Transformada de Fourier

Dr. Ing. Leonardo Rey Vega

Señales y Sistemas
Facultad de Ingeniería
Universidad de Buenos Aires

Marzo 2024

Resumen

Resumen

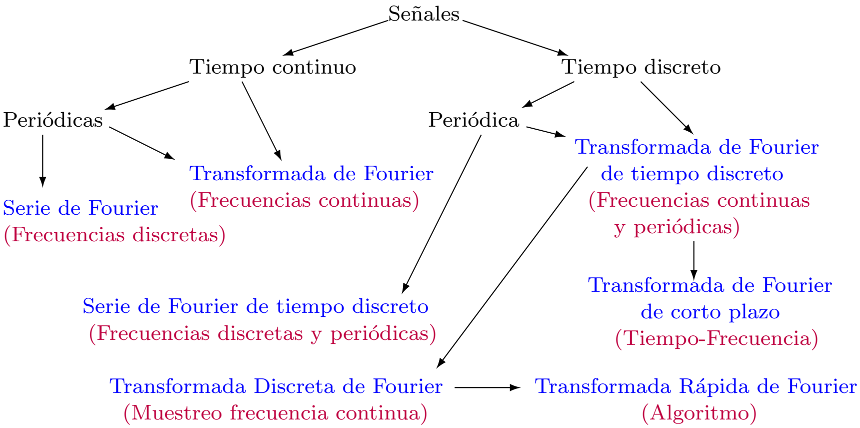
Resumen

Resumen

Resumen

Resumen

Análisis de Fourier



Transformada de Fourier en tiempo continuo I

Consideremos una señal $x(t)$. Se define la *transformada de Fourier* de $x(t)$ o $X(j\omega) \equiv \mathcal{F}\{x(t)\}$ como:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt, \ \omega \in \mathbb{R}$$

Transformada de Fourier en tiempo continuo I

Consideremos una señal $x(t)$. Se define la *transformada de Fourier* de $x(t)$ o $X(j\omega) \equiv \mathcal{F}\{x(t)\}$ como:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt, \ \omega \in \mathbb{R}$$

La definición dada arriba de la transformada de Fourier tiene sentido siempre y cuando $X(j\omega)$ esté bien definida!! Es decir la integral debe existir para todo ω y ser finita!! Esto por ejemplo se cumple si $x(t) \in L_1(\mathbb{R})$.

Transformada de Fourier en tiempo continuo I

Consideremos una señal $x(t)$. Se define la *transformada de Fourier* de $x(t)$ o $X(j\omega) \equiv \mathcal{F}\{x(t)\}$ como:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt,\ \omega \in \mathbb{R}$$

La definición dada arriba de la transformada de Fourier tiene sentido siempre y cuando $X(j\omega)$ esté bien definida!! Es decir la integral debe existir para todo ω y ser finita!! Esto por ejemplo se cumple si $x(t) \in L_1(\mathbb{R})$.

La transformada de Fourier $\mathcal{F}$ se debe interpretar como un *operador* que mapea señales $x(t)$ en un determinado espacio vectorial y entrega señales $X(j\omega)$ en otro espacio vectorial donde podamos obtener caracterizaciones útiles de la señal original. Será de interés asegurar que dicho operador sea invertible. Esto es que podamos encontrar un operador $\mathcal{F}^{-1}$ que dada la transformada de Fourier $X(j\omega)$ nos permita recuperar la señal original $x(t)$!

Transformada de Fourier en tiempo continuo I

Consideremos una señal $x(t)$. Se define la *transformada de Fourier* de $x(t)$ o $X(j\omega) \equiv \mathcal{F}\{x(t)\}$ como:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt, \ \omega \in \mathbb{R}$$

La definición dada arriba de la transformada de Fourier tiene sentido siempre y cuando $X(j\omega)$ esté bien definida!! Es decir la integral debe existir para todo ω y ser finita!! Esto por ejemplo se cumple si $x(t) \in L_1(\mathbb{R})$.

La transformada de Fourier $\mathcal{F}$ se debe interpretar como un *operador* que mapea señales $x(t)$ en un determinado espacio vectorial y entrega señales $X(j\omega)$ en otro espacio vectorial donde podamos obtener caracterizaciones útiles de la señal original. Será de interés asegurar que dicho operador sea invertible. Esto es que podamos encontrar un operador $\mathcal{F}^{-1}$ que dada la transformada de Fourier $X(j\omega)$ nos permita recuperar la señal original $x(t)$!

Gran parte del análisis de Fourier se ocupa de lograr esto!

$$x(t) = e^{-\alpha t}u(t),\ \alpha > 0$$

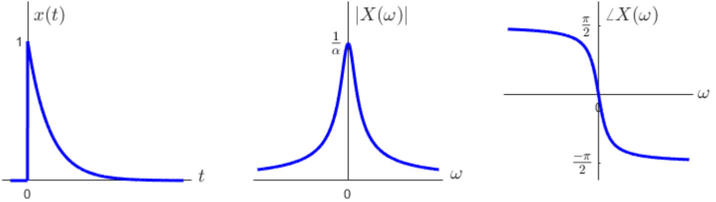
$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t}u(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha+j\omega)t}dt = \frac{-1}{\alpha+j\omega}e^{-(\alpha+j\omega)t}\Big|_0^{\infty}$$

Como $\alpha > 0 \implies e^{-(\alpha+j\omega)t} \to 0$ cuando $t \to \infty$

$$X(\omega) = \frac{1}{\alpha+j\omega} = \frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2} - j\frac{\omega}{\alpha^2+\omega^2} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}e^{-j\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)}$$

$$|X(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}$$

$$\angle X(\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$



Transformada de Fourier en tiempo continuo III

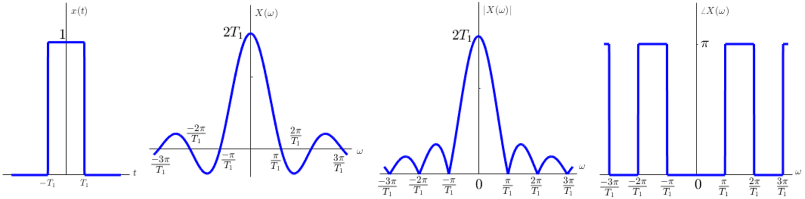
Consideremos el pulso rectangular:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T_1 \\ 0 & |t| > T_1 \end{cases}$$

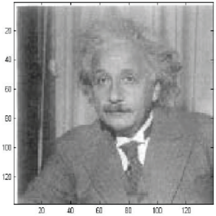
$$X(\omega) = \int_{-T_1}^{T_1} e^{-j\omega t} d\omega$$

$$= -\frac{e^{-j\omega}}{j\omega t}\Bigg|_{-T_1}^{T_1}$$

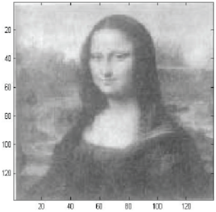
$$= 2\frac{\sin(\omega T_1)}{\omega}$$



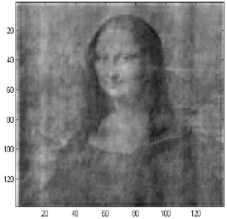
Importancia de la fase



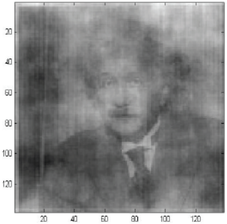
(a) Original Einstein image



(b) Original Mona Lisa image



(c) Reconstructed image based on ***Einstein magnitude*** and ***Mona Lisa phase***



(d) Reconstructed image based on ***Mona Lisa magnitude*** and ***Einstein phase***

Extraído de: Fawwaz Ulaby & Andrew E. Yagle. Signals and Systems: Theory and Applications. Michigan Publishing Services. 2018.

Antitransformada de Fourier I

La *anti-transformada* de Fourier $\hat{x}(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{X(j\omega)\right\}$ se define como:

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega,\ \ t \in \mathbb{R}$$

siempre y cuando la integral tenga sentido y esté bien definida!

Antitransformada de Fourier I

La *anti-transformada* de Fourier $\hat{x}(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(j\omega)\}$ se define como:

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega,\ \ t \in \mathbb{R}$$

siempre y cuando la integral tenga sentido y esté bien definida!

Nos gustaría tener $\hat{x}(t) = x(t)\ \forall t$.

Antitransformada de Fourier I

La *anti-transformada* de Fourier $\hat{x}(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(j\omega)\}$ se define como:

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega, \ \ t \in \mathbb{R}$$

siempre y cuando la integral tenga sentido y esté bien definida!

Nos gustaría tener $\hat{x}(t) = x(t)\ \forall t$.

Sin ser rigurosos podemos escribir:

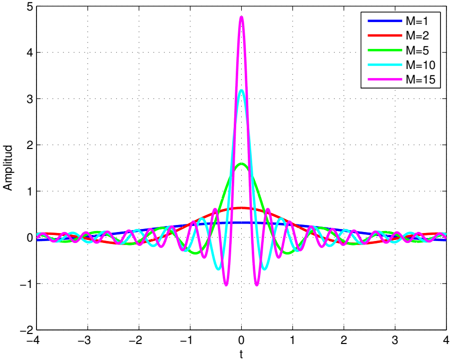
$$\begin{aligned}
\hat{x}(t) &= \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-M}^{M}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(u)e^{-j\omega u}du\right)e^{j\omega t}d\omega \\
&= \lim_{M\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(u)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-M}^{M} e^{j\omega(t-u)}d\omega\right)du \\
&= \lim_{M\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(u)\frac{\sin\left(M(t-u)\right)}{\pi(t-u)}du
\end{aligned}$$

Vamos a definir la función *sinc normalizada* como:

$$\operatorname{sinc}(t) \equiv \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}, \quad \int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sinc}(t)dt = 1 \rightarrow \text{Como integral impropia!!}$$

Antitransformada de Fourier II

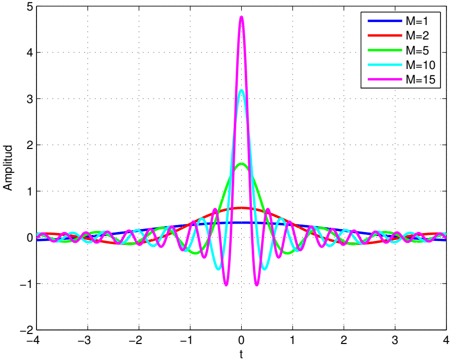
$$\hat{x}(t) = \lim_{M\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(u) \frac{M}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{M}{\pi}(t-u)\right) du$$



Vemos que la función $\frac{M}{\pi}\operatorname{sinc}\left(\frac{M}{\pi}(t-u)\right)$ "converge" a una delta de Dirac posicionada en t cuando $M \to \infty$!

Antitransformada de Fourier II

$$\hat{x}(t) = \lim_{M\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(u)\, \frac{M}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{M}{\pi}(t-u)\right) du$$



Vemos que la función $\frac{M}{\pi}\operatorname{sinc}\left(\frac{M}{\pi}(t-u)\right)$ "converge" a una delta de Dirac posicionada en t cuando $M \to \infty$!

Sin realizar ningún análisis riguroso vemos plausible que $\hat{x}(t) = x(t)$. Lamentablemente esto no es cierto en general! Ni siquiera para funciones continuas en t!

Antitransformada de Fourier III

Un caso donde esto se cumple es cuando las señales $x(t)$ son infinitamente diferenciables y decrecen hacia cero "muy rápido" (espacio de funciones de Schwartz!)

Antitransformada de Fourier III

Un caso donde esto se cumple es cuando las señales $x(t)$ son infinitamente diferenciables y decrecen hacia cero "muy rápido" (espacio de funciones de Schwartz!)

Sin embargo, tenemos un equivalente al teorema de Dirichlet para las series de Fourier:

Teorema

Sea $x(t) \in L_1(\mathbb{R})$ de variación acotada sobre cualquier intervalo finito de la recta. Entonces vale:

$$\lim_{M \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(u) \frac{M}{\pi} sinc \left(\frac{M}{\pi} (t-u) \right) du = \frac{1}{2} \left[x(t-0^-) + x(t+0^+) \right]$$

Antitransformada de Fourier III

Un caso donde esto se cumple es cuando las señales $x(t)$ son infinitamente diferenciables y decrecen hacia cero "muy rápido" (espacio de funciones de Schwartz!)

Sin embargo, tenemos un equivalente al teorema de Dirichlet para las series de Fourier:

Teorema

Sea $x(t) \in L_1(\mathbb{R})$ de variación acotada sobre cualquier intervalo finito de la recta. Entonces vale:

$$\lim_{M \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(u) \frac{M}{\pi} sinc\left(\frac{M}{\pi}(t-u)\right) du = \frac{1}{2}\left[x(t-0^-) + x(t+0^+)\right]$$

Con las hipótesis del teorema tenemos que de la misma forma que la serie de Fourier, en una discontinuidad la anti-transformada de Fourier converge al promedio de los valores de la misma!

Teorema de Plancherel I

Sin embargo, como en el caso de la serie de Fourier, y sin prestar atención a la convergencia puntual de la anti-transformada de Fourier, podemos decir algo más sobre los pares transformada y anti-transformada para señales de energía finita.

Teorema (Plancherel)

Sobre el espacio $L_2(\mathbb{R})$ el operador $x(t) \to \mathcal{F}[x(t)]$ es biyectivo. Es decir, si $\mathcal{F}[x_1(t)] = \mathcal{F}[x_2(t)]$ (en el sentido cuadrático) entonces $x_1(t) = x_2(t)$ (en el sentido cuadrático). Además para cada $x(t) \in L_2(\mathbb{R})$ existe su transformada de Fourier $X(j\omega) \equiv \mathcal{F}[x(t)]$ la cual es de energía finita. Así mismo para cada señal $X(j\omega) \in L_2(\mathbb{R})$ existe $x(t) \equiv \mathcal{F}^{-1}[X(j\omega)]$ también de energía finita. Además se cumple la relación de Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

Teorema de Plancherel I

Sin embargo, como en el caso de la serie de Fourier, y sin prestar atención a la convergencia puntual de la anti-transformada de Fourier, podemos decir algo más sobre los pares transformada y anti-transformada para señales de energía finita.

