Definición: Sea $\mathbb{V}$ – $\mathbb{K}$espacio vectorial, se dice que un conjunto $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset \mathbb{V}$ es **base** de $\mathbb{V}$ si cumple:

- gen $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} = \mathbb{V}$ ✓
- $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es l.i. ✓

Ejemplos sencillos:

- $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$ $K = \mathbb{R}$ $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$ $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$

- $\mathbb{V} = \mathbb{C}^2$ $K = \mathbb{C}$ $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ es una base de $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{C}$ espacio vectorial

a, b
c, d
$\in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix}a+bi\\c+di\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}a+bi\\0\end{pmatrix}}_{\in \mathbb{C}^2} + \underbrace{\begin{pmatrix}0\\c+di\end{pmatrix}}_{\in \mathbb{C}^2} = \underbrace{(a+bi)}_{\in \mathbb{C}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \underbrace{(c+di)}_{\in \mathbb{C}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad \dim(\mathbb{C}^2_{\mathbb{C}}) = 2$$

$\mathbb{C}^2 \subset$ gen $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ $\wedge$ gen $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\} \subset \mathbb{C}^2$ $\therefore$ $\mathbb{C}^2 =$ gen $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$

Además $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ es l.i en $\mathbb{C}^2_{\mathbb{C}}$ $\therefore$ $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ es base de $\mathbb{C}^2_{\mathbb{C}}$

- $\mathbb{V} = \mathbb{C}^2$ $K = \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix}a+bi\\c+di\end{pmatrix} = \underbrace{(a+bi)}_{\notin \mathbb{R}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \underbrace{(c+di)}_{\notin \mathbb{R}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \overbrace{a}^{\in \mathbb{R}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \overbrace{b}^{\in \mathbb{R}}\begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix} + \overbrace{c}^{\in \mathbb{R}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \overbrace{d}^{\in \mathbb{R}}\begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix}$$

$\mathbb{C}^2_{\mathbb{R}} =$ gen $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix}\right\}$ $\wedge$ $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix}\right\}$ es l.i en $\mathbb{C}^2_{\mathbb{R}}$

$\therefore$ $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix}\right\}$ es una base de $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{R}$ espacio vectorial

$\dim(\mathbb{C}^2_{\mathbb{R}}) = 4$

Definición: Si un conjunto finito $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ es base de un K-espacio vectorial $\mathbb{V}$ se dice que **n** es la **dimensión** de $\mathbb{V}$. Se nota $\dim(\mathbb{V}) = \mathbf{n}$. $\dim(\mathbb{V}) = \#(B)$

nº de elementos del conjunto

Bases canónicas

- En $\mathbb{R}^n$ la base canónica es

$$E_{\mathbb{R}^n} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}}_{e_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}}_{e_2}, \dots, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}}_{e_n} \right\}$$

Que en forma más compacta, de ahora en más escribiremos:

$$E_{\mathbb{R}^n} = \{e_1, e_2, \dots e_n\}, \text{ con } e_i \in \mathbb{R}^n/(e_i)_k = \delta_{ik}.$$

p.e: $(e_1)_k = \delta_{1k} = \begin{cases}1 & 1=k\\0 & 1\neq k\end{cases}$

- Si consideramos $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial, la base canónica es:

$$E_{\mathbb{C}^n-\mathbb{C}} = \{e_1, e_2, \dots e_n\}$$

Si $X \in \mathbb{C}^n, X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, con $x_i \in \mathbb{C}$, $\forall\, 1 \le i \le n$.

$$X = \underbrace{x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n}_{\text{comb. lineal con escalares en } \mathbb{C}}$$

¿ Qué ocurre si $K = \mathbb{R}$?

Como en el ejemplo $x \in \mathbb{C}^2 : \begin{pmatrix} a+bi \\ c+di \end{pmatrix}$

$X \in \mathbb{C}^n \Leftrightarrow X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$
Cada $x_k = a_k + ib_k$, $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, entonces, podemos escribir:

$$\begin{aligned} X &= (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \\ &= (a_1 + ib_1, a_2 + ib_2, \ldots, a_n + ib_n)^T \\ &= a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n + b_1 e_{i1} + b_2 e_{i2} + \cdots + b_n e_{in} \end{aligned}$$

Donde $e_{ik} \in \mathbb{C}^n / (e_{ik})_l = i.\delta_{kl}$

Entonces, en este espacio vectorial, $\mathbb{C}^n - \mathbb{R}$, la base más directa es

$$E_{\mathbb{C}^n - \mathbb{R}} = \{e_1, e_2, \ldots e_n, e_{i1}, e_{i2}, \ldots, e_{in}\}$$

- En $R^{m \times n}$, la base canónica, se nota:
$E_{R^{m\times n}} = \{e_{11}, e_{12}, \ldots, e_{1n}, e_{21}, \ldots e_{2n}, \ldots, e_{m1}, \ldots e_{mn}\}$ $K = \mathbb{R}$

$$[e_{kl}]_{ij} = \begin{cases} 1 si & (i,j) = (k,l) \\ 0 \text{ si} & (i,j) \neq (k,l) \end{cases}, \forall\, 0 \leq \imath, k \leq$$

Ej : $\mathbb{R}^{2\times 3}$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = a_{11} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{e_{11}} + a_{12} \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{e_{12}} + a_{13} \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{e_{13}} +$
$+ a_{21} \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{e_{21}} + a_{22} \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}^{e_{22}} + a_{23} \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{e_{23}}$

