Transformada de Laplace

Dr. Ing. Leonardo Rey Vega

Señales y Sistemas
Facultad de Ingeniería
Universidad de Buenos Aires

Marzo 2024

Resumen

Señales complejas

$$z(t) \in \mathbb{C}$$

$$z(t) = \mathcal{R}e\{z(t)\} + j\mathcal{I}m\{z(t)\}$$

$$j = \sqrt{-1}$$

$$\mathcal{R}e\{z(t)\} = \frac{z(t)+z^*(t)}{2}$$

$$\mathcal{I}m\{z(t)\} = \frac{z(t)-z^*(t)}{2}$$

$$z(t) = \|z(t)\|e^{j\angle z(t)}$$

$$z(t) = \|z(t)\|\cos\left(\angle z(t)\right) +$$

$$+j\|z(t)\|\sin\left(\angle z(t)\right)$$

$$\|z(t)\| = \sqrt{z(t)z^*(t)}$$

$$= \sqrt{\mathcal{R}e^2\{z(t)\} + \mathcal{I}m^2\{z(t)\}}]$$

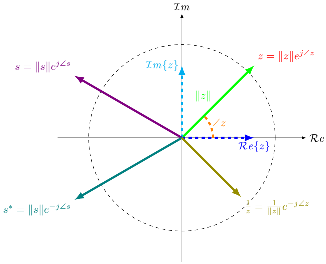
$$\angle z(t) = \arctan\left(\frac{\mathcal{I}m\{z(t)\}}{\mathcal{R}e\{z(t)\}}\right)$$

$$z^* = \mathcal{R}e\{z(t)\} - j\mathcal{I}m\{z(t)\}$$

$$z^* = \|z(t)\|e^{-j\angle z(t)}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\mathcal{R}e\{z(t)\} - j\mathcal{I}m\{z(t)\}}{\mathcal{R}e^2\{z(t)\} + \mathcal{I}m^2\{z(t)\}}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\|z\|}e^{-j\angle z}$$



La transformada de Laplace I

Sabemos que si $x(t) = e^{st}$ con $s \in \mathbb{C}$ la salida de un sistema LTI con respuesta al impulso $h(t)$ se puede escribir como:

$$y(t) = H(s)e^{st}$$

donde

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st}dt$$

es la *transferencia* del sistema. Podemos realizar entonces lo siguiente para una señal general $x(t)$

$$X(s) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

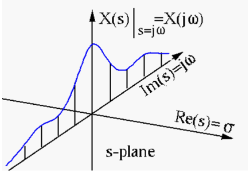
Decimos que $X(s)$ es la *transformada de Laplace* de $x(t)$. En forma compacta podemos denotar la operación de tomar la transformada de Laplace de una señal $x(t)$ como:

$$x(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s)$$

Relación entre TL y TF

Cuando $s = j\omega$ obtenemos

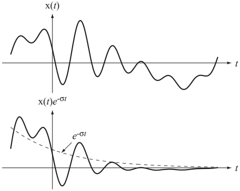
$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$



lo que equivale a escribir

$$X(s)\Big|_{s=j\omega} = \mathcal{F}\left[x(t)\right]$$

siempre y cuando la transformada de Fourier de la señal $x(t)$ exista.
Si $s = \sigma + j\omega$ entonces:



$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[x(t)e^{-\sigma t}\right] e^{-j\omega t}dt \\ &= \mathcal{F}\left[x(t)e^{-\sigma t}\right] \end{aligned}$$

La transformada de Laplace $X(s)$ de $x(t)$ es la transformada de Fourier de $x(t)e^{-\sigma t}$ donde $s = \sigma + j\omega$. Tener en cuenta que $e^{-\sigma t}$ puede ser creciente o decreciente dependiendo del signo de σ.

La transformada de Laplace III

Hasta el momento hemos definido la tranformada de Laplace para una señal pero no hemos analizado cuando la misma existe. Para ello deberemos definir lo que se conoce como la *región de convergencia* (ROC).

