PRELIMINARES:

1) TENER EN CUENTA LAS PRELIMINARES DE CADA GUÍA SOBRE TODO LA NOTACIÓN

2) VAMOS A IR ACOMPAÑANDO EL CRONOGRAMA DE LOS CURSOS REGULARES

3) ESTAR ATENTOS AL CAMPUS 3

4) LEER EL REGLAMENTO DE ESTE CURSO

5) PARA LOS ENCUENTROS DE LA PRÁCTICA DISCORD

6) LOS ENCUENTROS VIRTUALES TENDRÁN CARACTER TEORICO/PRACTICO PERO NO REPETIREMOS DE MANERA TEXTUAL LOS PROBLEMAS DE LA PRÁCTICA (EN LA MEDIDA DE LAS POSIBILIDADES)

7) NO SE GRABAN LOS ENCUENTROS DE MEET

8) • DURANTE ESTA SEMANA DEBEN MANDAR MAIL CON LOS DATOS SOLICITADOS. ASUNTO; CURSADA cuatrimestre – docente – última fecha de coloquio

OYENTE

9) CAMBIO DE CURSO ⟶ Dto. (EN ESTA SEMANA)

nperalta@fi.uba.ar

10) CORREO FIUBA

Definición de Espacio Vectorial

Un espacio vectorial, consta de:

- Un conjunto $\mathbb{V}$ de objetos que llamaremos vectores;
- Un conjunto $\mathbb{K}$ de escalares ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$, o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$); $+ \, (+)$ $\cdot \, (\cdot)$ con sus propiedades
- Una operación, llamada suma, definida entre los elementos del conjunto $\mathbb{V}$, que cumple $u + v \in \mathbb{V}$;
- Una operación llamada producto por escalar, que asocia a cada escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ y cada vector $u \in \mathbb{V}$ el vector $\lambda.u \in \mathbb{V}$.

Además las operación suma y producto por escalar deberán cumplir:

$+$
- $u + v = v + u, \quad \forall u, v \in \mathbb{V}$ (conmutatividad);
- $u + (v + w) = (u + v) + w = u + v + w, \quad \forall u, v, w \in \mathbb{V}$ (asociatividad);
- $\exists\, \mathbb{O}_{\mathbb{V}} \in \mathbb{V} / u + \mathbb{O}_{\mathbb{V}} = \mathbb{O}_{\mathbb{V}} + u = u$ (Existencia del elemento neutro para la suma);
- $\forall u \in \mathbb{V}, \exists\, (-u) \in \mathbb{V}$ tal que $u + \underbrace{(-u)}_{\text{opuesto de } u} = \mathbb{O}_{\mathbb{V}}$ (Existencia del inverso aditivo para todo elemento de $\mathbb{V}$);

$\cdot$
- $1.u = u, \quad \forall u \in \mathbb{V}$;
- $(\lambda\beta).u = \lambda.(\beta.u), \quad \forall \lambda, \beta \in \mathbb{K}$ y $\forall u \in \mathbb{V}$;
- $\lambda.(u + v) = \lambda.u + \lambda.v, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$ y $\forall u, v \in \mathbb{V}$
- $(\lambda + \beta).u = \lambda.u + \beta.u, \quad \forall \lambda, \beta \in \mathbb{K}$ y $\forall u \in \mathbb{V}$

Indicando $(\mathbb{V}, \underbrace{+}_{\text{de "suma"}}, \mathbb{K}, \underbrace{\cdot}_{\text{y "producto"}})$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con las ope

Ej: $\underbrace{\mathbb{V} = \mathbb{R}^n}_{\text{objetos}}$ $\underbrace{K = \mathbb{R}}_{\text{escalares}}$

$+ : X \in \mathbb{R}^n, Y \in \mathbb{R}^n \Rightarrow X + Y \underset{\text{habitual}}{=} \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ (cerrada)

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$\cdot \quad \lambda \in \mathbb{R} \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda X = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ (cerrada)

$(\mathbb{R}^n, +, \mathbb{R}, \cdot)$ es un $\mathbb{R}$ espacio vectorial si $+$ y $\cdot$ verifican todas las propiedades anteriores entre otras por ej:

- $X + Y = Y + X$

$$Y + X = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \underset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} y_1+x_1 \\ y_2+x_2 \\ \vdots \\ y_n+x_n \end{pmatrix} \overset{+ \text{ conmutativa en } \mathbb{R}}{=} \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix} \underset{\text{def} +}{=} X + Y$$

- $\lambda \cdot (X + Y) = \lambda \cdot X + \lambda \cdot Y$

$$\lambda \cdot (X+Y) = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix} \underset{\text{def} \cdot}{=} \begin{pmatrix} \lambda(x_1+y_1) \\ \vdots \\ \lambda(x_n+y_n) \end{pmatrix} \overset{\text{prop de } + \text{ y } \cdot \text{ en } \mathbb{R}}{=} \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \lambda y_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n + \lambda y_n \end{pmatrix} =$$