Teorema (Plancherel)

Sobre el espacio $L_2(\mathbb{R})$ el operador $x(t) \to \mathcal{F}[x(t)]$ es biyectivo. Es decir, si $\mathcal{F}[x_1(t)] = \mathcal{F}[x_2(t)]$ (en el sentido cuadrático) entonces $x_1(t) = x_2(t)$ (en el sentido cuadrático). Además para cada $x(t) \in L_2(\mathbb{R})$ existe su transformada de Fourier $X(j\omega) \equiv \mathcal{F}[x(t)]$ la cual es de energía finita. Así mismo para cada señal $X(j\omega) \in L_2(\mathbb{R})$ existe $x(t) \equiv \mathcal{F}^{-1}[X(j\omega)]$ también de energía finita. Además se cumple la relación de Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

Podemos transformar señales temporales de $L_2(\mathbb{R})$ y volver a recuperarlas antitransformando!! Y además nos mantenemos en el mismo espacio vectorial!!

Teorema de Plancherel II

Algunas consideraciones:

- La "igualdad" entre $x(t)$ y $\mathcal{F}^{-1}\left[X(j\omega)\right]$ se puede interpretar como:

$$\lim_{M\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|x(t)-\frac{1}{2\pi}\int_{-M}^{M}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega\right|^{2}dt=0$$

  Esto es la energía del error se puede hacer tan pequeña como se quiera (Similar a la serie de Fourier!).
- El operador $\mathcal{F}:L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})$ define una *isometría* en dicho espacio. Como definiría los productos internos involucrados en el espacio de llegada y el de salida??
- Notar que existe una dualidad interesante entre una señal y su transformada. Sea $x(t)\in L_2(\mathbb{R})$ y $X(j\omega)=\mathcal{F}\left[x(t)\right]$. Entonces lo siguiente es cierto:

$$x(-t)=\frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\left[X(j\omega)\right],\ x(t)=\frac{1}{2\pi}\mathcal{R}\left[\mathcal{F}\left[X(j\omega)\right]\right]$$

  donde $\mathcal{R}\left[x(t)\right]=x(-t)$ es el operador *reflexión temporal*. Es claro que esto muestra que:

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\cdot\right]=\frac{1}{2\pi}\mathcal{R}\left[\mathcal{F}\left[\cdot\right]\right]=\frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\left[\mathcal{R}\left[\cdot\right]\right]$$

- Es posible definir la transformada de Fourier en $L_2\left(\mathbb{R}^N\right)$ con exactamente las mismas propiedades que para el caso con $N=1$:

$$X(j\boldsymbol{\omega})=\int_{\mathbb{R}^N}x(\mathbf{t})e^{-j\boldsymbol{\omega}\mathbf{t}}d\mathbf{t},\ \boldsymbol{\omega}\in\mathbb{R}^N$$

$$x(\mathbf{t})=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^N}X(j\boldsymbol{\omega})e^{j\boldsymbol{\omega}\mathbf{t}}d\boldsymbol{\omega},\ \mathbf{t}\in\mathbb{R}^N$$

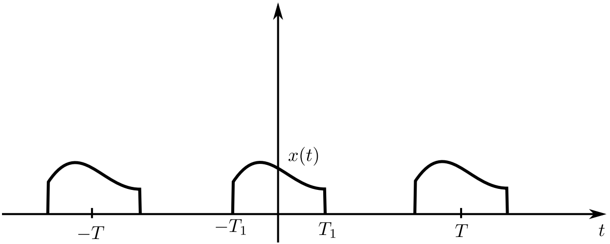
Transformada de Fourier desde la Serie de Fourier I

Lo anterior fue una introducción formal a la transformada de Fourier. Veamos ahora otra interpretación no rigurosa pero intuitiva. Consideremos una señal $x(t)$ que es cero para $|t| > T_1$. La misma no es periódica.

Transformada de Fourier desde la Serie de Fourier I

Lo anterior fue una introducción formal a la transformada de Fourier. Veamos ahora otra interpretación no rigurosa pero intuitiva. Consideremos una señal $x(t)$ que es cero para $|t| > T_1$. La misma no es periódica.

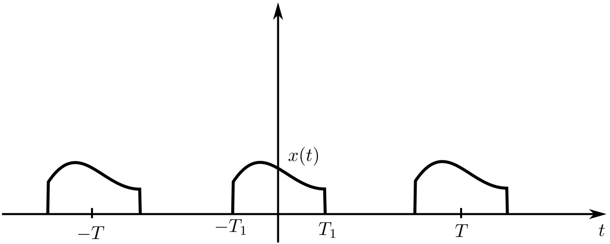
Sin embargo podemos construir una señal periódica $\tilde{x}(t)$ con periodo $T > 2T_1$, de forma tal que en cada periodo tengamos $x(t)$.



Transformada de Fourier desde la Serie de Fourier I

Lo anterior fue una introducción formal a la transformada de Fourier. Veamos ahora otra interpretación no rigurosa pero intuitiva. Consideremos una señal $x(t)$ que es cero para $|t| > T_1$. La misma no es periódica.

Sin embargo podemos construir una señal periódica $\tilde{x}(t)$ con periodo $T > 2T_1$, de forma tal que en cada periodo tengamos $x(t)$.



Podemos calcular al serie de Fourier!!

Transformada de Fourier desde la Serie de Fourier II

Tenemos que:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}, \quad a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t)e^{-jk\omega_0 t}dt, \ \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Pero cuando $|t| < T/2$, tenemos que $\tilde{x}(t) = x(t)$. Además para $|t| > T/2$ tenemos que $x(t) = 0$. Entonces podemos escribir:

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

Con $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$ podemos escribir:

$$a_k = \frac{1}{T}X(j\omega)\Big|_{\omega=k\omega_0} = \frac{1}{T}X(jk\omega_0)$$

Entonces podemos escribir:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T}X(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t}\omega_0$$

Transformada de Fourier desde la Serie de Fourier III

Cuando $T \to \infty$ tenemos que $\tilde{x}(t) \to x(t)\ \forall t \in \mathbb{R}$. Además $\omega_0 \to 0$. El lado derecho de la última ecuación se "convierte" en una integral (muy similar al análisis que hicimos para la convolución en tiempo continuo!):

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Transformada de Fourier desde la Serie de Fourier III

Cuando $T \to \infty$ tenemos que $\tilde{x}(t) \to x(t)\ \forall t \in \mathbb{R}$. Además $\omega_0 \to 0$. El lado derecho de la última ecuación se "convierte" en una integral (muy similar al análisis que hicimos para la convolución en tiempo continuo!):

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Mientras por medio de la serie de Fourier podemos representar una señal periódica a través de una superposición de exponenciales con armónicos en un conjunto discreto, a través de la transformada de Fourier podemos representar una señal no periódica como una "superposición" de exponenciales cuyos armónicos forman un continuo!!

Transformada de Fourier desde la Serie de Fourier III

Cuando $T \to \infty$ tenemos que $\tilde{x}(t) \to x(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Además $\omega_0 \to 0$. El lado derecho de la última ecuación se "convierte" en una integral (muy similar al análisis que hicimos para la convolución en tiempo continuo!):

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Mientras por medio de la serie de Fourier podemos representar una señal periódica a través de una superposición de exponenciales con armónicos en un conjunto discreto, a través de la transformada de Fourier podemos representar una señal no periódica como una "superposición" de exponenciales cuyos armónicos forman un continuo!!

Notar que podemos recorrer el camino inverso: partimos de una señal periódica $\tilde{x}(t)$, la cual es igual a $x(t)$ en un período. Es claro que podemos recuperar los coeficientes de Fourier de $\tilde{x}(t)$ a través de un "muestreo" equiespaciado de la transformada de Fourier $X(j\omega)$ de $x(t)$:

$$a_k = \frac{1}{T} X(j\omega)\Big|_{\omega = k\omega_0}$$

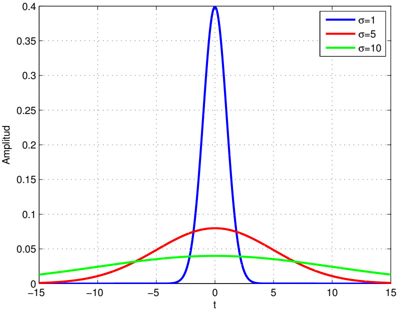
Incertidumbre en tiempo y frecuencia I

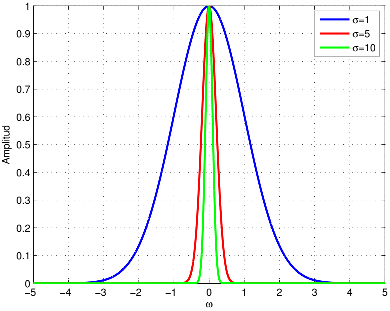
Consideremos la señal gaussiana $x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$ con $\sigma > 0$. La transformada de Fourier:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} e^{j\omega t} dt = e^{-\frac{\omega^2\sigma^2}{2}}$$

donde hemos usado que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(at^2+2bt)} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{a}}, \quad a > 0$$





Incertidumbre en tiempo y frecuencia II

En todos los ejemplos analizados observamos algo interesante:

- En el caso del pulso cuadrado si aumentamos T_1 el pulso en el tiempo se hace más ancho, mientras que $X(j\omega)$ se contrae, haciéndose el lóbulo principal de la función sinc cada vez más alto.
- En el caso del pulso gaussiano, si aumentamos σ el pulso en el tiempo se hace más ancho mientras que la transformada de Fourier se cada vez más angosta.

Incertidumbre en tiempo y frecuencia II

En todos los ejemplos analizados observamos algo interesante:

- En el caso del pulso cuadrado si aumentamos T_1 el pulso en el tiempo se hace más ancho, mientras que $X(j\omega)$ se contrae, haciéndose el lóbulo principal de la función sinc cada vez más alto.
- En el caso del pulso gaussiano, si aumentamos σ el pulso en el tiempo se hace más ancho mientras que la transformada de Fourier se cada vez más angosta.

Este comportamiento dual es característico de todo par transformado:

+localización temporal $\leftrightarrow$ - localización espectral

-localización temporal $\leftrightarrow$ + localización espectral

Existe un límite a lo que se puede resolver en tiempo y en frecuencia en forma simultánea: *principio de incertidumbre* (ver ejercicios sugeridos!)

Trasnformada de Fourier de $\delta(t)$

Consideremos la delta de Dirac $\delta(t)$. Aunque no podemos decir que $\delta(t) \in L_2(\mathbb{R})$ (recordemos que ni siquiera es una función!!), podemos definir su transformada de Fourier en un sentido distribucional:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1$$

Trasnformada de Fourier de $\delta(t)$

Consideremos la delta de Dirac $\delta(t)$. Aunque no podemos decir que $\delta(t) \in L_2(\mathbb{R})$ (recordemos que ni siquiera es una función!!), podemos definir su transformada de Fourier en un sentido distribucional:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1$$

Podemos pensar que de alguna forma un impulso unitario tiene contribuciones de todos los armónicos posibles en forma pareja!!

Trasnformada de Fourier de $\delta(t)$

Consideremos la delta de Dirac $\delta(t)$. Aunque no podemos decir que $\delta(t) \in L_2(\mathbb{R})$ (recordemos que ni siquiera es una función!!), podemos definir su transformada de Fourier en un sentido distribucional:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1$$

Podemos pensar que de alguna forma un impulso unitario tiene contribuciones de todos los armónicos posibles en forma pareja!!

Además podemos escribir:

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega$$

Trasnformada de Fourier de $\delta(t)$

Consideremos la delta de Dirac $\delta(t)$. Aunque no podemos decir que $\delta(t) \in L_2(\mathbb{R})$ (recordemos que ni siquiera es una función!!), podemos definir su transformada de Fourier en un sentido distribucional:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1$$

Podemos pensar que de alguna forma un impulso unitario tiene contribuciones de todos los armónicos posibles en forma pareja!!

Además podemos escribir:

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega$$

Usando el hecho de que $\sin \omega t$ es una función impar y que $\cos \omega t$ es una función par podemos expresar el impulso unitario también como:

$$\delta(t) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \cos(\omega t) d\omega$$

Transformada de Fourier de exponenciales complejas

Consideremos una señal cuya transformada de Fourier la podemos escribir como $X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$. La señal que tiene esta transformada se puede determinar como:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)e^{j\omega t}d\omega = e^{j\omega_0 t}$$

Transformada de Fourier de exponenciales complejas

Consideremos una señal cuya transformada de Fourier la podemos escribir como $X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$. La señal que tiene esta transformada se puede determinar como:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)e^{j\omega t}d\omega = e^{j\omega_0 t}$$

Supongamos entonces que tenemos una señal en el tiempo $x(t)$ que se puede representarse como:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

Transformada de Fourier de exponenciales complejas

Consideremos una señal cuya transformada de Fourier la podemos escribir como $X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$. La señal que tiene esta transformada se puede determinar como:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega = e^{j\omega_0 t}$$

Supongamos entonces que tenemos una señal en el tiempo $x(t)$ que se puede representarse como:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

Es claro que dicha señal es periódica con periodo $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$. La transformada de Fourier puede calcularse como (aplicando linealidad, que es una de las propiedad de la transformada de Fourier que veremos a continuación!):

$$X(j\omega) = \mathcal{F}\left[x(t)\right] = \mathcal{F}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \mathcal{F}\left[e^{jk\omega_0 t}\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - \omega_0)$$

Transformada de Fourier de exponenciales complejas

Consideremos una señal cuya transformada de Fourier la podemos escribir como $X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$. La señal que tiene esta transformada se puede determinar como:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)e^{j\omega t}d\omega = e^{j\omega_0 t}$$

Supongamos entonces que tenemos una señal en el tiempo $x(t)$ que se puede representarse como:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

Es claro que dicha señal es periódica con periodo $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$. La transformada de Fourier puede calcularse como (aplicando linealidad, que es una de las propiedad de la transformada de Fourier que veremos a continuación!):

$$X(j\omega) = \mathcal{F}\left[x(t)\right] = \mathcal{F}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \mathcal{F}\left[e^{jk\omega_0 t}\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - \omega_0)$$

La transformada de Fourier de una señal periódica es un tren de impulsos, cada uno pesado por $2\pi a_k$ donde a_k son los coeficientes de Fourier de la señal!!