Sea una señal $x(t)$. Definiremos la ROC de la transformada de Laplace $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$ como:

$$\text{ROC}\left\{X(s)\right\} = \left\{ s = \sigma + j\omega \in \mathbb{C} : \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-\sigma t}| dt < \infty \right\}$$

Notar que la ROC de la transformada de Laplace de una señal $x(t)$ esta definido por todos aquellos puntos $s = \sigma + j\omega$ del plano $\mathbb{C}$ donde $x(t)e^{-\sigma t}$ es absolutamente integrable, lo que implica que la transformada de Fourier de $x(t)e^{-\sigma t}$ está bien definida!!

La transformada de Laplace de una señal $x(t)$ está definida no sólo por la forma algebraica dada por $X(s)$ sino también por su correspondiente ROC. Ambos elementos son igualmente importantes para la definición de la transformada de Laplace!!

La transformada de Laplace IV

Ejemplos:

- Consideremos $x(t) = e^{-at}u(t)$ con $a \in \mathbb{R}$. La transformada de Laplace se puede escribir como:

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-st}dt \\ &= \int_{0}^{\infty} e^{-(s+a)t}dt \\ &= \int_{0}^{\infty} e^{-(\sigma+a)}e^{-j\omega t}dt \end{aligned}$$

Vemos para determinar la ROC debemos pedir que:

$$\int_{0}^{\infty} e^{-(\sigma+a)t}dt < \infty$$

Es fácil verificar que debe ser $\sigma + a > 0$ o lo que es lo mismo $\sigma > -a$. En forma más compacta

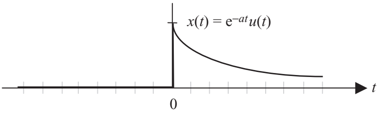
$$\mathrm{ROC}\{X(s)\} = \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\{s\} > -a\}$$

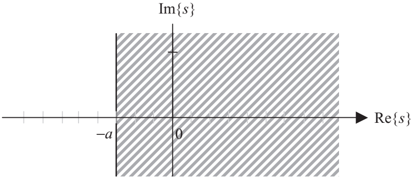
La transformada de Laplace V

Usando $s \in \mathrm{ROC}\{X(s)\}$ podemos obtener la expresión algebraica de $X(s)$ como

$$X(s) = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} dt = -\frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s+a}$$

La ROC se puede representar como (si $a > 0$):





La transformada de Laplace VI

- Consideremos ahora $x(t) = -e^{-at}u(-t)$. Vemos que esta señal es muy diferente a la anterior. De nuevo podemos escribir:

$$\begin{aligned} X(s) &= -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(-t)e^{-st}dt \\ &= -\int_{-\infty}^{0} e^{-(s+a)t}dt \\ &= -\int_{-\infty}^{0} e^{-(\sigma+a)}e^{-j\omega t}dt \end{aligned}$$

Vemos para determinar la ROC debemos pedir que:

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-(\sigma+a)t}dt < \infty$$

Es fácil verificar que debe ser $\sigma + a < 0$ o lo que es lo mismo $\sigma < -a$. En forma más compacta

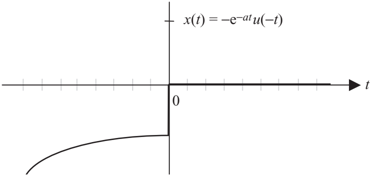
$$\mathrm{ROC}\{X(s)\} = \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\{s\} < -a\}$$

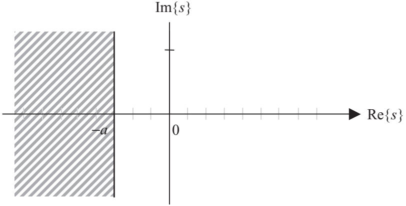
La transformada de Laplace VII

Usando $s \in \mathrm{ROC}\{X(s)\}$ podemos obtener la expresión algebraica de $X(s)$ como

$$X(s) = -\int_{-\infty}^{0} e^{-(s+a)t} dt = \frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t}\Big|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{s+a}$$

La ROC se puede representar como (si $a > 0$):





Dos señales muy diferentes pueden tener la misma expresión algebraica para $X(s)$. Sin embargo, sus ROCs serán diferentes. Eso implica que sus transformadas de Laplace son diferentes!!

