

c) Son subespacios de V ?

En $\mathbb{R}^n$

$$S_1 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_v, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_w \right\} \quad \text{NO!}$$

$$v+w \notin S_1$$

$$S_2 = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{SI!}$$

$$S_3 = \left\{ A \in \mathbb{R}^{3 \times 2} \mid a_{11} + a_{12} = 3 \right\} \quad \text{NO}$$

$$\textcircled{1} \mathbb{R}^{3 \times 2} \notin S_3$$

$$S_4 = \text{gen} \{ \sin x + 3, \cos x \}$$

$$S_4 \subseteq \{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es continua} \} \quad \text{SI}$$

$$f \in S_4 \Rightarrow f = \alpha(\sin x + 3) + \beta(\cos x)$$

$$\textcircled{1} f \in S_4 \text{ (basta tomar } \alpha = \beta = 0)$$

$$S_5 = \left\{ A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det(A) = 0 \right\} \quad \text{NO}$$

$$\begin{matrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0 \\ \text{(rows linear)} \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{A_1} \in S_5 \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{A_2} \in S_5 \quad \checkmark$$

$$A_1 + A_2 = I \notin S_5 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) El conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} a+b & 0 & a \end{bmatrix}^T : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

$$\text{Es subespacio} \quad \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$S_6 = \left\{ p \in \mathbb{R}_n[x] : p(1) = p(2) = 0 \right\}$$

$$1) \textcircled{1} \mathbb{R}_n[x] \in S_6? \quad \text{Si } \textcircled{1} p(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

polinomio nulo

$$2) p \in S_6 \quad , \quad q \in S_6$$

$$p+q \in S_6$$

$$(p+q)(1) = p(1) + q(1) = p(2) + q(2) = (p+q)(2) = 0$$

Si $\phi \in S_0$ y $\alpha \phi \in S_0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$(\alpha \phi)(1) = \alpha \cdot \phi(1) = \alpha \phi(2) = (\alpha \phi)(2) = 0$$

Como escribo un $\phi(x)$ genérico $\in S_0$

$$\phi(x) \in S_0 \quad \phi(x) = (x-1)(x-2) \cdot g(x)$$

genérico $g(x)$ es un polinomio de grado $n-2$

$$\phi(x) \in \mathbb{R}_n[x], \quad \phi(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

$$\phi(1) = 0 \Rightarrow a_0 + a_1 + \dots + a_n = 0$$

$$\phi(2) = 0 \Rightarrow a_0 + 2a_1 + \dots + 2^na_n = 0$$

$$\left\{ \phi \in \mathbb{R}_n[x] : \sum_{k=0}^n a_k = 0, \sum_{k=0}^n 2^k a_k = 0 \right\}$$

Independencia lineal de funciones

$$\{\sin x, \cos x\} \quad \text{L.I.}$$

$$\alpha \sin x + \beta \cos x = 0$$

$$\beta \neq 0 \quad -\frac{\alpha}{\beta} \sin x = \cos x$$

$$\alpha \neq 0$$

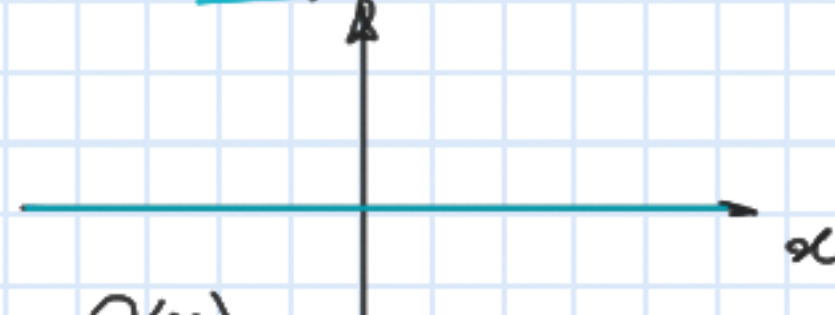
$$-\beta/\alpha = \tan x$$

no es una constante!

L.I.