$\dim(\mathbb{R}^{2\times 3}) = 6$

- Estudiemos ahora $\mathbb{R}_n[x]$, el conjunto de los polinomios de grado menor o igual que n, junto con el polinomio nulo.
La base canónica de $\mathbb{R}_n[X]$ será:
$E_{\mathbb{R}_n[X]} = \{x^n, x^{n-1} \ldots, x, \underset{x^0}{1}\} \longrightarrow \dim(\mathbb{R}_n(x)) = n+1$

Ej: $\mathbb{R}_3[x]$ tiene base canónica dada por $\{x^3, x^2, x, 1\}$ $\dim(\mathbb{R}_3[x]) = 4$

Obs : ¿ Qué ocurre con $\mathbb{V} = \mathbb{R}[x]$? ¿ Qué ocurre con $\mathbb{V} = C(I)$? $I \subset \mathbb{R}$

$\mathbb{V} = \mathbb{R}[x]$ $\quad \mathbb{R}[x] = \text{gen}\{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^{10000}, x^{10001}, \ldots\}$ no está finitamente generado se dice que $\dim(\mathbb{R}[x]) = \infty$

Idem para $C(I)$ $\rightarrow$ no tiene dimensión finita

Ejemplo : Hallar una base de $\mathbb{V} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = \underset{\in\mathbb{R}}{a} e^x + \underset{\in\mathbb{R}}{b} x e^x, a, b \in \mathbb{R}\}$

$\therefore \mathbb{V} \subset \text{gen}\{e^x, xe^x\}$ $\quad (\mathbb{V} \subset C^{(\infty)}_{(\mathbb{R})})$ $\quad$ Obs : $e^{2x} \notin \mathbb{V}$

Además $\{e^x, xe^x\}$ es Li en $C^{(\infty)}_{(\mathbb{R})}$ porque

$W(e^x, xe^x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{vmatrix} = e^x(e^x + xe^x) - xe^{2x} = e^{2x} + xe^{2x} - xe^{2x} = e^{2x}$

¿ $\exists x_0 \in \mathbb{R} : e^{2x_0} \neq 0$? sí de hecho $W(e^x, xe^x) \neq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$

$\therefore \{e^x, xe^x\}$ es una base de $\mathbb{V}$ y $\dim(\mathbb{V}) = 2$

Algunas funciones de $\mathbb{V}$: $e^x, xe^x, e^x + xe^x, -e^x + 2xe^x, \ldots$

Con $\mathbb{V} = \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;/\; f(x) = ae^x + bxe^x,\ a, b \in \mathbb{R}\}$

¿ $\mathbb{V} = \text{gen}\{\underbrace{e^x + xe^x}_{f_1(x)}, \underbrace{e^x - xe^x}_{f_2(x)}\}$?

$f_1(x) \in \mathbb{V}$ sí porque $e^x + xe^x = 1e^x + 1xe^x$

$f_2(x) \in \mathbb{V}$ sí porque $e^x - xe^x = 1e^x - 1xe^x$

Obs: $x^2e^x \notin \mathbb{V}$

$\therefore \quad \{f_1(x), f_2(x)\} \subset \mathbb{V} \Rightarrow$

$\text{gen}\{f_1(x), f_2(x)\} \subset \mathbb{V}$ falta ver $\mathbb{V} \subset \text{gen}\{f_1, f_2\}$

Obs: $\{e^x + xe^x, e^x - xe^x\}$ es li en $\mathbb{V}$

$$W(e^x + xe^x, e^x - xe^x) = \begin{vmatrix} e^x + xe^x & e^x - xe^x \\ 2e^x + xe^x & -xe^x \end{vmatrix} = \cancel{-xe^{2x}} - \cancel{x^2e^{2x}} - 2e^{2x} - \cancel{xe^{2x}} + \cancel{2xe^{2x}} + \cancel{x^2e^{2x}}$$

$$= -2e^{2x} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\therefore \quad \{e^x + xe^x, e^x - xe^x\}$ es otra base de $\mathbb{V}$

ya que $\underbrace{ae^x + bxe^x}_{\in \mathbb{V}} = \alpha(e^x + xe^x) + \beta(e^x - xe^x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

con $\begin{array}{l} \alpha + \beta = a \\ \alpha - \beta = b \end{array} \quad \therefore \quad \alpha = \dfrac{a+b}{2} \quad \beta = \dfrac{a-b}{2}$

porque $(\underbrace{a - \alpha - \beta}_{=0})e^x + (\underbrace{b - \alpha + \beta}_{=0})xe^x = O(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Obs: $\{e^x, xe^x\} \neq \{e^x + xe^x, e^x - xe^x\}$

$\text{gen}\{e^x, xe^x\} = \text{gen}\{e^x + xe^x, e^x - xe^x\} = \mathbb{V}$

$\{e^x, xe^x\}$ es una base de $\mathbb{V}$

$\{e^x + xe^x, e^x - xe^x\}$ es otra base de $\mathbb{V}$

Todas tienen en común el nº de vectores del conjunto y así $\dim(\mathbb{V}) = 2$

Como $\dim(\mathbb{V}) = 2$

$\{e^x + xe^x, e^x - xe^x\} \subset \mathbb{V}$ y $\{e^x + xe^x, e^x - xe^x\}$ es li

$\Rightarrow \{e^x + xe^x, e^x - xe^x\}$ es base de $\mathbb{V}$

Si $\dim(\mathbb{V}) = n$

Observaciones importantes

En lo que sigue $\mathbb{V}$ es un K-espacio vectorial con $\dim(\mathbb{V}) = n$.