La transformada de Laplace VIII

- Sea la señal:

$$x(t) = e^{\alpha t}\sin(\omega_1 t)u(t) + e^{\beta t}\sin(\omega_2 t)u(t),\ \ \alpha, \beta > 0$$

Es claro que la señal $x(t)$ se puede escribir como:

$$x(t) = \frac{1}{2j}\left\{e^{(\alpha + j\omega_1)t} - e^{(\alpha - j\omega_1)t} + e^{(\beta + j\omega_1)t} - e^{(\beta - j\omega_1)t}\right\}u(t)$$

Tenemos los siguientes resultados:

$$e^{(\alpha + j\omega_1)t} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s - \alpha - j\omega_1},\ \mathrm{ROC}_1 = \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\{s\} > \alpha\}$$

$$e^{(\alpha - j\omega_1)t} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s - \alpha + j\omega_1},\ \mathrm{ROC}_2 = \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\{s\} > \alpha\}$$

$$e^{(\beta + j\omega_2)t} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s - \beta - j\omega_2},\ \mathrm{ROC}_3 = \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\{s\} > \beta\}$$

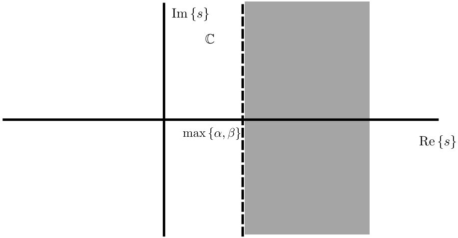
$$e^{(\beta - j\omega_2)t} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s - \beta + j\omega_2},\ \mathrm{ROC}_4 = \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\{s\} > \beta\}$$

De esta forma podemos escribir:

$$
\begin{aligned}
X(s) &= X_1(s) + X_2(s) = \frac{\omega_1}{(s-\alpha)^2 + \omega_1^2} + \frac{\omega_2}{(s-\beta)^2 + \omega_2^2} \\
&= \frac{\omega_1[(s-\beta)^2 - \omega_2^2] + \omega_1[(s-\alpha)^2 + \omega_1^2]}{[(s-\alpha)^2 + \omega_1^2][(s-\beta)^2 + \omega_2^2]}
\end{aligned}
$$

y donde la ROC queda definida por:

$$
\mathrm{ROC}\left\{X(s)\right\} = \left\{s \in \mathcal{C} : \mathrm{Re}\left\{s\right\} > \max\left\{\alpha, \beta\right\}\right\}
$$



La transformada de Laplace X

Algunas consideraciones

- Vemos que la ROC de una transformada de Laplace corresponde a bandas paralelas (posiblemente infinitas) al eje $j\omega$ en el plano complejo $\mathbb{C}$. Esto es razonable ya que sabemos que la ROC, tal como la hemos definido, depende sólo de $\mathrm{Re}\{s\} = \sigma$.
- En el último ejemplo vemos que la ROC no incluye al eje $j\omega$. Es decir, para la $x(t)$ considerada no existe la transformada de Fourier. Sin embargo, si existe la transformada de Laplace en la ROC definida. De esta forma la transformada de Laplace es una herramienta más general y poderosa que la transformada de Fourier para analizar señales y sistemas.
- En los ejemplos anteriores se ve que la transformada de Laplace es un cociente de polinomios en la variable s. Es decir:

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

En estos casos (cuando la transformada de Laplace es una función racional), dicha transformada queda definida perfectamente (salvo un factor de escala) por:

