



**FACULTAD  
DE INGENIERIA**

Universidad de Buenos Aires

# Sistemas Lineales e Invariantes en el Tiempo (LTI)

Dr. Ing. Leonardo Rey Vega

Señales y Sistemas (66.74 y 86.05)

Facultad de Ingeniería

Universidad de Buenos Aires

Marzo 2024

- 1 Convolución para sistemas LTI de tiempo discreto
- 2 Convolución para sistemas LTI en tiempo continuo
- 3 Propiedades de sistemas LTI
- 4 Sistemas LTI descritos por ecuaciones diferenciales y ecuaciones en diferencias

# Convolución en sistemas LTI

El análisis de los sistemas de tiempo discreto (y también de tiempo continuo) depende fuertemente de la estructura intrínseca de los mismos, siendo el mismo en general complejo desde el punto de vista matemático y operacional.

Sin embargo, el caso de los sistemas LTI es particularmente importante, ya que ambas propiedades, linealidad e invarianza en el tiempo, permiten un análisis en extremo simple (en comparación con sistemas que no cumplen estas propiedades)!!

La clave en la “simpleza” de descripción en el análisis de estos sistemas radica fundamentalmente en

- El principio de superposición (por ser sistema lineal)
- Que el retardo temporal de las señales de entradas no altera la forma de las señales de salida (por ser invariante en el tiempo sólo se introduce un retardo).

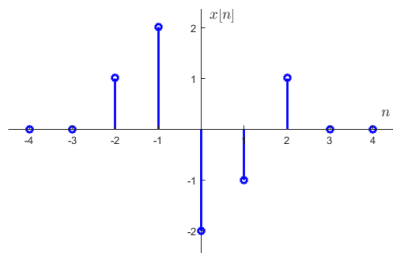
Comenzaremos con la descripción de la suma de convolución para el caso de tiempo discreto por ser más simple. Luego pasaremos al caso de sistemas LTI de tiempo continuo.

# Representación de una señal mediante impulsos

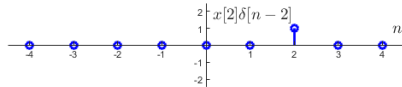
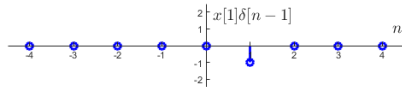
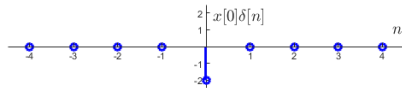
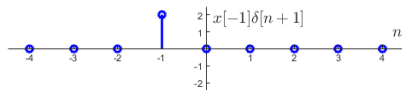
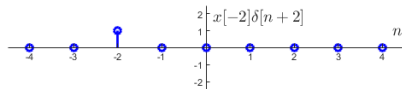
$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

$$n = n_0 \rightarrow x[n_0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n_0 - k]$$

$$\delta[n_0 - k] = \begin{cases} 1 & \text{si } k = n_0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$



$$x[n] = x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2]$$



# Sistemas LTI en tiempo discreto I

Supongamos que tenemos un sistema lineal  $\mathcal{T}$ . Definimos las respuestas de este sistema a los impulsos unitarios desplazados de la siguiente forma:

$$\mathcal{T}[\delta[n-k]] \equiv h[n, k], \quad k \in \mathbb{Z}$$

Debemos interpretar a  $h[n, k]$  como una familia de señales de  $n$  indexadas en  $k$ . Para cada retardo  $k$  cada respuesta  $h(n, k)$  en el tiempo  $n$  es en principio diferente!

Mediante el conocimiento de las señales  $h[n, k]$  podemos aplicar superposición para calcular la salida del sistema  $\mathcal{T}$  cuando la entrada es  $x[n]$

$$y[n] = \mathcal{T}[x[n]] = \mathcal{T}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\mathcal{T}[\delta[n-k]] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n, k]$$

Conociendo la respuesta del sistema lineal a los impulsos desplazados podemos calcular, por medio de una suma ponderada adecuada, la respuesta del mismo a cualquier entrada  $x[n]$ . Notar que hasta el momento sólo hemos usado la propiedad de linealidad de  $\mathcal{T}$ , con lo cual esto es válido aún cuando el sistema es variante en el tiempo!!