1. Si $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ es l.i. $\Rightarrow k \leq n$.
   Esto es consecuencia directa de la propiedad demostrada en el Episodio anterior (cardinal de un conjunto l.i. $\leq$ cardinal de un conjunto generador). Como $\dim(\mathbb{V}) = n$, toda base tiene n elementos y como toda base es un conjunto generador de $\mathbb{V}$ se cumple que $k \leq n$.✓

$p \Rightarrow q$

Ej: $\mathbb{V} = \mathbb{R}_3[x]$ con $\dim(\mathbb{R}_3[x]) = 4$

$\#(\{1, 1+x, 2+x\}) = 3$, $3 \leq 4$, ¿LD!!

$\{1, 1+x^2, 1-x^3\}$ es li ya que son de $\neq$ gr $\Rightarrow 3 \leq 4$

$\{1, x, x^2, x^3\}$ es base de $\mathbb{R}_3[x]$

$\#\left(A = \{1, 1+x^2, 1-x^3, x^3, 1+x-x^2+x^3\}\right) = 5 \Rightarrow A$ es LD

$A \subseteq \mathbb{R}_3[x]$

2. Si $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ genera $\mathbb{V} \Rightarrow m \geq n$.
   Es consecuencia de la observación ya citada, cualquier base de $\mathbb{V}$ tiene n elementos y es l.i, por lo tanto como este conjunto es generador de $\mathbb{V} \Rightarrow m \geq n$.✓

$m < n \Rightarrow \{w_1 \ldots w_m\}$ No genera a $\mathbb{V}$.

Ej: $\mathbb{V} = \mathbb{R}_3[x]$ $\quad \{1, 1+x^2, x^3\}$ No puede ser generador de $\mathbb{R}_3[x]$

$\{1, x, 1+x, 1+x^2, 2\}$ no lo genera a $\mathbb{R}_3[x]$ $\therefore$ no pudo usar la propiedad

Ej: $\mathbb{V} = \mathbb{R}_2[x]$ $\quad \dim(\mathbb{V}) = 3$

$\mathbb{V} = \text{gen}\{1, x, x^2, 1+x, 1-x^2\} \Rightarrow 5 \geq 3$

3. Si $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ es un conjunto l.i. en $\mathbb{V} \Rightarrow B$ es base.
   Supongamos que B no es base, como por hipótesis es un conjunto l.i, si no es base del espacio vectorial, será porque no genera $\mathbb{V} \Rightarrow \exists v \in \mathbb{V}$ tal que $\{u_1, u_2, \ldots, u_n, v\}$ es l.i. Absurdo, pues como $\dim(\mathbb{V}) = n \Rightarrow$ todo conjunto l.i. **tiene a lo sumo** n elementos $\Rightarrow B$ genera $\mathbb{V}$ y por lo tanto es base.✓

Ej: $\mathbb{V} = \mathbb{R}_2[x]$ donde $\dim(\mathbb{R}_2[x]) = 3$ ✓

$A = \{1, 1+x, 1+x^2\}$ es Li (polinomios de $\neq$ grado) $\subset \mathbb{R}_2[x]$

$\Rightarrow A$ es una base de $\mathbb{R}_2[x]$

4. Si $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_n\}$ es un conjunto generador de $\mathbb{V} \Rightarrow B$ es base de $\mathbb{V}$.
   Otra vez, supongamos que B genera $\mathbb{V}$ y no es base $\Rightarrow B$ no es l.i.$\Rightarrow$ hay algún vector de B que es combinación lineal de los demás, supongamos, sin pérdida de generalidad, que es $u_n \Rightarrow$ gen $\{u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}\} = \mathbb{V}$. Absurdo, pues como $\dim(V) = n$ todo conjunto generador **tiene por lo menos** n elementos. Luego B es l.i. y por lo tanto B es base. ✓

Ej: $\mathbb{R}^2 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$ ✓ esto es porque $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ donde $\begin{cases}\alpha+\beta = x\\ \alpha = y\end{cases}$ $\beta = x-y$

Como $\dim(\mathbb{R}^2) = 2 \Rightarrow \left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$ es base de $\mathbb{R}^2$

5 Si un subespacio $S \subset \mathbb{V} \Rightarrow \dim(S) \leq n$.

$\dim(\mathbb{V}) = n$

$S \subset \mathbb{V} \wedge \mathbb{V} \subset S$

(1) (2)

6 Si un subespacio $S \overset{(1)}{\subset} \mathbb{V}$ y $\dim(S) = \dim(\mathbb{V}) \Rightarrow S = \mathbb{V}$.
Si $\dim(S) = \dim(\mathbb{V}) = n \Rightarrow \exists\ B_S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ base de S de n elemmentos. Si suponemos que $S \neq \mathbb{V} \Rightarrow \exists w \in \mathbb{V}$ tal que $w \notin S$ Entonces, el conjunto $\{u_1, u_2, \ldots, u_n, w\}$ resulta l.i. Absurdo pues como $\dim(\mathbb{V}) = n$, todo conjunto l.i. tiene **a lo sumo** n elementos. Como el absurdo viene de suponer $S \neq \mathbb{V} \Rightarrow S = \mathbb{V}$.✓

S_1, S_2 se de $\mathbb{V}$

Obs: $S_1 = S_2 \iff S_1 \subset S_2 \wedge S_2 \subset S_1$

(6) $S_1 \subset S_2 \wedge \dim(S_1) = \dim(S_2) \Rightarrow S_1 = S_2$ (*)

Ej: $S_1 = \{p \in \mathbb{R}_2[x] : p(0) + p(1) = 0\}$

y $S_2 = \text{gen}\{\underbrace{x - x^2}_{p_1}, \underbrace{2 - 2x^2}_{p_2}, \underbrace{2 - x - x^2}_{p_3}\} \subset \mathbb{R}_2[x]$ ¿$S_1 = S_2$?

