Introducción a las Señales y Sistemas

Dr. Ing. Leonardo Rey Vega

Señales y Sistemas (66.74 y 86.05)
Facultad de Ingeniería
Universidad de Buenos Aires

Marzo 2024

Resumen

1 Introducción a la materia

Resumen

1. Introducción a la materia
2. Señales en tiempo continuo y discreto

Resumen

1. Introducción a la materia
2. Señales en tiempo continuo y discreto
3. Sistemas en tiempo continuo y discreto

Introducción a la materia I

La materia presentará una introducción a conceptos y técnicas de análisis y diseño para señales y sistemas en tiempo continuo y discreto (con especial enfásis en sistemas lineales!)

El análisis y síntesis de señales y sistemas tiene importancia fundamental en la ciencia y la tecnología:

- Comunicaciones
- Control
- Teoría de circuitos
- Generación y distribución de energía eléctrica
- Ingeniería biomédica
- Aprendizaje automático (Machine Learning)
- Aplicaciones de punta: sistemas aeroespaciales, radares, etc.

Introducción a la materia I

La materia presentará una introducción a conceptos y técnicas de análisis y diseño para señales y sistemas en tiempo continuo y discreto (con especial enfásis en sistemas lineales!)

El análisis y síntesis de señales y sistemas tiene importancia fundamental en la ciencia y la tecnología:

- Comunicaciones
- Control
- Teoría de circuitos
- Generación y distribución de energía eléctrica
- Ingeniería biomédica
- Aprendizaje automático (Machine Learning)
- Aplicaciones de punta: sistemas aeroespaciales, radares, etc.

En la materia presentaremos conceptos básicos y cuando sea posible presentaremos ejemplos simples de aplicación de los mismos en algunas de las aplicaciones mencionadas arriba!

Introducción a la materia II

Temas que cubriremos:

Introducción a la materia II

Temas que cubriremos:

- Conceptos básicos de señales y sistemas.

Introducción a la materia II

Temas que cubriremos:

- Conceptos básicos de señales y sistemas.
- Convolución y propiedades de sistemas lineales.

Introducción a la materia II

Temas que cubriremos:

- Conceptos básicos de señales y sistemas.
- Convolución y propiedades de sistemas lineales.
- Series y transformadas de Fourier.

Introducción a la materia II

Temas que cubriremos:

- Conceptos básicos de señales y sistemas.
- Convolución y propiedades de sistemas lineales.
- Series y transformadas de Fourier.
- Muestreo e interpolación.

Introducción a la materia II

Temas que cubriremos:

- Conceptos básicos de señales y sistemas.
- Convolución y propiedades de sistemas lineales.
- Series y transformadas de Fourier.
- Muestreo e interpolación.
- Transformada de Laplace y transformada Z y análisis de sistemas mediante dichas herramientas.

Introducción a la materia II

Temas que cubriremos:

- Conceptos básicos de señales y sistemas.
- Convolución y propiedades de sistemas lineales.
- Series y transformadas de Fourier.
- Muestreo e interpolación.
- Transformada de Laplace y transformada Z y análisis de sistemas mediante dichas herramientas.
- Aplicaciones: sistemas de comunicaciones analógicas, sistemas realimentados, etc.

Introducción a la materia II

Temas que cubriremos:

- Conceptos básicos de señales y sistemas.
- Convolución y propiedades de sistemas lineales.
- Series y transformadas de Fourier.
- Muestreo e interpolación.
- Transformada de Laplace y transformada Z y análisis de sistemas mediante dichas herramientas.
- Aplicaciones: sistemas de comunicaciones analógicas, sistemas realimentados, etc.

Bibliografía, guías de ejercicios, cronograma y reglamento de la materia pueden encontrarse en el campus virtual:

http://campus.fi.uba.ar/

Consultas sobre la materia y sobre los temas de la teórica: lrey@fi.uba.ar

Introducción a la materia III

Bibliografía básica:

- A. Oppenheim, A. Willsky , S Nawab, *Señales y Sistemas*, Pearson Education, 2da. edición, 2015.
- A. Oppenheim, R. Schafer, J. Buck, *Tratamiento de Señales en Tiempo Discreto*, Prentice-Hall, 3ra. edición, 2011.
- J. Proakis and D. Manolakis, *Digital Signal Processing: Principles, Algorithms and Applications*, Pearson, 5ta. edición, 2021.

Bibliografía suplementaria:

- B. Porat, *A Course in Digital Signal Processing*, John Wiley & Sons, 1ra. edición, 1997.
- T. Kailath, *Linear Systems*, Prentice-Hall, 1ra. edición, 1980.
- P. Vaidyanathan, *Multirate Systems and Filterbanks*, Prentice-Hall, 1ra. edición, 1993.

Introducción a la materia IV

Aprobación de la materia:

- Parcial a partir de la clase 7-10 (ver cronograma).
- Presentación y defensa de un trabajo práctico especial que se hará durante todo el cuatrimestre
- Nota de concepto determinada por docentes de la práctica valorando participación y trabajo durante la clase.
- Nota de cursada $\mathrm{NCur} = 0.5 * \mathrm{Npar} + 0.4 * \mathrm{Ntpe} + 0.1 * \mathrm{Ncon}$.
- **Todos los puntos de arriba se deben cumplimentar para aprobar la cursada. Aquellos alumnos que lo hagan, sacándose una nota mayor a 75 en cualquier instancia del parcial y que además los docentes de la práctica consideren que estén en condiciones de hacerlo (en base a lo hecho en el TPE y su participación en clase) podrán optar por promocionar la materia o rendir un exámen integrador.**
- Promoción: en la semana 16 una breve reunión (muy amistosa!) con el profesor de la materia trayendo la carpeta de ejercicios (ver reglamento y guías de ejercicios). En el caso de aprobar la nota final de la materia será:

$$\mathrm{Nf} = 0.8 * \mathrm{Ncur} + 0.2 * \mathrm{Ncol}$$

- En el caso de rendir evaluación integradora, la misma tendrá el mismo formato del parcial y considerará todos los temas de la materiaColoquio integrador. En este caso la nota final será:

$$\mathrm{Nf} = 0.6 * \mathrm{Ncur} + 0.4 * \mathrm{Nint}$$

Introducción a la materia V

Importante!! La materia introduce muchos conceptos abstractos que requieren tiempo de estudio y dedicación para ser debidamente asimilados. Para el éxito en la cursada y aprobación de la materia se recomienda:

1. Venir a las teóricas con el material a ser presentado leído para una mejor aprovechamiento de las clases.
2. Durante la semana siguiente a cada clase teórica estudiar detalladamente la bibliografía para cada uno de los temas presentados. El material en estas guías no reemplaza en absoluto a la bibliografía sugerida!
3. Aprovechar las clases prácticas para resolver ejercicios y consultar a los docentes. Sin una rutina constante de resolución de problemas desde el día 1 esta materia será muy difícil de aprobar!!!
4. Ejercitarse en casa durante la semana utilizando las guías de ejercicios y los ejercicios sugeridos en la teórica y en las prácticas.

Que es una señal???

Señales I

Que es una señal???

Básicamente es un objeto que lleva información total o parcial sobre el comportamiento de un sistema físico

Señales I

Que es una señal???

Básicamente es un objeto que lleva información total o parcial sobre el comportamiento de un sistema físico

Existe una diversidad enorme de sistemas físicos y por ende una inmensidad de señales de naturaleza diversa!!

Que es una señal???

Básicamente es un objeto que lleva información total o parcial sobre el comportamiento de un sistema físico

Existe una diversidad enorme de sistemas físicos y por ende una inmensidad de señales de naturaleza diversa!!