$\lambda \in \mathbb{R}$

$$= \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda y_1 \\ \vdots \\ \lambda y_n \end{pmatrix} \underset{\text{def de producto por escalar}}{=} \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \cdot X + \lambda \cdot Y$$

$+ \; 0_V = ?$ $\quad 0_V = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} / X + 0_V = X \Rightarrow 0_{\mathbb{R}^n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Ob: $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$ $K = \mathbb{C}$ con $+$ y $\cdot$ definidos de la manera habitual

$(\mathbb{R}^n, +, \mathbb{C}, \cdot)$ es E.V ? NO

CONTRAEJEMPLO: $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$ $K = \mathbb{C}$ $\lambda = i$ $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(n=2)$

$$\lambda X = i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \cdot 1 \\ i \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} \notin \mathbb{R}^2$$

Otros ejemplos de E.V:

- $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{m \times n}$ (tamaño u orden) $\quad K = \mathbb{R}$ $\quad \pm$ y $\cdot$ habituales

$A, B \in \mathbb{R}^{m\times n} \Rightarrow A + B \in \mathbb{R}^{m \times n} / (A \pm B)_{ij} = (A)_{ij} \overset{\text{suma en } \mathbb{R}}{+} (B)_{ij}$

$\lambda \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}^{m\times n} \Rightarrow \lambda A \in \mathbb{R}^{m\times n} / (\lambda A)_{ij} = \lambda \underset{\text{producto en } \mathbb{R}}{\cdot} (A)_{ij}$

$\Rightarrow \mathbb{R}^{m\times n}$ es un $\mathbb{R}$-E.V con las op. habituales

con $\mathbb{R}[x]$ o $\mathbb{C}[x]$

- $\mathbb{V} = K[x]$ (polinomios) K (escalares) con $\pm$ y $\cdot$ por escalar habituales

$p, q \in K[x]$ $\quad p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ $\quad q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$ $\quad \Rightarrow (p \pm q)(x) = \sum_{k=0}^{n} \underset{\text{suma en } \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}}{(a_k + b_k)} x^k$

$\lambda \in K, p \in K[x]$ $\quad (\lambda p)(x) = \sum_{k=0}^{n} \overset{\text{producto en } \mathbb{R}\ \mathbb{C}}{(\lambda a_k)} x^k$

$\Rightarrow K[x]$ es un K espacio vectorial con las op. habituales q.v.q ("quiero ver que") por ej.

- $\underline{(\lambda+\beta)\cdot p(x)} = \underline{\lambda.p(x) + \beta\, p(x)}$ $\lambda,\beta \in K$ $p \in K[x]$ en $\mathbb{R}$ o en $\mathbb{C}$

$$(\lambda+\beta)\cdot p(x) = (\lambda+\beta)\cdot\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \underset{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{n} (\lambda+\beta)a_k x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k + \beta a_k)x^k = \sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k x^k + \beta a_k x^k)$$

$$= \underline{\sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k)x^k + \sum_{k=0}^{n} (\beta a_k)x^k} \;//$$

$$\underline{\lambda p(x) + \beta p(x)} = \sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k)x^k + \sum_{k=0}^{n} (\beta a_k)x^k$$

Obs: $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in K[x]$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Ej: $p(x) = \underset{a_0}{-1} + \underset{a_1}{1}x \underset{a_2}{-2}x^2$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\in \mathbb{R}_2[x]$

$p(1) = -1+1-2 = -2$
$p(0) = -1$
$p(4) = -1+4-2.16 = -29$

valor numérico de p para c/uno de esos "x"

Ej: $q(x) = -1 + x - 2x^2 + 0.x^{10} \to gr(q) = 2$

- Si $a_n \neq 0 \Rightarrow gr(p) = n$

- $\mathbb{V} = C(I)$ $\quad K$ escalares ($\mathbb{R}$ / $\mathbb{C}$) con $I \subset \mathbb{R}$

$C(I) = \{ f : I \subset \mathbb{R} \to K \,/\, f \text{ es una función continua} \}$

Ej: $f : \underbrace{[0,1]}_{I} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = x^2 \in C([0,1])$

Ej 2: $f : \underbrace{\mathbb{R}}_{I} \to \underbrace{\mathbb{C}}_{K} \,/\, f(x) = e^{ix} = \cos(x) + i\,\text{sen}(x) \in C(\mathbb{R},\mathbb{C})$

$I \subset \mathbb{R}$

$f,g \in C(I) \Rightarrow f+g \in C(I) : (f+g)(x) = f(x)+g(x)$ $\forall x \in I$ (suma en $\mathbb{R}$ o en $\mathbb{C}$)

$\lambda \in K, f \in C(I) \Rightarrow \lambda.f \in C(I) : (\lambda f)(x) = \lambda.f(x)$ $\forall x \in I$ (producto en $\mathbb{R}$ o en $\mathbb{C}$)

¿ 0_V ? → función nula !