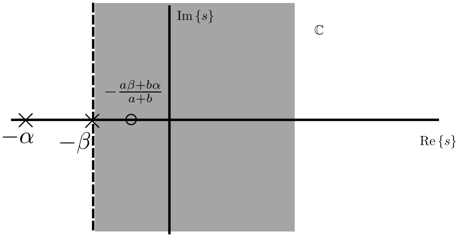
1. La ROC de $X(s)$.
2. Los ceros de $N(s)$, en adelante conocidos como los *ceros* de $X(s)$.
3. Los polos de $D(s)$, en adelante conocidos como los *polos* de $X(s)$.

La transformada de Laplace XI

Consideremos $x(t) = ae^{-\alpha t}u(t) + be^{-\beta t}u(t),\ \alpha > \beta > 0,\ a, b > 0$. Es posible demostrar que la transformada de Laplace se escribe como:

$$X(s) = \frac{a}{s+\alpha} + \frac{b}{s+\beta} = \frac{(a+b)s + a\beta + b\alpha}{s^2 + (\alpha+\beta)s + \alpha\beta}$$

$$\mathrm{ROC}\left\{X(s)\right\} = \left\{s \in \mathcal{C} : \mathrm{Re}\left\{s\right\} > -\beta\right\}$$



Vemos que los polos caen siempre fuera de la ROC, lo cual es razonable. Los ceros pueden caer en el interior o fuera de la ROC. En este ejemplo además hay un cero en el infinito. Por qué??

La relación entre los diagramas de polos y ceros y las posibles ROC asociadas a una transformada de Laplace racional están muy ligadas a las propiedades que tenga la señal $x(t)$ en el tiempo como veremos a continuación.

Propiedades de la región de convergencia I

Dado que la ROC es muy importante en la especificación de la transformada de Laplace de una señal temporal, exploraremos algunas conexiones entre las características de la señal y la correspondiente ROC:

Propiedad 1: La ROC de $X(s)$ consiste en bandas paralelas al eje $j\omega$ en el plano $\mathbb{C}$.

Esto es una clara consecuencia de que la ROC se define para aquellos valores de $s \in \mathbb{C}$ tales que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|e^{-\sigma t} dt < \infty, \;\; s = \sigma + j\omega$$

Propiedad 2: La ROC de $X(s)$ (racional) no contiene ningún polo.

Esto es claro también por el hecho de que $X(s)$ evaluada en un polo diverge.

Propiedad 3: Si $x(t)$ es de duración finita y absolutamente integrable, entonces la ROC es el plano $\mathbb{C}$ completo.

Probarlo!!

Propiedades de la región de convergencia II

Propiedad 4: Si $x(t)$ es una *señal derecha* ($\exists\ T_1$ tal que $x(t) = 0\ \forall t < T_1$) y $\mathrm{Re}\{s\} = \sigma_1$ está en la ROC entonces:

$$\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\{s\} > \sigma_1\} \subseteq \mathrm{ROC}\{X(s)\}$$

Probarlo!!

Propiedad 5: Si $x(t)$ es una *señal izquierda* ($\exists\ T_1$ tal que $x(t) = 0\ \forall t > T_1$) y $\mathrm{Re}\{s\} = \sigma_1$ está en la ROC entonces:

$$\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\{s\} < \sigma_1\} \subseteq \mathrm{ROC}\{X(s)\}$$

Probarlo!!

Propiedad 6: Si $x(t)$ es una *señal bilateral* y la linea $\mathrm{Re}\{s\} = \sigma_1$ está en la ROC, la ROC será un banda en $\mathbb{C}$ que incluye a $\mathrm{Re}\{s\} = \sigma_1$.

Probarlo!!

Propiedades de la región de convergencia III

De las propiedades anteriores vemos que toda señal tendrá una ROC que caerá dentro de una de las siguientes categorías:

- Será el plano completo $\mathbb{C}$ (para señales finitas y absolutamente integrables).
- Será un semiplano izquierdo (para señales izquierdas).
- Será un semiplano derecho (para señales derechas).
- Será un una franja (para señales bilaterales).
- Será un conjunto vacío (para señales que no tienen transformada de Laplace).

