta \Rightarrow \quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - sen^2\alpha$

iii.- A partir de esta última ecuación y de la relación trigonométrica fundamental,

$$\begin{aligned} \cos^2\alpha + sen^2\alpha &= 1 \\ \cos^2\alpha - sen^2\alpha &= \cos 2\alpha \end{aligned}$$, sumando miembro a miembro se obtiene

$\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$; y restando miembro a miembro queda: $sen^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$

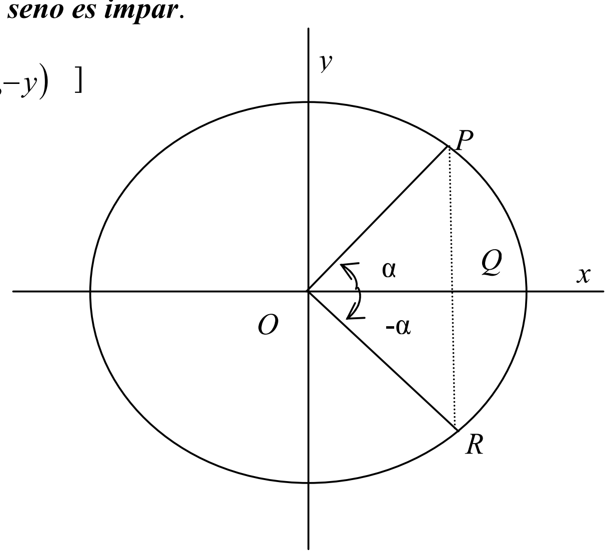
Definición

Sabiendo que las funciones seno y coseno se definen como:
$f : R \to [-1,1] / f(x) = senx$; $\quad f : R \to [-1,1] / f(x) = \cos x$ y que una función es ***par*** cuando $f(-x) = f(x)$ y es ***impar*** cuando $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in R$; se concluye que la ***función coseno es par*** y la ***función seno es impar***.

$P = P(x,y) \quad Q = Q(x,0) \quad R = R(x,-y)$]

$$\cos\alpha = {OQ}/{OP} = x$$
$$\cos(-\alpha) = {OQ}/{OP} = x$$
$$\therefore \quad \cos\alpha = \cos(-\alpha)$$

$$sen\alpha = {QP}/{OP} = y$$
$$sen(-\alpha) = {QR}/{OP} = -y$$
$$sen\alpha = -sen(-\alpha)$$



El seno o el coseno de la diferencia entre dos ángulos se pueden plantear como el seno o el coseno de una suma algebraica entre dos ángulos, considerando que uno de ellos es negativo:

$$sen(\alpha - \beta) = sen[\alpha + (-\beta)] = sen\alpha.\cos(-\beta) + sen(-\beta).\cos\alpha$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos[\alpha + (-\beta)] = \cos\alpha.\cos(-\beta) - sen(-\beta).sen\alpha$$

De acuerdo a lo visto para las funciones par e impar, se obtiene que:

$$sen(\alpha - \beta) = sen\alpha.\cos\beta - sen\beta.\cos\alpha$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha.\cos\beta + sen\alpha.sen\beta$$

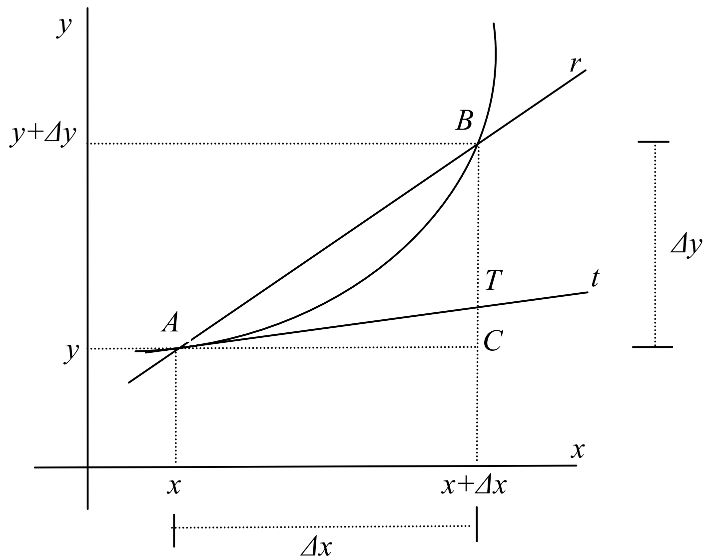
Queda para el alumno demostrar estas relaciones a partir de consideraciones geométricas, tal como las efectuadas anteriormente.
Ver teoremas del seno y del coseno en el capítulo de vectores.