# Sistemas LTI en tiempo discreto II

Supongamos ahora que el sistema es invariante en el tiempo y que

$$\mathcal{T}[\delta[n]] = h[n, 0] \equiv h[n]$$

Es claro que:

$$\mathcal{T}[\delta[n - k]] = h[n - k]$$

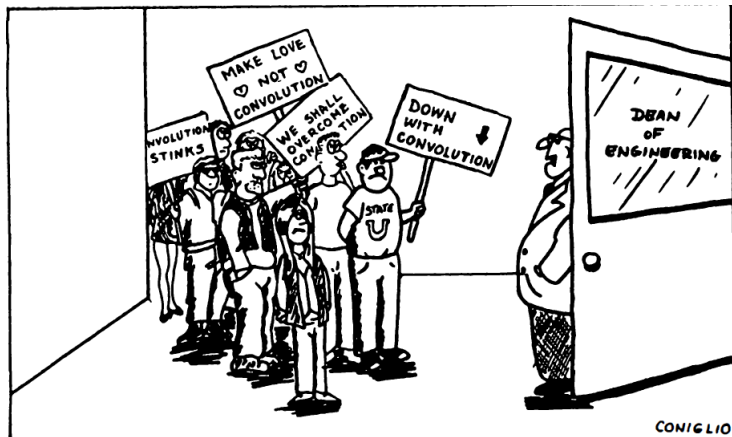
Tenemos el siguiente resultado:

## Teorema

Sea  $\mathcal{T}$  un sistema LTI de tiempo discreto tal que  $\mathcal{T}[\delta[n]] = h[n]$ . La respuesta  $y[n]$  del sistema  $\mathcal{T}$  a cualquier entrada  $x[n]$  de tiempo discreto (denotada como  $y[n] = h[n] * x[n]$ ) se escribe como:

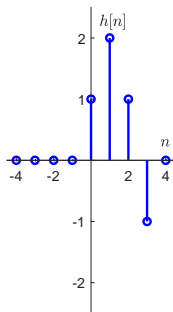
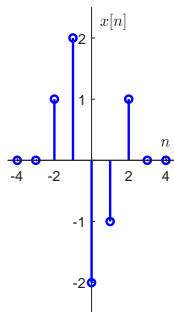
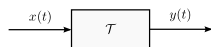
$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n - k]$$

y se conoce como suma de convolución. De esta forma la acción de un sistema LTI en tiempo discreto queda totalmente caracterizada por una única señal: la respuesta al impulso del mismo  $h[n]$ !!!



Convolution: its bark is worse than its bite!

# Ejemplos I



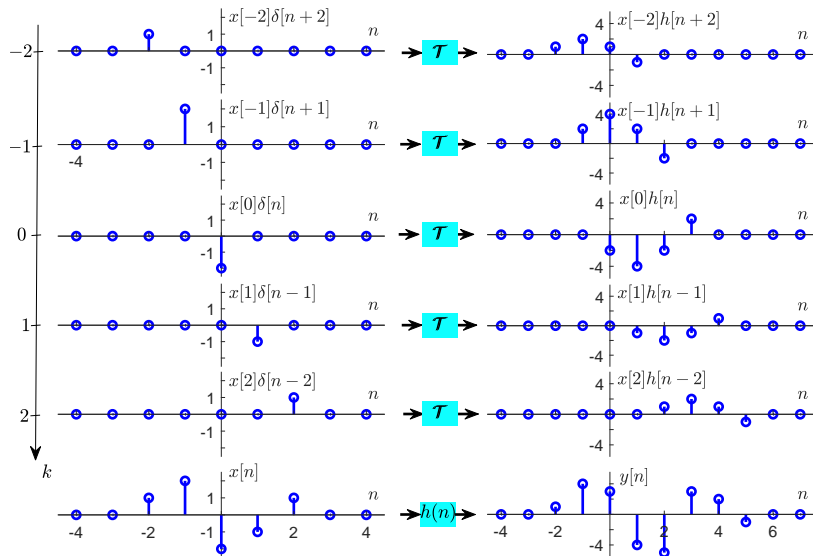
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

$$y[n] = \sum_{k=-2}^2 x[k]h[n-k]$$

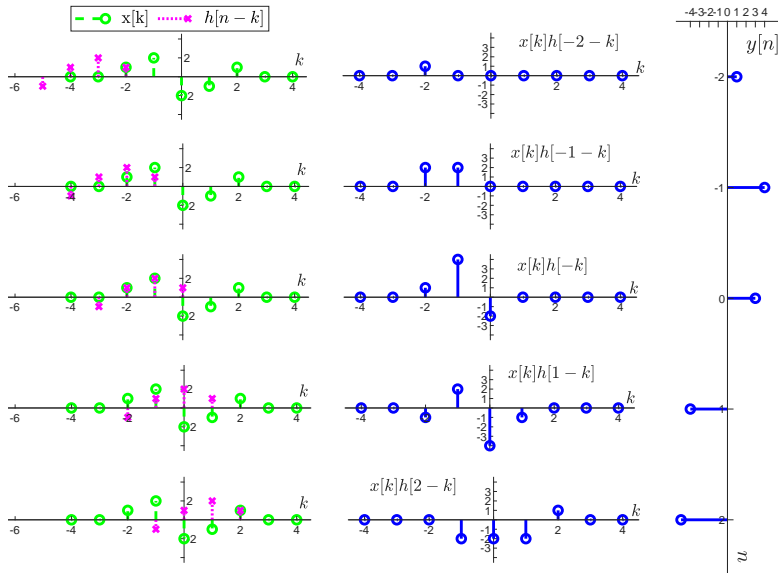
$$y[n] = x[-2]h[n+2] + x[-1]h[n+1] + x[0]h[n] + x[1]h[n-1] + x[2]h[n-2]$$



