

Capítulo 1

Electrostática en el vacío

1.1.	<u>Las cargas eléctricas y las fuerzas asociadas. Ley de Coulomb</u>	1-2
1.2.	<u>Las distribuciones continuas de carga</u>	1-10
1.3.	<u>El campo eléctrico. Líneas de campo</u>	1-18
1.4.	<u>El flujo del campo eléctrico. La ley de Gauss</u>	1-26
1.5.	<u>Un comentario final sobre el uso de la Ley de Gauss en situaciones reales</u>	1-42
1.6.	<u>El trabajo de la fuerzas eléctricas, la diferencia de potencial</u>	1-45
1.7.	<u>El problema de la referencia. La "maldición del potencial"</u>	1-51
1.8.	<u>Diferencia de potencial con varias cargas</u>	1-52
1.9.	<u>Equipotenciales</u>	1-58

1.1. Las cargas eléctricas y las fuerzas asociadas. Ley de Coulomb

En los cursos de Química previos nos hemos topado con palabras propias de nuestro temario pero cuyo significado no comprendimos a fondo. Sabemos que los átomos tienen un núcleo conformado por protones, de carga positiva, neutrones, sin carga, y alrededor del núcleo un enjambre de electrones de carga negativa. Hasta aprendimos cosas aún más extrañas como niveles de energía en los que se ubicaban los electrones (1 s, 2s,...).

Pues bien, tanto los protones como los electrones son los ejemplos elementales de cargas eléctricas. La naturaleza nos entrega exclusivamente **dos tipos de carga: positivas y negativas**. Estos son sólo nombres y no conllevan juicio alguno (algunas personas piensan que las cargas positivas son “buenas” y que las negativas son “malas”). Cada átomo tiene iguales cantidades de carga positiva y negativa por lo que lo declaramos “neutro”. Sin embargo, es posible alterar este balance. El método más antiguo reportado está basado en frotar un objeto contra otro. Al rozar unos átomos contra otros algunos “pierden” electrones, quedando cargados positivamente, mientras que otros “ganan” los electrones que fueron cedidos y quedan entonces cargados negativamente. Los detalles de este fenómeno, denominado triboelectricidad, son complejos para ser considerados ahora pero es interesante mencionar que la palabra electrón es de origen griego y significa ámbar. El ámbar es una resina vegetal que fácilmente adquiere carga por frotamiento, en particular contra pieles de animales. Las razones por las que alguien podía encontrar útil, o aunque sea interesante, el frotar una resina contra una piel escapan a mi entendimiento. Como síntesis es bueno recordar que un objeto cargado eléctricamente es aquel que ha intercambiado carga con otro (sea por frotamiento o por formas que ya mencionaremos). Esto lleva a una conclusión importante, dado que la naturaleza nos brinda átomos neutros (con iguales cantidades de cargas positivas y negativas), ese balance debe mantenerse siempre porque hemos constatado experimentalmente que la carga eléctrica no es susceptible de ser creada o destruida, sólo puede ser transportada de un sitio a otro. Este es el llamado principio de conservación de la carga y la experiencia demuestra que se cumple sin excepciones. Lo utilizaremos extensivamente porque es el primer paso para estudiar muchas situaciones (https://www.youtube.com/watch?v=6_Hl1g_lnK0, <https://www.youtube.com/watch?v=dwJ-MM7yu4E>).

Volviendo a los resultados experimentales observamos que dos objetos cargados con el mismo tipo de carga experimentan una fuerza repulsiva. En cambio, si las cargas son de diferente tipo, la fuerza es atractiva. Esto era simplemente una curiosidad para divertir a reyes y poderosos y durante muchísimos años no se produjo avance alguno.

En el siglo XVIII Charles Agustín de Coulomb llevó a cabo una serie de experimentos en los que cuantificó las características de estas fuerzas entre objetos cargados. Para hacerlo utilizó lo que llamamos una balanza de torsión y que vemos en la figura 1.

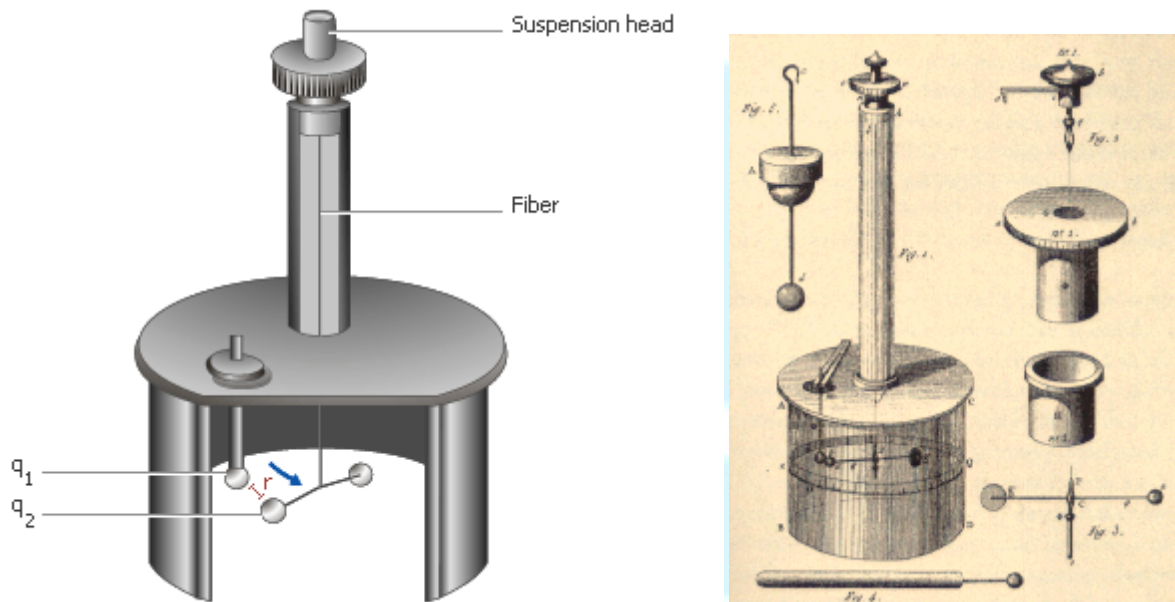


Figura 1. Experimento de Coulomb

En el extremo de un hilo (*fiber*) cuelga una barra horizontal balanceada en la que se ubica una pequeña esfera (q_2) que puede ser cargada al frotarla con otro objeto. En las vecindades se ubica otra esfera cargada (q_1) y montada sobre un soporte firme. Dado que actúan fuerzas eléctricas de atracción o repulsión el hilo tiende a retorcerse en un sentido u otro. Para devolver al sistema a la condición original se rota el extremo superior del hilo (*suspension head*) en sentido contrario y se registra el ángulo θ girado. Para pequeñas rotaciones el hilo sigue un comportamiento lineal semejante a la ley de Hooke para un resorte, por lo que resulta que el torque τ es proporcional al ángulo θ rotado a través de la llamada constante de torsión del hilo C_t ($\tau = C_t \theta$). Con el torque conocido, así como la distancia de la esfera cargada al hilo, es posible computar la fuerza eléctrica actuante sobre la esfera (¿recuerdan la relación entre fuerza, distancia y torque?).

El resumen de los experimentos se sintetiza en la así llamada ley de Coulomb, la que para esferas muy pequeñas (casi puntos) dice que el módulo de la fuerza de interacción es proporcional al producto de las cargas q_1 y q_2 de cada esfera e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia d_{12} que las separa.