Sin embargo en general pueden ser modelizadas de una forma universal y ser analizadas con herramientas matemáticas independientes de la naturaleza física de dichas señales!!!

Señales I

Que es una señal???

Básicamente es un objeto que lleva información total o parcial sobre el comportamiento de un sistema físico

Existe una diversidad enorme de sistemas físicos y por ende una inmensidad de señales de naturaleza diversa!!

Sin embargo en general pueden ser modelizadas de una forma universal y ser analizadas con herramientas matemáticas independientes de la naturaleza física de dichas señales!!!

Esto es importante ya que nos permite analizar señales y sistemas sin hacer ninguna consideración sobre su naturaleza física concreta pudiendo generar conceptos y análisis verdaderamente universales!!

Señales II

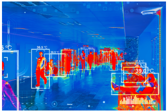
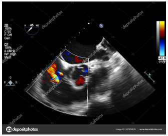
El modelo matemático para una señal es el de una función

$$x(\mathbf{t}) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$$

. Ejemplos:

- El voltaje $v(t)$ como función del tiempo en un capacitor. Claramente $N = 1$.
- La señal del corazón humano en función del tiempo obtenida a través de un electrocardiograma. De nuevo $N = 1$.
- La temperatura en una varilla de metal en función de la posición sobre la misma. De nuevo $N = 1$.
- Una imagén fotográfica, donde $f(t_1, t_2)$ es la intensidad del brillo y t_1 y t_2 son las coordenadas espaciales. En este caso $N = 2$.



Señales II

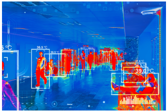
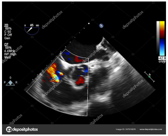
El modelo matemático para una señal es el de una función

$$x(\mathbf{t}) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$$

. Ejemplos:

- El voltaje $v(t)$ como función del tiempo en un capacitor. Claramente $N = 1$.
- La señal del corazón humano en función del tiempo obtenida a través de un electrocardiograma. De nuevo $N = 1$.
- La temperatura en una varilla de metal en función de la posición sobre la misma. De nuevo $N = 1$.
- Una imagén fotográfica, donde $f(t_1, t_2)$ es la intensidad del brillo y t_1 y t_2 son las coordenadas espaciales. En este caso $N = 2$.



La variable independiente $\mathbf{t}$ se referirá genéricamente como el tiempo, aunque no necesariamente sea así. Además, todos los conceptos que veremos a lo largo del curso se pueden obtener (sin mucho trabajo) para $N \in \mathbb{N}$, sin embargo nosotros nos restringiremos, a partir de ahora y salvo aclaración en contrario, al caso $N = 1$.

Señales III

Cuando $t \in \mathbb{R}$ hablamos de señales en *tiempo continuo*.

Señales III

Cuando $t \in \mathbb{R}$ hablamos de señales en *tiempo continuo*. Podemos también pensar en señales de *tiempo discreto* (secuencias):

$$x[n] : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$$

Ejemplos de señales de *tiempo discreto*:

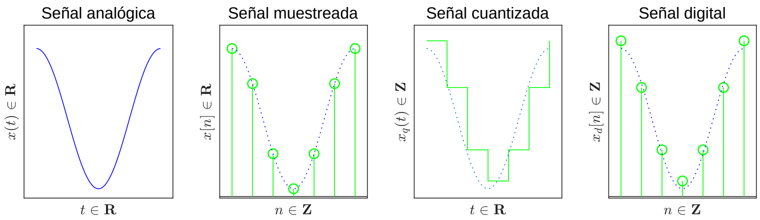
- Muestras de una señal de tiempo continuo (a través de un apropiado procedimiento de muestreo que estudiaremos más adelante).
- Datos sobre el nivel de precipitaciones en Buenos Aires para cada mes del año (señal intrínsecamente de tiempo discreto).
- El precio de cierre diario de una acción que cotiza en la bolsa de Buenos Aires.

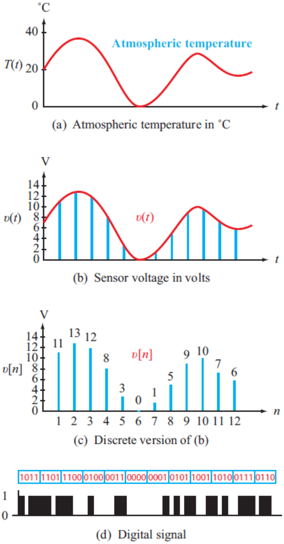
Cuando $t \in \mathbb{R}$ hablamos de señales en *tiempo continuo*. Podemos también pensar en señales de *tiempo discreto* (secuencias):

$$x[n] : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$$

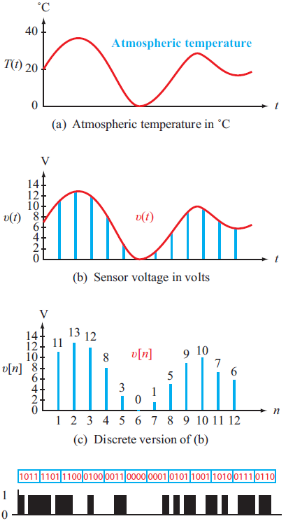
Ejemplos de señales de *tiempo discreto*:

- Muestras de una señal de tiempo continuo (a través de un apropiado procedimiento de muestreo que estudiaremos más adelante).
- Datos sobre el nivel de precipitaciones en Buenos Aires para cada mes del año (señal intrínsecamente de tiempo discreto).
- El precio de cierre diario de una acción que cotiza en la bolsa de Buenos Aires.





La señal de temperatura y de salida del sensor son analógicas. La salida del sensor se **muestrea** con un período de muestreo T



(a) Atmospheric temperature in °C

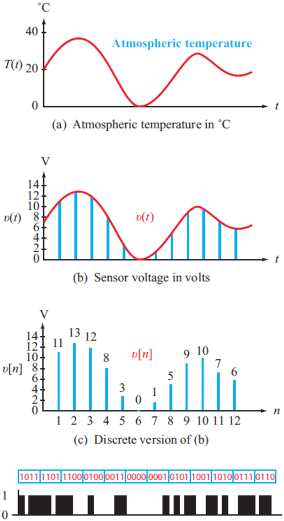
(b) Sensor voltage in volts

(c) Discrete version of (b)

(d) Digital signal

La señal de temperatura y de salida del sensor son analógicas. La salida del sensor se **muestrea** con un período de muestreo T

Esto significa $1/T$ muestras de tiempo discretas por cada unidad de tiempo (generalmente segundos). Esta definición implica un muestreo uniforme! Es decir, la distancia temporal entre dos muestras sucesivas es simpre la misma!



(a) Atmospheric temperature in °C

(b) Sensor voltage in volts

(c) Discrete version of (b)

(d) Digital signal

La señal de temperatura y de salida del sensor son analógicas. La salida del sensor se **muestrea** con un período de muestreo T

Esto significa $1/T$ muestras de tiempo discretas por cada unidad de tiempo (generalmente segundos). Esta definición implica un muestreo uniforme! Es decir, la distancia temporal entre dos muestras sucesivas es simpre la misma!

Se define $f_s = 1/T$ como frecuencia de muestreo (frequency sampling). Muchas veces usamos este parámetro para especificar un sistema que transforma señales de tiempo continuo a tiempo discreto!

Extraido de: *F. Ulaby and A. Yagle. Signals and systems theory and applications, Michigan Publishing, 2018*

Señales V

Una última clasficación discrimina entre:

- Señales determinísticas: Cada valor de la señal para cada t o n, según corresponda, esta perfectamente determinado a través de una función matemática o una tabla de valores.
- Señales estocásticas: El valor de la señal para cada t o n, según corresponda, no está perfectamente determinado y obedece a una ley de probabilidad. Se puede decir, que una señal estocástica es un conjunto de señales, todas perfectamente realizables, por un esquema subyacente de probabilidades.