$f + 0_V = f$ $\forall x \in I$

$\Updownarrow$

$(f + 0_V)(x) = f(x)$ $\forall x \in I$

$f(x) + 0_V(x) = f(x)$ $\forall x \in I$ (suma en $\mathbb{R}$ o en $\mathbb{C}$)

$\Rightarrow 0_V : I \subset \mathbb{R} \to K \,/\, 0_V(x) = 0$ $\forall x \in I$

También se indica 0_f función nula

Obs: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = x^2 - 1 \neq 0_f(x)$ aunque $f(1) = 0 \wedge f(-1) = 0$

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = \cos(x)$ $\quad \cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

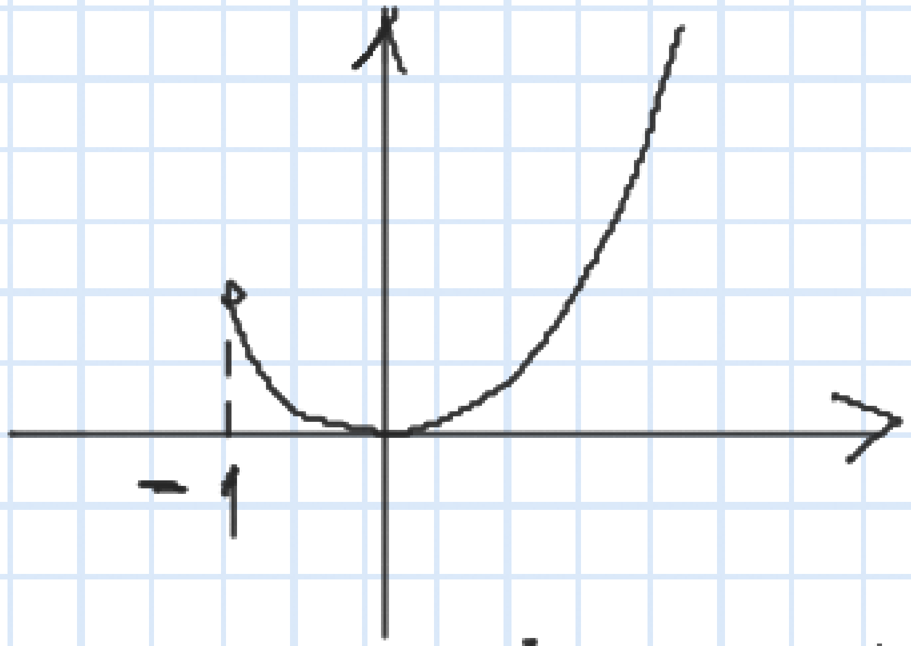
Otra de las propiedades: 4) $f + \underbrace{(-f)}_{\text{opuesto de } f} = 0_f$

Debe ser $[f \underset{\text{suma de } f}{+} (-f)](x) = 0_f(x)$ $\forall x \in I \subset \mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x) + (-f)(x) = 0 \Rightarrow (-f)(x) = -f(x)$ $\forall x \in I$