Propiedades de la transformada de tiempo continuo I

Vamos a asumir que las señales a considerar son tales que existe su transformada de Fourier

- **Linealidad**: Sean $x(t)$ e $y(t)$ funciones tales que $X(j\omega) = \mathcal{F}[x(t)]$ y $Y(j\omega) = \mathcal{F}[y(t)]$. Tenemos que:

$$\mathcal{F}[ax(t) + by(t)] = aX(j\omega) + bY(j\omega), \quad a, b \in \mathbb{C}$$

  Probarlo!!

- **Desplazamiento temporal**: Sea $x(t)$ tal que $X(j\omega) = \mathcal{F}[x(t)]$. Tenemos que:

$$\mathcal{F}[x(t - t_0)] = e^{-j\omega_0 t} X(j\omega)$$

  Probarlo!!

- **Conjugación y simetría conjugada**: Sea $x(t)$ tal que $X(j\omega) = \mathcal{F}[x(t)]$. Tenemos que:

$$\mathcal{F}[x^*(t)] = X^*(-j\omega)$$

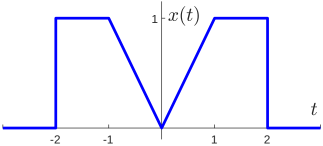
  Probarlo!! Qué sucede con la transformada de Fourier de señales reales?? Y con las de señales reales que son pares e impares?? Analice la parte real e imaginaria, el módulo y la fase de la transformada de Fourier para todos estos casos!!

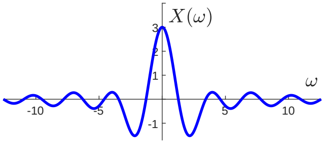
Propiedades de la transformada de tiempo continuo II

Casos de análisis explotando simetrías:

- Si $x(t)$ es real $X(j\omega) = X^*(-j\omega)$. Esto implica $\mathrm{Re}\,(X(j\omega)) = \mathrm{Re}(X(-j\omega))$ y $\mathrm{Im}\,(X(j\omega)) = -\,\mathrm{Im}(X(-j\omega))$.
    - Si además $x(t)$ es par se puede chequear que $X(j\omega) = X^*(j\omega)$. Entonces $X(j\omega)$ es real y par.
    - Si además $x(t)$ es impar se puede chequear que $X(j\omega) = -X^*(j\omega)$. Entonces $X(j\omega)$ es imaginaria pura e impar.
- Si $x(t)$ es imaginaria pura $X(j\omega) = -X^*(-j\omega)$. Esto implica $\mathrm{Re}\,(X(j\omega)) = -\,\mathrm{Re}(X(-j\omega))$ y $\mathrm{Im}\,(X(j\omega)) = \mathrm{Im}(X(-j\omega))$.
    - Si además $x(t)$ es par se puede chequear que $X(j\omega) = X^*(j\omega)$. Entonces $X(j\omega)$ es imaginaria pura y par.
    - Si además $x(t)$ es impar se puede chequear que $X(j\omega) = -X^*(j\omega)$. Entonces $X(j\omega)$ es real e impar.

Ejemplo simetrías





$$
\begin{aligned}
X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos(\omega t) dt - \\
&- j \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sin(\omega t) dt
\end{aligned}
$$

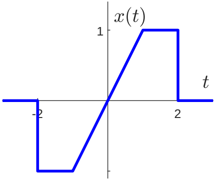
$$g_{par}(t) \times s_{par}(t) \mapsto par$$

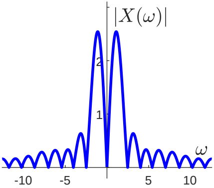
$$g_{par}(t) \times s_{impar}(t) \mapsto impar$$

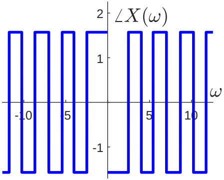
$$\int y_{impar}(t) dt = 0$$

$$
\begin{aligned}
X(\omega) &= 2\int_{0}^{\infty} x(t)\cos(\omega t) dt \\
&= 2\int_{0}^{1} t\cos(\omega t) dt + 2\int_{1}^{2} \cos(\omega t) dt \\
&= 2\left[t\frac{\sin(\omega t)}{\omega} + \frac{\cos(\omega t)}{\omega^2} \right]_0^1 + 2\left[\frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right]_1^2 \\
&= \frac{2}{\omega^2}\left[\omega \sin(2\omega) + \cos(\omega) - 1 \right]
\end{aligned}
$$

Ejemplo simetrías







$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos(\omega t)dt -$$
$$- j\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sin(\omega t)dt$$

$$g_{impar}(t) \times s_{impar}(t) \mapsto par$$
$$g_{par}(t) \times s_{impar}(t) \mapsto impar$$
$$\int y_{impar}(t)dt = 0$$

$$\begin{aligned} X(\omega) &= -j2\int_{0}^{\infty} x(t)\sin(\omega t)dt \\ &= -j2\int_{0}^{1} t\sin(\omega t)dt - j2\int_{1}^{2}\sin(\omega t)dt \\ &= -j2\left[-t\frac{\cos(\omega t)}{\omega} + \frac{\sin(\omega t)}{\omega^2}\right]_0^1 - j2\left[\frac{\cos(\omega t)}{\omega}\right]_1^2 \\ &= j\frac{2}{\omega^2}\left[\omega\cos(2\omega) - \sin(\omega)\right] \end{aligned}$$

Propiedades de la transformada de tiempo continuo III

- **Escalamiento en tiempo y frecuencia**: Sea $x(t)$ tal que $X(j\omega) = \mathcal{F}[x(t)]$. Tenemos que:

$$\mathcal{F}[x(at)] = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\omega}{a}\right), \; a \in \mathbb{R}$$

  Probarlo!! Notar que en esta propiedad vemos claramente el compromiso entre localización temporal y frecuencial!!

- **Derivación**: Sea $x(t)$ tal que $X(j\omega) = \mathcal{F}[x(t)]$. Tenemos que:

$$\mathcal{F}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = j\omega X(j\omega)$$

  Probarlo!!

- **Integración**: Sea $x(t)$ tal que $X(j\omega) = \mathcal{F}[x(t)]$. Supongamos que $\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)d\tau = 0$. Tenemos que:

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau\right] = \frac{X(j\omega)}{j\omega}$$

Propiedades de la transformada de tiempo continuo IV

Proof: Podemos aplicar integración por partes

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau\right] &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau\right)e^{-j\omega t}dt \\ &= -\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau\,\frac{e^{-j\omega t}}{j\omega}\Bigg|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{j\omega}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \\ &= \frac{X(j\omega)}{j\omega} \qquad (1)\end{aligned}$$

En el caso de que $\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)d\tau \neq 0$ debemos compensar el "valor de continua" con un impulso. La expresión para ese caso:

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau\right] = \frac{X(j\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\delta(\omega)$$

Notar que $X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)d\tau$.

Propiedades de la transformada de tiempo continuo V

- **Convolución**: Sea $x(t)$ tal que $X(j\omega) = \mathcal{F}[x(t)]$ y $y(t)$ tal que $Y(j\omega) = \mathcal{F}[y(t)]$. Sea $z(t) = x(t) * y(t)$. Tenemos:

$$\mathcal{F}[z(t)] = X(j\omega)Y(j\omega)$$

Proof: Podemos escribir lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[z(t)] &= \int_{\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \right) e^{-j\omega t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left(\int_{-\infty}^{\infty} y(t-\tau)e^{-j\omega t}dt \right) d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)Y(j\omega)e^{-j\omega\tau}d\tau \\
&= X(j\omega)Y(j\omega)
\end{aligned}$$

Propiedades de la transformada de tiempo continuo V

- **Convolución**: Sea $x(t)$ tal que $X(j\omega) = \mathcal{F}[x(t)]$ y $y(t)$ tal que $Y(j\omega) = \mathcal{F}[y(t)]$. Sea $z(t) = x(t) * y(t)$. Tenemos:

$$\mathcal{F}[z(t)] = X(j\omega)Y(j\omega)$$

Proof: Podemos escribir lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[z(t)] &= \int_{\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \right) e^{-j\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left(\int_{-\infty}^{\infty} y(t-\tau)e^{-j\omega t} dt \right) d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)Y(j\omega)e^{-j\omega\tau} d\tau \\
&= X(j\omega)Y(j\omega)
\end{aligned}$$

Esta propiedad es sin duda una de las más importantes de la transformada de Fourier!! Nos será de mucha utilidad para analizar sistemas LTI!!

Propiedades de la transformada de tiempo continuo VI

- **Multiplicación en el tiempo**: Sea $x(t)$ tal que $X(j\omega) = \mathcal{F}[x(t)]$ y $y(t)$ tal que $Y(j\omega) = \mathcal{F}[y(t)]$. Sea $z(t) = x(t)y(t)$. Tenemos:

$$\mathcal{F}[z(t)] = \frac{1}{2\pi}[X(j\omega) * Y(j\omega)]$$

Proof: Usemos la dualidad entre los pares transformados. Podemos escribir:

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{1}{2\pi}\mathcal{R}\left[\mathcal{F}\left[\frac{1}{2\pi}X(j\omega) * Y(j\omega)\right]\right] \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\mathcal{R}[\mathcal{F}[X(j\omega) * Y(j\omega)]] \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\mathcal{R}\left[4\pi^2 x(-t)y(-t)\right] \\ &= x(t)y(t) \end{aligned}$$

Propiedades de la transformada de tiempo continuo VI

- **Multiplicación en el tiempo**: Sea $x(t)$ tal que $X(j\omega) = \mathcal{F}[x(t)]$ y $y(t)$ tal que $Y(j\omega) = \mathcal{F}[y(t)]$. Sea $z(t) = x(t)y(t)$. Tenemos:

$$\mathcal{F}[z(t)] = \frac{1}{2\pi}[X(j\omega) * Y(j\omega)]$$

Proof: Usemos la dualidad entre los pares transformados. Podemos escribir:

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{1}{2\pi}\mathcal{R}\left[\mathcal{F}\left[\frac{1}{2\pi}X(j\omega) * Y(j\omega)\right]\right] \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\mathcal{R}[\mathcal{F}[X(j\omega) * Y(j\omega)]] \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\mathcal{R}\left[4\pi^2 x(-t)y(-t)\right] \\ &= x(t)y(t) \end{aligned}$$

Esta propiedad es sin duda también una de las más importantes de la transformada de Fourier!! Nos será de mucha utilidad para el tema de muestreo!! Es una propiedad muy importante también en el contexto de sistemas de comunicaciones!!

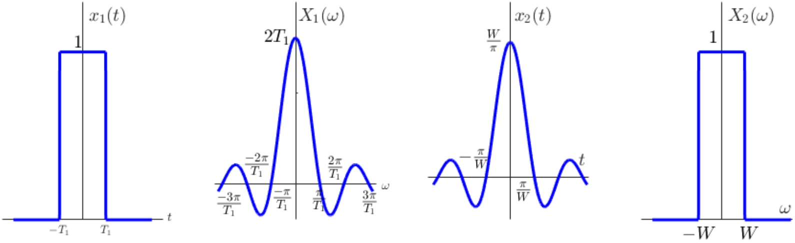
Dualidad

$$x(t) \; : \; X(\omega) = \mathcal{F}\left[x(t)\right] \Rightarrow \mathcal{F}\left[X(t)\right] = 2\pi x(-\omega)$$

Ejemplo:

$$x_1(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T_1 \\ 0 & |t| > T_1 \end{cases} \leftrightarrow X_1(\omega) = 2\frac{\sin(\omega T_1)}{\omega}$$

$$x_2(t) = \frac{\sin(Wt)}{\pi t} \leftrightarrow X_2(\omega) = \begin{cases} 1 & |t| < W \\ 0 & |t| > W \end{cases}$$



Sistemas LTI y transformada de Fourier I

En una clase previa definimos la respuesta en frecuencia de un sistema LTI con respuesta al impulso $h(t)$ como:

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt$$

Sistemas LTI y transformada de Fourier I

En una clase previa definimos la respuesta en frecuencia de un sistema LTI con respuesta al impulso $h(t)$ como:

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt$$

La respuesta en frecuencia de un sistema LTI no es otra cosa que la transformada de Fourier de su respuesta al impulso!!!

Sistemas LTI y transformada de Fourier I

En una clase previa definimos la respuesta en frecuencia de un sistema LTI con respuesta al impulso $h(t)$ como:

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt$$

La respuesta en frecuencia de un sistema LTI no es otra cosa que la transformada de Fourier de su respuesta al impulso!!!

Además por la propiedad de convolución sabemos que la respuesta $y(t)$ del sistema LTI con respuesta al impulso $h(t)$ a una entrada $x(t)$ puede caracterizarse también como:

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$$

Sistemas LTI y transformada de Fourier I

En una clase previa definimos la respuesta en frecuencia de un sistema LTI con respuesta al impulso $h(t)$ como:

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt$$

La respuesta en frecuencia de un sistema LTI no es otra cosa que la transformada de Fourier de su respuesta al impulso!!!