Señales V

Una última clasficación discrimina entre:

- Señales determinísticas: Cada valor de la señal para cada t o n, según corresponda, esta perfectamente determinado a través de una función matemática o una tabla de valores.
- Señales estocásticas: El valor de la señal para cada t o n, según corresponda, no está perfectamente determinado y obedece a una ley de probabilidad. Se puede decir, que una señal estocástica es un conjunto de señales, todas perfectamente realizables, por un esquema subyacente de probabilidades.

$$\text{Señales}\begin{cases}\text{Determinísticas}\begin{cases}\text{Periódicas}\begin{cases}\text{Sinusoidales}\\ \text{Armónicas}\\ \text{Pseudo-estocásticas}\end{cases}\\ \text{Aperiódicas}\end{cases}\\ \text{Estocásticas}\end{cases}$$

Señales V

Una última clasficación discrimina entre:

- Señales determinísticas: Cada valor de la señal para cada t o n, según corresponda, esta perfectamente determinado a través de una función matemática o una tabla de valores.
- Señales estocásticas: El valor de la señal para cada t o n, según corresponda, no está perfectamente determinado y obedece a una ley de probabilidad. Se puede decir, que una señal estocástica es un conjunto de señales, todas perfectamente realizables, por un esquema subyacente de probabilidades.

$$\text{Señales} \begin{cases} \text{Determinísticas} \begin{cases} \text{Periódicas} \begin{cases} \text{Sinusoidales} \\ \text{Armónicas} \\ \text{Pseudo-estocásticas} \end{cases} \\ \text{Aperiódicas} \end{cases} \\ \text{Estocásticas} \end{cases}$$

Las señales estocásticas son muy útiles para analizar la dinámica de sistemas muy complejos, que no pueden ser modelados analíticamente en forma precisa. Un ejemplo ocurre con las señales de voz. En este curso nos ocuparemos solamente de las señales determínisticas. En la materia Procesos Estocásticos se analizan con detalle las señales estocásticas.

Espacio de señales I

Desde el formalismo matemático nos servirá estructurar las señales en espacios vectoriales adecuados (para nosotros estructurados sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). En forma precisa

Sea $\mathcal{H}$ un conjunto de funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que además satisfacen lo siguiente:

- Si $f(t) \in \mathcal{H}$ entonces $\alpha f(t) \in \mathcal{H}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
- Si $f(t)$ y $g(t)$ pertenecen a $\mathcal{H}$ entonces $f(t) + g(t)$ pertenecen a $\mathcal{H}$.

Se dice que $\mathcal{H}$ es un espacio vectorial estructurado sobre $\mathbb{R}$.

Observaciones:

- Notar que necesariamente la función nula (es decir la que vale 0 para todo t) debe pertenecer a $\mathcal{H}$.
- La extensión para el caso de señales de tiempo discreto es inmediata.
- Los espacios vectoriales con los que trabajaremos no serán en general de dimensión finita!.
- La noción de independencia lineal entre N elementos del espacio es siempre la misma independientemente de que el espacio tenga dimensión finita o infinita.
- Es inmediato ver que podemos estructurar un espacio en lugar de sobre $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{C}$ (de hecho lo haremos más adelante!!)

Espacio de señales II

Ejemplos:

- Sea $L_2(\mathbb{R})$ el espacio de las señales $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tales que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty,$$

  es decir las señales con energía finita en toda la recta. Es claro que $L_2(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial. Probarlo!!!

- El resultado es el mismo para $L_2(B)$ con $B \subseteq \mathbb{R}$ el espacio de las señales $f : B \to \mathbb{C}$ tales que :

$$\int_B |f(t)|^2 dt < \infty$$

- Sea $l^2(\mathbb{Z})$ el espacio de las señales de tiempo discreto $x[n] : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ tales que:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty$$

  Es claro que $l^2(\mathbb{Z})$ es un espacio vectorial.Probarlo!!!

- Sea $\mathbb{P}(n)$ el conjunto de los polinomios de grado menor o igual a n. Probar que $\mathbb{P}(n)$ es un espacio vectorial. Probarlo!!! Es de dimensión finita o infinita??.

- Sea $\mathcal{A} = \{e^t, e^{2t}, e^{3t}, \dots\}$. Es $\mathcal{A}$ un espacio vectorial???

Espacio de señales III

En algunos espacios vectoriales podremos contar con algunas estructuras más completas. Por ejemplo, con un producto interno.

Decimos que $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ es un producto interno sobre el espacio vectorial $\mathcal{H}$ compuesto por funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si satisface:

- $\langle f(t), g(t) \rangle = \langle g(t), f(t) \rangle$ para $f(t), g(t)$ pertenecientes a $\mathcal{H}$.
- $\langle \alpha f(t), g(t) \rangle = \alpha \langle f(t), g(t) \rangle$ para $f(t), g(t)$ pertenecientes a $\mathcal{H}$ y $\alpha \in \mathcal{R}$.
- $\langle f(t), f(t) \rangle \geq 0$ con la igualdad sí y sólo sí $f(t) \equiv 0$. Notar que $\langle f(t), f(t) \rangle \equiv ||f(t)||^2$, es decir la norma al cuadrado de la señal $f(t)$.

Ejemplo: Sea $L_2([0,T))$ el espacio vectorial de las funciones de energía finita $f : [0,T) \to \mathbb{R}$. Se define:

$$\langle f(t), g(t) \rangle \equiv \int_0^T f(t) g(t) dt$$

Probar que esto constituye un producto interno en el mencionado espacio!!!

Espacio de señales III

En algunos espacios vectoriales podremos contar con algunas estructuras más completas. Por ejemplo, con un producto interno.

Decimos que $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathcal{H}\times\mathcal{H}\rightarrow\mathbb{R}$ es un producto interno sobre el espacio vectorial $\mathcal{H}$ compuesto por funciones $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ si satisface:

- $\langle f(t), g(t)\rangle = \langle g(t), f(t)\rangle$ para $f(t), g(t)$ pertenecientes a $\mathcal{H}$.
- $\langle \alpha f(t), g(t)\rangle = \alpha\langle f(t), g(t)\rangle$ para $f(t), g(t)$ pertenecientes a $\mathcal{H}$ y $\alpha\in\mathcal{R}$.
- $\langle f(t), f(t)\rangle \geq 0$ con la igualdad sí y sólo sí $f(t)\equiv 0$. Notar que $\langle f(t), f(t)\rangle \equiv ||f(t)||^2$, es decir la norma al cuadrado de la señal $f(t)$.

Ejemplo: Sea $L_2([0,T))$ el espacio vectorial de las funciones de energía finita $f:[0,T)\rightarrow\mathbb{R}$. Se define:

$$\langle f(t), g(t)\rangle \equiv \int_0^T f(t)g(t)dt$$

Probar que esto constituye un producto interno en el mencionado espacio!!!

Nuevamente podemos definir un producto interno para un espacio vectorial de funciones que entregan valores en $\mathbb{C}$. Como se modifican los axiomas para el producto interno?? Cuál sería la definición del mismo para el espacio $L_2([0,T))$ pero donde las señales que lo componen son $f:[0,T)\rightarrow\mathbb{C}$??