# Ejemplos II



# Ejemplos III

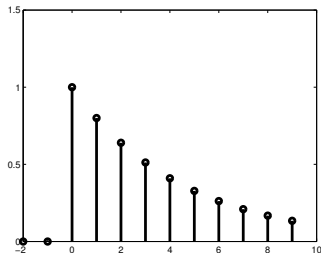


# Ejemplos IV

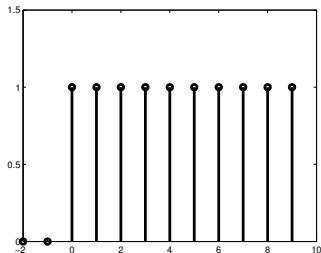
Sean

$$x[n] = \alpha^n u[n], \quad 0 < \alpha < 1$$

$$h[n] = u[n]$$



$$x[n] = \alpha^n u[n] \text{ con } \alpha = 0.8$$



$$h[n] = u[n]$$

# Ejemplos V

Es claro que cuando  $n < 0$   $h[n - k]$  y  $x[k]$  no tienen intersección. De esta forma

$$y[n] = 0 \text{ si } n < 0$$

Además cuando  $n \geq 0$  es claro que:

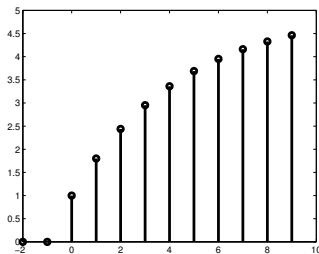
$$x[k]h[n - k] = \begin{cases} \alpha^k & 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

De esta forma:

$$y[n] = \sum_{k=0}^n \alpha^k = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}, \quad n \geq 0$$

Finalmente

$$y[n] = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} u[n]$$



# Ejemplos VI



# Algunos consideraciones

Como se ve podemos interpretar la suma de convolución mediante un deslizamiento de la secuencia  $h[n - k]$  sobre la señal de entrada  $x[k]$ .

Habiendo calculado la salida para un instante  $y[n]$  podemos calcular  $y[n + 1]$  desplazando en 1 la secuencia  $h[n - k]$ , multiplicando por  $x[k]$  y sumar.

Es muy importante ayudarse “gráficamente” para realizar la suma de convolución, tal y como hemos hecho en los ejemplos! Es muy fácil cometer errores si no se hace esto (al menos al principio)!! Algunas convoluciones pueden ser un poquito más complicadas donde haya que analizar varias regiones de valores de  $n$  en donde la superposición entre la entrada  $x[k]$  y la respuesta al impulso  $h[n - k]$  tenga características diferentes!!

Esto se domina de una única forma: practicando y realizando muchos ejercicios!!

# Sistemas LTI en tiempo continuo I

La intuición dice que el siguiente teorema debería ser cierto para sistemas de tiempo continuo:

## Teorema

Sea  $\mathcal{T}$  un sistema LTI de tiempo continuo tal que  $\mathcal{T}[\delta(t)] = h(t)$ . La respuesta  $y(t)$  del sistema  $\mathcal{T}$  a cualquier entrada  $x(t)$  de tiempo continuo (denotada como  $y(t) = h(t) * x(t)$ ) se escribe como:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

*y se conoce como integral de convolución. De esta forma la acción de un sistema LTI en tiempo continuo queda totalmente caracterizada por una única señal: la respuesta al impulso del mismo  $h(t)$ !!!*

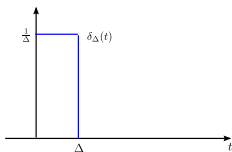
Nuevamente la clave para este resultado es el hecho de que la delta de Dirac nos permite escribir:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau$$

para cualquier función que sea continua en  $t$ .

# Sistemas LTI en tiempo continuo II

Consideremos las señales  $\delta_\Delta(t)$  que definimos previamente:

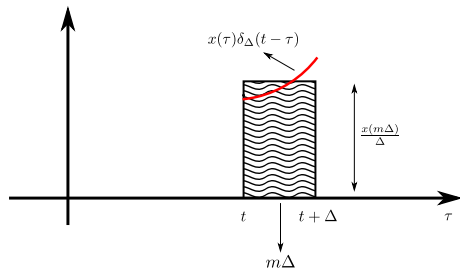


$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_\Delta(t) = \delta(t)$$

Consideremos entonces las señales  $\delta_\Delta(t - k\Delta)$  las cuales son versiones desplazadas de la delta nascent definida arriba. Sea  $\hat{x}(t)$  “una aproximación” a la señal  $x(t)$ :

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \delta_\Delta(t - k\Delta) \Delta \quad (1)$$

Sólo uno de los términos de la sumatoria es distinto de cero para cada  $t$ !