¿Quién es $0(x)$?

$$0(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



$$\alpha \sin x + \beta \cos x = 0(x)$$

$$\text{Si } x = \pi/2$$

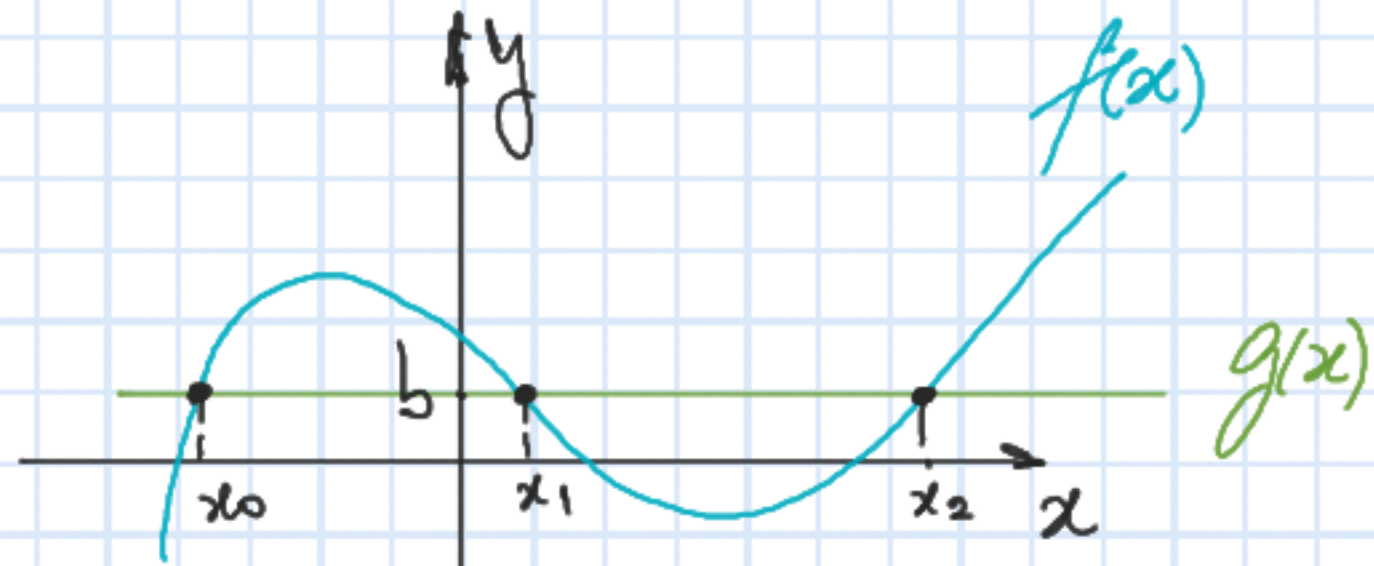
$$\alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 = 0 = 0(\pi/2) = 0$$

$$\underline{\alpha = 0}$$

$$\text{Si } x = 0$$

$$\alpha \cdot 0 + \beta \cdot 1 = 0(0) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\beta = 0}$$



$$\alpha f(x) + \beta g(x) = 0(x)$$

Elijo valores de x para armar un sistema

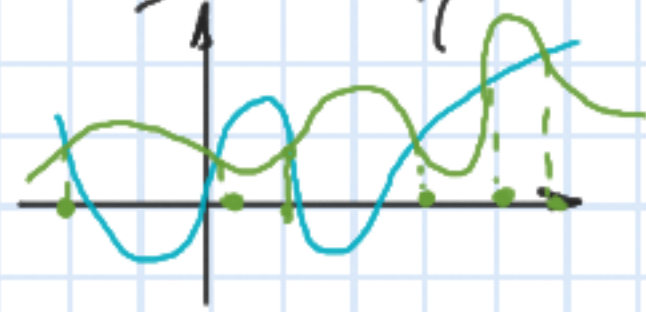
Elijo x_0 y x_1

$$\alpha f(x_0) + \beta g(x_0) = 0(x_0) = 0$$

$$b(\alpha + \beta) = 0 \quad \text{Si } b \neq 0 \quad \alpha + \beta = 0$$

$$\alpha f(x_1) + \beta g(x_1) = 0(x_1) = 0$$

$$b(\alpha + \beta) = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = 0$$



Wronskiano.