Si nos restringimos a transformadas de Laplace racionales, usando la propiedad 2, tenemos la siguiente:

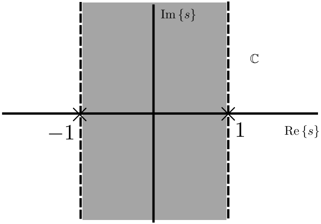
Propiedad 7: Si $x(t)$ cuya transformada de Laplace es racional, su ROC está limitada por sus polos o se extiende al infinito. Además ningún polo está contenido en la ROC.

De la propiedad 7 para señales $x(t)$ con transformada racional tenemos:

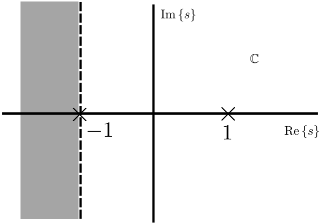
- Si $x(t)$ es derecha la ROC será el semiplano derecho limitado por el polo que se encuentra más hacia la derecha.
- Si $x(t)$ es izquierda la ROC será el semiplano izquierdo limitado por el polo que se encuentra más hacia la izquierda.

Ejemplo: Sea

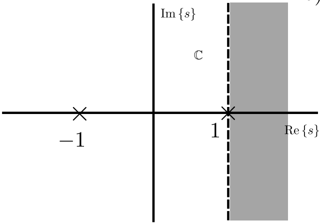
$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s-1)} = \frac{1/2}{s-1} - \frac{1/2}{s+1}$$



a)



b)



c)

Propiedades de la región de convergencia V

En el caso a) tenemos:

$$\frac{1/2}{s-1} \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} -\frac{1}{2}e^{t}u(-t), \;\; \mathrm{Re}\{s\} < 1$$

$$\frac{1/2}{s+1} \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2}e^{-t}u(t), \;\; \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

lo que implica que $x(t) = -\frac{1}{2}\left[e^{t}u(-t) - e^{-t}u(t)\right]$. En el caso b) tenemos:

$$\frac{1/2}{s-1} \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} -\frac{1}{2}e^{t}u(-t), \;\; \mathrm{Re}\{s\} < 1$$

$$\frac{1/2}{s+1} \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} -\frac{1}{2}e^{-t}u(-t), \;\; \mathrm{Re}\{s\} < -1$$

lo que implica que $x(t) = \frac{1}{2}\left[e^{-t} - e^{t}\right]u(-t)$. En el caso c) tenemos:

$$\frac{1/2}{s-1} \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2}e^{t}u(t), \;\; \mathrm{Re}\{s\} > 1$$

$$\frac{1/2}{s+1} \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2}e^{-t}u(t), \;\; \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

lo que implica que $x(t) = \frac{1}{2}\left[e^{t} - e^{-t}\right]u(t)$.

Transformada inversa de Laplace I

Es posible probar que, para un gran número de señales, un par señal-transformada es único. De esta forma podemos definir sin problemas la transformada inversa de Laplace. Siendo $s = \sigma + j\omega$ podemos escribir:

$$X(s) = \mathcal{F}\left[x(t)e^{-\sigma t}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\sigma t}e^{j\omega t}dt$$

Esto significa que:

$$x(t)e^{-\sigma t} = \mathcal{F}^{-1}\left[X(\sigma + j\omega)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

o lo que es lo mismo:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega)e^{(\sigma + j\omega t)}d\omega$$

Podemos recuperar la señal $x(t)$ a partir de $X(s)$ con σ fija e integrando en ω, de forma tal que el eje $\sigma + j\omega$ sobre el que integramos esté en la ROC de $X(s)$. Esta integral se puede poner en función de $s = \sigma + j\omega$ notando que $ds = jd\omega$:

$$x(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - jT}^{\sigma + jT} X(s)e^{st}ds$$

Transformada inversa de Laplace II

La evaluación de la integral en la expresión de la transformada inversa de Laplace requiere la realización de una integral en el plano complejo. En general mediante el uso del teorema de los residuos es posible el cálculo de la misma, en particular para transformadas racionales.