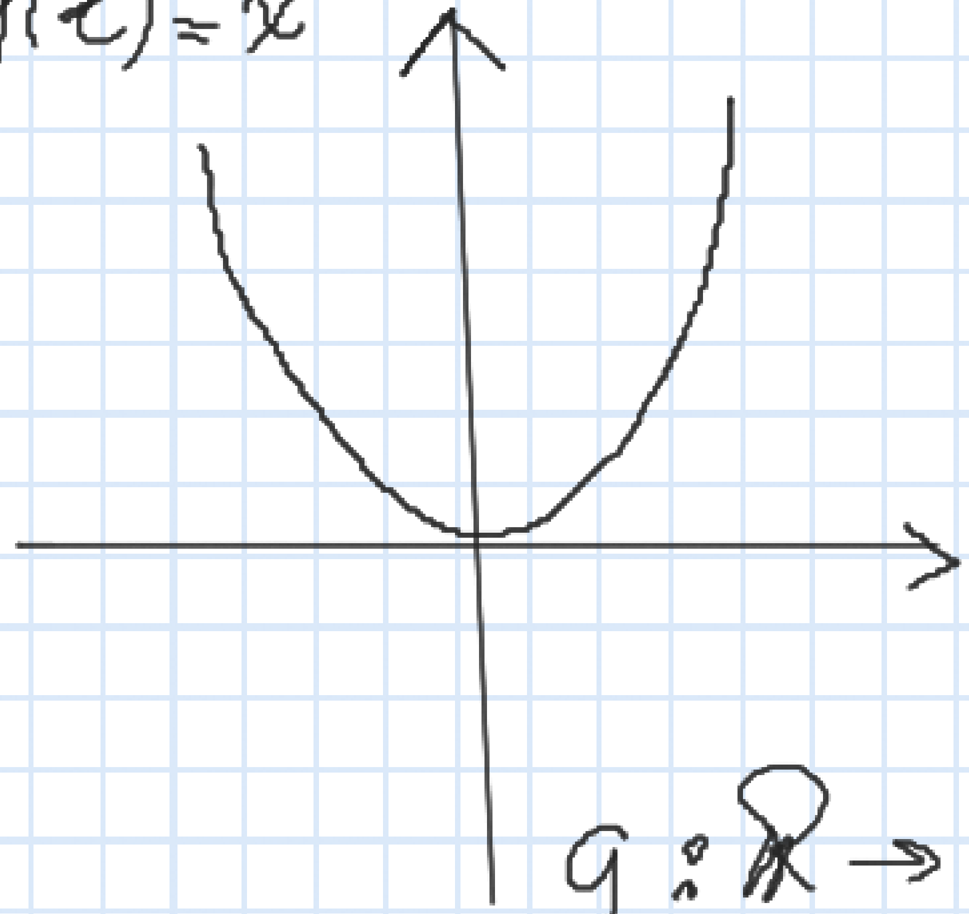
Ej: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = 2x^4 - 5x \Rightarrow -f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, (-f)(x) = -2x^4 + 5x$

$f(x) = x^2$



$f : [-1, \infty) \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = x^2$

$g(x) = x^2$



$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, g(x) = x^2$

$f \neq g$

Propiedades elementales

para cualquier EV

A partir de los axiomas se pueden demostrar las siguientes propiedades:

1 ▶ El elemento neutro $\mathbb{O}_{\mathbb{V}} \in \mathbb{V}$ es único.

2 ▶ El simétrico de un elemento $u \in \mathbb{V}$ es único. $(-u)$

3 ▶ $0\,u = \mathbb{O}_{\mathbb{V}}$ para todo $u \in \mathbb{V}$.

4 ▶ $\lambda \mathbb{O}_{\mathbb{V}} = \mathbb{O}_{\mathbb{V}}$ para todo escalar $\lambda \in \mathbb{K}$.

5 ▶ Si $\lambda u = \mathbb{O}_{\mathbb{V}}$ entonces $\lambda = 0$ o $u = \mathbb{O}_{\mathbb{V}}$.

6 ▶ $(-1)u = (-u)$.

5) $\underbrace{\lambda u = 0_V}_{H} \Rightarrow \underbrace{\lambda = 0 \vee u = 0_V}_{T}$ $\quad \lambda \in K\ (\mathbb{R}$ o $\mathbb{C})$

- Si $\lambda = 0 \Rightarrow$ nada menos hay que probar $(0u = 0_V)$ el V es verdadero

- Si $\lambda \neq 0$ q.v.q $u = 0_V$

Parto de $\lambda u = 0_V$

$\lambda \neq 0$ $\quad \frac{1}{\lambda}(\lambda u) = \frac{1}{\lambda} \cdot 0_V$) usando (4)

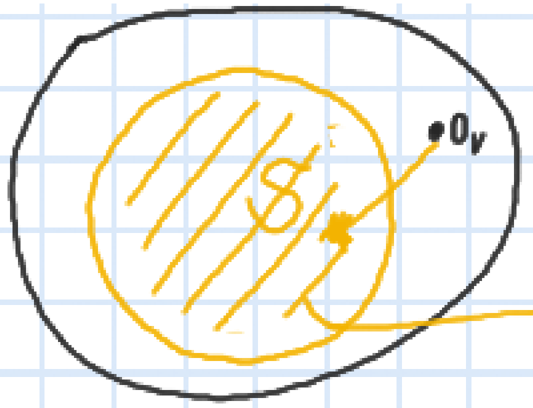
(prop de EV) $\Rightarrow \left(\frac{1}{\lambda} \cdot \lambda\right) u = 0_V$

$1 \cdot u = 0_V \Rightarrow u = 0_V$

Subespacios

Definición: Un subespacio de un $\mathbb{K}$ espacio vectorial $\mathbb{V}$, es un subconjunto $S \subset \mathbb{V}$, $S \neq \emptyset$ que resulta ser un espacio vectorial con la suma y el producto por escalar definidos. en $\mathbb{V}$

Obs :



$\underbrace{\mathbb{V}}_{\text{objetos}}$ + · $\underbrace{K}_{\text{escalares}}$ E.V.