¿$S_1 = S_2$? ¿$S_1 \subset S_2 \wedge S_2 \subset S_1$?

$p_1(0) = 0$
$p_1(1) = 0$
$p_1(0) + p_1(1) = 0$ $p_1 \in S_1$

$p_2(0) = 2$
$p_2(1) = 0$
$p_2(0) + p_2(1) \neq 0$ $p_2 \notin S_1 \Rightarrow S_2 \not\subset S_1$
$\Rightarrow S_1 \neq S_2$

Ejemplos varios:

Sea $\mathbb{S}_a \subseteq \mathbb{R}_2[x]$ el subespacio definido por
$\mathbb{S}_a = \text{gen}\{ax^2 + x + 1, -x^2 + (a+1)x + 2, (a-1)x^2 + x + 2\}$
, con $a \in \mathbb{R}$.

Seleccione una:

- a. $\mathbb{S}_a \neq \mathbb{R}_2[x]$ si y solamente si $a \notin \{-2, 0\}$.
- b. $\mathbb{S}_a = \mathbb{R}_2[x]$ si y solamente si $a \notin \{-2, 0\}$.
- c. $\mathbb{S}_a = \mathbb{R}_2[x]$ si y solamente si $a \in \{-2, 0\}$.
- d. $\mathbb{S}_a = \mathbb{R}_2[x]$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

Obs: $S_a \subset \mathbb{R}_2[x]$ porque cada polinomio (3) son polinomios de $\mathbb{R}_2[x]$

$\dim(\mathbb{R}_2[x]) = 3 \wedge \#(S_a) = 3$

$A = \{ax^2 + x + 1, -x^2 + (a+1)x + 2, (a-1)x^2 + x + 2\}$ ¿Qué relación guardan S_a y $\mathbb{R}_2[x]$

$S_a \subset \mathbb{R}_2[x] \wedge \dim \mathbb{R}_2[x] = 3$ si probamos que A es li
$\Rightarrow$ A sería una base de S_a y en consecuencia $S_a = \mathbb{R}_2[x]$

Buscamos $a \in \mathbb{R}$: A es li

Planteamos:

$$\alpha_1(ax^2+x+1)+\alpha_2(-x^2+(a+1)x+2)+\alpha_3((a-1)x^2+x+2)=0_{\mathbb{R}_2[x]}$$

$$(a\alpha_1-\alpha_2+(a-1)\alpha_3)x^2+(\alpha_1+(a+1)\alpha_2+\alpha_3)x+(\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a\alpha_1-\alpha_2+(a-1)\alpha_3=0\\ \alpha_1+(a+1)\alpha_2+\alpha_3=0\\ \alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & -1 & a-1\\ 1 & a+1 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Busco únicamente la solución trivial para el sistema

Pedimos hallar $a\in\mathbb{R}: M=\begin{pmatrix} a & -1 & a-1\\ 1 & a+1 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$ sea invertible $\Leftrightarrow \det(M)\neq 0$

$$M\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\underbrace{M^{-1}M}_{I}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}=M^{-1}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$|M|=\left|\begin{pmatrix} a & -1 & a-1\\ 1 & a+1 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}\right| \underset{F_3\to 1F_3-F_2}{=} \begin{vmatrix} a & -1 & a-1\\ 1 & a+1 & 1\\ 0 & -a+1 & 1\end{vmatrix}$$

$$\underset{\times C_1}{=} a\begin{vmatrix} a+1 & 1\\ -a+1 & 1\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^3\begin{vmatrix} -1 & a-1\\ -a+1 & 1\end{vmatrix}=$$

$$= a(a+\cancel{1}+a-\cancel{1})-(\cancel{-1}+a^2-a-a+\cancel{1})$$

$$= a(2a)-a^2+2a = a^2+2a = a(a+2)$$

$\Rightarrow |M|\neq 0$ si $a\neq 0 \wedge a\neq -2 \Rightarrow \{p_1,p_2,p_3\}$ es li

$\Rightarrow \{p_1,p_2,p_3\}$ es base de $\mathbb{R}_2[x]$

Rta: (b)

Otro ejercicio:

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial,

sea $\{v_1,v_2,v_3\}\subset V$ un conjunto linealmente independiente,

y sea $a\in\mathbb{K}$.