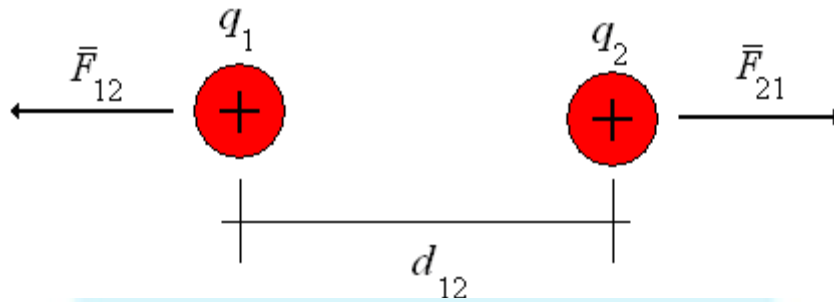


Figura 2. Interacción eléctrica entre dos cargas puntuales

$$|\vec{F}_{12}| = k \frac{q_1 q_2}{d_{12}^2} \quad (1)$$

donde k es una constante a determinar. Coulomb no sólo encontró el módulo de la fuerza, también observó que la misma actúa sobre la recta que une los objetos 1 y 2.

Esta ley es fundamental y debemos discutirla en detalle. Surgen preguntas como: ¿de dónde proviene?, ¿cómo se puede demostrar? En el fondo, ¿qué es la carga eléctrica? La respuesta a la primera es que es una ley totalmente nueva, encontrada experimentalmente, y que no puede ser reducida a un conocimiento previo. En este sentido la ley de Coulomb se parece a la ley de atracción gravitatoria de Newton ($|\vec{F}| = G \frac{m_1 m_2}{d_{12}^2}$). No sólo son

matemáticamente iguales, sino que también son fundamentales en el mismo sentido, no hemos sido capaces de reducirlas a conceptos previos y por eso las consideramos leyes básicas de la naturaleza. Las fuerzas gravitatorias son siempre atractivas pero las eléctricas pueden ser atractivas o repulsivas; sin embargo desde el punto de vista matemático las leyes son iguales. En este punto nos encontramos en una situación similar a la que vivimos cuando fuimos expuestos por primera vez al concepto de masa y de fuerza gravitatoria. Recordemos que no fue fácil asimilarlos y que lentamente, luego de estudiar muchos ejemplos, fuimos “entendiendo” el significado de estos conceptos. Obviamente la masa es más fácil (más o menos) para que vayamos conectando los conceptos de fuerza, masa y aceleración porque nos hacen pensar en empujar un changuito de supermercado vacío y luego lleno de botellas de la bebida que nos plazca. En cuanto al peso sucede algo semejante; tenemos una experiencia sensorial previa que nos ayuda un poco.

Lamentablemente no sucede lo mismo con las cargas eléctricas y las fuerzas asociadas. No tenemos una vivencia cotidiana de ellas, con la posible excepción de arrimar el brazo a un televisor encendido y sentir cómo el vello del brazo es atraído hacia la pantalla. Este déficit de

experiencia sensorial nos va a demandar un poco más de abstracción. No es simple pero haremos todo lo posible para allanar el camino.

Volviendo a la ley de Coulomb queda pendiente el tema de la constante k . Dado que el concepto de carga eléctrica es nuevo podríamos optar por definir la unidad de carga como aquella que ubicada a una unidad de distancia de otra igual genera una fuerza unitaria por lo que la constante también será unitaria. Ésta era la elección tomada en el sistema CGS pero cayó en desuso. En el sistema internacional (SI) se tomó otra decisión y la unidad de carga, denominada Coulomb (C), quedó dada por otro camino que comentaremos en otro momento. La constante k deja de ser unitaria y vale aproximadamente $9 \times 10^9 \text{ N m}^2 / \text{C}^2$. Esta constante tan grande sugiere que las fuerzas eléctricas son muy intensas y lo veremos con el siguiente ejemplo:

Supongamos que tenemos dos bolas de carbono (grafito, mina de lápiz) de diámetro 21.6mm y separadas 2 m (las bolas son chicas comparadas a la distancia).

Naturalmente **NO** hay fuerzas eléctricas entre ellas porque son objetos **NEUTROS**. Tenemos que romper el empate pasando electrones de una a otra.

Un experimento llevado a cabo por Robert Millikan en 1909 mostró que la carga de los electrones y los protones es igual en módulo y equivale a $1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$.

¿Cuántos electrones vamos a pasar? Antes una estimación. Buscando datos en internet (¿cuáles?) encontramos que cada bola es aproximadamente un mol ($N_A = 6.02 \times 10^{23}$).

Cada átomo tiene 6 electrones, la cantidad total de electrones es:

$$N_e = 6 \times 6.02 \times 10^{23} = 3.612 \times 10^{24} \text{ electrones}$$

Rompemos el empate pasando una fracción muy pequeña de electrones de una bola a la otra: 1 parte en 10^9 . Movemos sólo un electrón de cada mil millones; es como si de la población de la Tierra eligiéramos unas 7 personas solamente.

¿Cuánta carga pasamos de un cuerpo al otro?

Carga = carga electrón X Nro total electrones X fracción movida

$$q = \{1.6 \times 10^{-19} \text{ C}\} \{3.612 \times 10^{24}\} \{1 \times 10^{-9}\} = 5.78 \times 10^{-4} \text{ C}$$

¿Cuál es la fuerza de interacción?(las cargas de cada bola son iguales en módulo)

$$F_e = 9 \times 10^9 \text{ (Nm}^2/\text{C}^2) \{ [5.78 \times 10^{-4} \text{ C}]^2 / (2 \text{ m})^2 \} = 751.69 \text{ N}$$

Respuesta: La fuerza eléctrica es del orden del peso de un hombre adulto.

Repetimos, nos hemos apartado de la neutralidad perfecta sólo en una parte en mil millones y ya tenemos una fuerza que, si no fijáramos las bolas de alguna forma, las haría acelerar según:

$$a = F_e / m = 751.69 \text{ N} / 12 \times 10^{-3} \text{ kg} = 62640 \text{ m/s}^2 \text{!!!!!!}$$

¿Cuál es la fuerza de interacción gravitatoria entre las bolas?

$$F_g = G m_1 m_2 / d^2 = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2 [12 \times 10^{-3} \text{ kg}]^2 / (2 \text{ m})^2 = 2.4 \times 10^{-15} \text{ N}$$

Las fuerzas eléctricas son muchísimo más intensas que las gravitatorias, aún con un desbalance muy pequeño respecto de la neutralidad.

Podemos preguntarnos ahora: ¿Para qué queremos fuerzas eléctricas? Pues bien, las fuerzas que mantienen el enlace entre átomos tienen un carácter eléctrico (aunque no tan simple como muestra la ley de Coulomb), así que al menos nos interesa para mantenernos en una única pieza. Más allá de esta reflexión egoísta les contamos que la fotocopiadora o la impresora láser funcionan directamente en base a fuerzas eléctricas, así que si queremos poner una fábrica de ellas nos preocuparía el tema.

La interacción entre dos cargas ya quedó descripta. Pero la buena noticia (o mala, según sea vista) es que puede ser extendida al caso de varias cargas recurriendo al llamado principio de superposición que nos asegura que, en el caso de tener varias cargas presentes, la fuerza total actuante sobre una carga puede ser calculada como la suma vectorial de las fuerzas. Dado que la oración anterior es un poco compleja vamos a plantearla con un ejemplo simple que muestra la figura 3.

Para no complicar el ejemplo hemos dibujado tres cargas, q_1 , q_2 y q_3 , ubicadas en las posiciones $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ y $\vec{r}_3$, medidas con respecto a un origen de coordenadas **O**. Todas las cargas son consideradas positivas para facilitar el primer análisis. Supongamos que el objetivo es computar la fuerza eléctrica total actuante sobre la carga 3. En base al principio de superposición estudiamos primero la interacción entre la carga 1 y la 3 (sin tomar en cuenta la

2), luego lo hacemos para el par 2 y 3 (sin considerar la 1) y finalmente sumamos los resultados parciales para tener la fuerza total deseada.

La tarea no parece complicada puesto que evaluar con la ley de Coulomb el módulo de cada fuerza es simple, así que resta hacer un dibujo prolijo para hacer la suma vectorial. No será tarea difícil pero es muy tediosa por lo que vamos a hacer algunos arreglos que nos permitirán simplificar el cálculo e inclusive generar un algoritmo que podamos programar en una computadora.