Sin embargo, para transformadas de Laplace racionales, y donde el orden del polinomio del numerador es menor que el del denominador, es posible escribir a las mismas como:

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{(s+p_k)^{m_k}}$$

donde p_k con $k = 1, 2, \ldots, N$ son los polos de $X(s)$ y donde cada uno de ellos tiene multiplicidad m_k.

Se tiene que

$$\frac{A}{(s+\alpha)^m} \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{At^{m-1}}{(m-1)!} e^{-\alpha t} u(t), \quad \mathrm{Re}\{s\} > -\mathrm{Re}\{\alpha\}$$

$$\frac{A}{(s+\alpha)^m} \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} -\frac{At^{m-1}}{(m-1)!} e^{-\alpha t} u(-t), \quad \mathrm{Re}\{s\} < -\mathrm{Re}\{\alpha\}$$

Podemos evaluar fácilmente la transformada inversa de Laplace para transformadas racionales usando estos resultados!!

Propiedades de la transformada de Laplace I

Analicemos algunas propiedades de la transformada de Laplace:

- **Linealidad:** Sean $x(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s)$ e $y(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} Y(s)$. Entonces tenemos:

$$\alpha x(t) + \beta y(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \alpha X(s) + \beta Y(s)$$

con

$$\mathrm{ROC}\{\alpha X(s) + \beta Y(s)\} \supseteq \mathrm{ROC}\{X(s)\} \cap \mathrm{ROC}\{Y(s)\}$$

Notar que la ROC de $\alpha X(s) + \beta Y(s)$ puede ser estrictamente mayor a $\mathrm{ROC}\{X(s)\} \cap \mathrm{ROC}\{Y(s)\}$.
Ejemplo:

$$X_1(s) = \frac{1}{(s+3)(s+1)},\ \mathrm{Re}\{s\} > -1, \quad X_2(s) = \frac{1}{s+1},\ \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

Entonces

$$X_1(s) - \frac{1}{2}X_2(s) = -\frac{1/2}{s+3},\ \mathrm{Re}\{s\} > -3$$

Vemos que la ROC de $X_1(s) - \frac{1}{2}X_2(s)$ es mayor a $\mathrm{ROC}\{X(s)\} \cap \mathrm{ROC}\{Y(s)\}$.
Por qué sucede esto? Qué sucede entre los polos y ceros de $X_1(s) - \frac{1}{2}X_2(s)$??

Propiedades de la transformada de Laplace II

- **Desplazamiento temporal y desplazamiento en la frecuencia:** Sea $x(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s)$. Entonces tenemos:

$$x(t-t_0) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} e^{-st_0}X(s),\ \text{ROC}\left\{e^{-st_0}X(s)\right\} = \text{ROC}\left\{X(s)\right\}$$

$$x(t)e^{s_0 t} \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s-s_0),\ \text{ROC}\left\{X(s-s_0)\right\} = \text{ROC}\left\{X(s)\right\} + \text{Re}\left\{s_0\right\}$$

Probarlo!!

- **Escalamiento temporal:** Sea $x(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s)$. Entonces tenemos:

$$x(\alpha t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{|\alpha|}X\left(\frac{s}{\alpha}\right),\ \text{ROC}\left\{\frac{1}{|\alpha|}X\left(\frac{s}{\alpha}\right)\right\} = \frac{\text{ROC}\left\{X(s)\right\}}{\alpha}$$

Probarlo!!

Como era de esperarse estas propiedades son los análogos de las correspondientes a la transformada de Fourier y se prueban de forma similar. Solamente es necesario tener un cuidado particular para entender como se modifican las ROCs!!