Espacio de señales IV

- Distancia euclídea:

$$d\left(x,y\right)=\langle x-y,y-x\rangle^{\frac{1}{2}}=\|x-y\|$$

Si $x,y\in\mathcal{C}^N$, entonces

$$d\left(x,y\right)=\sqrt{\sum_{n=0}^{N-1}\left|x[n]-y[n]\right|^2}$$

Si $x,y\in L_2\left(\left[-\pi,\pi\right]\right)$, entonces

$$d\left(x,y\right)=\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}\left|x(t)-y(t)\right|^2 dt}$$

Distancia euclídea $\equiv$ *Raíz del error cuadrático medio*

Espacio de señales V

La presencia de producto interno permite definir la noción de *ortogonalidad* entre elementos de un espacio vectorial.

Se dice que $f(t)$ y $g(t)$ pertenecientes a $\mathcal{H}$ con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ son ortogonales si:

$$\langle f(t), g(t) \rangle = 0$$

Ejemplo: Sea $f(t), g(t) \in L_2([0, T))$ con el producto interno usual. Entonces, si $f(t)$ y $g(t)$ son ortogonales:

$$\int_0^T f(t)g(t)dt = 0$$

[1] $L_2([0, T))$ es un espacio de dimensión infinita y existen algunas cuestiones técnicas para estar seguros que el conjunto de las exponenciales complejas permite "generar" cualquier elemento del espacio. No nos detendremos en dichos detalles en el curso.

Espacio de señales V

La presencia de producto interno permite definir la noción de *ortogonalidad* entre elementos de un espacio vectorial.

Se dice que $f(t)$ y $g(t)$ pertenecientes a $\mathcal{H}$ con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ son ortogonales si:

$$\langle f(t), g(t) \rangle = 0$$

Ejemplo: Sea $f(t), g(t) \in L_2([0, T))$ con el producto interno usual. Entonces, si $f(t)$ y $g(t)$ son ortogonales:

$$\int_0^T f(t)g(t)dt = 0$$

En espacio vectoriales con producto interno cobra importancia el concepto de *base ortonormal*. Una base ortonormal conocida por todos (y que después utilizaremos) para el espacio de funciones complejas $f : [0, T) \to \mathbb{C}$ en $L_2([0, T))$ es[1]:

$$\left\{ , \ldots, \frac{1}{\sqrt{T}} e^{-2j\omega_0 t}, , \frac{1}{\sqrt{T}} e^{-j\omega_0 t}, \frac{1}{\sqrt{T}}, , \frac{1}{\sqrt{T}} e^{j\omega_0 t}, , \frac{1}{\sqrt{T}} e^{2j\omega_0 t}, \ldots, \right\}, \ \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

[1] $L_2([0, T))$ es un espacio de dimensión infinita y existen algunas cuestiones técnicas para estar seguros que el conjunto de las exponenciales complejas permite "generar" cualquier elemento del espacio. No nos detendremos en dichos detalles en el curso.

Espacio de señales VI

Problema: tengo una señal $x(t)$ y un subespacio de señales conocidas y con "buenas" propiedades $S = \text{gen}\{f_1(t), f_2(t), \ldots, f_N(t)\}$. Sin perder generalidad $x(t) \notin S$. Quiero aproximar $x(t)$ con una señal que viva en S. Planteo:

$$\hat{x}(t) = \arg \min_{h(t) \in S} \|x(t) - h(t)\|$$

Espacio de señales VI

Problema: tengo una señal $x(t)$ y un subespacio de señales conocidas y con "buenas" propiedades $S = \text{gen}\{f_1(t), f_2(t), \dots, f_N(t)\}$. Sin perder generalidad $x(t) \notin S$. Quiero aproximar $x(t)$ con una señal que viva en S. Planteo:

$$\hat{x}(t) = \arg \min_{h(t)\in S} \|x(t) - h(t)\|$$

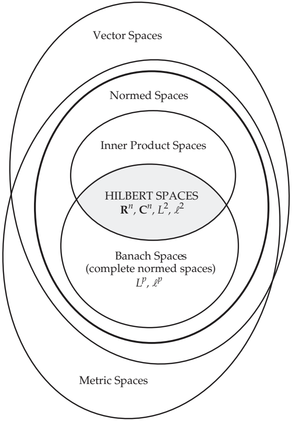
Teorema (Teorema de la proyección ortogonal)

Sea $\mathcal{H}$ un espacio vectorial con producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ (y con algunas propiedades más). Sea además un subespacio S contenido en $\mathcal{H}$ y del cual tengo una base ortonormal $\{f_1(t), f_2(t), \dots, f_N(t), \dots\}$. La "mejor" aproximación a $x(t) \in \mathcal{H}$ en S de acuerdo al problema planteado arriba se puede escribir:

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x(t), f_k(t)\rangle f_k(t)$$

Además el error $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ es ortogonal a S, es decir $\langle e(t), s(t)\rangle = 0$ $\forall s(t) \in S$.

Espacio de señales VII



Taxonomía de los espacios. Un espacio de Hilbert es un espacio de producto interno completo. Los espacios de dimensión finita y $\mathbb{R}^n$, con norma euclidiana, son espacios de Hilbert, al igual que los espacios de dimensión infinita L_2 y l^2. Los espacios l^2, L_1, L_∞ y l^∞son espacios de Banach.

Fuente: Eric W. Hansen. Fourier Transforms: Principles and Applications. Wiley. 2014.

Algunas funciones útiles I

Una función muy útil para nosotros será la función escalón unitario:

[2] La definición precisa requiere teoría de distribuciones y teoría de la medida, temas que están fuera del alcance de este curso. Para los interesados (y valientes!!) consultar W. Rudin, *Functional Analysis*, Mc-Graw-Hill, 1991.

Algunas funciones útiles I

Una función muy útil para nosotros será la función escalón unitario:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

El valor en $t = 0$ no es importante y se puede definir con total libertad. Una elección popular es $u(0) = 0.5$.

[2]La definición precisa requiere teoría de distribuciones y teoría de la medida, temas que están fuera del alcance de este curso. Para los interesados (y valientes!!) consultar W. Rudin,*Functional Analysis*, Mc-Graw-Hill, 1991.

Algunas funciones útiles I

Una función muy útil para nosotros será la función escalón unitario:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

El valor en $t = 0$ no es importante y se puede definir con total libertad. Una elección popular es $u(0) = 0.5$.

Esta función es muy útil en teoría de control y procesamiento de señales. Una de sus atractivos es que permite restringir señales para los valores de t positivos por medio de una simple multiplicación con esta función.

Otra función de mucho interés para nosotros será la *delta de Dirac* o función impulso unitario[2]:

[2] La definición precisa requiere teoría de distribuciones y teoría de la medida, temas que están fuera del alcance de este curso. Para los interesados (y valientes!!) consultar W. Rudin, *Functional Analysis*, Mc-Graw-Hill, 1991.

Algunas funciones útiles I

Una función muy útil para nosotros será la función escalón unitario:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

El valor en $t = 0$ no es importante y se puede definir con total libertad. Una elección popular es $u(0) = 0.5$.

Esta función es muy útil en teoría de control y procesamiento de señales. Una de sus atractivos es que permite restringir señales para los valores de t positivos por medio de una simple multiplicación con esta función.

Otra función de mucho interés para nosotros será la *delta de Dirac* o función impulso unitario[2]:

La definición rigurosa de este objeto es matemáticamente compleja. Incluso desde el punto de vista formal, lo que llamamos como delta de Dirac no es una función. Nosotros, como usaremos este objeto de forma puramente operativa no nos preocuparemos por estos detalles.

Una posible definición es la siguiente

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) d\tau$$

Integrando la función delta de Dirac obtenemos la función escalón definida arriba!!

[2] La definición precisa requiere teoría de distribuciones y teoría de la medida, temas que están fuera del alcance de este curso. Para los interesados (y valientes!!) consultar W. Rudin, *Functional Analysis*, Mc-Graw-Hill, 1991.