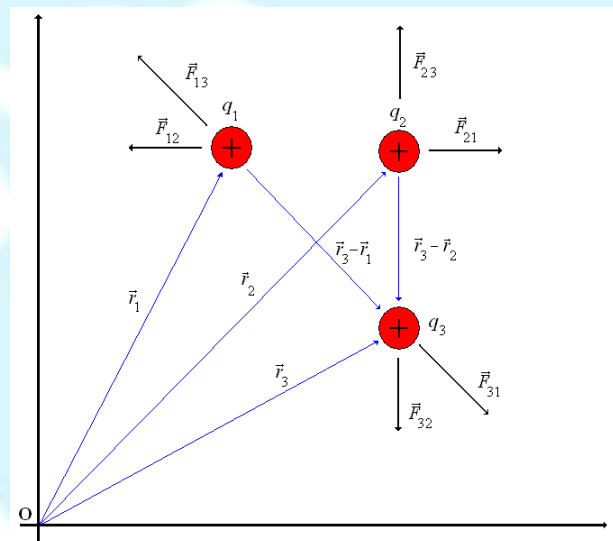


Figura 3. Sistema de tres cargas eléctricas puntuales

Concentrémonos en la interacción entre las cargas 1 y 3. La fuerza, repulsiva por ser cargas del mismo signo, apunta en la dirección de la recta que une dichos puntos. Específicamente el vector $\vec{r}_3 - \vec{r}_1$ apunta en el sentido en el que lo hace la fuerza actuante sobre la carga 3 por la interacción con la 1. Tomamos entonces el módulo de la fuerza:

$$|\vec{F}_{31}| = k \frac{q_3 q_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^2} \quad (|\vec{r}_3 - \vec{r}_1| \text{ es la distancia entre ambos puntos})$$

y si le agregamos un vector unitario en la dirección de $\vec{r}_3 - \vec{r}_1$ tendremos la fuerza dada con módulo y sentido. Para generar dicho vector unitario dividimos a $\vec{r}_3 - \vec{r}_1$ por su módulo y obtenemos:

$$\vec{F}_{31} = k \frac{q_3 q_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^2} \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|} = k q_3 q_1 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3}$$

Esta es una expresión vectorial muy útil porque contiene toda la información necesaria; ya no tenemos que computar el módulo por un lado y dibujar el sentido después. La aplicación directa de esta expresión, aunque parezca más complicada, nos reduce la cantidad de trabajo.

Si pasamos ahora a la interacción entre la carga 2 y la 3 es sólo cuestión de cambiar los subíndices:

$$\vec{F}_{32} = k \frac{q_3 q_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^2} \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|} = k q_3 q_1 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^3}$$

Sólo nos queda sumar para tener la fuerza total sobre la carga 3: $\vec{F}_3 = \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32}$

Nos podemos preguntar ahora sobre qué habría pasado si alguna de las cargas hubiera sido negativa. Pues bien ... basta con poner cada carga con su respectivo signo (verifíqueno!!!).

Podemos entonces generalizar la situación y pensar que tenemos un conjunto de cargas puntuales q_i ($i=1...N$) y queremos computar la fuerza eléctrica actuante sobre una carga q_j cualquiera. Generalizando las expresiones anteriores obtenemos:

$$\vec{F}_j = \sum_{i=1, i \neq j}^N k q_j q_i \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3} \quad (2)$$

Veamos cada término por separado. Primero la sumatoria nos indica que tenemos que considerar los pares posibles a excepción de la carga j -ésima consigo misma, dado que la experiencia muestra que no existe interacción de una carga puntual consigo misma. Y menos mal que es así porque la distancia sería nula y estaríamos en serios problemas. Luego, cada término es una simple repetición de lo ya visto, por lo que no presenta mayores complicaciones (más allá del tedio). Es importante destacar un aspecto de nomenclatura que repetiremos extensivamente; el primer subíndice indica la carga (o lugar) sobre la que estudiamos el efecto de las demás, reflejado en el segundo subíndice. Por supuesto que es sólo una convención, pero es la utilizada internacionalmente y pretendemos seguir la misma regla.

Veamos un ejemplo con las siguientes cargas (el prefijo n se lee “nano” y equivale a 10^{-9}) y posiciones (las cargas están en el plano $z=0$ para simplificar el dibujo):

$$\begin{aligned} q_1 &= 10 \text{ nC}, & \vec{r}_1 &= (1\hat{i} + 2\hat{j}) \\ q_2 &= -5 \text{ nC}, & \vec{r}_2 &= (0\hat{i} + 1\hat{j}) \\ q_3 &= -2 \text{ nC}, & \vec{r}_3 &= (-2\hat{i} + 2\hat{j}) \\ q_4 &= 20 \text{ nC}, & \vec{r}_4 &= (-1\hat{i} - 2\hat{j}) \end{aligned}$$

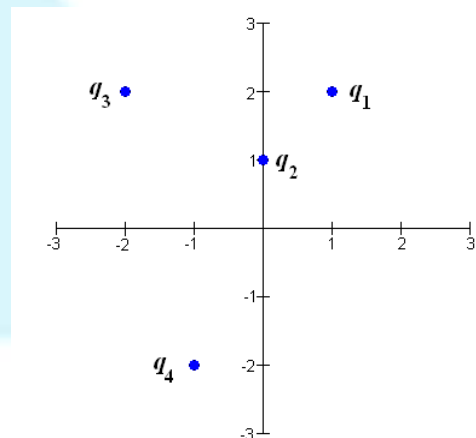


Figura 4. Un ejemplo con cuatro cargas puntuales

Queremos calcular la fuerza total actuante sobre la carga 2. Reemplazamos los valores para obtener:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{21} &= 9 \times 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} (-5 \times 10^{-9} \text{ C}) (10 \times 10^{-9} \text{ C}) \frac{[(0\hat{i} + 1\hat{j}) - (1\hat{i} + 2\hat{j})]}{|(0\hat{i} + 1\hat{j}) - (1\hat{i} + 2\hat{j})|^3} = -4.5 \times 10^{-5} \frac{(1\hat{i} - 1\hat{j})}{2.83} \text{ N} \\ \vec{F}_{23} &= 9 \times 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} (-5 \times 10^{-9} \text{ C}) (-2 \times 10^{-9} \text{ C}) \frac{[(0\hat{i} + 1\hat{j}) - (-2\hat{i} + 2\hat{j})]}{|(0\hat{i} + 1\hat{j}) - (-2\hat{i} + 2\hat{j})|^3} = 9 \times 10^{-6} \frac{(2\hat{i} - 1\hat{j})}{11.18} \text{ N} \\ \vec{F}_{24} &= 9 \times 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} (-5 \times 10^{-9} \text{ C}) (20 \times 10^{-9} \text{ C}) \frac{[(0\hat{i} + 1\hat{j}) - (-1\hat{i} - 2\hat{j})]}{|(0\hat{i} + 1\hat{j}) - (-1\hat{i} - 2\hat{j})|^3} = -9 \times 10^{-5} \frac{(1\hat{i} + 3\hat{j})}{31.62} \text{ N} \\ \vec{F}_2 &= \left(\left(\frac{4.5 \times 10^{-5}}{2.83} + \frac{18 \times 10^{-6}}{11.18} + \frac{-9 \times 10^{-5}}{31.62} \right) \hat{i} + \left(\frac{4.5 \times 10^{-5}}{2.83} + \frac{-9 \times 10^{-6}}{11.18} + \frac{-27 \times 10^{-5}}{31.62} \right) \hat{j} \right) \\ &= (14.7\hat{i} + 6.6\hat{j}) \times 10^{-6} \text{ N}\end{aligned}$$

Aunque quede reiterativo enfatizamos una vez más la regla. Primero ubicamos la carga sobre la que queremos calcular el efecto (q_j , r_j) y luego recorremos todas las demás (q_i , r_i , $i \neq j$). Antes de continuar vamos a regodearnos con una cuota de maldad. No contentos con haber introducido súbitamente muchas ideas nuevas: existe la carga eléctrica, hay fuerzas eléctricas, no se pueden reducir a otros conceptos,... vamos a hacer un cambio de nomenclatura. Por razones que serán comprensibles más adelante, la constante de proporcionalidad k de la ley de Coulomb la presentamos como: $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ la constante ϵ_0 se llama permitividad del vacío y en el sistema internacional vale (obviamente) $8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$. Pedimos paciencia y ya veremos que este cambio de nomenclatura es útil porque el factor 4π se cancela en otras expresiones y el resultado es más “elegante”.