# Sistemas LTI en tiempo continuo III

Es natural pensar que

$$x(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \hat{x}(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \delta_{\Delta}(t - k\Delta) \Delta$$

El área sombreada del gráfico anterior (que corresponde a un término de la serie) converge, cuando  $\Delta \rightarrow 0$  al área bajo la curva  $x(\tau) \delta_{\Delta}(t - \tau)$ . El área del zona sombreada es  $x(m\Delta) \Delta$  y converge cuando  $\Delta \rightarrow 0$  a  $x(t)$ . Como  $\delta_{\Delta}(t - \tau) \rightarrow \delta(t - \tau)$  podemos escribir:

$$x(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \delta_{\Delta}(t - k\Delta) \Delta = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

Es claro que lo hecho arriba no es una prueba formal de  $\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$ . Dicho resultado es una consecuencia de las propiedades de la delta de Dirac. Lo que nos dice el desarrollo de arriba es que esta propiedad del impulso unitario es una idealización de la ecuación (1), en donde con un valor de  $\Delta$  lo suficientemente pequeño podemos aproximar muy bien el valor de  $x(t)$ .

# Sistemas LTI en tiempo continuo IV

Supongamos ahora que tenemos un sistema lineal  $\mathcal{T}$  y que disponemos de las respuestas del mismo a las señales  $\delta_{\Delta}(t - k\Delta)$ :

$$\mathcal{T}[\delta_{\Delta}(t - k\Delta)] \equiv h(t, k\Delta), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Debemos interpretar a  $h(t, k\Delta)$  como una familia de señales de  $t$  indexadas en  $k$ . Para cada retardo  $k$  cada respuesta  $h(t, k\Delta)$  en el tiempo  $t$  es en principio diferente!

De esta forma podemos escribir

$$\begin{aligned}\hat{y}(t) &= \mathcal{T}[\hat{x}(t)] = \mathcal{T}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_{\Delta}(t - k\Delta)\Delta\right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\mathcal{T}[\delta_{\Delta}(t - k\Delta)]\Delta \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)h(t, k\Delta)\Delta\end{aligned}$$

Es razonable pensar que a medida que  $\Delta$  tiende a 0  $\hat{y}(t)$  tienda a  $y(t) = \mathcal{T}[x(t)]$ .

# Sistemas LTI en tiempo continuo V

Usando el mismo argumento que antes podemos escribir:

$$y(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)h(t, k\Delta)\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t, \tau)d\tau \quad (2)$$

donde  $h(t, \tau) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} h(t, k\Delta)$ , o sea la respuesta del sistema lineal  $\mathcal{T}$  a un impulso unitario desplazado en  $\tau$ .

Claramente (2) muestra que la salida al sistema lineal  $\mathcal{T}$  es la superposición de las respuestas del sistema a  $\delta(t - \tau)$  ponderadas por  $x(\tau)d\tau$ . Esto es análogo al caso de tiempo discreto. Es claro que el argumento que nos llevó a dicho resultado no es riguroso desde el punto de vista matemático, sino más bien un argumento intuitivo!

En forma análoga al caso discreto podríamos haber usado directamente la linealidad de  $\mathcal{T}$  (con algunos cuidados especiales por la presencia de la delta de Dirac!):

$$y(t) = \mathcal{T} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau \right] = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\mathcal{T} [\delta(t - \tau)] d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t, \tau)d\tau$$

Con la hipótesis de que  $\mathcal{T}$  es también invariante en el tiempo tenemos que:

$$\mathcal{T}[\delta(t - \tau)] = h(t - \tau, 0) \equiv h(t - \tau)$$

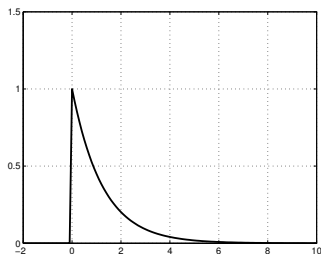
con lo que obtenemos que:

$$y(t) = \mathcal{T}[x(t)] = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

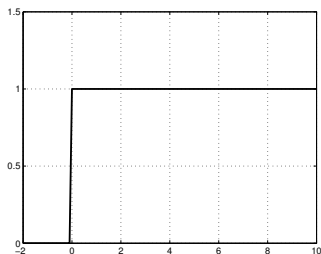
# Sistemas LTI en tiempo continuo VII

El procedimiento para evaluar la convolución en tiempo continuo es análogo al caso discreto mediante un reflejo de  $h(t)$  (o  $x(t)$  según convenga) y desplazamientos temporales en  $t$  antes de realizar la integración. Las propiedades enunciadas antes pueden ser también muy útiles para evaluar una determinada integral de convolución. Un ejemplo a continuación:

1) Considere  $h(t) = u(t)$  e  $x(t) = e^{-\alpha t}u(t)$  con  $0 < \alpha$ .



$$x(t) = e^{-\alpha t}u(t) \text{ con } \alpha = 0.8$$



$$h(t) = u(t)$$

# Sistemas LTI en tiempo continuo VIII

Es fácil ver que para  $t < 0$  el producto de  $x(\tau)$  y  $h(t - \tau)$  es cero. Para  $t > 0$  tenemos que:

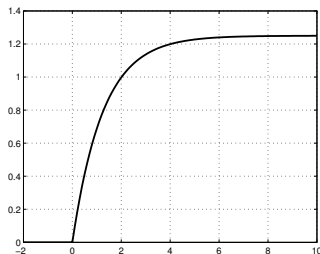
$$x(\tau)h(t - \tau) = \begin{cases} e^{-\alpha\tau} & 0 \leq \tau \leq t \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces:

$$y(t) = \int_0^t e^{-\alpha\tau} d\tau = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha\tau} \Big|_0^t = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t})$$

En forma compacta

$$y(t) = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) u(t)$$



Recuerden realizar muchos ejercicios de convolución!! Es la única forma de entender en forma completa el tema!

# Propiedades de la convolución: Commutatividad

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$

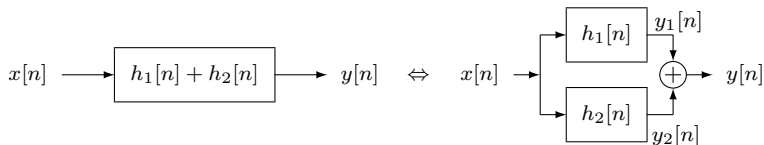
$$\begin{aligned}x[n] * h[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{-\infty} x[n-m]h[m] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[n-m]\end{aligned}$$



# Propiedades de la convolución: Distributividad

$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$

$$\begin{aligned}x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] (h_1[n-k] + h_2[n-k]) \\&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (x[k]h_1[n-k]) + (x[k]h_2[n-k]) \\&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_1[n-k] + \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_2[n-k] \\&= x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]\end{aligned}$$





# Propiedades de la convolución: Asociatividad

$$x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n] = (x[n] * h_2[n]) * h_1[n] = x[n] * h_1[n] * h_2[n]$$

$$\begin{aligned}(x[n] * h_1[n]) * h_2[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (x[r] * h_1[r])[k] h_2[n - k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{p=-\infty}^{\infty} x[p] h_1[k - p] \right) h_2[n - k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} x[p] h_1[k - p] h_2[n - k]\end{aligned}$$

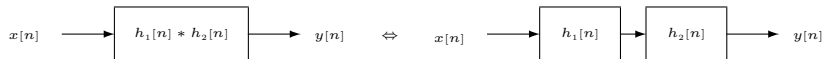
$$\begin{aligned}x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] (h_1[r] * h_2[r])[n - m] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \left( \sum_{q=-\infty}^{\infty} h_1[q] h_2[(n - m) - q] \right) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} x[m] h_1[q] h_2[n - m - q]\end{aligned}$$

$$k = q + m \quad m = k - q$$

$$= \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k - q] h_1[q] h_2[n - k]$$

$$p = k - q \quad q = k - p$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} x[p] h_1[k - p] h_2[n - k]$$



# Propiedades de sistemas LTI: Memoria

Para sistemas en tiempo discreto y continuo las relaciones entrada-salida de los mismos están dadas por:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k]$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

Un sistema en tiempo discreto o tiempo continuo no tendrá memoria cuando

$$h[n] = 0, \forall n \neq 0, \quad h(t) = 0, \forall t \neq 0$$

O en forma equivalente:

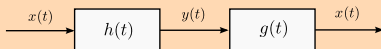
$$y[n] = Kx[n], \quad h[n] = K\delta[n]$$

$$y(t) = Kx(t), \quad h(t) = K\delta(t)$$

Cuando  $K = 1$  tenemos los sistemas **identidad** en tiempo discreto y continuo!!

# Propiedades de sistemas LTI: Invertibilidad

Consideremos un sistema LTI en tiempo continuo (el caso de tiempo discreto es similar) con respuesta al impulso  $h(t)$ . El sistema inverso  $g(t)$  (si existe!) debe cumplir con:



Usando la propiedad de asociatividad de la convolución tenemos que:

$$x(t) = g(t) * [h(t) * x(t)] = [g(t) * h(t)] * x(t)$$

o lo que es lo mismo que:

$$\delta(t) = g(t) * h(t)$$

Notar que hemos asumido que el inverso de un sistema LTI es LTI. Esto es cierto, pero no es obvio y debe ser probado!! La pregunta es como lo hacemos??