Algunas funciones útiles II

Sin ser rigurosos podemos definir también:

$$\delta(t) = u'(t)$$

La falta de rigurosidad nos lleva a un problema en $t = 0$ donde la función escalón unitario es discontinua y su derivada en el sentido clásico no existe!! Sin embargo con el formalismo de la teoría de las distribuciones dicha derivada se puede justificar y por ello la seguiremos utilizando!

Algunas funciones útiles II

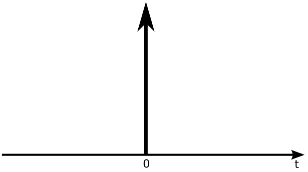
Sin ser rigurosos podemos definir también:

$$\delta(t) = u'(t)$$

La falta de rigurosidad nos lleva a un problema en $t = 0$ donde la función escalón unitario es discontinua y su derivada en el sentido clásico no existe!! Sin embargo con el formalismo de la teoría de las distribuciones dicha derivada se puede justificar y por ello la seguiremos utilizando!

En forma equivalente la delta de Dirac es un objeto que cumple con las siguientes propiedades

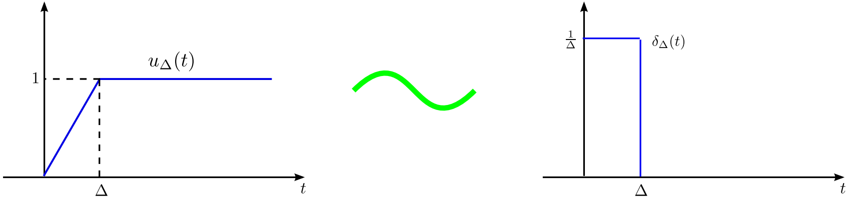
- $\delta(t) = 0 \ \forall t \neq 0$.
- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$.



Algunas funciones útiles III

Podemos intepretar la expresión $\delta(t) = u'(t)$ como un límite (aunque no rigurosamente):

$$\delta_\Delta(t) = u'_\Delta(t),\ \Delta \to 0$$



Notamos como $\delta_\Delta(t)$ tiene siempre área unitaria y para $t < 0$ y $t > \Delta$ vale 0. Sin preocuparnos por la rigurosidad matemática podemos decir que :

$$\lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t) = \delta(t)$$

Funciones como $\delta_\Delta(t)$ arriba, que convergen a $\delta(t)$ cuando $\Delta \to 0$ se denominan *nascent delta functions.*

Algunas funciones útiles IV

Notar que para una señal $x(t)$ continua podemos escribir (con el límite interpretado en el mismo sentido que las expresiones de arriba):

$$\lim_{\Delta \to 0} x(t)\delta_\Delta(t) = x(0)\delta(t)$$

Esto nos lleva a una de las principales propiedades de la delta de Dirac:

Algunas funciones útiles IV

Notar que para una señal $x(t)$ continua podemos escribir (con el límite interpretado en el mismo sentido que las expresiones de arriba):

$$\lim_{\Delta \to 0} x(t)\delta_\Delta(t) = x(0)\delta(t)$$

Esto nos lleva a una de las principales propiedades de la delta de Dirac:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)x(t)dt = x(t_0)$$

Para funciones continuas en un $t_0 \in \mathbb{R}$ arbitrario, la delta de Dirac nos permite de alguna forma obtener o ”evaluar” el valor de dichas funciones en dicho punto!! Esto será muy útil cuando veamos el tema de muestreo!!

Algunas funciones útiles IV

Notar que para una señal $x(t)$ continua podemos escribir (con el límite interpretado en el mismo sentido que las expresiones de arriba):

$$\lim_{\Delta \to 0} x(t)\delta_{\Delta}(t) = x(0)\delta(t)$$

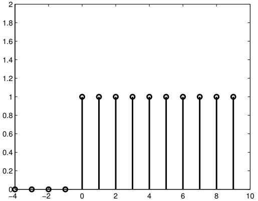
Esto nos lleva a una de las principales propiedades de la delta de Dirac:

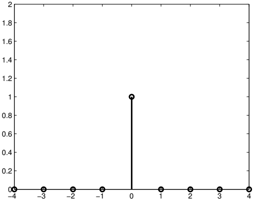
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)x(t)dt = x(t_0)$$

Para funciones continuas en un $t_0 \in \mathbb{R}$ arbitrario, la delta de Dirac nos permite de alguna forma obtener o "evaluar" el valor de dichas funciones en dicho punto!! Esto será muy útil cuando veamos el tema de muestreo!!

Cuando veamos el concepto de convolución para sistemas lineales veremos otra interpretación interesante de la delta de Dirac!!

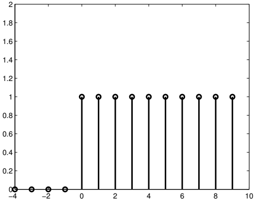
Para el caso de tiempo discreto podemos también definir las funciones escalón unitario $u[n]$ y la función impulso unitario $\delta[n]$:

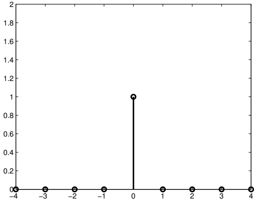




Algunas funciones útiles V

Para el caso de tiempo discreto podemos también definir las funciones escalón unitario $u[n]$ y la función impulso unitario $\delta[n]$:





En este caso no hay problemas matemáticos y los resultados e intuición son más naturales. Notar que en este caso el valor en $n = 0$ de la función escalón se fija en 1. Es fácil verificar:

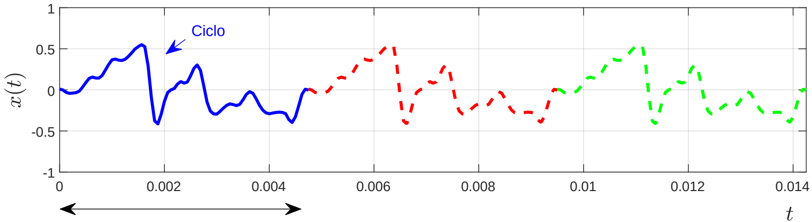
- $u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k]$.
- $\delta[n] = u[n] - u[n-1]$.
- $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] = x[n]$ para cualquier señal de tiempo discreto $x[n]$.

Señales periódicas I

Se dice que una señal continua $x(t)$ es periódica, con periodo $T \in \mathbb{R}$, si:

$$x(t+T) = x(t), \forall t$$

Si $x(t)$ es periódica con periodo T también es periódica con periodo qT, $q \in \mathbb{N}$. El *periodo fundamental* t_0 es el número positivo más pequeño de T.



$t_0 = \frac{1}{f_0}$ $\quad f_0 = Frecuencia fundamental$

Se dice que una señal discreta $x[n]$ es periódica, con periodo $N \in \mathbb{Z}$, si:

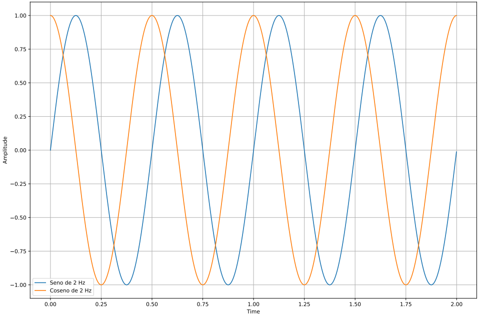
$$x[n+N] = x[n], \forall n$$

Señales periódicas II

El arquetipo de funciones periódicas son las funciones senoidales:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi), \quad y(t) = A\cos(\omega t + \phi) = x(t + \pi/2)$$

donde $\omega = 2\pi f$ siendo f la frecuencia (en Hz) y con período $T = \frac{1}{f}$ (en seg.).