Un comentario de cierre: La experiencia de Coulomb fue realizada con objetos reales, hechos de materiales reales. Sin embargo no hemos mencionado nada de las propiedades de dichos materiales. Aunque no sepamos mucho de la cuestión eléctrica, las palabras “aislador” o “conductor” no nos son totalmente extrañas. En este capítulo, y en el que sigue, suponemos que tenemos cargas “puras” no pertenecientes a material alguno. Esta limitación será corregida más adelante, pero conviene señalar que deberíamos hablar de distribuciones de carga antes que de objetos cargados. Si bien trataremos de respetar esta convención es inevitable que se nos escape algo como “una esfera cargada” cuando deberíamos haber dicho “una distribución esférica de carga”

1.2. Las distribuciones continuas de carga

El método anterior, aunque tedioso, permite calcular la fuerza eléctrica actuante sobre una carga que interactúa con otras. En un párrafo previo mencionamos que la carga de los electrones y protones es, en módulo, el mismo valor. Dicha cantidad recibe el nombre de carga elemental puesto que ésta es la cantidad mínima e indivisible que se encuentra en la naturaleza (tomemos esto sin demostración)¹. Por lo tanto todo objeto cargado ha de tener un múltiplo entero de estas unidades elementales. Si analizamos el ejemplo anterior, donde propusimos cargas del orden de 10^{-9} C, vemos que el número de cargas elementales involucradas es muy grande ($\approx 10^{10}$). Es decir que si ponemos una más o una menos el cambio porcentual en el resultado es despreciable. Eso nos lleva a concebir una situación aproximada, pero muy útil, y es la de considerar a la carga como una magnitud continua con las propiedades de una variable real. Por lo dicho anteriormente esto no es estrictamente posible desde el punto de vista matemático puesto que la carga no es una variable continua sino una discreta, pero a los fines prácticos es una suposición muy acertada.

¿Para qué nos puede servir esto? Pues bien, en situaciones del mundo real el número de cargas involucrado en un problema real es muy grande y proceder con una suma discreta como la presentada en el ejemplo es virtualmente imposible. Necesitamos otra aproximación y ésta viene de la mano de nuestro pedido anterior de considerar a la carga como una variable real continua².

Para comprender esto pensemos en una fotocopia común (todos hemos esperado pacientemente para obtener una, ¿no?). ¿Cómo anda la fotocopidora? Observamos que luego de poner el original sobre el vidrio y presionar el botón correspondiente se desliza por debajo del original una luz blanca que explora la imagen a copiar, este es el *scanner*. La imagen reflejada contiene zonas claras (papel) y oscura (tinta). Esta imagen es enfocada y transferida sobre un cilindro no en forma de un dibujo, sino como una distribución de cargas eléctricas. Donde llegó mucha luz hay pocas cargas y sobre las zonas correspondientes a las partes oscuras se deposita una cantidad apreciable de cargas. Así, luego de explorar la imagen, el cilindro tiene “pintada” una copia de la imagen no con tinta sino con cargas. El paso siguiente consiste en distribuir sobre el cilindro partículas de *toner* que han sido cargadas con polaridad opuesta. Éstas se adhieren por atracción eléctrica y ahora el cilindro está “pintado” de negro donde corresponde. Luego la hoja de papel es presionada sobre el cilindro mientras

¹La carga de los quarks (objetos de escala atómica) son fracciones de la del electrón pero no se pudieron aislar.

²Algo semejante sucedió en Física I con la masa

rota de forma tal de transferir el *toner* al papel. Sólo resta el “planchado” que calienta el papel y funde al *toner* dentro del mismo para que no se borre. Hemos presentado, si bien de forma muy simple, el primer uso de las fuerzas eléctricas (No estaría mal ser el dueño de una de las compañías fabricantes de fotocopadoras, ¿no?).

Ahora que expusimos el principio de funcionamiento supongamos que queremos cuantificar el proceso para poder tener criterios de diseño. Rápidamente vemos que el número de partículas de *toner* es demasiado grande como para evaluar el resultado a partir de la suma discreta que expusimos anteriormente (¿vieron alguna vez que el *toner* parece un polvo muy fino?).

Vamos a cambiar nuestro método para simplificar el problema, pero como una fotocopia es un problema bidimensional es demasiado difícil por ahora y vamos a considerar algo más simple: un objeto unidimensional cargado, por ejemplo un alambre, y una única carga puntual q_0 sobre la que computamos la fuerza. (ver figura 5).

Concentremos ahora nuestra atención en una pequeña porción del alambre (trazo rojo) de largo Δl y que tiene una carga Δq . Si hacemos tender Δl a cero la razón $\Delta q / \Delta l$ tiende a un límite llamado densidad lineal de carga λ ($\lambda = dq/dl$). Dicho valor es la cantidad de carga por unidad de longitud y las unidades son C/m. Noten que este paso ha sido posible por considerar a la carga como una variable continua. Ahora, con nuestra mirada fija en el segmento de largo dl y carga dq computamos el *diferencial* de fuerza actuante entre dicha parte del alambre y q_0 . Nos valemos de la ley de Coulomb pero tenemos que ser cuidadosos a la hora de asignar las variables. La posición donde se encuentra q_0 la denotamos por $\vec{r}$ (como en nuestro ejemplo previo) y la correspondiente a la de la carga con la que interactúa la nombramos $\vec{r}'$.

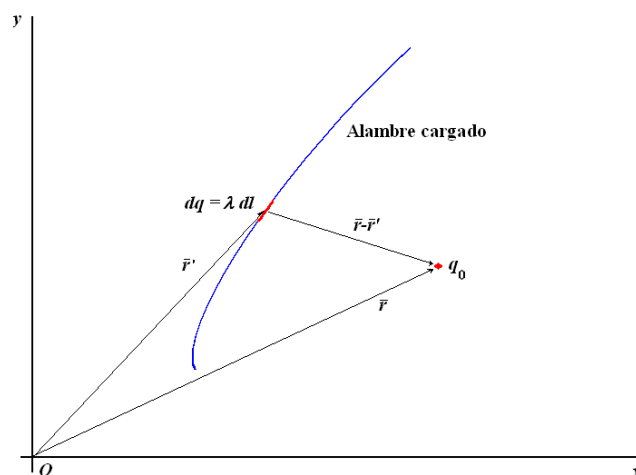


Figura 5. Interacción eléctrica entre un alambre cargado y una carga puntual.

Así obtenemos:

$$d\vec{F}_{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_0 dq \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (3)$$

Ahora resta imaginar que recorremos todo el alambre y sumamos las contribuciones elementales, es decir que **integramos el diferencial de fuerza a lo largo del cable**.

$$\vec{F}_{q_0} = \int d\vec{F}_{q_0} = \int_{\text{Cable}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_0 dq \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \int_{\text{Cable}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_0 \lambda dl \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (4)$$

En la última expresión reemplazamos $dq = \lambda dl$ siguiendo la definición de la densidad lineal de carga.

Algunas aclaraciones:

El alambre toma la forma de una curva en el espacio C , dicha curva puede ser parametrizada con un único parámetro t ; tomando coordenadas cartesianas:

$$C(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k} = \vec{r}'$$

El vector tangente a la curva vale:

$$d\vec{l} = \left[\frac{dx(t)}{dt} \hat{i} + \frac{dy(t)}{dt} \hat{j} + \frac{dz(t)}{dt} \hat{k} \right] dt$$

Y su módulo está dado por:

$$dl = \left[\left(\frac{dx(t)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz(t)}{dt} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dt$$

Notemos que el parámetro t se encuentra en la posición del tramo rojo de la figura 5 y en el módulo del vector tangente.