Espacio vectorial con + y · habit.

Ej : $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3 \quad K = \mathbb{R} \quad$ + y · habituales

$S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$ es SE de $\mathbb{R}^3$? ¿ $0_{\mathbb{R}^3} \in S$?

$\neq \emptyset \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in S$ ✓

¿ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in S$? No $\therefore$ S No es EV $\therefore$ S no es S.E !!!

Ej : $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2 \quad K = \mathbb{R} \quad$ +, · hab.

$S = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \cdot x_2 = 0\}$ es SE de $\mathbb{R}^2$?

$S \neq \emptyset \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in S$ ✓ $\quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in S$? $\quad 0 \cdot 0 = 0$ ✓ $\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in S$ no es suf

- $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in S \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in S \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in S$? No $\Rightarrow$ S no es EV $\therefore$ S no es SE

Si $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{K}$ espacio vectorial, se dice que $S \subset \mathbb{V}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$ si se cumple:

- 1. $\mathbb{O}_{\mathbb{V}} \in S$;
- 2. Si $u, v \in S \Rightarrow u + v \in S$;
- 3. Si $u \in S$ y $\lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda u \in S$.

$\mathbb{V}$ $+, \cdot$ cerradas más 8 axiomas

Ej: $S = \{ p \in \mathbb{R}[x] : p(0) + p(1) = 0 \}$ es SE de $\mathbb{R}[x]$ con las operaciones habituales.

Alcanza con probar que 1) $0_{\mathbb{R}[x]} \in S$ ✓

2) $p, q \in S \Rightarrow p+q \in S$ (cerrado $+$)

3) $\lambda \in \mathbb{R}, p \in S \Rightarrow \lambda p \in S$ (cerrado $\cdot$)

Obs: $p(x) = -1 + x - x^2 \in S$? $p(0) = -1$ $p(1) = -1$

$p(0) + p(1) = -2 \neq 0 \quad \therefore \; -1 + x - x^2 \notin S$

1) $0_{\mathbb{R}[x]}(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad 0_{\mathbb{R}[x]}(0) = 0 \quad 0_{\mathbb{R}[x]}(1) = 0$

$\Rightarrow 0_{\mathbb{R}[x]}(0) + 0_{\mathbb{R}[x]}(1) = 0 \quad \therefore \; 0_{\mathbb{R}[x]} \in S$ ✓

2) $p, q \in S$ q.v.q $p + q \in S$

$(p+q)(0) = p(0) + q(0)$ por def de $+$ de polinomios

$+$ $(p+q)(1) = p(1) + q(1)$ " "

Sumo

$(p+q)(0) + (p+q)(1) = p(0) + q(0) + p(1) + q(1)$

$= \underbrace{(p(0) + p(1))}_{\substack{0 \\ p \in S}} + \underbrace{(q(0) + q(1))}_{\substack{0 \\ q \in S}}$

$= 0 \Rightarrow p+q \in S$

Nota: $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ $\quad p(0) = a_0$ $\quad (p \neq 0_{\mathbb{R}[x]})$

$p(1) = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$

3) $\lambda \in \mathbb{R}, p \in S \Rightarrow$ q.v.q $\lambda p \in S$

$(\lambda p)(0) = \lambda p(0)$ def.

$+$ $(\lambda p)(1) = \lambda p(1)$

Sumo

$(\lambda p)(0) + \lambda p(1) = \lambda p(0) + \lambda p(1) = \lambda \underbrace{(p(0) + p(1))}_{=0 \; p \in S} = \lambda . 0 = 0$

$\Rightarrow \lambda p \in S$

Por 1) 2) y 3) S es SE de $\mathbb{R}[x]$ con la suma y producto hab

Obs: $\underbrace{p(x) = -1 + x^2}_{\neq 0_{\mathbb{R}[x]}}$ $\quad p(1) = 0 \quad p(-1) = 0$

$0_{\mathbb{R}[x]} = 0 + 0x + 0x^2 + \cdots + 0 . x^n$ no tiene definido el gr

• $S = \{ p \in \mathbb{R}[x] : gr(p) = 2 \}$ es SE de $\mathbb{R}[x]$?

$p(x) = -2x^2 + 1 \in S \wedge q(x) = 2x^2 - x \in S \wedge (p+q)(x) = 1 - x$

$gr(p+q) = 1$

Ejercicio 2

(d) Para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $\{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k : a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}[x]$.