$$\{f_1, f_2, f_3, \dots, f_n\}$$

f continuas con derivada continua hasta el orden $(n-1)$
Armo una

matriz

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ f_1' & f_2' & \dots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \dots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$$f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

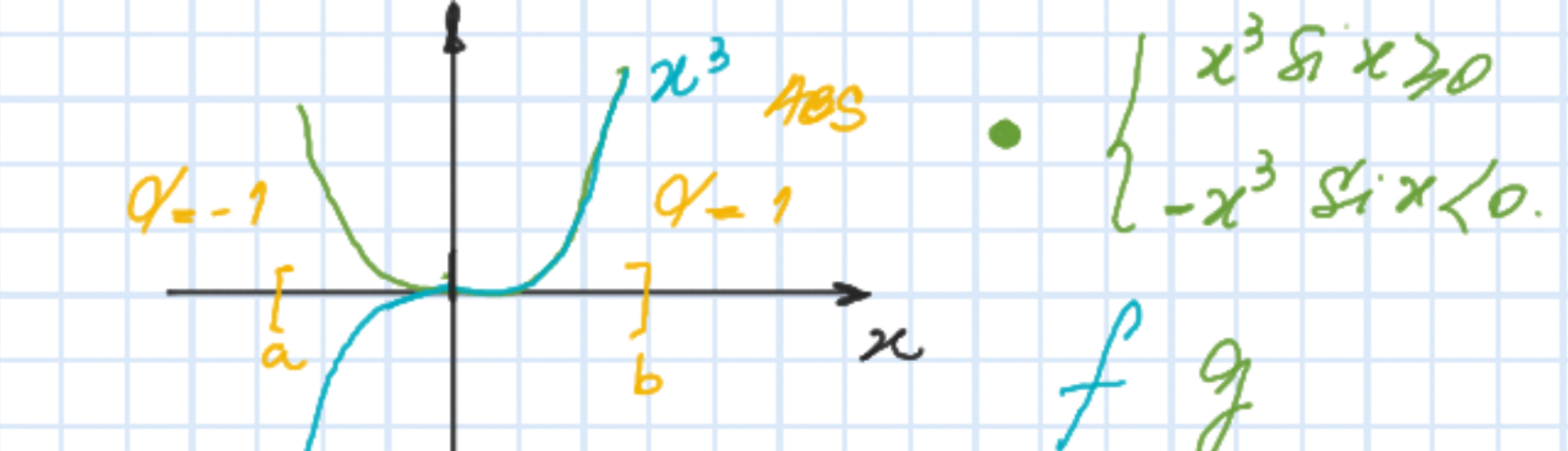
$$\text{Si } \exists x_0 \mid W(x_0) \neq 0 \Rightarrow \{f_i\} \text{ es LI} \\ 1 \leq i \leq n$$

$$\{ \sin x, \cos x \}$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} =$$

$$= -\sin^2 x - \cos^2 x = -1 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \{ \sin x, \cos x \} \text{ es LI}$$



Si tomo como dominio para f y g un $I = (a, b)$ donde $a < b < 0$

$\Rightarrow \{f, g\}$ es LI para ese intervalo

$f = -g$
Si tomo $I = (a, b)$ $0 < a < b$

$\{f, g\}$ es LI para $\forall x \in I$

Pero si $I = (a, b)$ $a < 0$

$\Rightarrow \{f, g\}$ es LI y $b > 0$.
 $\nexists \alpha \in \mathbb{R} \mid f = \alpha g \forall x \in I$

¿Sirve $W(x)$ en este caso? NO.
C Tomo dominio para ambas funciones $\mathbb{R}$

Si $x > 0$. $W(x) = \begin{vmatrix} x^3 & x^3 \\ 3x^2 & 3x^2 \end{vmatrix} =$

$0(x) = 0 \forall x$

Si $x = 0$. $f(0) = g(0) = 0$
 $W(0) = 0$

Si $x < 0$. $W = \begin{vmatrix} x^3 & -x^3 \\ 3x^2 & -3x^2 \end{vmatrix} =$

$-3x^5 + 3x^5 = 0 \forall x$

$\Rightarrow W(x) = 0 \forall x$ No puedo decir nada

$W(x)$ solo sirve para determinar si las funciones son LI

1.12 ● Hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales los siguientes subconjuntos son linealmente dependientes en su correspondiente espacio vectorial.