LA DIFERENCIAL

Al incrementar en Δx la variable independiente x de una función continua $y = f(x)$, ésta se incrementa en Δy:

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

Gráficamente esto implica pasar del punto *A* al *B* sobre la curva que representa a la función



Los puntos *A* y *B* determinan una recta *r* secante a la curva (la interseca en al menos dos puntos). La pendiente de esta recta secante está dada por la razón incremental

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

En la medida en que Δx sea más pequeño, el punto *B* se acercará al punto *A*, variando la inclinación de la recta *r*, que se acercará a la recta tangente *t* en el punto *A*.
En el límite para Δx tendiendo a cero, *B* coincidirá con *A* y la recta *r* será la recta tangente *t*. El límite de la razón incremental se define como la derivada de la función en el punto; por lo tanto la pendiente de la recta *t* será la derivada de la función en el punto. O sea

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = D[f(x)] = f'(x)$$

donde *D* ó la prima sobre la función significan derivada.
La razón incremental se puede escribir de la siguiente forma:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon$$

siendo ε un infinitésimo (función que tiende a cero cuando la variable independiente, en este caso Δx, tiende a cero). Despejando Δy se obtiene

$$\Delta y = f'(x).\Delta x + \varepsilon.\Delta x$$

En el gráfico se observa que

$$\Delta y = \overline{BC} = \overline{CT} + \overline{BT}$$

Y, puesto que la derivada de la función da la pendiente de la recta *t*, será

$$\overline{CT} = f'(x).\Delta x$$

A esta última expresión se la denomina ***parte principal del incremento Δy*** o ***diferencial*** de la función. Se la designa con una letra *d* minúscula:

$$dy = f'(x).dx$$

donde se ha reemplazado Δx por dx (diferencial de x) pues, en el caso de la variable independiente, su incremento y su diferencial coinciden, ya que si diferenciamos la función $y(x) = x$, será: $dy(x) = dx = D[x].\Delta x = \Delta x$, pues la derivada de x es igual a 1 ($D[x] = 1$).
Por lo tanto, se puede escribir la derivada de una función así:

$$D[y] = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

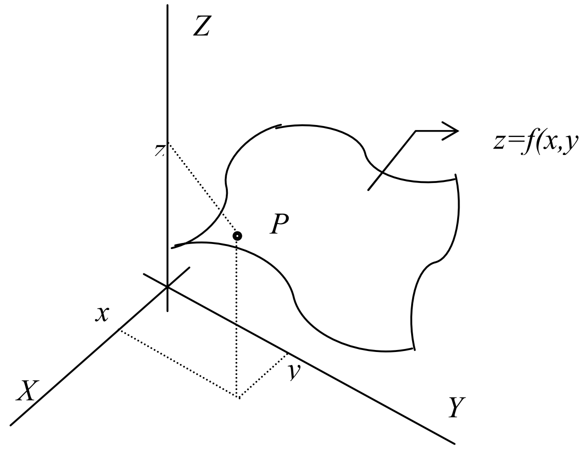
i.- Definición y continuidad

Las funciones pueden depender de más de una variable independiente. Por ejemplo, la expresión $S = f(x, y) = x.y$ representa el área del rectángulo de lados iguales a x e y; la función $v = f(x, y, z) = x.y.z$ es el volumen del paralelepípedo rectángulo cuyas aristas son x, y, z.
Una superficie en el espacio se representa mediante una función $z = f(x, y)$.
O sea, cada punto z de la superficie está identificado en función de sus coordenadas x e y.

De forma similar a cómo se define la continuidad de una función de una variable, decimos que la función $f(x,y)$ es continua en la región R del plano (x,y) si, para todo punto (x_0,y_0) perteneciente a la región, se cumple que:

1.- la función está definida:
$f(x_0, y_0) = z_0$

2.- el límite de la función es finito y coincide con el valor de la función en el punto: $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0) = z_0$



Nos encontraremos con magnitudes físicas que dependen de más de dos variables: por ejemplo, la magnitud que describe la elongación de las partículas de un determinado medio cuando se propaga en él una onda, depende de las tres coordenadas espaciales y del tiempo.

Supongamos que $u = f(x, y, z)$. Diremos que esta función es continua en una región *R* del espacio cuando para todo punto x_0, y_0, z_0 de dicha región se cumple que:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0 \\ z \to z_0}} f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0)$$

independientemente del camino por el cual *(x, y , z)* se aproxima a (x_0, y_0, z_0).

ii.- Derivadas parciales

Se puede extender la definición de derivada de funciones de una variable independiente a funciones de varias variables independientes, de la siguiente forma. Tomemos una función de dos variables independientes $z = f(x,y)$. Si mantenemos constante el valor de una de las variables, por ejemplo la variable y, la función z resulta función sólo de x. El incremento de z será consecuencia del incremento en x (pues y permanece constante) y lo escribiremos como:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$$

El límite de la razón incremental será

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

y se denomina derivada parcial de la función con respecto a x. Se designa por los símbolos

$$\frac{\partial z}{\partial x}; \quad \frac{\partial f}{\partial x}; \quad z_x; \quad ó \quad f_x$$

Análogamente, la derivada parcial con respecto a y será:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

En general, si $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, la derivada parcial de u con respecto a alguna de las variables x_i se indicará como $\partial u / \partial x_i$; operación en la que se mantienen constantes a las demás variables.