$S_1 = \{ p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,\ a_i \in \mathbb{R}\ i = 0,1,2,\ldots n \}$ SE de $\mathbb{R}(x)$

(1) $0_{\mathbb{R}[x]} \in S_1$ porque $0_{\mathbb{R}(x)} = \underbrace{0}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{0}_{\in\mathbb{R}}.x + \underbrace{0}_{\in\mathbb{R}}.x^2 + \cdots + \underbrace{0}_{\in\mathbb{R}}.x^n$

(2) $p \in S_1 \wedge q \in S_1$ $\quad p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \quad a_i \in \mathbb{R}\ i = 1,..,n$
$q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n \quad b_i \in \mathbb{R}$

¿$p+q \in S_1$? $\quad (p+q)(x) = \underbrace{(a_0+b_0)}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{(a_1+b_1)}_{\in\mathbb{R}} x + \cdots + \underbrace{(a_n+b_n)}_{\in\mathbb{R}} x^n$

$\Rightarrow p+q \in S_1$

(3) $\alpha \in \mathbb{R}$ $p \in S_1$ $\quad p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$
$\alpha p(x) = \underbrace{(\alpha a_0)}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{(\alpha a_1)}_{\in\mathbb{R}} x + \cdots + \underbrace{(\alpha a_n)}_{\in\mathbb{R}} x^n$

$\therefore \alpha p \in S_1$

(1)(2)(3) S_1 es SE de $\mathbb{R}[x]$

(e) Para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto de funciones

$$S = \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos(2k\pi t) + b_k \operatorname{sen}(2k\pi t)] : a_0, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R} \right\}$$

es un subespacio de $C^\infty(\mathbb{R})$.

$f(t) = \underbrace{\frac{a_0}{2} + a_1 \cos(2\pi t) + b_1 \operatorname{sen}(2\pi t)}_{k=1} + \underbrace{\frac{a_0}{2} + a_2 \cos(4\pi t) + b_2 \operatorname{sen}(4\pi t)}_{k=2} +$
$+ \cdots \underbrace{\frac{a_0}{2} + a_n \cos(2n\pi t) + b_n \operatorname{sen}(2n\pi t)}_{k=n}$

$0_f(t) \in S \quad 0_f(t) = \frac{0}{2} + 0 \cos(2\pi t) + 0 . \operatorname{sen}(2\pi t) + \frac{0}{2} + 0 . \cos(4\pi t) + \cdots$
$+ 0 . \operatorname{sen}(2\pi n t)$

$0_f(t) \in S$ porque basta tomar $a_0 = 0 \wedge \underset{k=1,\ldots n}{a_k = 0} \wedge \underset{k=1,\ldots n}{b_k = 0}$

$f, g \in S \Rightarrow f+g \in S$
$\lambda \in \mathbb{R}, f \in S \Rightarrow \lambda f \in S$ (falta probar) tarea

Combinación lineal

Definición: Un vector $w \in \mathbb{V} - \mathbb{K}$ espacio vectorial, es **combinación lineal** de un conjunto de vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ en $\mathbb{V}$, si existen escalares, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tales que:

$$w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i}_{\text{notación}} .$$

Ej: $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$ $K = \mathbb{R}$

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$

¿ $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ es CL de $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$?

$\Leftrightarrow$ ¿ $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$: $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$?

¿ $\exists \lambda_1 \lambda_2 \in \mathbb{R}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$? $\Leftrightarrow$ ¿ $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$: $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$?

¿ $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$; $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$? $\lambda_1 = 3$

$\therefore$ $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ es comb. lineal de $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ✓

- $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ es CL de $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$? $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ no es CL de $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$\underbrace{\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}}_{\text{No!}}$; $\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$? $\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 1 \\ 0.\lambda_1 + 0\lambda_2 = -2 \text{ (Abs)} \end{cases}$

gen$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ representa el conjunto de todas las combinaciones lineales posibles entre los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

En el ej: $\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2} \right\} \subset \mathbb{R}^2$

gen $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$ ∞ vectores

$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in$ gen $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \in$ gen $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

En el otro ej: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

gen $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \overbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}}^{2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\} = $ gen $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$= \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$ $\lambda_1 + 2\lambda_2$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \notin$ gen $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Obs: $\underbrace{\{v_1, v_2, \ldots v_n\}}_{\text{conjunto finito}} \subset \underbrace{\text{gen}\{v_1, v_2, \ldots v_n\}}_{\text{conj. infinito de vectores}}$!!!

Algunos resultados importantes

Observación: Si $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{V} - \mathbb{K}$ espacio vectorial
$\Rightarrow$ gen$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es siempre un $\boxed{\text{subespacio}}$ de $\mathbb{V}$. Y se nombra como **el subespacio generado** por $v_1, \ldots v_n$.