Además por la propiedad de convolución sabemos que la respuesta $y(t)$ del sistema LTI con respuesta al impulso $h(t)$ a una entrada $x(t)$ puede caracterizarse también como:

$$Y(j\omega) = H(j\omega) X(j\omega)$$

La ecuación anterior caracteriza, así como lo hacía la integral de convolución, en forma completa la acción de un sistema LTI!! Esto es así porque, según lo que discutimos previamente, siempre podemos volver del campo transformado al dominio del tiempo gracias a la invertibilidad de la transformada de Fourier!!

Sistemas LTI y transformada de Fourier II

En lo anterior hemos supuesto que la respuesta en frecuencia existe. Es decir que la transformada de Fourier de la respuesta al impulso debe estar bien definida. Sin embargo, esto no es un problema para los sistemas LTI estables:

Teorema

La respuesta en frecuencia $H(j\omega)$ de un sistema LTI estable siempre existe.

Proof: Dado que el sistema es estable tenemos que $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < \infty$. Pero entonces podemos escribir:

$$|H(j\omega)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)e^{-j\omega t}|dt = \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < \infty$$

Lo que muestra que la respuesta en frecuencia está bien definida.

Sistemas LTI y transformada de Fourier II

En lo anterior hemos supuesto que la respuesta en frecuencia existe. Es decir que la transformada de Fourier de la respuesta al impulso debe estar bien definida. Sin embargo, esto no es un problema para los sistemas LTI estables:

Teorema

La respuesta en frecuencia $H(j\omega)$ de un sistema LTI estable siempre existe.

Proof: Dado que el sistema es estable tenemos que $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$. Pero entonces podemos escribir:

$$|H(j\omega)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(t) e^{-j\omega t}| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

Lo que muestra que la respuesta en frecuencia está bien definida.

Nuestro interés en analizar sistemas LTI mediante la transformada de Fourier siempre estará en aquellos que son estables!! Para analizar sistemas LTI inestables utilizaremos más adelante la transformada de Laplace!!

Sistemas LTI y transformada de Fourier III

Notar que la ecuación

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$$

es mucho más simple de interpretar que una integral de convolución. Observando esta ecuación y en particular inspeccionando $H(j\omega)$ podemos obtener información muy valiosa sobre el sistema LTI bajo estudio o expresar en forma muy simple y conveniente muchas de sus propiedades.

Sistemas LTI y transformada de Fourier III

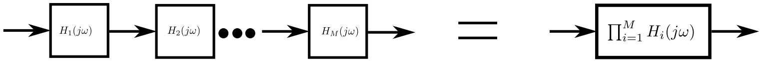
Notar que la ecuación

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$$

es mucho más simple de interpretar que una integral de convolución. Observando esta ecuación y en particular inspeccionando $H(j\omega)$ podemos obtener información muy valiosa sobre el sistema LTI bajo estudio o expresar en forma muy simple y conveniente muchas de sus propiedades.

Por ejemplo, consideremos la conexión en cascada de M sistemas LTI con respuestas al impulos $h_i(t), \quad i = 1, \ldots, M$. La respuesta total del sistema en cascada es igual a $h(t) = h_1(t) * h_2(t) * \cdots * h_M(t)$, lo cual es trabajoso de obtener y analizar. Sin embargo gracias a la propiedad de convolución la respuesta en frecuencia total del sistema en cascada se puede obtener como:

$$H(j\omega) = \prod_{i=1}^{M} H_i(j\omega)$$



Un ejemplo muy importante de sistemas LTI que prácticamente se analizan y diseñan en su totalidad a través de la respuesta en frecuencia son los *filtros selectivos en frecuencia*.

Sistemas LTI y transformada de Fourier IV

Un ejemplo muy importante de sistemas LTI que prácticamente se analizan y diseñan en su totalidad a través de la respuesta en frecuencia son los *filtros selectivos en frecuencia*.

Un filtro selectivo en frecuencia es un sistema LTI que nos permite atenuar, magnificar o directamente eliminar una parte del espectro de una señal a su entrada!

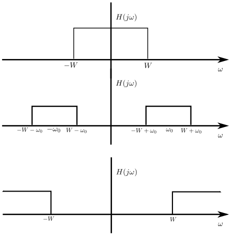
Sistemas LTI y transformada de Fourier IV

Un ejemplo muy importante de sistemas LTI que prácticamente se analizan y diseñan en su totalidad a través de la respuesta en frecuencia son los *filtros selectivos en frecuencia*.

Un filtro selectivo en frecuencia es un sistema LTI que nos permite atenuar, magnificar o directamente eliminar una parte del espectro de una señal a su entrada!

Ejemplos de filtros selectivos en frecuencia:

- Filtros pasa-bajos
- Filtros pasa-banda
- Filtros pasa-altos



Sistemas LTI y transformada de Fourier V

Consideremos el filtro pasa-bajos ideal:

$$X(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < W \\ 0 & |\omega| > W \end{cases}$$

Vemos que la respuesta al impulso de este sistema es:

$$x(t) = \frac{W}{\pi} \mathrm{sinc}\left(\frac{Wt}{\pi}\right)$$

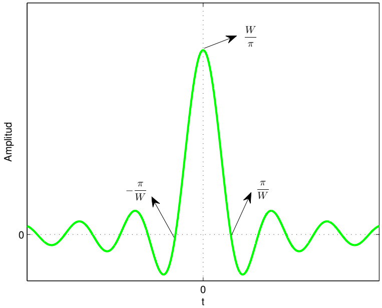
Sistemas LTI y transformada de Fourier V

Consideremos el filtro pasa-bajos ideal:

$$X(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < W \\ 0 & |\omega| > W \end{cases}$$

Vemos que la respuesta al impulso de este sistema es:

$$x(t) = \frac{W}{\pi}\text{sinc}\left(\frac{Wt}{\pi}\right)$$



Vemos que pueden existir algunos problemas para implementar el filtro pasa-bajos ideal. El sistema es no causal, altamente oscilatorio, etc. En la práctica, la característica ideal se aproximará de forma tal que el sistema cumpla ciertos requisitos, además de la característica en frecuencia deseada.

Sistemas LTI y transformada de Fourier VI

Muchas veces la respuesta en frecuencia se representa en su forma polar:

$H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\arg H(j\omega)}, \ -\pi \leq \arg H(j\omega) < \pi$ También podemos definir la *fase extendida!!!*

La salida de un sistema se puede entonces escribir como:

$$Y(j\omega) = |H(j\omega)||X(j\omega)|e^{j\arg H(j\omega)}e^{j\arg X(j\omega)}$$

con lo cual obtenemos:

$$|Y(j\omega)| = |H(j\omega)||X(j\omega)|$$

$$\arg Y(j\omega) = \arg H(j\omega) + \arg X(j\omega)$$

Sistemas LTI y transformada de Fourier VI

Muchas veces la respuesta en frecuencia se representa en su forma polar:

$H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j \arg H(j\omega)}$, $-\pi \leq \arg H(j\omega) < \pi$ También podemos definir la *fase extendida!!!*

La salida de un sistema se puede entonces escribir como:

$$Y(j\omega) = |H(j\omega)||X(j\omega)|e^{j \arg H(j\omega)}e^{j \arg X(j\omega)}$$

con lo cual obtenemos:

$$|Y(j\omega)| = |H(j\omega)||X(j\omega)|$$

$$\arg Y(j\omega) = \arg H(j\omega) + \arg X(j\omega)$$

La magnitud de la respuesta en frecuencia altera la magnitud del espectro de la señal de entrada y la fase de la respuesta en frecuencia produce un *desplazamiento* en fase del espectro de la señal de entrada!! Por estas razones $|H(j\omega)|$ se conoce como *ganancia* del sistema y $\arg H(j\omega)$ se conoce como *desplazamiento de fase* del sistema. Dependiendo de nuestro objetivo estas cantidades pueden introducir cambios útiles en la señal de entrada o efectos indeseables. En ese caso hablamos de *distorsiones!*

Sistemas LTI y transformada de Fourier VII

Es el efecto de la ganancia de un sistema LTI es bastante simple de entender. El efecto de la fase es un poco más interesante para analizar. Pensemos por un momento en el sistema cuya respuesta en frecuencia es:

$$H(j\omega) = e^{-j\omega t_0}$$

Este sistema tiene ganancia unitaria por lo que no introduce niguna distorsión en la amplitud del espectro de la señal de entrada. Esto es $|Y(j\omega)| = |X(j\omega)|$. Sin embargo no podemos afirmar que $x(t) = y(t)$!!

Sistemas LTI y transformada de Fourier VII

Es el efecto de la ganancia de un sistema LTI es bastante simple de entender. El efecto de la fase es un poco más interesante para analizar. Pensemos por un momento en el sistema cuya respuesta en frecuencia es:

$$H(j\omega) = e^{-j\omega t_0}$$

Este sistema tiene ganancia unitaria por lo que no introduce niguna distorsión en la amplitud del espectro de la señal de entrada. Esto es $|Y(j\omega)| = |X(j\omega)|$. Sin embargo no podemos afirmar que $x(t) = y(t)$!!

La salida para este sistema se puede expresar fácilmente:

$$y(t) = x(t - t_0)$$

Sistemas LTI y transformada de Fourier VII

Es el efecto de la ganancia de un sistema LTI es bastante simple de entender. El efecto de la fase es un poco más interesante para analizar. Pensemos por un momento en el sistema cuya respuesta en frecuencia es:

$$H(j\omega) = e^{-j\omega t_0}$$

Este sistema tiene ganancia unitaria por lo que no introduce niguna distorsión en la amplitud del espectro de la señal de entrada. Esto es $|Y(j\omega)| = |X(j\omega)|$. Sin embargo no podemos afirmar que $x(t) = y(t)$!!

La salida para este sistema se puede expresar fácilmente:

$$y(t) = x(t - t_0)$$

Si bien es claro que $x(t) \neq y(t)$, la salida de este sistema preserva totalmente la forma de la señal de entrada, introduciendo simplemente un retardo en el tiempo!! Este sistema no presenta *distorsión de fase*!

Sistemas LTI y transformada de Fourier VII

Es el efecto de la ganancia de un sistema LTI es bastante simple de entender. El efecto de la fase es un poco más interesante para analizar. Pensemos por un momento en el sistema cuya respuesta en frecuencia es:

$$H(j\omega) = e^{-j\omega t_0}$$

Este sistema tiene ganancia unitaria por lo que no introduce niguna distorsión en la amplitud del espectro de la señal de entrada. Esto es $|Y(j\omega)| = |X(j\omega)|$. Sin embargo no podemos afirmar que $x(t) = y(t)$!!

La salida para este sistema se puede expresar fácilmente:

$$y(t) = x(t - t_0)$$

Si bien es claro que $x(t) \neq y(t)$, la salida de este sistema preserva totalmente la forma de la señal de entrada, introduciendo simplemente un retardo en el tiempo!! Este sistema no presenta *distorsión de fase*!

Notar que el sistema anterior presenta:

$$\arg H(j\omega) = -\omega t_0$$

Es decir presenta *fase lineal*!! Los sistemas de fase lineal no tienen *distorsión de fase*!!

Sistemas LTI y transformada de Fourier VIII

Consideremos ahora un sistema de fase no lineal:

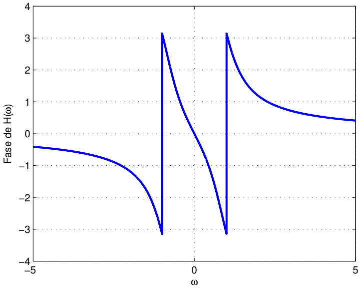
$$H(j\omega) = \frac{1 - j\omega + (j\omega)^2}{1 + j\omega + (j\omega)^2}$$

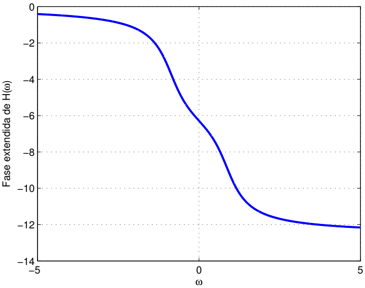
Es muy fácil ver que:

$$|H(j\omega)| = 1, \ \forall \omega \in \mathbb{R}$$

y que:

$$\arg H(j\omega) = -2 \arctan \left\{ \frac{\omega}{1 - \omega^2} \right\}, \ \forall \omega \in \mathbb{R}$$





Sistemas LTI y transformada de Fourier IX

Veamos la respuesta al impulso. Para ello podemos escribir (usando fracciones simples);

$$H(j\omega) = 1 - \frac{1 - j0.577}{j\omega + 0.5 + j\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{1 + j0.577}{j\omega + 0.5 - j\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Usando que

$$\mathcal{F}\left[\delta(t)\right] = 1,\ \mathcal{F}\left[e^{-\alpha t}u(t)\right] = \frac{1}{\alpha + j\omega},\ \Re\{\alpha\} > 0$$

tenemos que la respuesta al impulso se puede escribir:

$$h(t) = \delta(t) - 2.30e^{-0.5t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + 0.5237\right)u(t)$$

Sistemas LTI y transformada de Fourier IX

Veamos la respuesta al impulso. Para ello podemos escribir (usando fracciones simples);

$$H(j\omega) = 1 - \frac{1 - j0.577}{j\omega + 0.5 + j\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{1 + j0.577}{j\omega + 0.5 - j\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

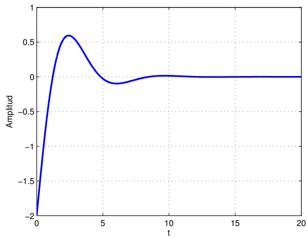
Usando que

$$\mathcal{F}\left[\delta(t)\right] = 1,\ \mathcal{F}\left[e^{-\alpha t}u(t)\right] = \frac{1}{\alpha + j\omega},\ \Re\{\alpha\} > 0$$

tenemos que la respuesta al impulso se puede escribir:

$$h(t) = \delta(t) - 2.30e^{-0.5t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + 0.5237\right)u(t)$$

La respuesta al impulso no es un impulso desplazado! No todas las frecuencias de la señal de entrada (en este caso un impulso unitario y que se encuentran todas en fase!!) se desplazan en una misma cantidad, haciendo que las fases de las mismas a la salida del sistema a un tiempo dado t sean diferentes. Esto da a lugar a interferencias constructivas y destructivas y al ensanchamiento temporal de la señal de salida!! Esto se conoce como *dispersión!*



En el gráfico no incluimos $\delta(t)$!!