(a) $\left\{ \frac{1+a \sin(x)+3 \cos(x)}{f(x)}, \frac{4+5 \sin(x)+7 \cos(x)}{g(x)}, \frac{a+\sin(x)+\cos(x)}{h(x)} \right\}$ en $C^\infty(\mathbb{R})$. ✓

$\{1, \sin x, \cos x\}$ es LI ✓

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & \sin x & \cos x \\ 0 & \cos x & -\sin x \\ 0 & -\sin x & -\cos x \end{vmatrix} = -1$$

Una forma $\alpha f(x) + \beta g(x) + \gamma h(x) = 0(x)$

$$(\alpha + 4\beta + a\gamma) \underset{\circ}{1} + (\alpha + 5\beta + \gamma) \underset{\circ}{\sin x} + (3\alpha + 7\beta + \gamma) \underset{\circ}{\cos x} = 0$$

$$\begin{cases} \alpha + 4\beta + a\gamma = 0 \\ \alpha + 5\beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha + 7\beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

$$A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

S. Comp. (homog)

Si $|A| \neq 0 \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$ única solución

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & a \\ a & 5 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = (-2) - 4(a-3) + a(7a-15) = 7a^2 - 19a + 10 = 0$$

$$a = 2 \vee a = 5/7$$

Si $a \neq 2$ y $a \neq 5/7$ el conj es LI
 $\Rightarrow$ El conjunto es LD si $a = 2 \vee a = 5/7$.

(c) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{bmatrix}_{A_1}, \begin{bmatrix} 2 & a \\ 4 & 2 \end{bmatrix}_{A_2}, \begin{bmatrix} 3a+1 & 3 \\ -4 & 3a+1 \end{bmatrix}_{A_3} \right\}$ en $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

$$\alpha A_1 + \beta A_2 + \gamma A_3 = 0_{\mathbb{R}^{2 \times 2}}$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + (3a+1)\gamma = 0 \\ \alpha + a\beta + 3\gamma = 0 \\ a\alpha + 4\beta - 4\gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta + (3a+1)\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & (3a+1) \\ 1 & a & 3 \\ a & 4 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= -4a - 12 - 2(-4 - 3a) + (3a+1)(4 - a^2) =$$

$$= -3a^3 - a^2 + 14a = 0 \quad a = 0 \quad \checkmark$$

$$= a(-3a^2 - a + 14) = 0 \quad a = 2 \quad \vee \quad a = -7/3$$

Si $a \neq 0$ y $a \neq 2$ y $a \neq -7/3$

$\Rightarrow$ el conj. es LI

El conj de matrices es LD si $a = 0 \vee a = 2 \vee a = -7/3$

1.4 Sean a y b dos números reales, arbitrarios pero fijos. Comprobar que los conjuntos de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$ definidos por

$$\mathcal{G}_1 := \{e^{ax} \cos(bx), e^{ax} \sin(bx)\} \text{ y } \mathcal{G}_2 := \{e^{(a+ib)x}, e^{(a-ib)x}\}$$

generan el mismo $\mathbb{C}$ -espacio vectorial.

⚡: recordar la fórmula de Euler.

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$\text{Si } \text{gen } \mathcal{G}_1 \subset \text{gen } \mathcal{G}_2 \text{ y } \text{gen } \mathcal{G}_2 \subset \text{gen } \mathcal{G}_1 \Rightarrow \text{gen } \mathcal{G}_1 = \text{gen } \mathcal{G}_2$$

$$\begin{aligned} (1) \bullet e^{ax} \cos bx &= \alpha e^{(a+ib)x} + \beta e^{(a-ib)x} \\ &= e^{ax} (\alpha (\cos bx + i \sin bx) + \beta (\cos bx - i \sin bx)) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ i(\alpha - \beta) = 0 \end{cases} \quad \boxed{\alpha = \beta = 1/2}$$

$$\begin{aligned} (2) \bullet e^{ax} \sin bx &= \alpha' e^{(a+ib)x} + \beta' e^{(a-ib)x} \\ \alpha' + \beta' &= 0 & \beta' &= -\alpha' \\ i(\alpha' - \beta') &= 1 & 2\alpha' i &= 1 \\ \beta' &= i/2 & \alpha' &= 1/2i = -i/2 \end{aligned}$$

ver que c/u de las funciones de $\mathcal{G}_2$ se puede escribir como comb. lineal de las de $\mathcal{G}_1$ *