Señales periódicas III

Las señales periódicas más importantes para nosotros serán las exponenciales complejas. Usando que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

Puedo hacer lo siguiente:

$$e^{jx} = 1 + jx + \frac{(jx)^2}{2!} + \frac{(jx)^3}{3!} + \cdots = 1 + jx - \frac{x^2}{2!} - j\frac{x^3}{3!} + \cdots = \cos(x) + j\sin(x)$$

Señales periódicas III

Las señales periódicas más importantes para nosotros serán las exponenciales complejas. Usando que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

Puedo hacer lo siguiente:

$$e^{jx} = 1 + jx + \frac{(jx)^2}{2!} + \frac{(jx)^3}{3!} + \cdots = 1 + jx - \frac{x^2}{2!} - j\frac{x^3}{3!} + \cdots = \cos(x) + j\sin(x)$$

Esto se conoce como notación de Euler y es una respresentación muy útil ya que hereda todas las propiedades de las exponenciales. Entonces:

$$x(t) = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t) \equiv e^{j\omega t}$$

Señales complejas

$z(t) \in \mathbb{C}$

$z(t) = \mathcal{R}e\{z(t)\} + j\mathcal{I}m\{z(t)\}$

$j = \sqrt{-1}$

$\mathcal{R}e\{z(t)\} = \frac{z(t)+z^*(t)}{2}$

$\mathcal{I}m\{z(t)\} = \frac{z(t)-z^*(t)}{2}$

$z(t) = |z(t)|e^{j\angle z(t)}$

$$z(t) = |z(t)|\cos(\angle z(t)) + \\ +j|z(t)|\sin(\angle z(t))$$

$$|z(t)| = \sqrt{z(t)z^*(t)} \\ = \sqrt{\mathcal{R}e^2\{z(t)\} + \mathcal{I}m^2\{z(t)\}}]$$

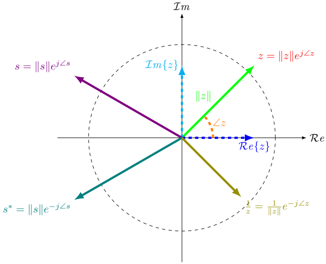
$\angle z(t) = \arctan\left(\frac{\mathcal{I}m\{z(t)\}}{\mathcal{R}e\{z(t)\}}\right)$

$z^* = \mathcal{R}e\{z(t)\} - j\mathcal{I}m\{z(t)\}$

$z^* = |z(t)|e^{-j\angle z(t)}$

$\frac{1}{z} = \frac{\mathcal{R}e\{z(t)\} - j\mathcal{I}m\{z(t)\}}{\mathcal{R}e^2\{z(t)\} + \mathcal{I}m^2\{z(t)\}}$

$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|}e^{-j\angle z}$



Para señales de tiempo discreto valen las mismas definiciones!

Medidas de señales

Valor medio de una señal no periódica	$\bar{x} = \lim_{T\to\infty} \left\{ \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\, dt \right\}$	$\bar{x} = \lim_{N\to\infty} \left\{ \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x[n] \right\}$
Valor medio de una señal periódica	$\bar{x} = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t)\, dt$	$\bar{x} = \frac{1}{N_0} \sum_{n=\in\{N_0\}}^{N} x[n]$
Valor pico	$x_p = \sup_t \lvert x(t) \rvert$	$x_p = \sup_n \lvert x[n] \rvert$
Energía	$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} \lvert x(t) \rvert^2\, dt$	$E_x = \sum_{-\infty}^{\infty} \lvert x[n] \rvert^2$
Potencia de un señal no periódica	$P_x = \lim_{T\to\infty} \left\{ \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \lvert x(t) \rvert^2\, dt \right\}$	$P_x = \lim_{N\to\infty} \left\{ \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} \lvert x[n] \rvert^2 \right\}$
Potencia de un señal periódica	$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \lvert x(t) \rvert^2\, dt$	$P_x = \frac{1}{N_0} \sum_{n=\in\{N_0\}}^{N} \lvert x[n] \rvert^2$

Para pensar: Cuánto vale la potencia de una señal no periódica de energía finita (en $L_2(\mathbb{R})$)? Una señal periódica pueden ser de energía finita?

Sistemas I

Que es un sistema??

Que es un sistema??

Básicamente es un objeto que acepta señales, las transforma de acuerdo a una determinada ley y proporciona a su salida dichas señales transformadas

Sistemas I

Que es un sistema??

Básicamente es un objeto que acepta señales, las transforma de acuerdo a una determinada ley y proporciona a su salida dichas señales transformadas

Existe una diversidad enorme de sistemas de naturaleza diversa!!

Sistemas I

Que es un sistema??

Básicamente es un objeto que acepta señales, las transforma de acuerdo a una determinada ley y proporciona a su salida dichas señales transformadas

Existe una diversidad enorme de sistemas de naturaleza diversa!!

Sin embargo, en general pueden los sistemas pueden ser modelizados de una forma universal y ser analizados con herramientas matemáticas independientes su naturaleza física!!!

Que es un sistema??

Básicamente es un objeto que acepta señales, las transforma de acuerdo a una determinada ley y proporciona a su salida dichas señales transformadas

Existe una diversidad enorme de sistemas de naturaleza diversa!!

Sin embargo, en general pueden los sistemas pueden ser modelizados de una forma universal y ser analizados con herramientas matemáticas independientes su naturaleza física!!!

Ejemplos

- Un capacitor que dado una tensión entre sus bornes $v(t)$ genera una corriente $i(t)$.
- Una cámara fotográfica digital que dada una escena del mundo real (modelizada con una señal bidimensional de intensidades lumínicas analógica), proporciona una señal bidimensional de intensidades lumínicas digitales.
- Un instrumento musical de viento, que dada la señal de entrada dada por el soplido del músico, proporciona una señal acústica.

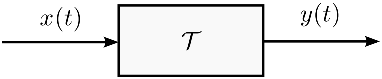
Sistemas II

Desde el punto vista matemático formal podemos definir a un sistema como a un *operador* que opera entre dos espacios de señales. En particular nos interesaran aquellos operadores que operen entre dos espacios vectoriales de señales:

Un sistema cuyas entradas son señales en el espacio vectorial $\mathcal{H}_1$ y sus salidas son señales en el espacio vectorial $\mathcal{H}_2$ se puede representar en forma matemática por un operador $\mathcal{T} : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$. En forma compacta la acción del sistema representado por $\mathcal{T}$ se puede escribir como:

$$y(t) = \mathcal{T}\left[x(t)\right]$$

donde $x(t) \in \mathcal{H}_1$ es la señal de entrada y $y(t) \in \mathcal{H}_2$ es la señal de salida.



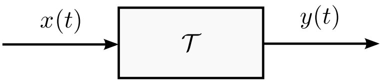
Sistemas II

Desde el punto vista matemático formal podemos definir a un sistema como a un *operador* que opera entre dos espacios de señales. En particular nos interesaran aquellos operadores que operen entre dos espacios vectoriales de señales:

Un sistema cuyas entradas son señales en el espacio vectorial $\mathcal{H}_1$ y sus salidas son señales en el espacio vectorial $\mathcal{H}_2$ se puede representar en forma matemática por un operador $\mathcal{T} : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$. En forma compacta la acción del sistema representado por $\mathcal{T}$ se puede escribir como:

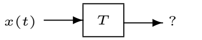
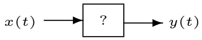
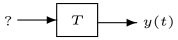
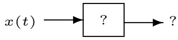
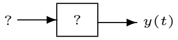
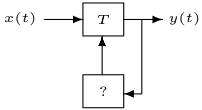
$$y(t) = \mathcal{T}\left[x(t)\right]$$

donde $x(t) \in \mathcal{H}_1$ es la señal de entrada y $y(t) \in \mathcal{H}_2$ es la señal de salida.