Otro ejemplo :

$\mathbb{V} = \mathbb{R}_2[x]$ $K = \mathbb{R}$ $+$ y $\cdot$ habituales

$p \in \mathbb{R}_2[x]$ si $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ polinomio de grado ≤ 2

Tomo $\{1 - x + x^2, -3 + 2x\} \subset \mathbb{R}_2[x]$

¿ $2 - 5x + 3x^2 \in$ gen $\{1 - x + x^2, -3 + 2x\}$?

$\Leftrightarrow$ ¿ $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : \lambda_1(1 - x + x^2) + \lambda_2(-3 + 2x) = 2 - 5x + 3x^2$?

$\Leftrightarrow$ ¿ $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \Big/ \begin{cases} \lambda_1 - 3\lambda_2 = 2 & (1) \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 = -5 & (2) \\ \lambda_1 = 3 & (3) \end{cases}$ ES COMPATIBLE ?

En (2) $-3 + 2\lambda_2 = -5 \Rightarrow \lambda_2 = -1$

En (1) $\lambda_1 - 3\lambda_2 = 3 - 3(-1) = 6 \neq 2$ $\therefore$ El sistema es INCOMPATIBLE

$\therefore$ $2 - 5x + 3x^2 \notin$ gen $\{1 - x + x^2, -3 + 2x\}$

Generadores y subespacios finitamente generados

De ahora en más los subespacios se presentarán por las condiciones que cumplen sus elementos o por un conjunto de vectores que lo genera.

- El subespacio S de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\mathbb{V}$ se dice que está generado por los vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ si

$$S = gen\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}.$$

- En este caso, $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ será un conjunto generador de S.
- Si S tiene un conjunto generador con finitos elementos entonces se dirá que S es finitamente generado.

$S = \mathbb{R}^2$ $S = $ gen $\left\{\binom{1}{0}\binom{0}{1}\binom{1}{1}\right\}$ o $S =$ gen $\left\{\binom{1}{0}\binom{0}{1}\right\}$ pero $S \neq$ gen $\left\{\binom{1}{0}\right\}$

Otra observación:

Si S es un subespacio de un $\mathbb{K}$- espacio vectorial $\mathbb{V}$ y $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\} \subset S \Rightarrow$ gen $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\} \subseteq S$.

En $\mathbb{V} = \mathbb{R}[x]$ $K = \mathbb{R}$ $+$ y $\cdot$ habituales (E.V.)

¿Este espacio vectorial estará generado por un n° finito de polinomios? (No)

$\mathbb{V} = $ gen $\{1, x, x^2, x^3, \ldots x^{100}, x^{101}, x^{102}, \ldots\}$

$\mathbb{R}[x]$ no tiene un conjunto generador finito

Ejercicio 5

(b)

$$S_1 = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}a\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\a\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\2\\3\end{bmatrix}\right\} = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}1\\a\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\2\\3\end{bmatrix}\right\} = S_2$$

$S_1 = S_2 \iff \underset{(1)}{S_1 \subset S_2} \wedge \underset{(2)}{S_2 \subset S_1}$

(2) $X \in S_2 \Rightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} : X = \alpha_1\begin{pmatrix}1\\a\\1\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix}$

$\Rightarrow X = \alpha_1\begin{pmatrix}1\\a\\1\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}a\\1\\2\end{pmatrix} \Rightarrow X \in S_1$

(1) $X \in S_1 \Rightarrow X = \alpha_1\begin{pmatrix}1\\a\\1\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}a\\1\\2\end{pmatrix}$ para que $\in$ a S_2

debe ser $\begin{pmatrix}a\\1\\2\end{pmatrix} = \beta_1\begin{pmatrix}1\\a\\1\end{pmatrix} + \beta_2\begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix} \iff$ deben existir β_1 y β_2 que verifiquen la igualdad

$\Rightarrow \begin{cases} a = \beta_1 + 3\beta_2 \\ 1 = a\beta_1 + 2\beta_2 \\ 2 = \beta_1 + 3\beta_2 \end{cases} \longleftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & a \\ a & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{array}\right)$

$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & a \\ 0 & 2-3a & 1-a^2 \\ 0 & 0 & 2-a \end{array}\right) \longrightarrow 0\cdot\beta_1 + 0\beta_2 = 2-a \Rightarrow$ Si $a=2$ el sist. compatible

$F_2 : F_2 - aF_1$
$F_3 : F_3 - F_1$

Obs: $a=2 \begin{cases} \beta_1 + 3\beta_2 = 2 \\ 2\beta_1 + 2\beta_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \beta_1 = -\frac{1}{4}, \ \beta_2 = \frac{3}{4}$

Con $a=2$ $S_1 = S_2$

Obs:

$X = \alpha_1\begin{pmatrix}1\\a\\1\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}a\\1\\2\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}a\\1\\2\end{pmatrix} = \underset{-\frac{1}{4}}{\beta_1}\begin{pmatrix}1\\a\\1\end{pmatrix} + \underset{\frac{3}{4}}{\beta_2}\begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix} \iff$ (2)