Por ejemplo, si $z = x^3 + x^2.y + 3y^3$, será: $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 2x.y$ (y permanece constante); y $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 9y^2$ (x permanece constante).

Si $u = sen(ax + by + cz)$ donde a, b y c son constantes, utilizando la derivación para una función compuesta, será:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a.\cos(ax + by + cz) \qquad (y, z \ constantes)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = b.\cos(ax + by + cz) \qquad (x, z \ constantes)$$
$$\frac{\partial u}{\partial z} = c.\cos(ax + by + cz) \qquad (x, y \ constantes)$$

Las derivadas parciales son, a su vez, funciones de $x_1, x_2, ..., x_n$ que pueden ser derivadas nuevamente con respecto a alguna o todas las variables independientes: tales derivadas reciben el nombre de derivadas segundas parciales de $f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Por ejemplo, la función $z = f(x,y)$, puede tener las siguientes derivadas segundas:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}; \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$$

Si como función $f(x,y)$ tomamos $z = x^3 + x^2.y + 3y^3$, será

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = 6x + 2y; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx} = 2x; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy} = 2x; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = 18y$$

iii.- Diferencial total

Sea la función $z = f(x,y)$. Si se incrementan las variables x e y en Δx y Δy, el incremento de la función será:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

Sumando y restando el término $f(x, y+\Delta y)$ queda

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) + f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

Dividiendo los dos primeros términos del segundo miembro de la última ecuación por Δx y tomando el límite para $\Delta x \to 0$ se obtiene:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)}{\Delta x} = \frac{\partial f(x, y+\Delta y)}{\partial x}$$

que puede expresarse así: $f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) = \left(\frac{\partial f(x, y+\Delta y)}{\partial x} + \varepsilon_1 \right).\Delta x$

donde ε_1 es un infinitésimo para el que se cumple que $\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon_1 = 0$. Además

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\partial f(x, y+\Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$$

De igual forma, dividiendo por Δy los dos últimos términos de Δz y pasando al límite:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

Por lo tanto: $f(x, y+\Delta y) - f(x,y) = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} + \varepsilon_2 \right).\Delta y$

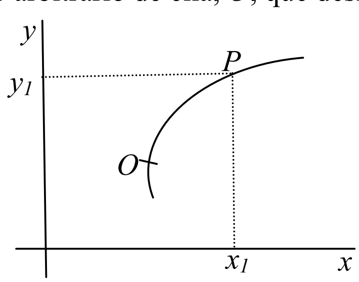
Con ε_2 otro infinitésimo que cumple que: $\lim_{\Delta y \to 0} \varepsilon_2 = 0$. Reemplazando lo anterior en Δz se obtiene:

$$\Delta z = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}.\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}.\Delta y + \varepsilon_1.\Delta x + \varepsilon_2.\Delta y$$

A la suma de los dos primeros términos de la última ecuación se los denomina ***diferencial total*** de la función: $dz = \frac{\partial f}{\partial x}.dx + \frac{\partial f}{\partial y}.dy$, donde se han identificado los incrementos en las variables independientes x e y con las diferenciales dx y dy.
La definición de diferencial total puede extenderse a funciones que dependen de más de dos variables independientes. La diferencial total de una función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ será: $du = \frac{\partial f}{\partial x_1}.dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}.dx_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}.dx_n$
Estos conceptos serán utilizados en lo inmediato para el cálculo del error cometido en la determinación indirecta de una magnitud física (volumen de un sólido, período de un péndulo, etc.).

iv.- Derivada direccional. Gradiente.

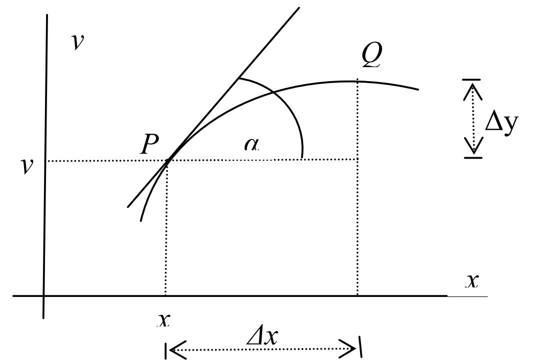
Supongamos una curva plana C, expresada como $f(x,y) = 0$ que pasa por el punto $P(x,y)$. Supongamos también que las coordenadas de cada punto de la curva pueden expresarse en forma ***paramétrica***, siendo este parámetro ***s*** el arco sobre la curva C medido desde un punto arbitrario de ella, O, que designamos como origen.