Ejemplo: Sea  $h[n] = u[n]$ . Es claro que  $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$ . El sistema inverso sabemos que es  $y[n] = x[n] - x[n - 1]$ , cuya respuesta al impulso es  $g[n] = \delta[n] - \delta[n - 1]$ . **Probar que  $h[n] * g[n] = \delta[n]$ !**

# Propiedades de sistemas LTI: Causalidad

Sabemos que para que un sistema sea causal su salida al tiempo  $t$  no puede depender de la entrada  $x(\tau)$  con  $\tau > t$ . Observando que podemos escribir:

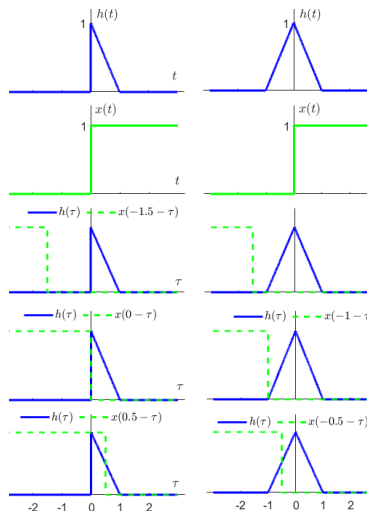
$$\begin{aligned}y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau)h(\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{-0} x(t - \tau)h(\tau)d\tau \\ &\quad + \int_0^{\infty} x(t - \tau)h(\tau)d\tau\end{aligned}$$

por lo cual debemos tener que

$$h(\tau) = 0, \tau < 0$$

y la salida del sistema se puede escribir como:

$$\begin{aligned}y(t) &= \int_0^{\infty} x(t - \tau)h(\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^t x(\tau)h(t - \tau)d\tau\end{aligned}$$



El caso para tiempo discreto es análogo!!

## Teorema

Sea  $\mathcal{T}$  un sistema LTI de tiempo continuo tal que  $\mathcal{T}[\delta(t)] = h(t)$ . Dicho sistema será estable en el sentido BIBO sí y sólo sí:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

o lo que es lo mismo  $h(t) \in L_1(\mathbb{R})$ .

*Demostración:*

Supongamos primero que se satisface la condición  $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$  y que la entrada  $x(t)$  cumple con  $|x(t)| \leq B_1$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Entonces:

$$|y(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)| |h(t - \tau)| d\tau \leq B_1 \int_{-\infty}^{\infty} |h(t - \tau)| d\tau < \infty$$

*Continua...*

*Continua...*

Lo contrario lo demostraremos por *reductio ad absurdum*. Supongamos ahora que el sistema es BIBO estable, pero que  $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt = \infty$ . Consideremos la siguiente entrada:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{h(-t)}{|h(-t)|} & \text{si } h(-t) \neq 0 \\ 0 & \text{si } h(-t) = 0 \end{cases}$$

Es claro que esta entrada es acotada  $|x(t)| \leq 1$ . Consideremos la salida a esta entrada para  $t = 0$ :

$$y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|h(\tau)|^2}{|h(\tau)|} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau = \infty,$$

lo cual es una contradicción ya que habíamos supuesto que el sistema era BIBO estable. Entonces debe ser:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

El caso para tiempo discreto se prueba en forma similar!!

Ejemplo: Consideremos  $h(t) = u(t)$ . La salida de este sistema es:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

Es claro que  $\int_{-\infty}^{\infty} u(t) dt = \infty$  con lo cual el sistema es inestable.

Como conclusión general:

- Para determinar la salida de un sistema LTI a una entrada determinada es necesario realizar una suma o integral de convolución entre la respuesta al impulso del sistema y la mencionada entrada.
- Los sistemas LTI, tanto de tiempo continuo como de tiempo discreto, están caracterizados completamente por su respuesta al impulso  $h(t)$  o  $h[n]$ . Esto es privativo de dichos sistemas. Otros sistemas no lineales y/o variantes en el tiempo no pueden ser caracterizados por una respuesta al impulso!!
- Muchas propiedades de interés de los sistemas LTI pueden determinarse mediante un análisis de la respuesta al impulso!

# Sistemas descritos por ecuaciones diferenciales I

La descripción de sistemas a través de ecuaciones diferenciales es muy común en la práctica. Aunque en general podemos considerar sistemas descritos por ecuaciones en derivadas parciales, en este curso nos restringiremos a sistemas descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes constantes.

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

En un sistema descrito por ecuaciones diferenciales, la salida está expresada en forma implícita y para obtener la misma es necesario resolver la ecuación diferencial!