Sistemas LTI y transformada de Fourier X

Una medida de la dispersión introducida por un sistema se da por medio del *retardo de grupo* (definido para la *fase extendida*):

$$\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \arg H(j\omega)$$

Sistemas LTI y transformada de Fourier X

Una medida de la dispersión introducida por un sistema se da por medio del *retardo de grupo* (definido para la *fase extendida*):

$$\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \arg H(j\omega)$$

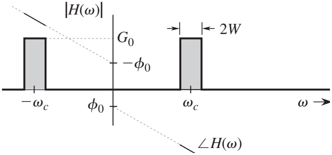
Obviamente si el sistema es de fase lineal $\tau(\omega) = \text{cte}$. El retardo de grupo permite cuantificar cuanto se adelantan o se atrasan las frecuencias de la señal de entrada a un sistema LTI que se encuentran alrededor de un entorno de frecuencia ω_0!!

También se define el retraso de fase como :

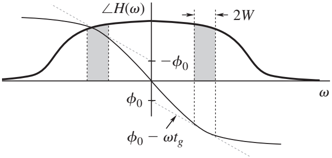
$$\tau_f(\omega) = -\frac{\arg H(j\omega)}{\omega}$$

Si el sistema es de fase lineal, entonces $\tau_g(\omega) = \tau_f(\omega)$.

$$H(\omega) = \begin{cases} G_0 e^{j(\phi_0 - \omega\tau_g)} & \omega_c - W \leq \omega \leq \omega_c + W \\ G_0 e^{j(-\phi_0 - \omega\tau_g)} & -\omega_c - W \leq \omega \leq -\omega_c + W \end{cases}$$



$$s(t) \in \mathbb{R}; \mathcal{F}[s(t)] = S(\omega)$$
$$S(\omega) = 0, \forall |\omega| > W; W << \omega_c$$
$$x(t) = 2s(t)\cos\omega_c t$$
$$= s(t)e^{j\omega_c t} + s(t)e^{-j\omega_c t}$$
$$X(\omega) = S(\omega - \omega_c) + S(\omega + \omega_c)$$



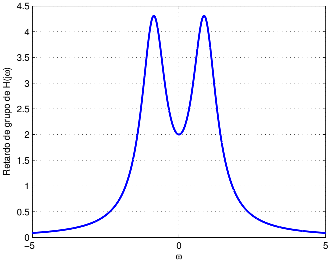
$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$$
$$= H(\omega)S(\omega + \omega_c) + H(\omega)S(\omega - \omega_c)$$
$$= G_0 e^{j(-\phi_0 - \omega\tau_g)} S(\omega + \omega_c) + G_0 e^{j(\phi_0 - \omega\tau_g)} S(\omega - \omega_c)$$
$$= G_0 e^{-j\phi_0} S(\omega + \omega_c) e^{-j\omega\tau_g} + G_0 e^{j\phi_0} S(\omega - \omega_c) e^{-j\omega\tau_g}$$
$$y(t) = G_0 e^{-j\phi_0} s(t - \tau_g) e^{-j\omega_c(t - \tau_g)} + G_0 e^{j\phi_0} s(t - \tau_g) e^{j\omega_c(t - \tau_g)}$$
$$= G_0 s(t - \tau_g) e^{-j[\omega_c(t - \tau_g) + \phi_0]} + G_0 s(t - \tau_g) e^{j[\omega_c(t - \tau_g) + \phi_0]}$$
$$= G_0 s(t - \tau_g) 2\cos[\omega_c(t - \tau_g) + \phi_0]$$
$$= G_0 s(t - \tau_g) 2\cos\left[\omega_c\left(t - \tau_f(\omega_c)\right)\right] \qquad \tau_f(\omega_c) = -\frac{\phi_0 - \omega_c\tau_g}{\omega_c}$$

Sistemas LTI y transformada de Fourier XII

La transformada de Fourier de la señal de salida tiene fase lineal!! Vemos que todas las frecuencias de la señal de entrada $x(t)$ (cuyo espectro está concentrado alrededor de ω_0) se atrasan a la salida del sistema en una cantidad dada por $\tau(\omega_0)$. Es decir la señal de salida del sistema es básicamente igual a la señal de entrada (salvo un escalaje en amplitud y una fase) retrasada en el tiempo en una cantidad $\tau(\omega_0)$. El retardo de grupo proporciona el retardo sufrido por "un paquete concentrado de frecuencias". Notar que el concepto de retardo de grupo es el mismo que el de *velocidad de grupo* para un "paquete de ondas" (por ejemplo ondas electromagnéticas u ondas de materia!!).

Sistemas LTI y transformada de Fourier XII

La transformada de Fourier de la señal de salida tiene fase lineal!! Vemos que todas las frecuencias de la señal de entrada $x(t)$ (cuyo espectro está concentrado alrededor de ω_0) se atrasan a la salida del sistema en una cantidad dada por $\tau(\omega_0)$. Es decir la señal de salida del sistema es básicamente igual a la señal de entrada (salvo un escalaje en amplitud y una fase) retrasada en el tiempo en una cantidad $\tau(\omega_0)$. El retardo de grupo proporciona el retardo sufrido por "un paquete concentrado de frecuencias". Notar que el concepto de retardo de grupo es el mismo que el de *velocidad de grupo* para un "paquete de ondas" (por ejemplo ondas electromagnéticas u ondas de materia!!).



Para el ejemplo que analizamos antes, es fácil ver que el mayor retardo se da para la frecuencia $\frac{\sqrt{3}}{2}$!! Esa oscilación determina de alguna forma las partes más tardías de la respuesta al impulso!!

Ecuaciones diferenciales y transformada de Fourier I

Muchos sistemas LTI causales (con la condición de reposo inicial discutida hace unas clases) van a estar descriptos por una ecuación diferencial con coeficientes constantes:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

Si aplicamos el operador $\mathcal{F}[\cdot]$ a ambos lados obtenemos (aplicando linealidad):

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \mathcal{F}\left[\frac{d^k y(t)}{dt^k}\right] = \sum_{k=0}^{M} b_k \mathcal{F}\left[\frac{d^k x(t)}{dt^k}\right]$$

Usando la propiedad de diferenciación:

$$Y(j\omega)\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k = X(j\omega)\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k$$

Para un sistema LTI tenemos que

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega), \quad H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

Entonces obtenemos que:

$$H(j\omega) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k}$$

Ecuaciones diferenciales y transformada de Fourier II

Entonces obtenemos que:

$$H(j\omega) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k}$$

- Vemos que la respuesta en frecuencia del sistema es un cociente de polinomios, los cuales se obtienen por inspección a través de los coeficientes de la ecuación diferencial!

Ecuaciones diferenciales y transformada de Fourier II

Entonces obtenemos que:

$$H(j\omega) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k}$$

- Vemos que la respuesta en frecuencia del sistema es un cociente de polinomios, los cuales se obtienen por inspección a través de los coeficientes de la ecuación diferencial!
- De una ecuación diferencial pasamos a una expresión equivalente del sistema totalmente algebraica. Todo queda definido por los coeficientes de los polinomios o por lo que es los mismo por sus raíces. Esto simplifica mucho el análisis de los sistemas LTI!

Ecuaciones diferenciales y transformada de Fourier II

Entonces obtenemos que:

$$H(j\omega) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k}$$

- Vemos que la respuesta en frecuencia del sistema es un cociente de polinomios, los cuales se obtienen por inspección a través de los coeficientes de la ecuación diferencial!
- De una ecuación diferencial pasamos a una expresión equivalente del sistema totalmente algebraica. Todo queda definido por los coeficientes de los polinomios o por lo que es los mismo por sus raíces. Esto simplifica mucho el análisis de los sistemas LTI!
- Podemos obtener la respuesta al impulso del sistema, en lugar de resolviendo la ecuación diferencial, antitransformando $H(j\omega)$! Para ello, dado que tenemos un cociente de polinomios, puede ser muy útil el método de fracciones simples (ver Apéndice de Oppenheim and Willsky).

Ecuaciones diferenciales y transformada de Fourier II

Entonces obtenemos que:

$$H(j\omega) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k}$$

- Vemos que la respuesta en frecuencia del sistema es un cociente de polinomios, los cuales se obtienen por inspección a través de los coeficientes de la ecuación diferencial!
- De una ecuación diferencial pasamos a una expresión equivalente del sistema totalmente algebraica. Todo queda definido por los coeficientes de los polinomios o por lo que es los mismo por sus raíces. Esto simplifica mucho el análisis de los sistemas LTI!
- Podemos obtener la respuesta al impulso del sistema, en lugar de resolviendo la ecuación diferencial, antitransformando $H(j\omega)$! Para ello, dado que tenemos un cociente de polinomios, puede ser muy útil el método de fracciones simples (ver Apéndice de Oppenheim and Willsky).

Determine usando transformada de Fourier la respuesta al impulso de la ecuación diferencial:

$$\frac{dy(t)}{dt} + \alpha y(t) = x(t), \;\; \alpha > 0$$

Transformada de Fourier en tiempo discreto I

Podemos definir también la transformada de Fourier para señales de tiempo discreto.Consideremos una señal $x[n]$. Se define la *transformada de Fourier* de $x[n]$ o $X(e^{j\Omega}) \equiv \mathcal{F}\{x[n]\}$ como:

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n},\ \omega \in [-\pi, \pi)$$

Transformada de Fourier en tiempo discreto I

Podemos definir también la transformada de Fourier para señales de tiempo discreto.Consideremos una señal $x[n]$. Se define la *transformada de Fourier* de $x[n]$ o $X(e^{j\Omega}) \equiv \mathcal{F}\{x[n]\}$ como:

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}, \; \omega \in [-\pi, \pi)$$

La definición dada arriba de la transformada de Fourier tiene sentido siempre y cuando $X(e^{j\Omega})$ esté bien definida!! Es decir la serie debe existir para todo ω y ser finita!! Esto por ejemplo se cumple si $x[n] \in l_1(\mathbb{Z})$.

Transformada de Fourier en tiempo discreto I

Podemos definir también la transformada de Fourier para señales de tiempo discreto.Consideremos una señal $x[n]$. Se define la *transformada de Fourier* de $x[n]$ o $X(e^{j\Omega}) \equiv \mathcal{F}\{x[n]\}$ como:

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}, \; \omega \in [-\pi, \pi)$$

La definición dada arriba de la transformada de Fourier tiene sentido siempre y cuando $X(e^{j\Omega})$ esté bien definida!! Es decir la serie debe existir para todo ω y ser finita!! Esto por ejemplo se cumple si $x[n] \in l_1(\mathbb{Z})$.

Nuevamente, la transformada de Fourier $\mathcal{F}$ se debe interpretar como un *operador* que mapea señales $x[n]$ en un determinado espacio vectorial y entrega señales $X(e^{j\Omega})$ en otro espacio vectorial donde podamos obtener caracterizaciones útiles de la señal original. Será de interés asegurar que dicho operador sea invertible. Esto es que podamos encontrar un operador $\mathcal{F}^{-1}$ que dada la transformada de Fourier $X(e^{j\Omega})$ nos permita recuperar la señal original $x[n]$!

Transformada de Fourier en tiempo discreto I

Podemos definir también la transformada de Fourier para señales de tiempo discreto.Consideremos una señal $x[n]$. Se define la *transformada de Fourier* de $x[n]$ o $X(e^{j\Omega}) \equiv \mathcal{F}\{x[n]\}$ como:

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n},\ \omega \in [-\pi, \pi)$$

La definición dada arriba de la transformada de Fourier tiene sentido siempre y cuando $X(e^{j\Omega})$ esté bien definida!! Es decir la serie debe existir para todo ω y ser finita!! Esto por ejemplo se cumple si $x[n] \in l_1(\mathbb{Z})$.

Nuevamente, la transformada de Fourier $\mathcal{F}$ se debe interpretar como un *operador* que mapea señales $x[n]$ en un determinado espacio vectorial y entrega señales $X(e^{j\Omega})$ en otro espacio vectorial donde podamos obtener caracterizaciones útiles de la señal original. Será de interés asegurar que dicho operador sea invertible. Esto es que podamos encontrar un operador $\mathcal{F}^{-1}$ que dada la transformada de Fourier $X(e^{j\Omega})$ nos permita recuperar la señal original $x[n]$!

Notar que hemos definido la transformada para $\Omega \in [-\pi, \pi)$. Esto es así por que en caso discreto la transformada de Fourier es claramente una función periódica por lo que podemos restringir el análisis de $X(e^{j\Omega})$ a dicho intervalo!! En general podemos definir la variación en Ω en cualquier conjunto $B \in \mathbb{R}$ con largo 2π!!

Transformada de Fourier en tiempo discreto II

La *anti-transformada* de Fourier $\hat{x}[n] = \mathcal{F}^{-1}\left\{X(e^{j\Omega})\right\}$ se define como:

$$\hat{x}[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}d\Omega, \quad n \in \mathbb{Z}$$

siempre que la integral esté bien definida.

Transformada de Fourier en tiempo discreto II

La *anti-transformada* de Fourier $\hat{x}[n] = \mathcal{F}^{-1}\left\{X(e^{j\Omega})\right\}$ se define como:

$$\hat{x}[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}d\Omega, \quad n \in \mathbb{Z}$$

siempre que la integral esté bien definida.