Propiedades de la transformada de Laplace III

- **Convolución:** Sean $x(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s)$ e $y(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} Y(s)$. Entonces tenemos:

$$z(t) = x(t) * y(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s)Y(s)$$

con

$$\mathrm{ROC}\left\{X(s)Y(s)\right\} \supseteq \mathrm{ROC}\left\{X(s)\right\} \cap \mathrm{ROC}\left\{Y(s)\right\}$$

De nuevo la ROC de $X(s)Y(s)$ puede contener a $\mathrm{ROC}\left\{X(s)\right\} \cap \mathrm{ROC}\left\{Y(s)\right\}$. Esto se debe a que puede haber cancelaciones entre polos y ceros.

Así como ocurría con la transformada de Fourier esta propiedad es la propiedad central de la transformada de Laplace para el análisis de sistemas LTI!!

- **Diferenciación en el tiempo:** Sea $x(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s)$. Podemos escribir:

$$\frac{dx(t)}{dt} \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} sX(s), \;\; \mathrm{ROC}\left\{sX(s)\right\} \supseteq \mathrm{ROC}\left\{X(s)\right\}$$

De nuevo, la multiplicación por s puede cancelar algún polo en el origen que tenga $X(s)$.

Propiedades de la transformada de Laplace IV

- **Integración el dominio del tiempo:** Sea $x(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s)$. Podemos escribir:

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{X(s)}{s}, \ \mathrm{ROC}\left\{\frac{X(s)}{s}\right\} \supseteq \mathrm{ROC}\left\{X(s)\right\} \cap \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\left\{s\right\} > 0\}$$

Cómo probaría esta propiedad??

- **Teoremas del valor inicial y final:** Sea $x(t)$ una señal que vale cero para $t < 0$ y que no tiene impulsos de ningún orden en el origen. Entonces valen los siguientes resultados:

$$x(0+) = \lim_{s \to \infty} sX(s)$$

Si $\lim_{t\to\infty} x(t)$ existe:

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{s \to 0} sX(s)$$

Podemos determinar los valores iniciales y finales de una señal derecha prácticamente por inspección de la correspondiente transformada de Laplace!!

Análisis de sistemas LTI usando Laplace I

Gracias a la propiedad de convolución la acción de un sistema LTI con respuesta al impulso $h(t)$ sobre una entrada $x(t)$ puede escribirse como:

$$Y(s) = H(s)X(s)$$

donde $H(s)$ es la *transferencia* del sistema. Muchas propiedades de un sistema LTI se pueden determinar a través de $H(s)$ y su correspondiente ROC

- **Estabilidad:** Es claro, que a diferencia de la respuesta en frecuencia, siempre podemos definir la transferencia de un sistema inestable. Sin embargo, sabemos que para que el sistema sea estable tiene que ser absolutamente integrable y por ende debe existir su respuesta en frecuencia. Pero como tenemos que:

$$H(j\omega) = H(s)\Big|_{s=j\omega}$$

  podemos decir que:

Un sistema LTI es estable sí y sólo sí la ROC de su función transferencia contiene a $\mathrm{Re}\{s\} = 0$ o lo que es lo mismo al eje $j\omega$!!

Análisis de sistemas LTI usando Laplace II

- **Causalidad:** Sabemos que un sistema LTI es causal cuando $h(t) = 0, \ \forall t < 0$. Usando la propiedad 4 mostrada anteriormente podemos decir que:

Un sistema LTI causal cumplirá que su ROC de su transferencia es un semiplano derecho!!

Vale el recíproco?? Por qué??