Seguramente todo este desarrollo ha sido muy difícil así que lo mejor es mostrar con un ejemplo mostrado en la figura 6. Una distribución rectilínea de largo L está cargada con una densidad lineal constante λ_0 . La carga q_0 se encuentra a una distancia d del eje de la distribución y centrada en el largo de la misma.

Somos libres de elegir el sistema de referencia que más nos convenga. Ubicamos a la distribución sobre el eje x y el origen de coordenadas sobre el punto medio de la misma de forma tal que el punto en el que se encuentra q_0 quede sobre el eje y .

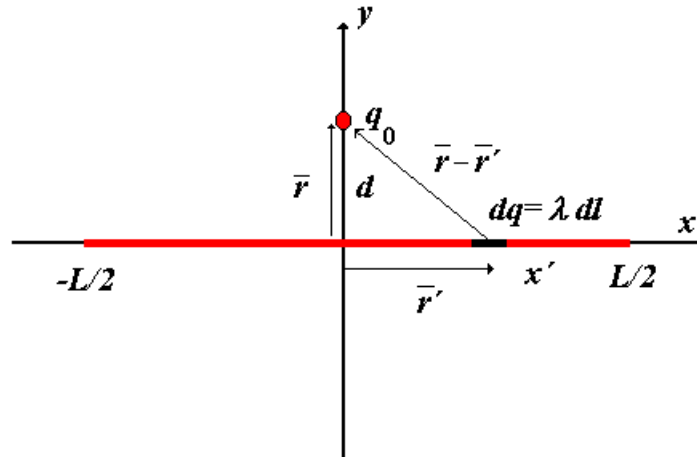


Figura 6. Una distribución de carga rectilínea

Con esta elección tenemos: (los vectores $\vec{r}$ y $\vec{r}'$ aparecen ligeramente corridos para verlos mejor)

$$\begin{aligned}\vec{r} &= (0 \hat{i} + d \hat{j} + 0 \hat{k}), \quad \vec{r}' = (x' \hat{i} + 0 \hat{j} + 0 \hat{k}), \quad dl = dx' \\ \vec{r} - \vec{r}' &= (-x' \hat{i} + d \hat{j} + 0 \hat{k}), \quad |\vec{r} - \vec{r}'|^3 = (x'^2 + d^2)^{3/2}\end{aligned}\quad (5)$$

$$\vec{F}_{q_0}(\vec{r}) = \frac{q_0}{4 \pi \epsilon_0} \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \frac{(\vec{r} - \vec{r}') dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{q_0}{4 \pi \epsilon_0} \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \frac{(-x' \hat{i} + d \hat{j} + 0 \hat{k}) \lambda_0 dx'}{(x'^2 + d^2)^{3/2}}$$

Nótese que la integral anterior es **vectorial**, el numerador contiene un vector expresado en sus componentes cartesianas y entonces tenemos **tres** integrales a resolver. Por más incómodo que parezca, la fuerza es una magnitud vectorial y por lo tanto tiene componentes que debemos calcular. En la expresión anterior la tercera componente es nula (¿se ve el motivo?) así que el problema queda reducido a evaluar dos términos:

$$\begin{aligned}F_x(\vec{r}) &= \frac{q_0}{4 \pi \epsilon_0} \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \frac{(-x') \lambda dx'}{(x'^2 + d^2)^{3/2}} = \frac{q_0}{4 \pi \epsilon_0} \frac{\lambda}{\sqrt{(x^2 + d^2)}} \Big|_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} = 0 \\ F_y(\vec{r}) &= \frac{q_0}{4 \pi \epsilon_0} \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \frac{(d) \lambda dx'}{(x'^2 + d^2)^{3/2}} = \frac{q_0 \lambda}{4 \pi \epsilon_0} \frac{x}{d(x^2 + d^2)^{1/2}} \Big|_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} = \frac{q_0}{4 \pi \epsilon_0} \frac{\lambda L}{d \sqrt{(L^2/4 + d^2)}} \\ F_z(\vec{r}) &= 0\end{aligned}\quad (6)$$

Puede parecer complicado pero con un poco de práctica se torna simple. La secuencia es siempre la misma:

1. Ubicar el punto ($\vec{r}$) donde se encuentra la carga q_0 sobre la que queremos calcular la fuerza.

2. Encontrar un punto genérico $(\vec{r}')$ de la región cargada en función del parámetro que describe a la curva.
3. Expresar el elemento de línea dl en función del parámetro.
4. Calcular $(\vec{r} - \vec{r}')$, reemplazar e integrar, en términos del parámetro.

Este ejemplo se concentró en un sistema cargado unidimensional (1-D). Nada impide pensar en objetos cargados bidimensionales (2-D) o tridimensionales (3-D). Sólo necesitamos extender el concepto de una distribución continua de cargas para estas situaciones.

Definimos entonces la densidad superficial de carga σ como la cantidad de carga por unidad de superficie: $\sigma = dq/dS$. Las unidades de esta magnitud son C/m^2 . Extendiendo, definimos la densidad volumétrica de carga ρ como la cantidad de carga por unidad de volumen: $\rho = dq/dV$, con unidades de C/m^3 .

Habiendo definido las tres densidades de carga: lineal, superficial y volumétrica, podemos generalizar y dar las expresiones de la fuerza eléctrica actuante sobre una carga q_0 debido a las diferentes situaciones:

$$\vec{F}_{q_0}(\vec{r}) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{\lambda(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}') dl}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad \text{distribución lineal} \quad (7)$$

$$\vec{F}_{q_0}(\vec{r}) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}') dS}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad \text{distribución superficial} \quad (8)$$

$$\vec{F}_{q_0}(\vec{r}) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}') dV}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad \text{distribución volumétrica} \quad (9)$$

En las ecuaciones (7)-(9) enfatizamos que las respectivas densidades de carga, lineal, superficial, o volumétrica, son funciones del punto de la fuente $\vec{r}'$ sobre el que nos encontramos. Si bien muchos de los ejemplos presuponen que dichas densidades son valores constantes, también hay muchas situaciones en las que no lo son y por lo tanto hay que expresarlas como función de las coordenadas del punto genérico del dominio de la integración.

Practiquemos un ejemplo 2-D y otro 3-D. Para el primero imaginamos una letra **O** que aparecerá en una fotocopia. La letra la suponemos con forma de corona circular de radio interior R_i y exterior R_e que yace en el plano x - y con el centro en el origen de coordenadas (podemos poner el origen de coordenadas donde nos plazca). Asimismo, consideraremos que la “oscuridad” de la letra es uniforme, lo que corresponde a decir que la densidad superficial de carga σ_0 es constante. Queda por decidir dónde vamos a colocar nuestra carga q_0 sobre la que calcularemos la fuerza. Como somos un poco vagos elegimos un lugar obvio, fácil y nos

decidimos por un punto sobre el eje z porque intuimos que el resultado será más simple. Asignamos entonces algunas variables:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= (0, 0, z) \\ \vec{r}' &= (x', y', 0) \\ dq &= \sigma_0 dS\end{aligned}\tag{10}$$

En el segundo renglón tenemos un problema; x' e y' deben pertenecer a la corona, pero ésta es redonda y estamos usando coordenadas cartesianas. Es lógico pasar a un sistema polar donde todo es más simple:

$$\begin{aligned}x' &= r' \cos(\varphi'); & y' &= r' \sin(\varphi') \\ R_i &\leq r' \leq R_e; & 0 &\leq \varphi' \leq 2\pi\end{aligned}\tag{11}$$