El conjunto

$\{v_1+av_2+3v_3,\ 4v_1+5v_2+7v_3,\ av_1+v_2+v_3\} = A$

es linealmente independiente si y sólo si

Seleccione una:

- a. $a\neq 2$ y $a\neq 5/7$
- b. $a=2$ ó $a=5/7$
- c. $a\neq 2$
- d. Ninguna de las otras es correcta
- e. $a\neq 5/7$

Partimos de:

$$\alpha_1(v_1+av_2+3v_3)+\alpha_2(4v_1+5v_2+7v_3)+\alpha_3(av_1+v_2+v_3)=0_V$$

$$(\alpha_1+4\alpha_2+a\alpha_3)v_1+(a\alpha_1+5\alpha_2+\alpha_3)v_2+(3\alpha_1+7\alpha_2+\alpha_3)v_3=0_V$$

Como $\{v_1,v_2,v_3\}$ es Li $\Rightarrow \begin{cases}\alpha_1+4\alpha_2+a\alpha_3=0\\ a\alpha_1+5\alpha_2+\alpha_3=0\\ 3\alpha_1+7\alpha_2+\alpha_3=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 4 & a\\ a & 5 & 1\\ 3 & 7 & 1\end{pmatrix}}_{M}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Como busco que A sea li pedimos que $\exists M^{-1}$

$\therefore\ a\in\mathbb{R}\ /\ |M|\neq 0 \Leftrightarrow 5+7a^2+12-15a-7-4a\neq 0$

$\Leftrightarrow |M|\neq 0 \Leftrightarrow 7a^2-19a+10\neq 0 \Leftrightarrow (a-2)(7a-5)$

$$\begin{array}{c|ccc} & 7 & -19 & 10\\ 2 & & 14 & -10\\ \hline & 7 & -5 & 0\end{array}$$

$\Leftrightarrow 7(a-\frac{5}{7})(a-2)\neq 0$

$a\neq \frac{5}{7} \wedge a\neq 2$

Rta (a)

Otro ejemplo:

Sea $\mathbb{S}_a \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}$ el subespacio definido por

$$\mathbb{S}_a = \text{gen}\left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} a-3 & -2 \\ -2 & a-5 \end{bmatrix}}_{M_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{M_2}, \underbrace{\begin{bmatrix} a-7 & a-5 \\ 0 & a-7 \end{bmatrix}}_{M_3} \right\}$$

, con $a \in \mathbb{R}$.

Seleccione una:

- (●) a. $\dim(\mathbb{S}_a) = 3$ si y solamente si $a \notin \{3,5\}$.
- ( ) b. $\dim(\mathbb{S}_a) = 3$ si y solamente si $a \notin \{5,7\}$.
- ( ) c. $\dim(\mathbb{S}_a) = 3$ si y solamente si $a \notin \{2,7\}$.
- ( ) d. $\dim(\mathbb{S}_a) = 3$ si y solamente si $a \notin \{2,5\}$.

Como $Sa = \text{gen}\{M_1, M_2, M_3\}$ para que $\dim(Sa) = 3$ debo encontrar $a \in \mathbb{R}$ / $\{M_1, M_2, M_3\}$ sea LI

Planteamos

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} a-3 & -2 \\ -2 & a-5 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} a-7 & a-5 \\ 0 & a-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a-3)\alpha_1 + 0.\alpha_2 + (a-7)\alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 + (a-5)\alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 + 0.\alpha_3 = 0 \\ (a-5)\alpha_1 + \alpha_2 + (a-7)\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-3)\alpha_1 + 0.\alpha_2 + (a-7)\alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 + (a-5)\alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 + 0.\alpha_3 = 0 \\ (a-5)\alpha_1 + \alpha_2 + (a-7)\alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} a-3 & 0 & a-7 \\ -2 & 1 & a-5 \\ -2 & 1 & 0 \\ a-5 & 1 & a-7 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a-3 & 0 & a-7 \\ 0 & 0 & a-5 \\ -2 & 1 & 0 \\ a-5 & 1 & a-7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-5 \\ a-3 & 0 & a-7 \\ a-5 & 1 & a-7 \end{pmatrix} \sim$$

$F_2 \to F_2 - F_3$ $\quad F_1 \leftrightarrow F_3$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-5 \\ 0 & a-3 & 2a-14 \\ 0 & a-3 & 2a-14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-5 \\ 0 & a-3 & 2(a-7) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$F_3 \to 2F_3 + (a-3)F_1$

$F_4 \to 2F_4 + (a-5)F_1$

$F_4 \to F_4 - F_3$

$$\sim \begin{array}{c} \\ (2) \\ (3) \end{array} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & a-3 & 2(a-7) \\ 0 & 0 & a-5 \end{pmatrix} = B \quad \text{con } |B| = (-2)(a-3)(a-5)$$

$\Rightarrow$ Si $|B| \neq 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ única solución para el sistema

$\Rightarrow \{M_1, M_2, M_3\}$ es LI si $a \neq 3 \wedge a \neq 5$ ÚNICAMENTE

Rta (a)

Otra forma de "ver"

(3) $0.\alpha_1 + 0.\alpha_2 + (a-5)\alpha_3 = 0 \Leftrightarrow (a-5)\alpha_3 = 0 \wedge \alpha_3 = 0$ si $a-5 \neq 0$

(2) $(a-3)\alpha_2 + 2(a-7)\alpha_3 = 0 \Leftrightarrow (a-3)\alpha_2 = 0 \wedge \alpha_2 = 0$ si $a-3 \neq 0$

Seguimos

Sea $\mathbb{S}_a \subseteq \mathbb{R}^4$ el subespacio definido por
$\mathbb{S}_a = \{x \in \mathbb{R}^4 : \frac{1}{2}x_1 + ax_3 + x_4 = 0\}$ y sea

$B_a = \{\underbrace{[-a \ \ \frac{3}{2} \ \ \frac{1}{2} \ \ 0]^T}_{v_1}, \underbrace{[1 \ \ \frac{3}{2} \ \ 0 \ \ -\frac{1}{2}]^T}_{v_2}, \underbrace{[\frac{3}{2} \ \ 0 \ \ -a \ \ \frac{3}{2}]^T}_{v_3}\}$

, con $a \in \mathbb{R}$.