Tarea p/d hogar

● Sistemas

$$\underset{m \times m}{A} \underset{m \times 1}{x} = \underset{m \times 1}{D}$$

Sistema de m ecuaciones y m incógnitas.

$$\begin{pmatrix} | & | & & | \\ C_1 & C_2 & \dots & C_m \\ | & | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^m x_k C_k$$

Una C.L. de las columnas de A .

El sistema será compatible si $D \in \text{Col}(A)$
Incompatible si $D \notin \text{Col}(A)$

Siendo compatible ¿o cuándo es determinado o no sucede

$\{C_1, C_2, \dots, C_m\}$ es L.I

NOTA: $\text{Col}(A) = \text{gen} \{C_1, C_2, \dots, C_m\} \subseteq \mathbb{R}^m$

*

$$e^{(a+ib)x} = \underbrace{e^{ax}}_1 \cos bx + i \underbrace{e^{ax}}_{i} \sin bx$$

$$e^{(a-ib)x} = e^{ax} \cos bx - i e^{ax} \sin bx$$

$\mathbb{R}$

$$A x = B$$

$m \times n \quad m \times 1 \quad m \times 1$

C_i (columna i de A)

$$C_i \in \mathbb{R}^m$$

$$B \in \mathbb{R}^m$$

Sistema $\rightarrow$ ¿ $B \in \text{Col}(A)$?

Si

Sist. Comp

$$\{C_1, C_2, \dots, C_m\}$$

¿LI?

Si

Sistema Compatible determinado
Solución es única

No

Sist.

Incomp. $S = \emptyset$

no hay solución

Sistema Compatible indeterminado
Infinitas soluciones

$$S \subset \mathbb{C}$$

Siempre que trabajemos
E.V. de $\mathbb{C}$ determinamos
es el cuerpo

$$\mathbb{C} \quad \mathbb{R} \quad \mathbb{C}$$

$$S = \{(1+i)(1-i)\}$$

ES LD?

ES LI?

$$\text{Si } K = \mathbb{R}$$

Sea LI

$$\text{Si } K = \mathbb{C}$$

S es LD

$$\phi^2$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

LI?
LD?

$$\text{Si } K = \mathbb{R}$$

LI

$$\text{Si } K = \mathbb{C}$$

LD

$$(1+i) = \alpha(1-i) \Rightarrow \alpha = \frac{(1+i)}{(1-i)} \frac{(1+i)}{(1-i)} = \frac{2i}{2} = i \notin \mathbb{R}$$

1.6 En cada uno de los siguientes casos describir el subespacio $\mathbb{S}$ mediante un sistema de generadores minimal.

(a) $\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}$. *plano que contiene al origen*

(b) $\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax = 0\}$, donde $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. *$\mathbb{R}^{2 \times 1}$*

(c) $\mathbb{S} = \left\{ X \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : X \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} X \right\}$.

(d) $\mathbb{S} = \left\{ p \in \mathbb{R}_3[x] : \int_{-1}^1 p(x) dx = 0, \int_{-1}^1 xp(x) dx = 0 \right\}$.

(e) $\mathbb{S} = \{y \in C^\infty(\mathbb{R}) : y' - \lambda y = 0\}$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) $x_1 = -2x_2 - 3x_3 \Rightarrow x = \begin{pmatrix} -2x_2 - 3x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$x = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

genera $\mathbb{S}$ además es LI $\Rightarrow$ es un sistema

generador minimal

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow R_2 - 3R_1$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow 4x_2 + 8x_3 = 0 \quad x_2 = -2x_3$
 $\Rightarrow \mathbb{S} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad x_1 = -2x_2 - 3x_3 = 4x_3 - 3x_3 = x_3$

$x = \begin{pmatrix} x_3 \\ -2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$

1.7 [miniatura] Sean V un K -espacio vectorial y $\mathcal{G} = \{v_1, v_2, v_3\}$ un sistema de generadores de V . Probar que $\mathcal{G}$ es un sistema minimal de generadores de V si, y sólo si, $\mathcal{G}$ es linealmente independiente.