Ejemplos

- Circuitos eléctricos.
- Sistemas físicos simples (resortes con masas, etc)
- Reacciones químicas simples.
- Etc.



# Sistemas descritos por ecuaciones diferenciales II

Se sabe que para obtener la solución a una ecuación diferencial ordinaria a coeficientes constantes es necesario especificar las condiciones iniciales de la misma.

Si bien la intuición diría que un sistema descrito por una ecuación diferencial ordinaria es lineal, lo cierto es que ello dependerá de las condiciones iniciales!!

Ejemplo: Consideremos la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dy(t)}{dt} + \alpha y(t) = e^{-2\alpha t} u[t], \quad y(0) = y_0, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Sabemos que la solución la podemos expresar de la siguiente forma:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

Consideremos la solución para  $t \geq 0$ . Es fácil probar que:

$$y_h(t) = Ae^{-\alpha t} u(t)$$

$$y_p(t) = -\frac{1}{\alpha} e^{-2\alpha t} u(t)$$

Con lo cual

$$y(t) = \left( Ae^{-\alpha t} - \frac{1}{\alpha} e^{-2\alpha t} \right), \quad t \geq 0$$

# Sistemas descritos por ecuaciones diferenciales III

El valor de  $A$  es determinado por la condición inicial:

$$A = y_0 + \frac{1}{\alpha}$$

Entonces obtenemos:

$$y(t) = y_0 e^{-\alpha t} + \frac{1}{\alpha} (e^{-\alpha t} - e^{-2\alpha t}), \quad t \geq 0$$

La solución para  $t < 0$  es directamente la solución homogénea que obtuvimos antes con la condición inicial dada por  $y_0$ :

$$y(t) = y_0 e^{-\alpha t}, \quad t < 0$$

La solución para todo  $t$  se puede expresar como:

$$y(t) = y_0 e^{-\alpha t} + \frac{1}{\alpha} (e^{-\alpha t} - e^{-2\alpha t}) u(t)$$

$$y(t) = y_0 e^{-\alpha t} + \frac{1}{\alpha} (e^{-\alpha t} - e^{-2\alpha t}) u(t)$$

Algunas consideraciones:

- Si la señal de entrada es igual a la señal nula la solución total sería  $y(t) = y_0 e^{-\alpha t}$ . Es claro que entonces el sistema no es lineal ya que a entrada nula la salida es no nula. (para un sistema lineal debe ser  $\mathcal{T}[\mathbf{0}] = \mathbf{0}!$ ).
- Si la condición inicial es nula el sistema es lineal. **Probarlo!!!**
- Notar que la solución de arriba implica que el sistema es no causal, ya que para una entrada que es nula para  $t < 0$  la salida es no nula para  $t < 0$ .

Como nosotros vamos a estar interesados en sistemas LTI vamos asumir la condición de *reposeo inicial*: si la entrada es cero para  $t \leq t_0$  entonces la salida del sistema es cero para  $t \leq t_0$ . De esta forma podemos asegurar que las condiciones iniciales son nulas lo cual nos asegura la **linealidad** del sistema. Además de la condición de reposo inicial, también obtenemos la **causalidad** del sistema (que sale como una consecuencia de que el sistema es lineal!). Se puede verificar que un sistema descrito por ecuaciones diferenciales a coeficientes constantes con esta condición es también **invariante** en el tiempo. Es fácil extender esto a sistemas descritos por ecuaciones diferenciales de orden arbitrario con el fin de considerarlos como sistemas LTI causales!

# Sistemas descritos por ecuaciones en diferencias I

Una ecuación en diferencias es el análogo en tiempo discreto a una ecuación diferencial:

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

Para sistemas descritos por ecuaciones en diferencias vale la conclusión que obtuvimos para los sistemas en tiempo continuo descritos por ecuaciones diferenciales: un sistema de este tipo será LTI y causal si consideramos la condición de *reposo inicial*: si la entrada  $x[n]$  es cero para  $n < n_0$  entonces la salida del sistema  $y[n]$  es cero para  $n < n_0$ . Probarlo!!

Es interesante escribir la ecuación en diferencias de la siguiente forma:

$$y[n] = \frac{1}{a_0} \left[ \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] \right]$$

Notar que la ecuación anterior es *recursiva*, ya que el valor de la salida al instante  $n$  depende (además de la entrada) de los  $N$  valores anteriores de la salida.

# Sistemas descriptos por ecuaciones en diferencias II

Cuando  $M = 0$  obtenemos:

$$y[n] = x[n] - \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{a_0} y[n - k]$$

Cuando  $N = 0$  obtenemos

$$y[n] = \sum_{k=0}^M \frac{b_k}{a_0} x[n - k]$$

Para el segundo caso podemos ver fácilmente que no tenemos recursividad y que la respuesta al impulso vale:

$$h[n] = \begin{cases} \frac{b_k}{a_0} & 0 \leq k \leq M \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se ve claramente que la respuesta al impulso es limitada en el tiempo, es decir es de longitud finita. Los sistemas descriptos por ecuaciones en diferencias con  $N = 0$  se denominan sistemas FIR (finite impulse response).