Por supuesto que las mismas definiciones valen para sistemas que toman señales en tiempo discreto y entregan señales en tiempo discreto o incluso para sistemas mixtos!!

Sistemas III

Análisis	Estudiar la respuesta de un sistema específico a diversas entradas	Calibración de un equipo	
Diseño o identificación	Diseñar sistemas para procesar señales de determinada forma	Conversión de energía	
Invertir	Obtener entrada para un sistema dado a partir de su salida	Sistema de comunicaciones	
Filtrado	Obtener el sistema y la señal de salida que permite modificar una señal de entrada de determinada forma	Ecualizador de audio	
Modelado	Diseñar un sistema y la señal de entrada que nos permite obtener una salida determinada	Radar	
Control:	Diseñar un sistema que controle a otro a partir de su salida	Piloto automático	

Propiedades y ejemplos I

Memoria: Un sistema se dice que es *sin memoria* cuando su salida en tiempo t depende solamente de su entrada en el tiempo t. Por ejemplo en un espacio vectorial $\mathcal{H}$ de señales de tiempo continuo reales un sistema sin memoria:

$$y(t) = \alpha x(t), \ \alpha \in \mathbb{C}$$

Otro ejemplo más general puede estar dado a través de una función genérica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$y(t) = f(x(t))$$

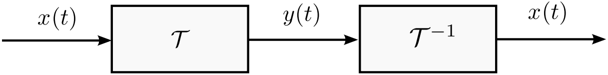
Qué sistemas reales se le ocurren que se pueden modelizar de esta forma?? En forma equivalente un sistema se dice que es *con memoria* cuando su salida en el tiempo t depende de su entrada en otros tiempos distintos de t (por supuesto puede depender también de la entrada a tiempo t). Ejemplos de sistemas con memoria:

$$y(t) = \alpha x(t-\beta), \ y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau, \ y[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=n}^{n+N-1} x[k]$$

Qué sistemas reales con memoria se le ocurren??

Propiedades y ejemplos II

Invertibilidad: En forma coloquial un sistema es *invertible* cuando observando la salida del mismo podemos recuperar la entrada. En términos matemáticos concretos, un sistema es invertible cuando el operador $\mathcal{T}$ que lo define es biyectivo o lo que es lo mismo existe $\mathcal{T}^{-1}$.



Ejemplos:

- $y(t) = \alpha x(t)$ es invertible si $\alpha \neq 0$.
- $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$ es invertible. Cuál es el sistema inverso??
- $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$ es invertible. Cuál es el sistema inverso??
- $y(t) = \sin(x(t))$ no es invertible. Por qué?
- $y[n] = \begin{cases} x[n] & 0 \leq n \leq N \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$ no es invertible. Por qué?

Causalidad: Se dice que un sistema es *causal* cuando su salida depende únicamente del presente y del pasado de la entrada (no del futuro). Un sistema se dice que es *no causal* cuando su salida puede depender de valores del pasado, del presente y también futuro. Un sistemas se dice que es *anti-causal* cuando su salida depende únicamente del presente y del futuro. Ejemplos:

- $y(t) = \alpha x(t)$ es causal. De hecho todo sistema sin memoria es necesariamente causal!.
- $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$ es causal. Sin embargo $y(t) = \int_{-\infty}^{t+\beta} x(\tau)d\tau$ con $\beta > 0$ es no causal.

Se le ocurren ejemplos reales de sistemas causales y no causales?

Propiedades y ejemplos III

Causalidad: Se dice que un sistema es *causal* cuando su salida depende únicamente del presente y del pasado de la entrada (no del futuro). Un sistema se dice que es *no causal* cuando su salida puede depender de valores del pasado, del presente y también futuro. Un sistemas se dice que es *anti-causal* cuando su salida depende únicamente del presente y del futuro. Ejemplos:

- $y(t) = \alpha x(t)$ es causal. De hecho todo sistema sin memoria es necesariamente causal!.
- $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$ es causal. Sin embargo $y(t) = \int_{-\infty}^{t+\beta} x(\tau)d\tau$ con $\beta > 0$ es no causal.

Se le ocurren ejemplos reales de sistemas causales y no causales?

La propiedad de causalidad es muy importante! En ciertas aplicaciones que deben funcionar en *tiempo real* dicha propiedad es crítica. Sin embargo, existen también otras aplicaciones donde la propiedad de causalidad no es vital!

Propiedades y ejemplos IV

Estabilidad: Existen varios criterios de estabilidad. Nosotros vamos a trabajar con el que dice que un sistema es *estable* si para entradas acotadas la salida permanece acotada. Este criterio de estabilidad se conoce comúnmente como BIBO (Bounded Input-Bounded Output). En términos precisos, si $\exists B_1 \in \mathbb{R}_+$ tal que

$$|x(t)| \leq B_1, \ \forall t \in \mathbb{R}$$

entonces $\exists B_2 \in \mathbb{R}_+$ tal que

$$|y(t)| \leq B_2, \ \forall t \in \mathbb{R}$$

La estabilidad para sistemas de tiempo discreto se define en forma similar.
Ejemplos:

- El sistema $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau$ es inestable. Por qué?
- El sistema $y[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=n-N+1}^{n} x[k]$ es estable. Por qué?

Propiedades y ejemplos IV

Estabilidad: Existen varios criterios de estabilidad. Nosotros vamos a trabajar con el que dice que un sistema es *estable* si para entradas acotadas la salida permanece acotada. Este criterio de estabilidad se conoce comúnmente como BIBO (Bounded Input-Bounded Output). En términos precisos, si $\exists B_1 \in \mathbb{R}_+$ tal que

$$|x(t)| \leq B_1, \ \forall t \in \mathbb{R}$$

entonces $\exists B_2 \in \mathbb{R}_+$ tal que

$$|y(t)| \leq B_2, \ \forall t \in \mathbb{R}$$

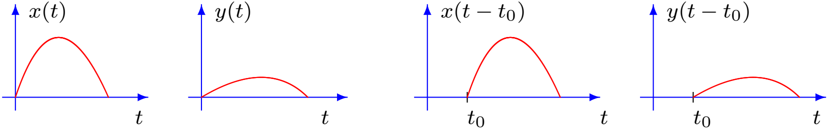
La estabilidad para sistemas de tiempo discreto se define en forma similar.
Ejemplos:

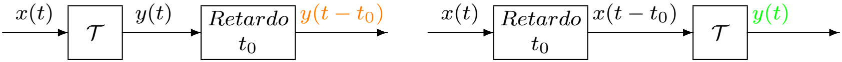
- El sistema $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$ es inestable. Por qué?
- El sistema $y[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=n-N+1}^{n} x[k]$ es estable. Por qué?

Tener sistemas estables es muy importante en la práctica! Por otro lado analizar la estabilidad de un sistema general puede ser un problema difícil. Sin embargo, existe una familia muy amplia de sistemas (los lineales e invariantes en el tiempo) donde el análisis de la estabilidad es muy simple.

Propiedades y ejemplos V

Invariancia en el tiempo: Se dice que un sistema es *invariante en el tiempo* si un desplazamiento temporal en la entrada provoca un desplazamiento temporal en la salida. En términos precisos: si la salida a un sistema con entrada $x(t)$ es $y(t)$ entonces, para cualquier valor $t_0 \in \mathbb{R}$, la salida a la entrada $x(t-t_0)$ es $y(t-t_0)$.