Ⓜ: ¿qué significa que $\mathcal{G}$ sea un sistema de generadores que no es minimal? *

$\mathcal{G}$ es un sistema generador de $V \Rightarrow \forall v \in V$
 $v = \sum_{i=1}^3 \alpha_i v_i \Rightarrow$ Si es minimal $\Rightarrow$ no se puede
generar V con menos vectores $\Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\}$ es LI

$\Leftarrow$ Si el sistema es LI y genera $V \Rightarrow$ es una
base de $V \Rightarrow$ es minimal

* Un sistema de generadores no
es minimal cuando existe otro sistema
con menos elementos que genera el mismo
subespacio.

1.8 [herramienta] Sean V un K -espacio vectorial, $\{v_i : i \in \mathbb{I}_n\} \subset V$ un conjunto linealmente independiente, y $A = [a_{ij}] \in K^{n \times n}$. Para cada $j \in \mathbb{I}_n$ se definen los vectores $w_j := \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i$. Mostrar que $\{w_j : j \in \mathbb{I}_n\}$ es linealmente independiente si, y sólo si, $\det(A) \neq 0$.

$$\{v_1, v_2, \dots, v_m\} \text{ LI} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

$$w_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} v_i =$$

$$= a_{1j} v_1 + a_{2j} v_2 + \dots + a_{mj} v_m$$

Para ver que $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ es LI planteamos

$$\textcircled{1} \quad \sum_{j=1}^m \alpha_j w_j = \sum_{j=1}^m \alpha_j \sum_{i=1}^m a_{ij} v_i =$$

$$= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} \alpha_j \right) v_i \quad \text{Como } \{v_1, v_2, \dots, v_m\} \text{ es LI} \Rightarrow \beta_i = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^m a_{ij} \alpha_j = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq m \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad \text{S.C. homogénea}$$

S.C. única solución trivial $\Rightarrow \det(A) \neq 0$

1.9  Sea V un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial. Se considera un conjunto de vectores linealmente independiente $\{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subset V$ y se definen w_1, w_2, w_3, w_4 mediante

$$w_1 := v_1 - 2v_2 + v_3 - v_4,$$

$$w_2 := -4v_1 - 2v_2 + v_4,$$

$$w_3 := 2v_1 + 3v_2 - v_3 - 3v_4,$$

$$w_4 := 17v_1 - 10v_2 + 11v_3 + v_4.$$

¿El conjunto $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ es linealmente independiente?

Si.

$$w_j = \sum_{i=1}^4 a_{ij} v_i$$

$$w_1 = \underline{a_{11}} v_1 + \underline{a_{21}} v_2 + \underline{a_{31}} v_3 + \underline{a_{41}} v_4$$

$$w_1 = 17v_1 - 10v_2 + 11v_3 + v_4$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 & 17 \\ -2 & 2 & 3 & -10 \\ 1 & 0 & -1 & 11 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -330$$

1.10 Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos son linealmente independientes en su correspondiente espacio vectorial.

(a) El subconjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$ de $\mathbb{R}^3$.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} \right\} \text{ L.I.}$$

(b) El subconjunto $\{1 + 3x - 2x^2, 3 + 5x - 6x^2, -5x + 6x^2\}$ de $\mathbb{R}[x]$.

$$\{1, x, x^2\}$$

(c) El subconjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(a) la base canónica es L.I.