La longitud del arco OP sobre la curva será el valor del arco s. El punto P queda identificado de la siguiente forma:
$x_1 = x(s)$; $y_1 = y(s)$. Aceptamos que tanto x como y sean derivables respecto de s.

Identifiquemos dos puntos, *P(x,y)* y *Q(x+Δx,y+Δy)*, sobre la curva *f(x,y) = 0.* Entonces *Δs* será igual a la longitud del arco *PQ* y *Δf* será la variación de *f* debida a los incrementos *Δx* y *Δy*.
La derivada de *f* respecto del parámetro *s* será:

$$\frac{df}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta s}$$



Pero como $\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \varepsilon_1\right).\Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \varepsilon_2\right).\Delta y$, la razón incremental quedará expresada así: $\frac{\Delta f}{\Delta s} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \varepsilon_1\right).\frac{\Delta x}{\Delta s} + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \varepsilon_2\right).\frac{\Delta y}{\Delta s}$.
Cuando Δs tiende a cero, se obtiene:

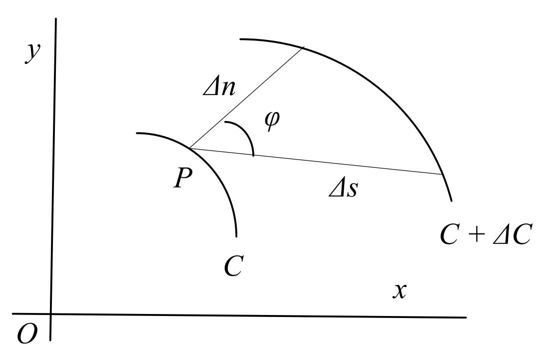
$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta s} = \cos\alpha \qquad \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta s} = sen\alpha \qquad \Rightarrow \qquad \frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x}.\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}.sen\alpha$$

. Esto es así porque cuando el arco *Δs* tiende a cero, la porción de curva correspondiente a dicho arco coincidirá con la recta tangente en el punto *P*; coincidentemente *Δx (*así como *Δy)* también tiende a cero y, por lo tanto, los cocientes nos dan las funciones seno y coseno, tal como se desprende de la figura.

Resulta evidente que *df/ds* depende de la dirección del arco de la curva, razón por la cual recibe el nombre de ***derivada en una dirección*** **o** ***derivada direccional***. Representa la rapidez de variación de *f* en la dirección de la recta tangente a la curva particular elegida que pasa por el punto de coordenadas *x, y*.
Cuando a la función *z = f(x,y)* -que geométricamente es una superficie en el espacio- la intersecamos con planos *z = constante*, obtenemos una familia de curvas *f(x,y) = constante*; una para cada valor de la constante. Esta familia la podemos representar sobre el plano *(x,y).*

Curva *C* (intersección de la superficie *f(x,y)* con el plano *z = constante = γ*):
$z = \gamma \quad \Rightarrow \quad f(x,y) = \gamma$

Curva *C + ΔC* (intersección de la superficie *f(x,y)* con el plano *z = constante = γ+Δγ*):
$z = \gamma + \Delta\gamma \quad \Rightarrow \quad f(x,y) = \gamma + \Delta\gamma$



Desde un punto *P* de *C* trazamos un segmento *Δn* normal a la curva hasta intersecar a la curva *C + ΔC*; y un segmento *Δs* con una dirección (cualquiera) que forma un ángulo *α* con *Δn.*
Dado que $\Delta f = \gamma + \Delta\gamma - \gamma = \Delta\gamma$, será $\frac{\Delta f}{\Delta s} \equiv \frac{\Delta\gamma}{\Delta s}$.

A menos de infinitésimos de orden superior: $\frac{\Delta n}{\Delta s} = \cos\varphi \quad \therefore \quad \frac{df}{ds} = \frac{df}{dn} . \frac{dn}{ds} = \frac{df}{dn} . \cos\varphi$

Por lo tanto, la derivada de *f* en una cierta dirección puede calcularse como la derivada a lo largo de la normal por el coseno del ángulo que forma la normal con la dirección considerada. El valor numérico de la derivada normal *df/dn* es entonces el mayor valor que puede alcanzar *df/ds*.
Al ***vector*** cuya dirección es normal a la curva en el punto considerado y tiene por módulo a *df/dn*, se lo denomina ***gradiente de la función***.
Estos resultados se extienden sin dificultad a fin de derivar una función $u = f(x,y,z)$ a lo largo de una dirección en el espacio.

Bibliografía: Textos de Análisis Matemático I y II.