# Sistemas descritos por ecuaciones en diferencias III

El primer caso es una ecuación puramente recursiva y se puede probar que para sistemas descritos por ecuaciones en diferencias en los cuales  $N \neq 0$  la respuesta al impulso es de duración infinita.

Los sistemas de este tipo se denominan sistemas IIR (infinite impulse response)

Ejemplo: Consideremos  $y[n] = x[n] - ay[n - 1]$ . Sea  $x[n] = \delta[n]$  con la condición de reposo inicial, la cual implica que  $y[-1] = 0$ . Entonces tenemos:

$$y[0] = x[0] = 1$$

$$y[1] = -ay[0] = -a$$

$$y[2] = -ay[1] = a^2$$

$$y[3] = -ay[2] = -a^3$$

En general  $y[n] = (-a)^n u[n]$ . Se ve claramente que la respuesta es de duración infinita.

Cuando estudiemos el tema de transformada Z volveremos al tema de las ecuaciones en diferencias y los sistemas en tiempo discreto con mayor profundidad!

## Lectura obligatoria

- Representación de sistemas mediante diagramas en bloques (Oppenheim and Willsky, Sección 2.4.3).
- Respuesta de los sistemas LTI al escalón unitario (Oppenheim and Willsky, Sección 2.3.8 )
- Interpretación de funciones singulares por su acción sobre señales (Oppenheim and Willsky, Sección 2.5).

## Lectura optativa

- Sistemas LTI en tiempo discreto (Oppenheim and Schaffer, Sección 2.3).
- Propiedades de los sistemas LTI en tiempo discreto (Oppenheim and Schaffer, Sección 2.4).
- Ecuaciones en diferencias lineales con coeficientes constantes (Oppenheim and Schaffer, Sección 2.5).

# Algunos ejercicios I

- 1 Resuelva los ejercicios 2.21, 2.22 y 2.23 de Oppenheim and Willsky.
- 2 Sea el sistema LTI dado por:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t e^{-(t-\tau)} x(\tau - \sigma) d\tau, \quad \sigma \in \mathbb{R}$$

Determine la respuesta al impulso de este sistema.

- 3 Resuelva el ejercicio 2.43 de Oppenheim and Willsky.
- 4 *Los sistemas LTI estables preservan las señales  $L_2(\mathbb{R})$ :* Sea  $h(t)$  la respuesta al impulso de un sistema estable. Pruebe que si  $x(t) \in L_2(\mathbb{R})$  entonces:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau$$

pertenece a  $L_2(\mathbb{R})$ . Hint: Recuerde que  $L_2(\mathbb{R})$  es un espacio con producto interno y por ende vale la desigualdad de Cauchy-Schwarz...

- 5 *Multiplicar polinomios es convolucionar!:* Considere los siguientes polinomios:  $p_1(t) = 1 + 2t$  y  $p_2(t) = 3 - 3t + 2t^2$ . Calcule en forma directa el producto  $b(t) = p_1(t)p_2(t)$ . Probar que los coeficientes del polinomio  $b(t)$  pueden obtenerse mediante la convolución de las señales de tiempo discreto definidas por los coeficientes de los polinomios  $p_1(t)$  y  $p_2(t)$ . Se anima a generalizar el resultado para polinomios arbitrarios  $p_1(t) = \sum_{k=0}^M a_k t^k$  y  $p_2(t) = \sum_{k=0}^N b_k t^k$ ?



- 6 Considere dos secuencias de tiempo discreto de longitud finita  $h[n]$  de largo  $N$  y  $x[n]$  de largo  $M$  (sin pérdida de generalidad asumimos que ambas están definidas desde  $n = 0$  a  $n = N - 1$  o  $M - 1$  según corresponda). Probar que  $y[n]$  tiene a lo sumo longitud  $N + M - 1$ . Probar también que podemos escribir la convolución como un producto de una matriz por un vector de la siguiente forma:

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x}$$

donde

$$\mathbf{y} = [y[0] \ y[1] \ \dots \ y[N + M - 1]]$$

$$\mathbf{x} = [x[0] \ x[1] \ \dots \ x[M - 1]]$$

Construya la matriz  $\mathbf{H}$  a partir de la secuencia  $h[n]$  y observe su estructura particular. *Este ejercicio demuestra que para sistemas de tiempo discreto FIR es posible usar herramientas estándar del análisis matricial para su correspondiente análisis!*

- 7 Ejercicios 2.34, 2.35, 2.36, 2.48 y 2.56 de Oppenheim and Willsky.

¿Preguntas?