B_a es base de $\mathbb{S}_a$ si y sólo si ...

Seleccione una:

- a. $a = -\frac{3}{2}$.
- b. $a \notin \{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\}$.
- c. $a = \frac{3}{2}$.
- d. $a \in \{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\}$.

Obs :

- $v_1 \in S_a$

$-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a = 0$ ✓

- $v_2 \in S_a$

$\frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{2} = 0$ ✓

- $v_3 \in S_a$

$\frac{3}{4} - a^2 + \frac{3}{2} = 0$

$a^2 = \frac{9}{4} + \frac{6}{4} = \frac{9}{4}$

$\therefore |a| = \frac{3}{2} \nearrow a = \frac{3}{2}, \searrow a = -\frac{3}{2}$

$\{v_1, v_2, v_3\} \subset S_a$ solo si $a = \frac{3}{2} \vee a = -\frac{3}{2}$

Obs : $S_a : \frac{1}{2}x_1 + ax_3 + x_4 = 0 \quad \forall x_2$

$\Rightarrow x_4 = -\frac{1}{2}x_1 - ax_3$

$(x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4)^T = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ -\frac{1}{2}x_1 - ax_3)^T$

$= x_1(1 \ 0 \ 0 \ -1/2) + x_2(0 \ 1 \ 0 \ 0)^T +$

$+ x_3(0 \ 0 \ 1 \ -a)^T$

$\{(1 \ 0 \ 0 \ -1/2)^T (0 \ 1 \ 0 \ 0)^T (0 \ 0 \ 1 \ -a)^T\}$ es li $\forall a \in \mathbb{R}$

$\therefore \dim(S_a) = 3 \quad \forall a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \end{pmatrix}$$

$\underbrace{[-a \ \ \frac{3}{2} \ \ \frac{1}{2} \ \ 0]^T}_{v_1}, \underbrace{[1 \ \ \frac{3}{2} \ \ 0 \ \ -\frac{1}{2}]^T}_{v_2}, \underbrace{[\frac{3}{2} \ \ 0 \ \ -a \ \ \frac{3}{2}]^T}_{v_3}$

$gen\{v_1, v_2, v_3\} \subset S_a$ si $a = \frac{3}{2} \vee a = -\frac{3}{2}$

- $a = \frac{3}{2}$ $\{(-\frac{3}{2} \ \frac{3}{2} \ \frac{1}{2} \ 0)^T (1 \ \frac{3}{2} \ 0 \ -\frac{1}{2})^T (\frac{3}{2} \ 0 \ -\frac{3}{2} \ \frac{3}{2})^T\}$ es Li?
- $a = -\frac{3}{2}$ $\{\frac{3}{2} \ \frac{3}{2} \ \frac{1}{2} \ 0)^T (1 \ \frac{3}{2} \ 0 \ -1/2)^T (3/2 \ 0 \ 3/2 \ 3/2)^T\}$ es Li?

Tipo Ej 13 :

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$F_2 : 3F_2 + 2F_1$
$F_3 : F_3 + F_1$

$$\sim \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -12 & 18 \end{pmatrix}$$

$F_3 : 5F_3 - F_2$

$\therefore a = \frac{3}{2}$ $\{v_1, v_2, v_3\}$ es li

y $\therefore \{v_1, v_2, v_3\}$ es base de $S_{\frac{3}{2}}$

- $a = -3/2$ $\quad v_1 = (\frac{3}{2} \ \frac{3}{2} \ \frac{1}{2} \ 0)^T \ v_2 = (1 \ 3/2 \ 0 \ -1/2)^T \ v_3 = (\frac{3}{2} \ 0 \ \frac{3}{2} \ \frac{3}{2})^T$

En este caso $\alpha(\frac{3}{2} \ \frac{3}{2} \ \frac{1}{2} \ 0)^T + \beta(1 \ 3/2 \ 0 \ -1/2) = (\frac{3}{2} \ 0 \ \frac{3}{2} \ \frac{3}{2})^T$

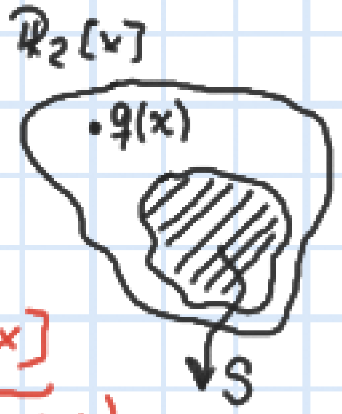
lleva a : $\underbrace{\alpha}_{(3)} \cancel{\frac{1}{2}}(3 \ 3 \ 1 \ 0)^T + \underbrace{\beta}_{(-3)} \cdot \cancel{\frac{1}{2}}(2 \ 3 \ 0 \ -1)^T = \cancel{\frac{1}{2}}(3 \ 0 \ 3 \ 3)^T$