Notar que por ser $X(e^{j\Omega})$ periódica la integral se puede hacer sobre cualquier intervalo $B \in \mathbb{R}$ de largo 2π. Como siempre nuestro interés estará en poder recuperar $x[n]$, con lo cual desearíamos que $\hat{x}[n] = x[n]$.

Transformada de Fourier en tiempo discreto II

La *anti-transformada* de Fourier $\hat{x}[n] = \mathcal{F}^{-1}\left\{X(e^{j\Omega})\right\}$ se define como:

$$\hat{x}[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}d\Omega, \quad n \in \mathbb{Z}$$

siempre que la integral esté bien definida.

Notar que por ser $X(e^{j\Omega})$ periódica la integral se puede hacer sobre cualquier intervalo $B \in \mathbb{R}$ de largo 2π. Como siempre nuestro interés estará en poder recuperar $x[n]$, con lo cual desearíamos que $\hat{x}[n] = x[n]$.

Podemos escribir:

$$\begin{aligned}
\hat{x}[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-j\Omega k}\right)e^{j\Omega n}d\Omega \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\Omega(n-k)}d\Omega \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \\
&= x[n]
\end{aligned}$$

Transformada de Fourier en tiempo discreto III

Vemos que si la transformada de Fourier $X(e^{j\Omega})$ está bien definida es siempre posible volver a recuperar $x[n]$!! Notar el contraste con el caso de la transformada de Fourier de tiempo continuo!! Esto se debe a que la integral de la anti-transformada es sobre un intervalo finito, con lo cual no hay problemas de convergencia.

Transformada de Fourier en tiempo discreto III

Vemos que si la transformada de Fourier $X(e^{j\Omega})$ está bien definida es siempre posible volver a recuperar $x[n]$!! Notar el contraste con el caso de la transformada de Fourier de tiempo continuo!! Esto se debe a que la integral de la anti-transformada es sobre un intervalo finito, con lo cual no hay problemas de convergencia.

Es de esperar entonces que tampoco observemos el fenómeno de Gibbs que teníamos para la serie y transformada de Fourier de tiempo continuo!!

Tenemos también el siguiente resultado

Transformada de Fourier en tiempo discreto III

Vemos que si la transformada de Fourier $X(e^{j\Omega})$ está bien definida es siempre posible volver a recuperar $x[n]$!! Notar el contraste con el caso de la transformada de Fourier de tiempo continuo!! Esto se debe a que la integral de la anti-transformada es sobre un intervalo finito, con lo cual no hay problemas de convergencia.

Es de esperar entonces que tampoco observemos el fenómeno de Gibbs que teníamos para la serie y transformada de Fourier de tiempo continuo!!

Tenemos también el siguiente resultado

Teorema

Sobre el espacio $l_2(\mathbb{Z})$ el operador $x[n] \to \mathcal{F}\{x[n]\}$ es biyectivo. Es decir, si $\mathcal{F}\{x_1[n]\} = \mathcal{F}\{x_2[n]\}$ (en el sentido cuadrático en $L_2([-\pi,\pi))$) entonces $x_1[n] = x_2[n]$. Además para cada $x[n] \in l_2(\mathbb{Z})$ existe su transformada de Fourier $X(e^{j\Omega}) \equiv \mathcal{F}\{x[n]\}$ la cual es de energía finita. Así mismo para cada señal $X(e^{j\Omega}) \in L_2([-\pi,\pi))$ existe $x[n] \equiv \mathcal{F}^{-1}\left\{X(e^{j\Omega})\right\}$ también de energía finita. Además se cumple la relación de Parseval:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\Omega})|^2 d\Omega$$

Transformada de Fourier en tiempo discreto IV

Algunas aclaraciones:

- Ya sabemos que una vez definida $X(e^{j\Omega})$ no hay problemas para volver a obtener $x[n]$. Ahora supongamos que tenemos $X_1(e^{j\Omega})$ e $X_2(e^{j\Omega})$ tales que:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|X_1(e^{j\Omega})-X_2(e^{j\Omega})|^2 d\Omega = 0$$

  Entonces el teorema anterior nos dice que $x_1[n] = x_2[n]\ \forall n \in \mathbb{Z}$.

- Al definir la transformada de Fourier para secuencias $x[n] \in l_2(\mathbb{Z})$ tenemos que interpretar la convergencia hacia $X(e^{j\Omega})$ en el sentido cuadrático medio:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|X(e^{j\Omega})-\sum_{k=-N}^{N}x[k]e^{-j\Omega k}\right|^2 d\Omega = 0$$

- Vemos que $X(e^{j\Omega})$ es una función periódica con periodo 2π. Como tal se pueden calcular sus coeficientes de Fourier:

$$a_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\Omega})e^{-j\Omega k}d\Omega$$

  Es claro que $a_k = x[-k]$, lo que refleja que tenemos una relación de dualidad entre en la transformada de Fourier de tiempo discreto y la serie de Fourier de tiempo continuo, la cual se puede explotar en nuestros cálculos!!

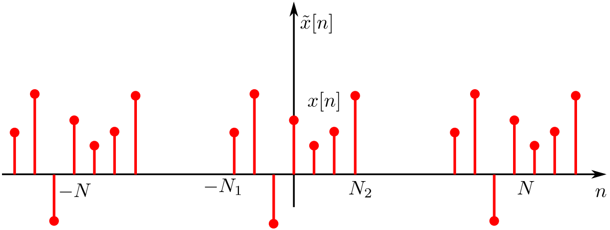
Transformada de Fourier en tiempo discreto V

De la misma forma que hicimos para la transformada de Fourier de tiempo continuo veamos como podemos obtener la transformada de tiempo discreto a partir de la serie de Fourier. Sea $x[n]$ una señal no periódica que es cero para $n < -N_1$ y $n > N_2$.

Transformada de Fourier en tiempo discreto V

De la misma forma que hicimos para la transformada de Fourier de tiempo continuo veamos como podemos obtener la transformada de tiempo discreto a partir de la serie de Fourier. Sea $x[n]$ una señal no periódica que es cero para $n < -N_1$ y $n > N_2$.

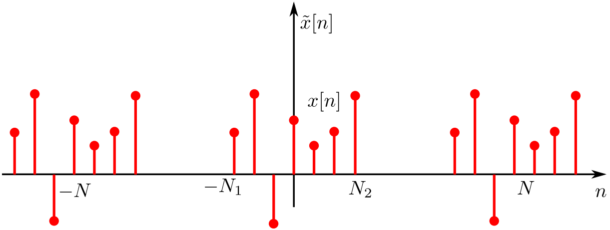
Sin embargo podemos construir una señal periódica $\tilde{x}[n]$ con periodo $N > N_1 + N_2$, de forma tal que en cada periodo tengamos $x[n]$.



Transformada de Fourier en tiempo discreto V

De la misma forma que hicimos para la transformada de Fourier de tiempo continuo veamos como podemos obtener la transformada de tiempo discreto a partir de la serie de Fourier. Sea $x[n]$ una señal no periódica que es cero para $n < -N_1$ y $n > N_2$.

Sin embargo podemos construir una señal periódica $\tilde{x}[n]$ con periodo $N > N_1 + N_2$, de forma tal que en cada periodo tengamos $x[n]$.



Podemos calcular la serie de Fourier de $\tilde{x}[n]$!!

Transformada de Fourier en tiempo discreto VI

Tenemos que:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\Omega_0 n}, \quad a_k = \frac{1}{N}\sum_{k=\langle N\rangle} \tilde{x}[k] e^{-jk\Omega_0 n}, \; \Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

Pero cuando $-N_1 < n < N_2$, tenemos que $\tilde{x}[n] = x[n]$. Además para n fuera de ese rango tenemos que $x[n] = 0$. Entonces podemos escribir:

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{k=\langle N\rangle} \tilde{x}[k] e^{-jk\Omega_0 n}$$

Con $X(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-j\Omega k}$ podemos escribir:

$$a_k = \frac{1}{N} X(e^{j\Omega})\Big|_{\Omega = k\Omega_0} = \frac{1}{N} X(e^{jk\Omega_0})$$

Entonces podemos escribir:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} \frac{1}{N} X(e^{jk\Omega_0}) e^{jk\Omega_0 n} = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=\langle N\rangle} X(e^{jk\Omega_0}) e^{jk\Omega_0 n}\Omega_0$$

Transformada de Fourier en tiempo discreto VII

Cuando $N \to \infty$ tenemos que $\tilde{x}[n] \to x[n]$ $\forall n \in \mathbb{Z}$. Además $\Omega_0 \to 0$. El lado derecho de la última ecuación se "convierte" en una integral:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(j\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$

Transformada de Fourier en tiempo discreto VII

Cuando $N \to \infty$ tenemos que $\tilde{x}[n] \to x[n]\ \forall n \in \mathbb{Z}$. Además $\Omega_0 \to 0$. El lado derecho de la última ecuación se "convierte" en una integral:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(j\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$

Mientras por medio de la serie de Fourier podemos representar una señal periódica a través de una superposición de exponenciales con armónicos en un conjunto discreto, a través de la transformada de Fourier podemos representar una señal no periódica como una "superposición" de exponenciales cuyos armónicos forman un continuo en el intervalo $[-\pi, \pi)$!!

Transformada de Fourier en tiempo discreto VII

Cuando $N \to \infty$ tenemos que $\tilde{x}[n] \to x[n]$ $\forall n \in \mathbb{Z}$. Además $\Omega_0 \to 0$. El lado derecho de la última ecuación se "convierte" en una integral:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(j\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$

Mientras por medio de la serie de Fourier podemos representar una señal periódica a través de una superposición de exponenciales con armónicos en un conjunto discreto, a través de la transformada de Fourier podemos representar una señal no periódica como una "superposición" de exponenciales cuyos armónicos forman un continuo en el intervalo $[-\pi, \pi)$!!

Notar que podemos recorrer el camino inverso: partimos de una señal periódica $\tilde{x}[n]$, la cual es igual a $x[n]$ en un período. Es claro que podemos recuperar los coeficientes de Fourier de $\tilde{x}[n]$ a través de un "muestreo" equiespaciado de la transformada de Fourier $X(e^{j\Omega})$ de $x[n]$:

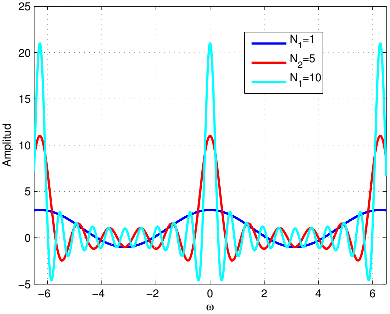
$$a_k = \frac{1}{N} X(e^{j\Omega})\Big|_{\Omega = k\Omega_0}$$

1) Consideremos el pulso rectangular

$$x[n] = \begin{cases} 1 & |n| \leq N_1 \\ 0 & |n| > N_1 \end{cases}$$

La transformada de Fourier:

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\Omega n} = e^{j\Omega N_1} \sum_{k=0}^{2N_1} e^{-jk\Omega} = e^{j\Omega N_1} \frac{1 - e^{-j\Omega(2N_1+1)}}{1 - e^{-j\Omega}} = \frac{\sin(\Omega(N_1 + 1/2))}{\sin(\Omega/2)}$$



Es claro que

$$\frac{\sin(\Omega(N_1 + 1/2))}{\sin(\Omega/2)}$$

es el equivalente discreto de la función sinc en tiempo continuo. Vemos que aquí también tenemos el comportamiento dual entre tiempo y frecuencia:

$+$ loc. en tiempo $\leftrightarrow$ - loc. en frecuencia

y viceversa

Ejemplos II

2) Consideremos

$$x[n] = \frac{\sin(nT_1)}{\pi n}, \;\; n \in \mathbb{Z}, \quad T_1 \leq \pi$$

Podemos ver por dualidad cual es la transformada de Fourier de esta secuencia. Sabemos que para la siguiente función periódica con periódo 2π:

$$y(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq T_1 \\ 0 & T_1 < |t| \leq \pi \end{cases}$$

los coeficientes de Fourier valen $a_n = \frac{\sin(nT_1)}{\pi n}$ y $\Omega_0 = 1$. Entonces $a_n = x[n]$. Sabemos que:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{jnt} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{-n} e^{-jnt} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n] e^{-jnt}$$

Como $x[-n] = x[n]$ podemos escribir:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jnt}$$

Ejemplos III

Reemplazando Ω por t probamos que $X(e^{j\Omega})$:

$$X(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1 & |\Omega| \leq T_1 \\ 0 & T_1 < |\Omega| \leq \pi \end{cases}$$

3) Sea $x[n] = \delta[n]$. Podemos verificar que:

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n] e^{-j\Omega n} = 1$$

Ejemplos III

Reemplazando Ω por t probamos que $X(e^{j\Omega})$:

$$X(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1 & |\Omega| \leq T_1 \\ 0 & T_1 < |\Omega| \leq \pi \end{cases}$$

3) Sea $x[n] = \delta[n]$. Podemos verificar que:

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n] e^{-j\Omega n} = 1$$

Tal como en el caso de tiempo continuo tenemos que el impulso está generado por una superposición en fase de un continuo de armónicas de la misma amplitud!! En este caso, dada las características especiales de las exponenciales de tiempo discreto el continuo de armónicas a utilizar pertenece al conjunto acotado $[-\pi, \pi)$.