Ejemplos:

- Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, el sistema dado por $y(t) = f(x(t))$ es invariante en el tiempo. Probarlo!!
- El sistema $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$ es invariante en el tiempo. Probarlo!!
- El sistema $y[n] = \alpha^{-n}x[n]$ con $\alpha \in \mathbb{C}$ es variante en el tiempo. Probarlo!!

La invarianza en el tiempo será una propiedad fundamental para el curso cuando se encuentre combinada con la próxima propiedad que analizaremos: la linealidad!

Propiedades y ejemplos VI

Linealidad: Se dice que un sistema es *lineal*, si el mismo satisface las siguientes propiedades:

1. Para dos señales de entrada $x_1(t)$ y $x_2(t)$ cuyas salidas por el sistema $\mathcal{T}$ valen $y_1(t)$ e $y_2(t)$ respectivamente tenemos que:

   $$\mathcal{T}[x_1(t)+x_2(t)] = \mathcal{T}[x_1(t)]+\mathcal{T}[x_2(t)] = y_1(t)+y_2(t), \quad \text{Propiedad de aditividad!}$$

2. Para una señal de entrada $x(t)$ cuya salida al sistema $\mathcal{T}$ es $y(t)$ y cualquier escalar $\alpha \in \mathbb{C}$:

   $$\mathcal{T}[\alpha x(t)] = \alpha\mathcal{T}[x(t)] = \alpha y(t), \quad \text{Propiedad de homogeneidad!}$$

En forma general podemos escribir para señales de entrada $x_k(t)$ con $k = 1, 2, \ldots, N$ cuyas salidas por el sistema $\mathcal{T}$ son $y_k(t)$ con $k = 1, 2, \ldots, N$ y escalares complejos α_k con $k = 1, 2, \ldots, N$:

$$\mathcal{T}\left[\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k(t)\right] = \sum_{k=1}^{N} \mathcal{T}\left[\alpha_k x_k(t)\right] = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k y_k(t) \quad \text{Principio de superposición!}$$

Propiedades y ejemplos VII

Ejemplos de sistemas lineales:

- El sistema dado por $y(t) = \alpha x(t)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ es lineal.
- El sistema dado por $y(t) = \alpha x(t) + \beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ no es lineal.
- El sistema dado por $y(t) = f(x(t))$ será lineal sí y sólo sí $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es lineal. Por ejemplo $y(t) = e^{x(t)}$ no es lineal!!.
- El sistema $y(t) = \sin\left[\alpha x(t)\right]$ no es lineal. Sin embargo si $|\alpha x(t)| << 1$ entonces podemos *linealizar* el sistema ya que $y(t) \approx \alpha x(t)$. Esto es muy común en la ingeniería electrónica!!
- El sistema dado por $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[n]$ es lineal.
- El sistema dado por $y[n] = \sum_{k=0}^{n} \alpha^{-n} x[n]$. con $\alpha \in \mathbb{C}$ es lineal.

Propiedades y ejemplos VII

Ejemplos de sistemas lineales:

- El sistema dado por $y(t) = \alpha x(t)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ es lineal.
- El sistema dado por $y(t) = \alpha x(t) + \beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ no es lineal.
- El sistema dado por $y(t) = f(x(t))$ será lineal sí y sólo sí $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es lineal. Por ejemplo $y(t) = e^{x(t)}$ no es lineal!!.
- El sistema $y(t) = \sin[\alpha x(t)]$ no es lineal. Sin embargo si $|\alpha x(t)| << 1$ entonces podemos *linealizar* el sistema ya que $y(t) \approx \alpha x(t)$. Esto es muy común en la ingeniería electrónica!!
- El sistema dado por $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[n]$ es lineal.
- El sistema dado por $y[n] = \sum_{k=0}^{n} \alpha^{-n} x[n]$. con $\alpha \in \mathbb{C}$ es lineal.

Los sistemas lineales e invariantes en el tiempo (LTI, linear time invariant) serán los que estudiaremos con más detalle en este curso. Dichas propiedades permiten estudiarlos y conocerlos con mucha precisión. Notar que hay sistemas que pueden ser lineales y no invariantes en el tiempo (ver el último ejempo) y viceversa.

Temas para leer por cuenta propia

Lectura obligatoria

- Señales de energía finita y potencia finita (Oppenheim and Willsky, Sección 1.1.2).
- Transformaciones de la variable independiente para señales en tiempo continuo y tiempo discreto (Oppenheim and Willsky, Sección 1.2).
- Señales exponenciales y senoidales en tiempo continuo y discreto (Oppenheim and Willsky, Sección 1.3).

Lectura optativa

- Señales en tiempo discreto (Oppenheim and Schafer, Sección 2.1)
- Sistemas en tiempo discreto (Oppenheim and Schafer, Sección 2.2)

Algunos ejercicios I

1. Mostrar que si $f(t) \in L_2(\mathbb{R})$ entonces $\lim_{t\to-\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty} f(t) = 0$. Cuánto vale la potencia promedio de estas señales?. Puede una señal con potencia promedio distinta de cero pertenecer a $L_2(\mathbb{R})$? Es $e^{-t} \in L_2(\mathbb{R})$? Es una señal de potencia finita?
2. Sean las señales de tiempo discreto de largo N $f_k[n] = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{\frac{j2\pi kn}{N}}$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$ y con $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Demostrar que las funciones $\{f_k[n]\}_{k=0}^{N-1}$ forman una base ortonormal para el espacio vectorial de señales $x[n]$ de tiempo discreto tales que $x : [0 : N-1] \to \mathbb{C}$. Compare con el caso del espacio de funciones de tiempo continuo $L_2([0,T))$ y las exponenciales complejas en tiempo continuo discutidas en clase.
3. Mostrar que la siguiente es función delta nascent:

$$\delta_\Delta(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta} \exp\left\{-\frac{t^2}{2\Delta^2}\right\}$$

4. Probar que $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)\ \forall a \neq 0$.
5. Es posible definir las derivadas de orden k de la delta de Dirac. Pruebe que $\delta'(t)$ satisface (para cualquier $x(t)$ diferenciable, con derivada continua en $t = 0$):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)x(t)dt = -x'(0)$$

Se anima a generalizar el resultado de arriba para $\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(k)}(t)x(t)dt$ cuando $x(t)$ es una señal k-veces diferenciable y con derivadas continuas?? Hint: Recuerde integración por partes...

Algunos ejercicios II

6. Probar que si para un sistema lineal $\mathcal{T}$ debe necesariamente ocurrir que:
$$\mathcal{T}[\mathbf{0}] = \mathbf{0}$$
donde $\mathbf{0}$ es la señal nula.
7. Mostrar que un sistema lineal es causal sí y sólo sí para todo t_0 y entrada $x(t)$ tal que es nula para $t \leq t_0$ entonces la salida $y(t)$ es nula para $t \leq t_0$.
8. Considere el sistema de tiempo discreto cuya salida para cada entrada $x[n]$ la salida se computa como
$$y[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{k}\right] & \text{si } n \bmod k = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$
donde k es un número natural arbitrario. Mostrar que este sistema es lineal pero no es invariante en el tiempo. Para que desplazamientos temporales en las entradas vale que la salida es una versión desplazada de la señal de salida original asociada a una entrada $x[n]$?
9. Considere el sistema $y[n] = x[kn]$ donde $k \in \mathbb{N}$. Determinar si este sistema es invariante en el tiempo.
10. Pruebe que si a un sistema invariante en el tiempo se le introduce una señal de entrada periódica con periodo T la salida es periódica con el mismo periodo. Analice un ejemplo de un sistema variante en el tiempo donde esto no sea cierto.

Tiempo de consultas

¿Preguntas?