$\therefore \{v_1, v_2, v_3\}$ es LD

Rta : $a = 3/2$ cumple con lo pedido

Tipo Ej 15

Hallar dos bases del siguiente subespacio:



$$S = \{ p \in \mathbb{R}_2[x] : p(0) + p(1) = 0 \} \subset \underbrace{\mathbb{R}_2[x]}_{\dim(\mathbb{R}_2[x]) = 3}$$

Obs: $\dim(S) < 3$ ya que $S \neq \mathbb{R}_2[x]$

¿$\dim(S) = 0$? ¿$S = \{0_{\mathbb{R}_2[x]}\}$? $p(x) = x - x^2$ $\quad p(0) = 0$, $p(1) = 0$

$\in S \wedge \neq 0_{\mathbb{R}_2[x]}$

$\Rightarrow \quad 1 \leq \dim(S) < 3$

$p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \in S$ sii $2a_0 + a_1 + a_2 = 0$

$p(0) = a_0 \quad p(1) = a_2 + a_1 + a_0 \qquad \Rightarrow a_2 = -2a_0 - a_1$

$$p(x) = (-2a_0 - a_1)x^2 + a_1 x + a_0 = \underbrace{a_0}_{\in \mathbb{R}}(-2x^2+1) + \underbrace{a_1}_{\in \mathbb{R}}(-x^2+x)$$

$\Rightarrow S = \text{gen}\{-2x^2+1, -x^2+x\}$ ✓

$\{-2x^2+1, -x^2+x\}$ es li en $\mathbb{R}_2[x]$? sí ✓

¿$\exists \alpha \in \mathbb{R} : -2x^2+1 = \alpha(-x^2+x)$? No $\quad -2 = -\alpha$, $1 = \alpha$ Abs

$\Rightarrow \{-2x^2+1, -x^2+x\}$ es una base de S y $\dim(S) = 2$

Obs: $\{2x^2-1, x^2-x\} \neq \{-2x^2+1, -x^2+x\}$

sin embargo $\{2x^2-1, x^2-x\}$ es otra base de S

Obs: $a_1 = -2a_0 - a_2$ $\qquad$ gen a S

$$p(x) = a_2 x^2 + (-2a_0 - a_2)x + a_0 = a_2(x^2 - x) + a_0(-2x+1)$$

¿$g(x) = -x^2 + 2x \in S$?

$g(0) = 0 \quad g(1) = 1 \quad g \notin S$

Prop: $\dim(S) \leq \dim(\mathbb{V})$

$A = \{-8x^2+2x+3, -4x^2-2x+3\}$ es base de S?

- $A \subset \mathbb{R}_2[x]$
- $A \subset S$ $\quad p_1(x) = -8x^2+2x+3$ $\quad p_1(0) = 3$, $p_1(1) = -3$ $\quad > p_1(0)+p_1(1) = 0$

  $p_2(x) = -4x^2-2x+3$ $\quad p_2(0) = 3$, $p_2(1) = -3$ $\quad > p_2(0)+p_2(1) = 0$
- $\{p_1(x), p_2(x)\}$ es li o $\text{gen}\{p_1(x), p_2(x)\} = S$

$$\alpha_1(-8x^2+2x+3) + \alpha_2(-4x^2-2x+3) = 0 + 0x + 0x^2$$

$$(-8\alpha_1 - 4\alpha_2)x^2 + (2\alpha_1 - 2\alpha_2)x + (3\alpha_1 + 3\alpha_2) = 0_{\mathbb{R}[x]}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -8\alpha_1 - 4\alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} -8 & -4 \\ 2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -8 & -4 \\ 0 & -12 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

$F_2 \to 4F_2 + F_1$

$F_3 \to 8F_3 + 3F_1$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -8 & -4 \\ 0 & -12 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\rightarrow} (-12)\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0$$

$F_3 \to F_3 + F_2$ $\qquad -8\alpha_1 - 4\alpha_2 = 0 \Rightarrow -8\alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$

$\therefore$ A es Li $\wedge$ $\#(A) = 2 = \overset{\alpha_2 = 0}{\dim(S)}$ $\therefore$ A es base de S

1.17 Sean $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$. Sabiendo que el espacio solución de la ecuación diferencial lineal homogénea de orden 2

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

tiene dimensión 2, comprobar que

(a) cualesquiera sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $b \neq a$, el conjunto de funciones $\{e^{ax}, e^{bx}\}$ es una base del espacio solución de la ecuación $y'' - (a+b)y' + ab\,y = 0$;

(b) para cualquier $a \in \mathbb{R}$, el conjunto de funciones $\underbrace{\{e^{ax}, xe^{ax}\}}_{A}$ es una base del espacio solución de la ecuación $y'' - 2ay' + a^2 y = 0$;

(c) cualesquiera sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $b \neq 0$, el conjunto de funciones

$$\{e^{ax}\cos(bx), e^{ax}\operatorname{sen}(bx)\}$$

es una base del espacio solución de la ecuación $y'' - 2ay' + (a^2 + b^2)y = 0$.