Además si $H(s)$ es una función racional podemos usar la propiedad 7 enunciada anteriormente para tener que:

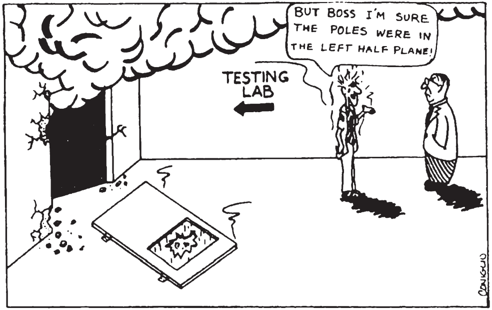
Un sistema LTI cuya función transferencia es racional es causal sí y sólo sí su ROC se encuentra a la derecha del polo ubicado más hacia a la derecha!!

La caracterización de un sistema LTI anti-causal a través de sus función transferencia es análoga!!

Análisis de sistemas LTI usando Laplace III

Podemos combinar las caracterizaciones de causalidad y estabilidad para sistemas LTI con $H(s)$ racional:

Un sistema causal con $H(s)$ racional es estable sí y sólo sí su polo más a la derecha se encuentra en el semiplano izquierdo de $\mathbb{C}$ o lo que es lo mismo, todos sus polos se encuentran en el semiplano izquierdo de $\mathbb{C}$ (todos los polos tienen parte real negativa)!!



Análisis de sistemas LTI usando Laplace IV

Consideremos un sistema descripto por una ecuación diferencial a coeficientes constantes:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

Transformando Laplace y aplicando las propiedades de la misma:

$$Y(s) \sum_{k=0}^{N} a_k s^k = X(s) \sum_{k=0}^{M} b_k s^k$$

o lo que es lo mismo:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k}$$

Así como ocurría con la transformada de Fourier, disponemos de una poderosa técnica para transformar ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes en ecuaciones algebraicas!! Además la aplicación de dicha técnica, a diferencia del caso con la transformada de Fourier no está limitada a sistemas estables!! Vemos también que la transferencia asociada a este tipo de sistemas es siempre una función racional!!

Análisis de sistemas LTI usando Laplace V

Vemos, entonces que la función transferencia para un sistema descripto por una ecuación diferencial a coeficientes constantes se puede escribir:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k}$$

Sin embargo la ROC no queda especificada por la ecuacion diferencial. La misma se puede especificar teniendo alguna otra información sobre el sistema:

- Si el sistema descripto por la ecuación diferencial fuera estable, sabemos que la ROC debería contener al eje $j\omega$.
- Si el sistema descripto por la ecuación diferencial fuera causal, sabemos que la ROC debería estar a la derecha del polo con parte real más grande.

Ejemplo: Consideremos $\frac{dy(t)}{dt} + \alpha y(t) = x(t)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. Sabemos que $H(s) = \frac{1}{s+\alpha}$. Es claro que tenemos dos posibilidades para la ROC:

$$\mathrm{ROC}\{X(s)\} = \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\{s\} > -\alpha\}, \quad \mathrm{ROC}\{X(s)\} = \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\{s\} < -\alpha\}$$

En el primer caso tenemos $h(t) = e^{-\alpha t}u(t)$ y en el segundo $h(t) = -e^{-\alpha t}u(-t)$. Si $\alpha > 0$ vemos que en el primer caso el sistema es causal y estable, y en el segundo anticausal e inestable. Si $\alpha < 0$, en el primer caso el sistema es causal e inestable y en el segundo anticausal y estable.

Temas para leer por cuenta propia

Lectura obligatoria

- Evaluación geométrica de la transformada de Fourier a partir del diagrama de polos y ceros (Sección 9.4 de Oppenheim and Willsky).
- Álgebra de la función del sistema y representación en diagrama de bloques (Sección 9.8 de Oppenheim and Willsky).
- Transformada de Laplace unilateral (Sección 9.9 de Oppenheim and Willsky).

Algunos ejercicios I

1. Ejercicios 9.13 - 9.17 de Oppenheim and Willsky.
2. Ejercicios 9.21 - 9.23 de Oppenheim and Willsky.
3. Ejercicios 9.41 - 9.48 de Oppenheim and Willsky.

Tiempo de consultas

¿Preguntas?