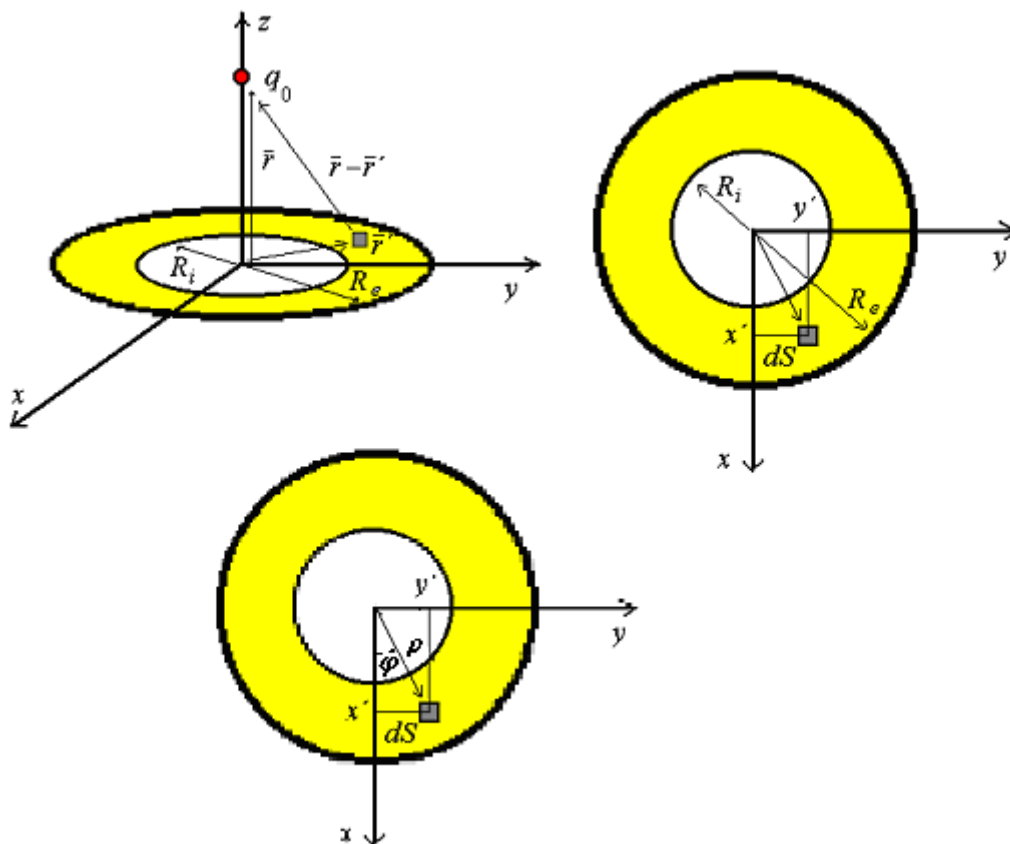


Figura 7. Distribución de carga con forma de corona circular

De la misma manera debemos cambiar el elemento de área:

$$dS = r' d\varphi' dr'\tag{12}$$

Sigamos con el cálculo:

$$\begin{aligned}
 (\vec{r} - \vec{r}') &= (-r' \cos(\varphi')\hat{i} - r' \sin(\varphi')\hat{j} + z\hat{k}) \\
 |r - r'|^3 &= (r'^2 \cos^2(\varphi') + r'^2 \sin^2(\varphi') + z^2)^{3/2} = (r'^2 + z^2)^{3/2} \\
 \vec{F}_{q_0} &= \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \int_0^{2\pi} \sigma_0 \left(\frac{-r' \cos(\varphi')\hat{i} - r' \sin(\varphi')\hat{j} + z\hat{k}}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} \right) r' dr' d\varphi'
 \end{aligned} \tag{13}$$

Nuevamente vemos que hay **tres** integrales a resolver. Las dos primeras son fáciles porque las funciones seno y coseno integradas en un período devuelven un valor nulo. Este agradable resultado puede ser corroborado analizando la figura 5. Para cada elemento de área en las coordenadas (r', φ') existe uno igual en $(r', \varphi' + \pi)$, por lo que las componentes en los ejes x e y se vuelven nulas y sólo nos queda la componente en z .

$$F_z(\vec{r}) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_i}^{R_e} \int_0^{2\pi} \frac{\sigma_0 z}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} r' dr' d\varphi' = \frac{q_0 \sigma_0}{2\epsilon_0} z \left[\frac{1}{\sqrt{R_i^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{R_e^2 + z^2}} \right] \tag{14}$$

Esta expresión nos brinda la fuerza que actuaría sobre la carga q_0 de la figura 7. Por supuesto que elegimos un lugar fácil para ubicarla, y así conseguimos que dos de las tres componentes de la fuerza fueran nulas, pero en nada altera el desarrollo. En caso de haber imaginado que q_0 estaba en otro lado el procedimiento habría sido exactamente el mismo, sólo que en ese caso las tres componentes de la fuerza habrían resultado diferentes de cero (y encontrar la primitiva es mucho más difícil).

Pasemos al último ejemplo y consideremos una distribución esférica de radio a uniformemente cargada con densidad volumétrica de carga ρ_0 constante

AVISO: NO CONFUNDIR ESTA DENSIDAD DE CARGA CON EL RADIO VECTOR DE LOS SISTEMAS DE COORDENADAS CILINDRICOS O ESFERICOS; ES UN LAMENTABLE PROBLEMA EL USAR LA MISMA LETRA PARA DESIGNAR DOS VARIABLES DISTINTAS. APARECE REPETIDO VARIAS VECES PERO LAMENTABLEMENTE NO TIENE SOLUCION PORQUE EL NÚMERO DE LETRAS ES INFERIOR AL DE VARIABLES.

Esta situación equivaldría aproximadamente a la de una partícula de *toner* en una fotocopidora. Como ya dijimos, la elección del origen de coordenadas es a nuestro gusto y lo ubicamos en el centro de la esfera. Dada la simetría del problema, la posición de q_0 es irrelevante, así que la consideramos puesta sobre el eje y y fuera de la esfera cargada.

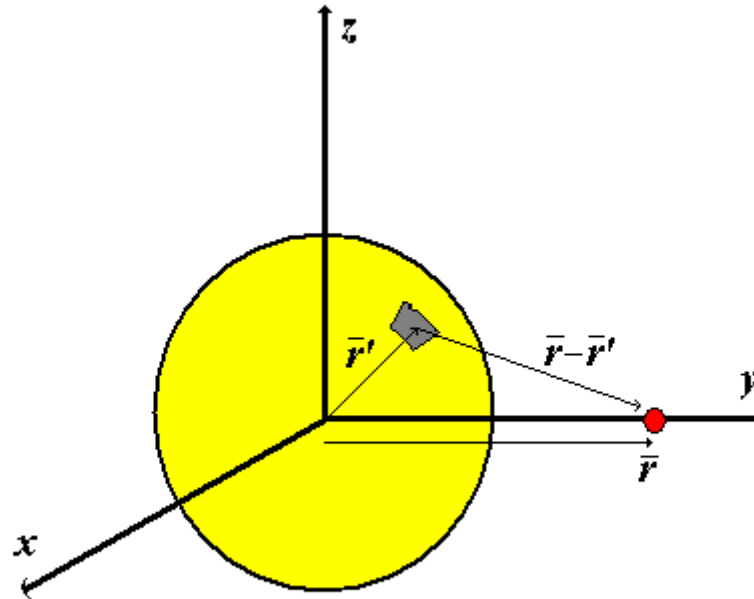


Figura 8. Distribución esférica de cargas

Tenemos las siguientes posiciones:

$$\begin{aligned}
 \vec{r} &= (0 \hat{i} + y \hat{j} + 0 \hat{k}) \\
 \vec{r}' &= (x' \hat{i} + y' \hat{j} + z' \hat{k}) \\
 x' &= r' \cos(\theta') \cos(\varphi') \\
 y' &= r' \cos(\theta') \sin(\varphi') \\
 z' &= r' \sin(\theta') \\
 \vec{r} - \vec{r}' &= ((-r' \cos(\theta') \cos(\varphi')) \hat{i} + (y - r' \cos(\theta') \sin(\varphi')) \hat{j} + r' \sin(\theta') \hat{k}) \\
 |\vec{r} - \vec{r}'|^3 &= (r'^2 + y^2 - 2 y r' \cos(\theta') \sin(\varphi'))^{3/2} \\
 0 \leq r' &\leq a; 0 \leq \varphi' \leq 2\pi; 0 \leq \theta' \leq \pi
 \end{aligned} \tag{15}$$

Nota: Medimos el ángulo φ' en el plano xy y respecto del eje x. El ángulo θ' está medido desde el eje z.