☞: *en cada caso, mostrar que la pareja de funciones satisface la ecuación y es linealmente independiente, el remate se obtiene por comparación de dimensiones.*

- Ese conjunto A tiene 2 elementos
- A es li? $W(e^{ax}, xe^{ax}) = \begin{vmatrix} e^{ax} & xe^{ax} \\ e^{ax}.a & e^{ax} + xe^{ax}a \end{vmatrix}$

$W(e^{ax}, xe^{ax}) = e^{2ax} + \cancel{axe^{2ax}} - \cancel{axe^{2ax}} = e^{2ax} \neq 0 \ \forall x$

$\therefore$ A es Li

- $f_1(x) = e^{ax}$ $f_2(x) = xe^{ax}$ son solución de la ED $y'' - 2ay' + a^2 y = 0$

Para $f_1(x) = e^{ax}$ es $f_1'(x) = ae^{ax}$ y $f''(x) = a^2 e^{ax}$

$f_1''(x) - 2a f_1'(x) + a^2 f_1(x) = a^2 e^{ax} - 2a^2 e^{ax} + a^2 e^{ax} = 0$

Idem con $f_2(x) = xe^{ax}$ $f_2'(x) = e^{ax} + axe^{ax}$ $f_2''(x) = 2ae^{ax} + a^2xe^{ax}$

De nuevo en $f_2''(x) - 2af_2'(x) + a^2 f_2(x) =$

$= \cancel{2ae^{ax}} + \cancel{a^2xe^{ax}} - \cancel{2ae^{ax}} - \cancel{2a^2xe^{ax}} + \cancel{a^2xe^{ax}} = 0$

$\therefore \{e^{ax}, xe^{ax}\}$ es base del espacio de soluc de la ED.

Ej 1-18 : (b) $y'' + 4y' + 4y = 0$

$\downarrow 2$

$a^2 = 4 \nearrow a = 2$ ó $\searrow a = -2$

Como $-2a = 4 \rightarrow a = -2$

$\therefore B = \{e^{-2x}, xe^{-2x}\}$

ESPACIOS FUNDAMENTALES DE UNA MATRIZ :

$A \in K^{m \times n}$ $\quad K = \mathbb{R}$ ó $K = \mathbb{C}$

cantidad de filas

cantidad de columnas

- $Nul(A) = \{ X \in K^n : Ax = 0_{K^m} \} \subset K^n$ SE de K^n

<u>Obs</u>: $A = \begin{pmatrix} Col_1(A) & Col_2(A) & \dots & Col_n(A) \end{pmatrix}$ con $Col_i(A) \subset K^m$, $i = 1, 2, \dots n$

- $Col(A) = gen\{Col_1(A), Col_2(A), \dots, Col_n(A)\} \subset K^m$ SE de K^m

<u>Obs</u>: $A = \begin{pmatrix} Fil_1(A) \\ Fil_2(A) \\ \vdots \\ Fil_m(A) \end{pmatrix}$ con $Fil_j(A) \subset K^n$, $j = 1, 2, \dots, m$

- $Fil(A) = gen\{F_1, F_2, \dots F_m\} \subset K^n$ SE de K^n

<u>Teorema 1</u>: Para toda $A \in K^{m \times n}$

$$\dim Nul(A) + \dim Col(A) = n$$ cantidad de columnas de A

<u>Teorema 2</u>: $Col(A) \subset K^m$ $\quad Fil(A) \subset K^n$

$$\dim Col(A) = \dim Fil(A)$$

<u>Obs</u>: $\dim Col(A) = \dim Fil(A) = rg(A) \to$ rango de A

<u>Obs</u>: Sea una matriz tal que $Col(A) = gen\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}^3$

¿Qué información tengo de la matriz A?

- $rg(A) = 2$ porque $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ es li $\therefore$ Base $Col(A) = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$
- $Col(A) \subset \mathbb{R}^3 \Rightarrow A \in \mathbb{R}^{3 \times n}$ $\quad n \geq 2$ y las columnas debe $\in gen\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

Ejemplos:

<u>Obs</u>: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} / gen\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\} = Col(A)$

gen Col(A)

$\in gen\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$? $\quad \underset{1}{\alpha}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \underset{1}{\beta}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \neq 2$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times2} \to Col(A) = gen\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$? <u>No</u> ✓

$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times1} \to Col(A) = gen\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$? <u>No</u>

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times2} \to Col(A) = gen\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$? <u>No</u>

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times2}$ cumple c/lo pedido pero <u>no</u> es la única.

<u>Obs</u>: Tengo información sobre Col(A) y No sobre la matriz A

$\dim Nul(A) + \underbrace{rg(A)}_{2} = n$° de columnas de A

desconocido!

Hasta acá: hasta Ej 18

Sistemas de Ecuaciones lineales :

$$\left\{\begin{array}{ll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 & \text{Ec 1} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 & \text{Ec 2} \\ \cdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m & \text{Ec m} \end{array}\right.$$

$$\Updownarrow$$

$$x \,/\, A\underbrace{x}_{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}} = b \quad \text{con } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Obs :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \end{pmatrix}$$

$$= x_1 \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}}_{Col_1(A)} + x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}}_{Col_2(A)} + x_3 \underbrace{\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}}_{Col_3(A)}$$

Como Ax indica combinación lineal de los columnas de A $\Rightarrow$

El sistema $Ax = b$ tiene solución (COMPATIBLE) si $b \in Col(A)$

Si $b \notin Col(A) \Rightarrow Ax = b$ es INCOMPATIBLE

Obs : $\left(\underbrace{A}_{m \times n} \,\vdots\, b\right) \in \mathbb{R}^{m \times (n+1)}$

SISTEMA será compatible $rg(A \,\vdots\, b) = rg(A)$