Resulta que $X = \alpha_1\begin{pmatrix}1\\a\\1\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix} + \alpha_3\left(-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\a\\1\end{pmatrix} + \frac{3}{4}\begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix}\right)$

$X = \underbrace{\left(\alpha_1 - \frac{1}{4}\alpha_3\right)}_{\text{escalar}}\begin{pmatrix}1\\a\\1\end{pmatrix} + \underbrace{\left(\alpha_2 + \frac{3}{4}\alpha_3\right)}_{\text{escalar}}\begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix}$

$\Rightarrow X \in \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\a\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix}\right\} \Rightarrow X \in S_2$

Dependencia e independencia lineal

Definición: Se dice que un conjunto de dos o más vectores, $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{V} - \mathbb{K}$ espacio vecorial, es linealmente dependiente (l.d.) si alguno de sus elementos es combinación lineal de los demás. Si el conjunto está formado por un único vector, v_1, se dice que es linealmente dependiente sólo si $v_1 = \mathbb{O}_\mathbb{V}$ $\{0_V\}$ es LD

Cuando esto no sucede, se dice que el conjunto es linealmente independiente.

$v_1 \neq 0_V \Rightarrow \{v_1\}$ es LI

Obs: $\{v_1, v_2, \ldots v_n\}$ es LD si alguno es CL de los demás

Supongamos $v_1 = \sum_{k=2}^{n} \alpha_k v_k = \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \cdots + \alpha_n v_n$

$\Rightarrow \quad v_1 + (-\alpha_2 v_2 - \alpha_3 v_3 - \cdots \alpha_n v_n) = 0_V$

$\Rightarrow \quad 1.v_1 + (-\alpha_2)v_2 + (-\alpha_3)v_3 + \cdots + (-\alpha_n)v_n = 0_V$

Alguno de los escalares es no nulo

Así $\{v_1, v_2, \ldots v_n\}$ es L.I.

si $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0_V \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$

Obs Investigar la independencia lineal nos lleva a tener que resolver un sistema de ecuaciones

Observaciones

Vamos a listar algunas propiedades muy directas:

- Todo conjunto que contenga a $\mathbb{O}_\mathbb{V}$ es l.d.
- Si un conjunto tiene dos elementos $\{u_1, u_2\}$ es ld $\exists k \in \mathbb{K} / u_2 = k u_1$.
- Si $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ es un conjunto de vectores y u_k es combinación lineal de los demás vectores del conjunto, entonces:

subespacios $\leftarrow$ gen $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\} =$ gen $\{u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}\}$

Entonces, cuando un conjunto generador de un subespacio es **linealmente dependiente**, si sacamos algún elemento que es combinación lineal de los demás, obtenemos un nuevo conjunto que genera el mismo subespacio.

Ej: $V = \mathbb{R}^{2\times2}$ $K = \mathbb{R}$ $+ y \cdot$ habituales de matrices

$\text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\right\} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right\}$

Obs $\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\right\} \supset \left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right\}$ $\neq$

$\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} \notin \left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right\}$

$\text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right\} \subseteq \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\right\}$ $\supseteq$

$\therefore \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right\} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\right\}$

Recordemos el problema que motivó dar nuestra definición de independencia lineal.
Si un subespacio tiene un conjunto finito de generadores, queremos quedarnos con una cantidad mínima de generadores.
Por la última observación, tenemos el camino para encontrar lo que se denomina un **conjunto minimal de generadores** de un subespacio. O sea, n un conjunto de vectores que genere el subespacio pero donde no *sobren* elementos.
Para eso, al obtener un conjunto generador del subespacio tendremos que chequear si el conjunto es l.i. o no. En caso de no serlo, habrá algún vector que es combinación lineal de los demás y que podemos sacar del conjunto.

Ej: $\mathbb{V} = \mathbb{R}_2[x]$ $\quad K = \mathbb{R}$

$A \neq \text{gen } A$ ↯ no es subespacio

$A = \{1, x, x^2, 1+x, x-x^2\} \subset \mathbb{R}_2[x]$

$\Rightarrow \text{gen}\{1, x, x^2, 1+x, x-x^2\} = \mathbb{R}_2[x]$

sin embargo A no es un conjunto generador minimal

$\text{gen}(A) = \text{gen}\{1, x, x^2, 1+x\} = \text{gen}\{1, x, x^2\}$

si sigo sacando entonces NO es cierto que $\text{gen}(A) = \mathbb{R}_2[x]$

$\Rightarrow \{1, x, x^2\}$ conjunto minimal de generadores de $\mathbb{R}_2[x]$

Es una base de $\mathbb{R}^2$