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = e_1 + 3e_2 - 2e_3 \dots$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & -5 \\ -2 & -6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & -5 \\ -2 & -6 & 6 \end{vmatrix} = -24$$

$$\det(A) = -24 \Rightarrow \text{el conj. es L.I.}$$

$$b) \{1, x, x^2\} \text{ es L.I.}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & -5 \\ -2 & -6 & 6 \end{pmatrix} \text{ idem (a)}$$

$$\det(A) \neq 0 \Rightarrow \text{L.I.}$$

(c) los matrices $\in$ a un subespacio de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$

$$S = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : a_{22} = 0\}$$

$$\mathcal{B}_S = \{e_1, e_2, e_3\} \dots$$

¿Cómo resulta A?

Terminar

1.11 Determinar cuáles de los siguientes conjuntos de funciones son linealmente independientes:

(a) $\mathcal{T} = \{1, \sin(x), \cos(x)\}$. $\mathcal{B}$: calcular el Wronskiano de $\mathcal{T}$. $\mathcal{L I}$

(b) $\mathcal{G} = \{1 + 3\sin(x) - 2\cos(x), 3 + 5\sin(x) - 6\cos(x), -5\sin(x) + 6\cos(x)\}$. $\mathcal{L I}$

(c) $\hat{\mathcal{G}} = \{1 + 2\sin(x) + 3\cos(x), 4 + 5\sin(x) + 7\cos(x), 2 + \sin(x) + \cos(x)\}$. $\mathcal{L D}$

$$(a) W(x) = \begin{vmatrix} 1 & \sin x & \cos x \\ 0 & \cos x & -\sin x \\ 0 & -\sin x & -\cos x \end{vmatrix} = -\cos^2 x - \sin^2 x = -1 \neq 0$$

$\Rightarrow$
el conj. es $\mathcal{L I}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & -5 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$ $\checkmark$ $\det(A) \neq 0$
 Resulta $\mathcal{L I}$ como? $\Rightarrow$

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ $\det(A) = ?$

$\mathcal{D}$ conjuntos resulta $\mathcal{L D}$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$1 + 2\sin x + 3\cos x = \alpha(4 + 5\sin x + 7\cos x) + \beta(2 + \sin x + \cos x)$$

$$\begin{aligned} 1 &= 4\alpha + 2\beta \\ 2 &= 5\alpha + \beta \\ 3 &= 7\alpha + \beta \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & | & 1 \\ 5 & 1 & | & 2 \\ 7 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ 4f_2 - 5f_1 \\ 4f_2 - 7f_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & | & 1 \\ 0 & -6 & | & 3 \\ 0 & -10 & | & 5 \end{pmatrix}$$

$$-6\beta = 3 \quad (\beta = -1/2)$$

$$\alpha(4 + 2(-1/2)) = 1$$

$$W_1 = 1/2 W_2 - 1/2 W_3 \quad \alpha = 2/4 = 1/2$$

$$\{W_1, W_2, W_3\} \text{ es } \mathcal{L D}.$$

1.12 Hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales los siguientes subconjuntos son linealmente dependientes en su correspondiente espacio vectorial.

(b) $\{ \underbrace{1 + 2ax + x^2 + 2x^3}_{p_1}, \underbrace{2 + ax + 4x^2 + 8x^3}_{p_2}, \underbrace{x^2 + 2x^3}_{p_3} \}$ en $\mathbb{R}_3[x]$.

(c) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & a \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3a+1 & 3 \\ -4 & 3a+1 \end{bmatrix} \right\}$ en $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

$$\alpha_1(1 + 2ax + x^2 + 2x^3) + \alpha_2(2 + ax + 4x^2 + 8x^3) + \alpha_3(x^2 + 2x^3) = 0(x)$$

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0$$

$$2a\alpha_1 + a\alpha_2 = 0$$

$$\alpha_1 + 4\alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

$$2\alpha_1 + 8\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2a & a & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$a - 4a \neq 0$$

$$a \neq 0$$

Si $a \neq 0 \Rightarrow$ son LI

1.6 En cada uno de los siguientes casos describir el subespacio $\mathbb{S}$ mediante un sistema de generadores minimal.

(c) $\mathbb{S} = \left\{ X \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : X \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} X \right\}$.

(d) $\mathbb{S} = \left\{ p \in \mathbb{R}_3[x] : \int_{-1}^1 p(x) dx = 0, \int_{-1}^1 xp(x) dx = 0 \right\}$.