Es inmediato verificar que:

$$\delta[n] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos{(\Omega n)} d\Omega$$

Ejemplos IV

4) Consideremos $X(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi k)$ con $|\Omega_0| \leq \pi$. Claramente esto es periódico con período 2π. (Tener en cuenta que estamos considerando los impulsos unitarios de tiempo continuo!!). Podemos tratar de determinar $x[n]$. Para ello:

$$\begin{aligned}
x[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}d\Omega = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi k)\right)e^{j\Omega n}d\Omega \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi k)e^{j\Omega n}d\Omega \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\delta(\Omega - \Omega_0)e^{j\Omega n}d\Omega \\
&= e^{j\Omega_0 n}
\end{aligned}$$

Ejemplos IV

4) Consideremos $X(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi k)$ con $|\Omega_0| \leq \pi$. Claramente esto es periódico con período 2π. (Tener en cuenta que estamos considerando los impulsos unitarios de tiempo continuo!!). Podemos tratar de determinar $x[n]$. Para ello:

$$
\begin{aligned}
x[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}d\Omega = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi k)\right)e^{j\Omega n}d\Omega \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi k)e^{j\Omega n}d\Omega \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\delta(\Omega - \Omega_0)e^{j\Omega n}d\Omega \\
&= e^{j\Omega_0 n}
\end{aligned}
$$

Tenemos que

$$\mathcal{F}\left\{e^{j\Omega_0 n}\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi k), \quad |\Omega_0| \leq \pi$$

Ejemplos IV

4) Consideremos $X(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi k)$ con $|\Omega_0| \leq \pi$. Claramente esto es periódico con período 2π. (Tener en cuenta que estamos considerando los impulsos unitarios de tiempo continuo!!). Podemos tratar de determinar $x[n]$. Para ello:

$$
\begin{aligned}
x[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}d\Omega = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi k)\right)e^{j\Omega n}d\Omega \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi k)e^{j\Omega n}d\Omega \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\Omega - \Omega_0)e^{j\Omega n}d\Omega \\
&= e^{j\Omega_0 n}
\end{aligned}
$$

Tenemos que

$$\mathcal{F}\left\{e^{j\Omega_0 n}\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi k), \quad |\Omega_0| \leq \pi$$

Qué hubiera pasado si en lugar de integrar entre $-\pi$ y π hubiéramos integrado entre $-\pi + 2\pi p$ y $\pi + 2\pi p$??

Ejemplos V

Una señal $x[n]$ periódica con periodo N se puede escribir de acuerdo a su serie de Fourier como:

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\Omega_0 n}, \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

Entonces podemos escribir:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left\{x[n]\right\} &= \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \mathcal{F}\left\{e^{jk\Omega_0 n}\right\} = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \sum_{p=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - k\Omega_0 - 2\pi p) \\
&= \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{k=\langle N \rangle} 2\pi a_k \delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{N}(k + Np)\right) \\
&= \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{k=\langle N \rangle} 2\pi a_{k+Np} \delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{N}(k + Np)\right)
\end{aligned}$$

donde hemos usado que los coeficientes de Fourier de una secuencia discreta periódica forman una secuencia periódica también.

Ejemplos VI

Notar que cuando $k = \langle N \rangle$ y $-\infty < p < \infty$ tenemos que $l = k + Np$ varía de $-\infty$ a ∞. Entonces podemos escribir:

$$\mathcal{F}\left\{x[n]\right\} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi a_l \delta\left(\Omega - \frac{2\pi l}{N}\right)$$

Ejemplos VI

Notar que cuando $k = \langle N \rangle$ y $-\infty < p < \infty$ tenemos que $l = k + Np$ varía de $-\infty$ a ∞. Entonces podemos escribir:

$$\mathcal{F}\left\{x[n]\right\} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi a_l \delta\left(\Omega - \frac{2\pi l}{N}\right)$$

En la expresión anterior estamos usando no sólo los coeficientes de Fourier en un período de largo N, sino todos ellos!! O sea la secuencia periódica completa!!!

Ejemplos VI

Notar que cuando $k = \langle N \rangle$ y $-\infty < p < \infty$ tenemos que $l = k + Np$ varía de $-\infty$ a ∞. Entonces podemos escribir:

$$\mathcal{F}\left\{x[n]\right\} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi a_l \delta\left(\Omega - \frac{2\pi l}{N}\right)$$

En la expresión anterior estamos usando no sólo los coeficientes de Fourier en un período de largo N, sino todos ellos!! O sea la secuencia periódica completa!!!

La transformada de Fourier de tiempo discreto para secuencias periódicas es una sucesión infinita de impulsos unitarios posicionados en las armónicas que componen dichas secuencias y pesados por los correspondientes coeficientes de Fourier!!

Propiedades de la transformada de tiempo discreto I

Vamos a asumir que todas las señales involucradas tiene bien definida su transformada de Fourier

- **Linealidad**: Sean $x[n]$ e $y[n]$ funciones tales que $X(e^{j\Omega}) = \mathcal{F}\{x[n]\}$ y $Y(e^{j\Omega}) = \mathcal{F}\{y[n]\}$. Tenemos que:

$$\mathcal{F}[ax[n] + by[n]] = aX(e^{j\Omega}) + bY(e^{j\Omega}), \quad a, b \in \mathbb{C}$$

  Probarlo!!

- **Desplazamiento temporal y en frecuencia**: Sea $x[n]$ tal que $X(e^{j\Omega}) = \mathcal{F}\{x[n]\}$. Entonces valen

$$\mathcal{F}\{x[n-n_0]\} = e^{-j\Omega n_0} X(e^{j\Omega}), \; n_0 \in \mathbb{Z}$$

$$\mathcal{F}\left\{e^{j\Omega_0 n} x[n]\right\} = X(e^{j(\Omega-\Omega_0)}), \quad \Omega_0 \in [-\pi, \pi)$$

  Probarlo!!

Desplazamiento temporal en tiempo discreto I

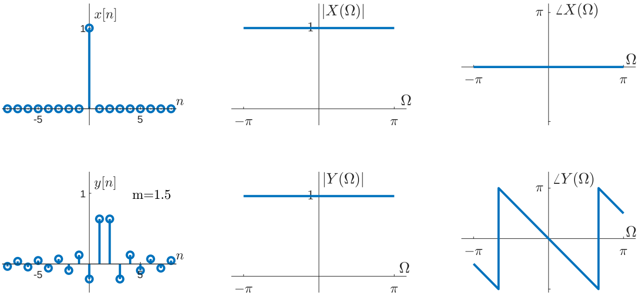
$$x[n] = \delta[n] \Leftrightarrow X(\Omega) = 1$$

$$Y(\Omega) = X(\Omega)\, e^{-jm\Omega} \quad m \in \mathbb{R}$$

$$y[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)\, e^{-jm\Omega} e^{jn\Omega} d\Omega$$

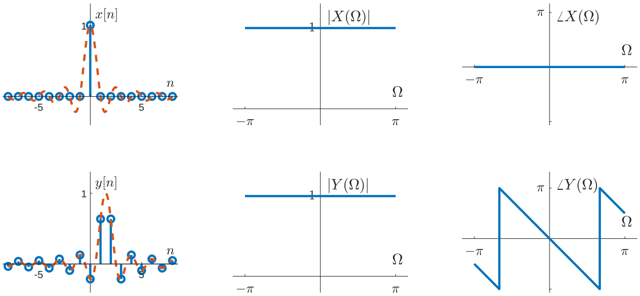
$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{j(n-m)\pi} - e^{-j(n-m)\pi}}{j(n-m)}\right)$$

$$= \operatorname{sinc}(n-m)$$



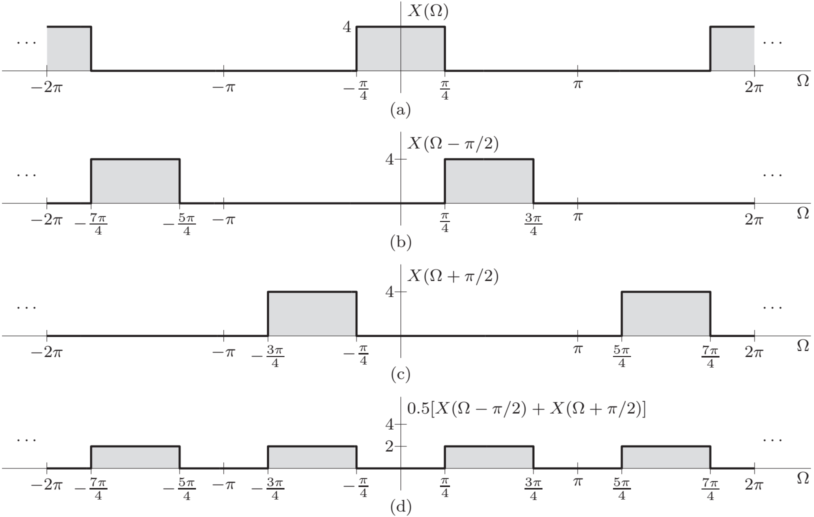
Desplazamiento temporal en tiempo discreto II

$$
\begin{aligned}
x[n] &= \delta[n] \Leftrightarrow X(\Omega) = 1 \\
Y(\Omega) &= X(\Omega)\, e^{-jm\Omega} \quad m \in \mathbb{R} \\
y[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)\, e^{-jm\Omega} e^{jn\Omega} d\Omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{e^{j(n-m)\pi} - e^{-j(n-m)\pi}}{j(n-m)} \right) \\
&= \mathrm{sinc}(n-m)
\end{aligned}
$$



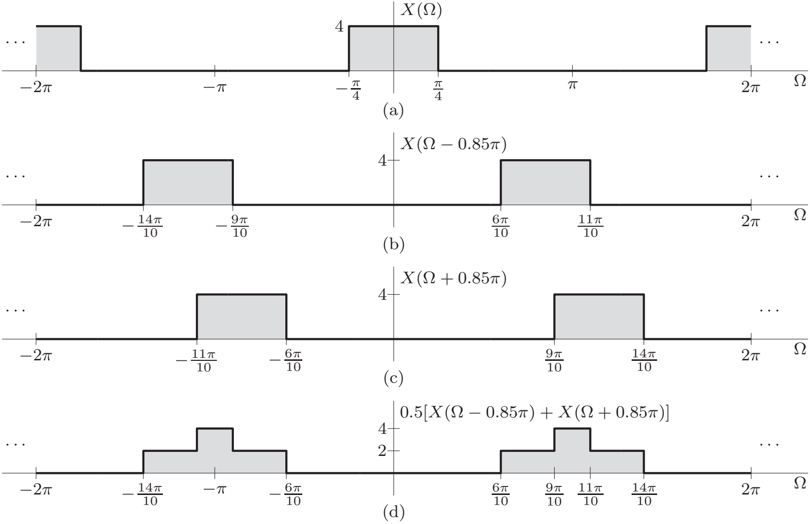
Desplazamiento en frecuencia en tiempo discreto I

$$x[n] = \text{sinc}\left(\frac{n}{4}\right) \quad \rightsquigarrow \quad x[n]\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$



Desplazamiento en frecuencia en tiempo discreto II

$$x[n] = \operatorname{sinc}\left(\frac{n}{4}\right) \quad \rightsquigarrow \quad x[n]\cos(0.85\pi n)$$



Propiedades de la transformada de tiempo discreto II

- **Conjugación y simetría conjugada**: Sea $x[n]$ tal que $X(e^{j\Omega}) = \mathcal{F}\{x[n]\}$. Entonces valen

$$\mathcal{F}\{x^*[n]\} = X(e^{-j\Omega}), \; n_0 \in \mathbb{Z}$$

Claramente si $x[n]$ es real tenemos que $X^*(e^{j\Omega}) = X(e^{-j\Omega})$. Probarlo!!

- **Diferencia y acumulación**: Sea $x[n]$ tal que $X(e^{j\Omega}) = \mathcal{F}\{x[n]\}$. Entonces valen:

$$\mathcal{F}\{x[n] - x[n-1]\} = (1 - e^{-j\Omega})X(e^{j\Omega})$$

Si $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] = 0$ tenemos que:

$$\mathcal{F}\left\{\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]\right\} = \frac{1}{1-e^{-j\Omega}} X(e^{j\Omega})$$

Probarlo!! El caso para el que $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \neq 0$ se modifica como:

$$\mathcal{F}\left\{\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]\right\} = \frac{1}{1-e^{-j\Omega}} X(e^{j\Omega}) + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi k)$$

Propiedades de la transformada de tiempo discreto III

- **Convolución**: Sea $x[n]$ tal que $X(e^{j\Omega}) = \mathcal{F}\{x[n]\}$ y $y[n]$ tal que $Y(e^{j\Omega}) = \mathcal{F}\{y[n]\}$. Sea $z[n] = x[n] * y[n]$. Tenemos:

$$\mathcal{F}\{z[n]\} = X(e^{j\Omega})Y(e^{j\Omega})$$

Proof: Podemos escribir lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[z(t)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k]\right)e^{-j\Omega n} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n-k]e^{-j\Omega n}\right) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]Y(e^{j\Omega})e^{-j\Omega k} \\
&= X(e^{j\Omega})Y(e^{j\Omega})
\end{aligned}$$

Propiedades de la transformada de tiempo discreto III

- **Convolución**: Sea $x[n]$ tal que $X(e^{j\Omega}) = \mathcal{F}\{x[n]\}$ y $y[n]$ tal que $Y(e^{j\Omega}) = \mathcal{F}\{y[n]\}$. Sea $z[n] = x[n] * y[n]$. Tenemos:

$$\mathcal{F}\{z[n]\} = X(e^{j\Omega})Y(e^{j\Omega})$$

Proof: Podemos escribir lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[z(t)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k]\right)e^{-j\Omega n} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n-k]e^{-j\Omega n}\right) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]Y(e^{j\Omega})e^{-j\Omega k} \\
&= X(e^{j\Omega})Y(e^{j\Omega})
\end{aligned}$$

Esta propiedad es análoga al caso continuo!! Nos será de mucha utilidad para analizar sistemas LTI en tiempo discreto!!