En las expresiones anteriores reconocimos que si la fuente es esférica conviene utilizar una descripción en coordenadas esféricas (¡¡¡Qué descubrimiento!!!)

Terminemos entonces nuestra tarea, la fuerza actuante sobre q_0 es:

$$\vec{F}_{q_0}(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} r'^2 \sin(\theta') dr' d\theta' d\varphi' = \left(0, \frac{a^3 \rho_0}{3\epsilon_0 y^2}, 0 \right) \tag{16}$$

La expresión anterior nos dice (si la integración no falló) que la fuerza actúa en la dirección del eje y, lo que resulta razonable porque si volvemos a la figura 6 notamos que para cada elemento de la fuente en x', y', z' existe uno idéntico en $x', y', -z'$, por lo que la

componente según el eje z es nula. Con la misma idea, para cada elemento en x', y', z' tenemos otro en $-x', y', z'$ lo que lleva a que la componente según el eje x también desaparezca del resultado final.

Estos han sido tres ejemplos relativamente simples. Las formas no eran complicadas y las densidades de cargas fueron supuestas constantes. Aun así hubo bastante trabajo y muy tedioso. Trataremos de mantenernos dentro de los ejemplos fáciles y más adelante aprenderemos una propiedad muy atractiva que, en determinados casos simples, nos permite calcular las fuerzas sin recurrir al largo, aburrido y peligroso trabajo de integración.

Nota complementaria: En esta última parte hemos hecho uso del concepto de carga distribuida. En temas que veremos próximamente nos interesa calcular la cantidad total de carga presente en un objeto. Si invertimos las definiciones en las que presentamos las densidades de carga obtenemos:

$$Q = \int_C \lambda \, dl \text{ distribución lineal}$$

$$Q = \int_S \sigma \, dS \text{ distribución superficial}$$

$$Q = \int_V \rho \, dV \text{ distribución volumétrica}$$

Para el caso particular de tener densidades **uniformes** (i.e. no dependen de la posición) el proceso de integración se limita a una simple multiplicación:

$$Q = \lambda_0 L$$

$$Q = \sigma_0 S$$

$$Q = \rho_0 V$$

Un error muy común es utilizar estas expresiones cuando la densidad de carga es variable. Antes de seguir el camino fácil hay que verificar que es válido ¡Hacerlo!

1.3. El campo eléctrico. Líneas de campo

En las expresiones anteriores, tanto sea cuando tenemos un conjunto discreto de cargas, como cuando tratamos con una distribución continua, está implícita la idea de que aparece una

fuerza eléctrica de interacción entre un objeto cargado A y otro B. Si arbitrariamente consideramos que el A es la carga q_0 y el B todo el resto, notamos que la fuerza de interacción tiene una dependencia lineal simple con q_0 . Si la duplicamos el resultado también lo hace. Por simples razones de economía podemos pensar que resulta conveniente hacer el cálculo de la fuerza para un valor de q_0 unitario para luego hacer regla de tres para obtener la solución para otros valores de q_0 .

Pero podemos ir un poco más allá de esta visión “práctica” y pensar que si estamos en un punto de observación $\vec{r}$ en el que tenemos la carga q_0 e imaginariamente la removemos, entonces en esa posición hay “algo” aunque ya no esté presente q_0 para tener una fuerza mensurable.

Ese “algo” es denominado **campo eléctrico** y tiene similitudes con el campo gravitatorio aunque su raíz física es totalmente diferente (de hecho las fuerzas gravitatorias son de naturaleza diferente a las eléctricas). Si tomamos una piedra con la mano, sentimos en la palma una fuerza debida a la atracción gravitatoria entre la piedra y nuestro planeta. Si nos movemos a otro sitio seguimos sintiendo la fuerza en la mano y estamos convencidos de que en cualquier lugar en que nos ubicáramos igual sentiríamos esa fuerza. Abstrayendo, concebimos entonces la idea de un campo gravitatorio generado por la Tierra y que es un vector que en cualquier punto nos da la dirección en que actuaría la fuerza sobre la piedra. Esta idea la extendemos y concebimos que un objeto cargado genera en su entorno un campo eléctrico, una magnitud vectorial que apunta en la dirección en la que actuaría la fuerza eléctrica si pusiéramos otra carga q_0 en las vecindades del primer objeto cargado.

Esta carga q_0 , que permite “observar” al campo recibe el nombre de “carga de prueba” y arbitrariamente es considerada siempre como positiva.

Definimos entonces el vector campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r})$ como la fuerza eléctrica actuante por unidad de carga:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q_0} \quad (17)$$

El campo eléctrico es el primer ejemplo de varias cantidades (escalares o vectoriales) que, definidas vagamente, son de la forma: “*resultado obtenido por unidad de algo*”. En el sistema internacional las unidades del campo eléctrico son N/C.

No es fácil concebir un campo vectorial y es bueno recurrir a algunas analogías para comprenderlo un poco mejor.

Un primer ejemplo es el campo de velocidades del agua de un río. Pensemos que lanzamos a la corriente de agua un puñado de corchos todos pintados de colores distintos y seguimos su

camino. Notamos que algunos avanzan rápidamente (en el centro del río), algunos lentamente (contra la costa) y algunos pueden quedar atrapados en remolinos y rotar.

Ahora filmamos el movimiento de los corchos y cuadro tras cuadro nos dedicamos a seguir el movimiento de cada uno para luego hacer un gráfico. Cada corcho, en cada lugar, tiene asignado una velocidad. Graficados todos juntos nos brindan el campo de velocidad del río. Marcando la trayectoria de cada corcho obtenemos las “líneas” del campo de velocidades. Como sabemos que la velocidad es siempre tangente a la trayectoria concluimos entonces que las líneas del campo de velocidades son tangentes a las líneas de flujo.

Suficiente con el agua; volvamos a nuestro problema eléctrico y en particular a la figura 7. En ella supusimos que la carga de prueba se encontraba sobre el eje y , pero nada nos impide considerar que su posición es cualquier lugar en el espacio. La vamos “paseando” y nos imaginamos para dónde actuaría la fuerza resultante (lo mismo que con la piedra de hace un rato). La respuesta es simple: tendríamos siempre una fuerza de repulsión en la dirección de la recta que une el centro de la esfera con q_0 . Entonces, si para cada punto del espacio dibujamos un vector que nace en la esfera cargada y termina en el lugar donde se encuentra q_0 obtendremos un diagrama como el de la figura 9.

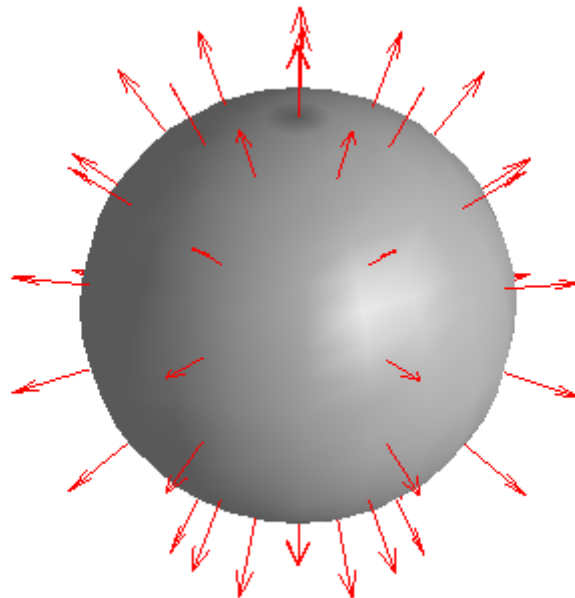


Figura 9. Líneas de campo de una esfera uniformemente cargada

La distribución espacial de las líneas de campo semeja un erizo de mar con sus púas. Para escribir formalmente este campo combinamos la (16) con la (17) y lo ilustrado por la figura 7.