(e) $\mathbb{S} = \{ y \in C^\infty(\mathbb{R}) : y' - \lambda y = 0 \}$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$.

(c) $\mathbb{S} = \left\{ X \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : X \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} X \right\}$.

$$X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$X \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} & 3a_{12} \\ 2a_{21} & 3a_{22} \end{pmatrix}$$

listo $\neq a_{11}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} \\ 3a_{21} & 3a_{22} \end{pmatrix}$$

listo $\neq a_{22}$

$$3a_{12} = 2a_{12} \Rightarrow a_{12} = 0$$

$$2a_{21} = 3a_{21} \Rightarrow a_{21} = 0$$

$$X = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathbb{S} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(d) S = \left\{ p \in \mathbb{R}_3[x] : \int_{-1}^1 p(x) dx = 0, \int_{-1}^1 xp(x) dx = 0 \right\}.$$

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

$$\int_{-1}^1 p(x) dx = 0 \quad \int_{-1}^1 (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) dx = 0$$

$$2a_0 + 0 + \frac{2}{3}a_2 + 0 = 0$$

$$3a_0 = -a_2$$

$$\int_{-1}^1 (a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + a_3x^4) dx = 0$$

$$0 + \frac{2}{3}a_1 + 0 + \frac{2}{5}a_3 = 0$$

$$a_1 = -\frac{3}{5}a_3$$

$$p(x) \in S \quad p(x) = a_0 - \frac{3}{5}a_3x - 3a_0x^2 + a_3x^3 =$$

$$= a_0(1 - 3x^2) + a_3(-\frac{3}{5}x + x^3) \Rightarrow$$

$$S = \text{gen} \left\{ (1 - 3x^2), (-\frac{3}{5}x + x^3) \right\}$$

LI

$\Rightarrow$ Sistema minimal de generadores.

$$(e) S = \{ y \in C^\infty(\mathbb{R}) : y' - \lambda y = 0 \}, \text{ donde } \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$y' - \lambda y = 0 \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$y' = \lambda y \quad \frac{y'}{y} = \lambda \Rightarrow$$

$$(\ln y)' = \lambda$$

$$\ln y = \lambda x + c$$

$$y = k e^{\lambda x}$$

$$\{ e^{\lambda x} \}$$

$$1.3 \bullet \text{ Sean } A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Comprobar que $B \in \text{gen}\{A_1, A_2, A_3\}$ y hallar 3 maneras diferentes de representar B como combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 .

$\text{gen}\{A_i\} \subsetneq \text{gen}\{A_i, A_j\}$

esto me dice que $\{A_1, A_2, A_3\}$ es LI

(b) Hallar una sistema de generadores del subespacio S de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T : x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 = 0_{2 \times 2} \right\}.$$

(c) Representar cada una de las matrices A_i como una combinación lineal de las otras dos.

$\Downarrow$

(d) Comprobar que para cada pareja $(i, j) \in I_3$ tal que $i \neq j$ se verifica que

$$\{0\} \subsetneq \text{gen}\{A_i\} \subsetneq \text{gen}\{A_i, A_j\} \subsetneq \text{gen}\{A_1, A_2, A_3\}$$

$\{A_1, A_3\}$

$$\text{gen}\{A_1\} \subsetneq \text{gen}\{A_1, A_2\}$$

$$\text{gen}\{A_1\} + \text{gen}\{A_1, A_2\} \xrightarrow{\text{LI}}$$

$$\text{gen}\{A_2\} \subsetneq \text{gen}\{A_2, A_3\}$$

$$\text{gen}\{A_1\} \subsetneq \text{gen}\{A_1, A_2\} \text{ as\u00eda}$$

Sean $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

$$A_3 = \frac{1}{2}(A_1 + A_2) \quad B = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot A_3$$

$$\alpha + \beta = 2 \quad \alpha - \beta = -1$$

$$B = \underset{0}{\alpha} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \underset{1}{\beta} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot A_3$$

Hay infinitas formas de escribir B como cl de
de A_1, A_2, A_3

Base de un $S \subseteq V - K$
Subespacio vectorial

Conjunto de vectores que generan S y forman un conj. LI
Conjunto generador minimal.