Propiedades de la transformada de tiempo discreto IV

- **Multiplicación**: Sea $x[n]$ tal que $X(e^{j\Omega}) = \mathcal{F}\{x[n]\}$ y $y[n]$ tal que $Y(e^{j\Omega}) = \mathcal{F}\{y[n]\}$. Sea $z[n] = x[n]y[n]$. Tenemos:

$$\mathcal{F}\{z[n]\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\nu})Y(e^{j(\Omega-\nu)})d\nu$$

Proof:

$$\begin{aligned}
Z(e^{j\Omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y[n]e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\nu})e^{j\nu n}d\nu\right\}e^{-j\Omega n} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\nu})\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]e^{-j(\Omega-\nu)n}\right\}d\nu \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\nu})Y(e^{j(\Omega-\nu)})d\nu
\end{aligned}$$

Propiedades de la transformada de tiempo discreto IV

- **Multiplicación**: Sea $x[n]$ tal que $X(e^{j\Omega}) = \mathcal{F}\{x[n]\}$ y $y[n]$ tal que $Y(e^{j\Omega}) = \mathcal{F}\{y[n]\}$. Sea $z[n] = x[n]y[n]$. Tenemos:

$$\mathcal{F}\{z[n]\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\nu})Y(e^{j(\Omega-\nu)})d\nu$$

Proof:

$$\begin{aligned} Z(e^{j\Omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y[n]e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\nu})e^{j\nu n}d\nu\right\}e^{-j\Omega n} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\nu})\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]e^{-j(\Omega-\nu)n}\right\}d\nu \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\nu})Y(e^{j(\Omega-\nu)})d\nu \end{aligned}$$

La convolución periódica se puede realizar en cualquier intervalo de longitud 2π!! Notar la diferencia con la convolución tradicional o *aperiódica*!! Cuando estudiemos el tema de filtros digitales veremos que esta propiedad tendrá mucha utilidad!!

Sistemas LTI y transformada de Fourier I

La respuesta en frecuencia de un sistema LTI en tiempo discreto se definió como:

$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\Omega n}$$

donde $h[n]$ es la respuesta al impulso del sistema. Por la propiedad de convolución la salida $y[n]$ a una entrada $x[n]$ se puede escribir como:

$$Y(e^{j\Omega}) = H(e^{j\Omega})X(e^{j\Omega})$$

La ecuación anterior caracteriza, así como lo hacía la suma de convolución, en forma completa la acción de un sistema LTI de tiempo discreto!! Esto es así porque, según lo que discutimos previamente, siempre podemos volver del campo transformado al dominio del tiempo gracias a la invertibilidad de la transformada de Fourier!!

Sistemas LTI y transformada de Fourier II

En lo anterior hemos supuesto que la respuesta en frecuencia existe. Es decir que la transformada de Fourier de la respuesta al impulso debe estar bien definida. Sin embargo, esto no es un problema para los sistemas LTI estables:

Teorema

La respuesta en frecuencia $H(e^{j\Omega})$ de un sistema LTI de tiempo discreto estable siempre existe.

Proof: Dado que el sistema es estable tenemos que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$. Pero entonces podemos escribir:

$$|H(e^{j\Omega})| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\Omega n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]e^{-j\Omega n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

Lo que muestra que la respuesta en frecuencia está bien definida.

Sistemas LTI y transformada de Fourier II

En lo anterior hemos supuesto que la respuesta en frecuencia existe. Es decir que la transformada de Fourier de la respuesta al impulso debe estar bien definida. Sin embargo, esto no es un problema para los sistemas LTI estables:

Teorema

La respuesta en frecuencia $H(e^{j\Omega})$ de un sistema LTI de tiempo discreto estable siempre existe.

Proof: Dado que el sistema es estable tenemos que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$. Pero entonces podemos escribir:

$$|H(e^{j\Omega})| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\Omega n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n] e^{-j\Omega n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

Lo que muestra que la respuesta en frecuencia está bien definida.

Nuestro interés en analizar sistemas LTI mediante la transformada de Fourier siempre estará en aquellos que son estables!! Para analizar sistemas LTI inestables de tiempo discreto utilizaremos más adelante la transformada Z!!

Sistemas LTI y transformada de Fourier III

Muchos sistemas LTI causales (con la condición de reposo inicial discutida hace unas clases) van a estar descriptos por una ecuación en diferencias con coeficientes constantes:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

Si aplicamos el operador $\mathcal{F}\{\cdot\}$ a ambos lados obtenemos (aplicando linealidad):

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \mathcal{F}\{y[n-k]\} = \sum_{k=0}^{M} b_k \mathcal{F}\{x[n-k]\}$$

Usando la propiedad de diferenciación:

$$Y(e^{j\Omega}) \sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\Omega k} = X(e^{j\Omega}) \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\Omega k}$$

Para un sistema LTI tenemos que

$$Y(e^{j\Omega}) = H(e^{j\Omega}) X(e^{j\Omega}), \quad H(e^{j\Omega}) = \frac{Y(e^{j\Omega})}{X(e^{j\Omega})}$$

Sistemas LTI y transformada de Fourier IV

La respuesta en frecuencia se puede escribir entonces como un cociente de polinomios trigonométricos:

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\Omega k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\Omega k}}$$

Sistemas LTI y transformada de Fourier IV

La respuesta en frecuencia se puede escribir entonces como un cociente de polinomios trigonométricos:

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\Omega k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\Omega k}}$$

- Vemos que la respuesta en frecuencia del sistema es un cociente de polinomios, los cuales se obtienen por inspección a través de los coeficientes de la ecuación en diferencias!

Sistemas LTI y transformada de Fourier IV

La respuesta en frecuencia se puede escribir entonces como un cociente de polinomios trigonométricos:

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\Omega k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\Omega k}}$$

- Vemos que la respuesta en frecuencia del sistema es un cociente de polinomios, los cuales se obtienen por inspección a través de los coeficientes de la ecuación en diferencias!
- De una ecuación en diferencias pasamos a una expresión equivalente del sistema totalmente algebraica. Todo queda definido por los coeficientes de los polinomios o por lo que es los mismo por sus raíces. Esto simplifica mucho el análisis de los sistemas LTI de tiempo discreto!

Sistemas LTI y transformada de Fourier IV

La respuesta en frecuencia se puede escribir entonces como un cociente de polinomios trigonométricos:

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\Omega k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\Omega k}}$$

- Vemos que la respuesta en frecuencia del sistema es un cociente de polinomios, los cuales se obtienen por inspección a través de los coeficientes de la ecuación en diferencias!
- De una ecuación en diferencias pasamos a una expresión equivalente del sistema totalmente algebraica. Todo queda definido por los coeficientes de los polinomios o por lo que es los mismo por sus raíces. Esto simplifica mucho el análisis de los sistemas LTI de tiempo discreto!
- Podemos obtener la respuesta al impulso del sistema, en lugar de resolviendo la ecuación en diferencias, antitransformando $H(e^{j\Omega})$! Nuevamente y como en el caso de tiempo continuo, el método de fracciones simples puede ser muy útil!!

Sistemas LTI y transformada de Fourier V

Algunas aclaraciones:

- Podemos tener filtros en tiempo discreto. Los mismos se denominarán *filtros digitales*, y son una forma ecónomica y técnicamente eficiente de realizar operaciones de filtrado para señales continuas (previa una etapa de muestreo). Los mismos en general estarán especificados en el campo de la frecuencia a través de una función $H(e^{j\Omega})$ adecuada.
- Los problemas asociados a filtros digitales ideales son similares a los correspondientes en los filtros de tiempo continuo. Haremos un análisis más detallado de los mismos más adelante en el curso.
- Los conceptos de distorsión de amplitud y distorsión de fase siguen valiendo para los sistemas de tiempo discreto. También el concepto de retardo de grupo. Veremos un poco más sobre ellos cuando abordemos las técnicas de diseño de filtros digitales.

Repaso...

- Periodo fundamental (T) o (N). Definido para señales periódicas, es el periodo más pequeño con respecto al cual se repite una señal periódica. Para señales periódicas en tiempo continuo el periodo fundamental es T en segundos, mientras que para señales en tiempo discreto el periodo fundamental es N en muestras.
- Frecuencia analógica (f o ω). Representa un número de ocurrencias de un evento repetitivo por unidad de tiempo. Para señales sinusoidales, la frecuencia lineal, f, se mide en ciclos por segundo (o Hz), mientras que la frecuencia angular ($\omega = 2\pi f$), se mide en radianes por segundo.
- Frecuencia fundamental (f_0). Definida para señales periódicas, es el recíproco del periodo fundamental (T). Para señales periódicas de tiempo continuo se denota por $f_0 = \frac{1}{T}$ en ciclos por segundo, mientras que para señales de tiempo discreto se denota por $f_0 = \frac{1}{N}$ en ciclos por muestra.
- Frecuencias armónicas o armónicas. Frecuencias que son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental.
- Armónico fundamental ($e^{-j\omega_0 t}$). El exponencial complejo (o sinusoide) asociado con el período fundamental en un conjunto de exponenciales complejos armónicamente relacionados.

Repaso...

- Condiciones de Dirichlet. Requisitos que garantizan que las señales de tiempo continuo presenten convergencia puntual de sus series de Fourier o de sus anti-transformadas. Sólo son condiciones suficientes!
- Serie de Fourier (SF) de tiempo continuo. Expresa una señal periódica de tiempo continuo $x(t)$ como una suma de exponenciales complejas escaladas (o sinusoides) en los armónicos $k\omega_0$ de la frecuencia fundamental ω_0 de la señal. Los factores de escala a_k se denominan coeficientes de la serie de Fourier.
- Transformada de Fourier (TF) de tiempo continuo. Expresa una señal aperiódica de tiempo continuo $x(t)$ como una integral de exponenciales complejas escaladas (o sinusoides) de todas las frecuencias. El factor de escala se denota por $X(\omega)$.
- Serie de Fourier de tiempo discreto (SFTD). Expresa una señal periódica de tiempo discreto $x[n]$ como una suma finita de exponenciales complejas escaladas (o sinusoides) en los armónicos k/N de la frecuencia fundamental $\frac{1}{N}$ de la señal. Los factores de escala se denominan coeficientes de la serie de Fourier, a_k, que a su vez forman una secuencia periódica, de período N.
- Transformada de Fourier de tiempo discreto (TFTD). Expresa una señal aperiódica de tiempo discreto $x[n]$ como una integral de exponenciales complejas escaladas (o sinusoides) de todas las frecuencias. El factor de escala se denota por $X(\Omega)$.

Repaso...

- Espectro de amplitud ($X(\omega)$ o $X(\Omega)$). Un gráfico de los coeficientes de la serie de Fourier o la transformada en función de la frecuencia cuando estas cantidades tienen valores reales.
- Espectro de fase ($\angle X(\omega)$ o $\angle X(\Omega)$). Un gráfico de la fase de los coeficientes de la serie de Fourier o de la transformada en función de la frecuencia.
- Espectro de magnitud ($|X(\omega)|$ o $|X(\Omega)|$). Un gráfico de la magnitud de los coeficientes de la serie de Fourier o la transformada en función de la frecuencia.

Temas para leer por cuenta propia

Lectura obligatoria

- Tabla de propiedades de la transformada continua y discreta de Fourier y pares transformados básicos (Oppenheim and Willsky, Tablas 4.1, 4.2, 5.1 y 5.2).
- Apéndice de fracciones simples (Oppenheim and Willsky).
- Aspectos en el dominio del tiempo y la frecuencia de filtros ideales y no ideales (Oppenheim and Willsky, Secciones 6.3 y 6.4).
- Sistemas continuos de primer y segundo orden (Oppenheim and Willsky, Sección 6.5).
- Sistemas discretos de primer y segundo orden (Oppenheim and Willsky, Sección 6.6).
- Ejemplos de análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la frecuencia (Oppenheim and Willsky, Sección 6.7).

Lectura optativa

- Filtrado selectivo en frecuencia con frecuencia central variable (Oppenheim and Willsky, Sección 4.5.1).
- Diagramas de Bode (Oppenheim and Willsky, Sección 6.2.3).
- Transformada discreta de Fourier (Oppenheim and Schafer, Secciones 2.7, 2.8 y 2.9).

Algunos ejercicios I

1. Ejercicios 4.10, 4.12, 4.14., 4.15, 4.16, 4.21 de Oppenheim and Willsky.
2. Ejercicios 4.40, 4.47, 4.51, 4.53 de Oppenheim and Willsky.
3. Demostrar que un sistema LTI cuya respuesta en frecuencia es cero en un intervalo finito o infinito no es invertible.
4. Demostrar las siguientes propiedades de la transformada de Fourier de tiempo continuo usando dualidad:

$$\mathcal{F}\left[-jtx(t)\right] = \frac{dX(j\omega)}{d\omega}, \quad \mathcal{F}\left[-\frac{1}{jt}x(t) + \pi x(0)\delta(t)\right] = \int_{-\infty}^{\omega} X(j\nu)d\nu$$

5. Una forma precisa de cuantificar el problema de la localización simultánea en tiempo y frecuencia de un par transformado es a través del *principio de incertidumbre*. El mismo dice que:

$$D(x(t))D(X(j\omega)) \geq \frac{1}{2}$$

donde $D(f(t))$ es la *dispersión* de la señal $f(t)$ definida como:

$$D(f(t)) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |f(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt}$$

Probar que la igualdad se alcanza cuando $x(t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\sigma}} e^{-\frac{t^2}{4\sigma^2}}$, lo que muestra que los pulsos gaussianos tienen la mejor localización simultánea en tiempo y frecuencia.

Algunos ejercicios II

6. Ejercicios 5.8, 5.9, 5.12, 5.21, 5.22, 5.23, 5.26, 5.32, 5.36 de Oppenheim and Willsky.
7. Ejercicios 5.37, 5.40, 5.46, 5.47 de Oppenheim and Willsky.

Tiempo de consultas

¿Preguntas?