El módulo del campo vale: $|\vec{E}| = \frac{a^3 \rho}{3\epsilon_0} \frac{1}{y^2} = \frac{Q_{esfera}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{y^2}$ Según ya mencionamos, el obtener

una dependencia como $1/y^2$ reflejaba el hecho de haber ubicado la carga de prueba sobre el eje y. Pero, dada la simetría del problema, lo único relevante es la distancia desde la carga de prueba al centro de la esfera. Por lo tanto, podemos escribir que el módulo del campo vale:

$|\vec{E}| = \frac{Q_{esfera}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$ donde r es la distancia desde el centro de la esfera al punto donde se encuentra

la carga de prueba. A partir del módulo encontramos el vector simplemente ayudados por la figura 8. La dirección es radial saliente, por lo tanto:

$$\vec{E} = \frac{Q_{esfera}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{r} \quad (18)$$

La expresión anterior es correcta pero contiene muchas trampas ocultas que nos pueden llevar a cometer errores terribles (**el número de exámenes reprobados por este error es impactante**).

Primero nos enfrentamos con el versor $\hat{r}$ que nace en el origen de coordenadas y apunta hacia el punto genérico donde se encuentra la carga de prueba. ¿Qué sucede si tenemos la situación de la figura 10?

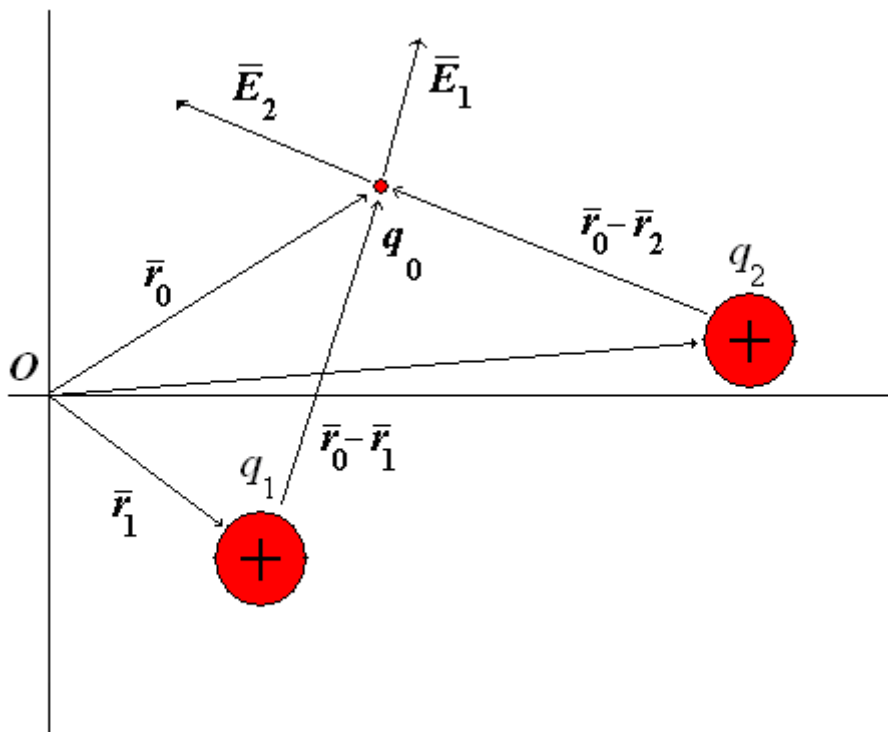


Figura 10. Campo debido a dos cargas puntuales.

Si solo existiera q_1 la pondríamos en el origen de coordenadas y no tendríamos problema alguno. Lo mismo pasaría si solamente existiera q_2 . Lamentablemente no es así; podemos mover el origen de coordenadas para que coincida con una de las cargas (si nos parece conveniente) pero entonces la otra no está en el origen. Lo que **jamás** debemos hacer (error muy común) es ir paseando el origen de coordenadas para que siempre la carga que estamos analizando quede en el lugar fácil y entonces escribimos un campo en la dirección del versor radial correspondiente. Esto está **MAL** porque **NO** se puede correr el punto **O** una vez que lo elegimos.

En forma vectorial la respuesta correcta es:

$$\vec{E}(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_0 - \vec{r}_1) + \frac{q_2}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_0 - \vec{r}_2) \right]$$

Es muy importante notar que cada término apunta en una dirección distinta. Si hubiéramos persistido en escribir todas componentes en $\hat{r}$ (moviendo el origen de coordenadas) el resultado habría sido erróneo.

El mismo problema aparece con los versores $\hat{\phi}$ o $\hat{\theta}$, conforme nos movemos cambian de dirección. En tal sentido es muchísimo más seguro operar en coordenadas cartesianas donde los versores $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ mantienen siempre su dirección, aunque nos movamos.

Después de este interludio matemático podemos volver a la física. Con la ecuación (2) (si las cargas son puntuales) o las ecuaciones (7) a (9) para el caso de distribuciones continuas, podemos calcular la fuerza actuante sobre la de prueba q_0 . Entonces, para obtener el campo eléctrico sólo resta dividir por q_0 .

Queda hacer un comentario respecto de la magnitud de la carga de prueba q_0 . Ya mencionamos que por convención la consideramos como positiva; queda pendiente comentar que dicha carga debe ser lo suficientemente pequeña como para no alterar la distribución espacial de las otras involucradas en el problema. A primera vista esta última afirmación puede sonar extraña porque hemos declarado que conocemos la distribución de las cargas que generan el campo (sea 1-D, 2-D o 3-D). ¿Cómo puede ser que el valor de q_0 sea relevante? La respuesta detallada queda para más adelante, pero podemos adelantar que en el caso en que el objeto cargado sea metálico, la forma en que las cargas se distribuyen depende de la presencia de otras vecinas. En esta situación resulta conveniente que la carga de prueba sea lo más pequeña posible para que las alteraciones que produzca sean despreciables. Entonces mejoramos nuestra definición de campo eléctrico como:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}_{q_0}(\vec{r})}{q_0}$$

Con los métodos expuestos anteriormente podemos calcular, en cualquier punto del espacio, el campo eléctrico generado por un cuerpo cargado. Por tratarse de una magnitud vectorial obtenemos tres funciones. La comprensión de los resultados se torna muy dificultosa, por lo que conviene recurrir a una presentación gráfica de los resultados. La primera opción es dibujar vectores en lugares selectos. Vamos a aplicar este método para un sistema formado por dos cargas positivas iguales A y B. En la figura 11 representamos los campos generados por cada carga individual (en azul y verde) y en la 12 el campo total (en rojo).

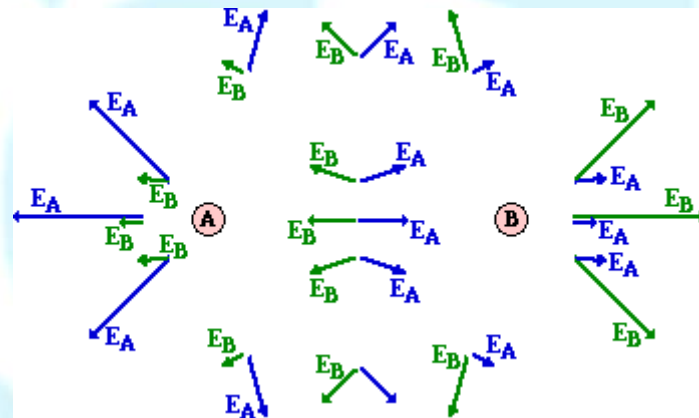


Figura 11. Campos generados por dos cargas positivas iguales

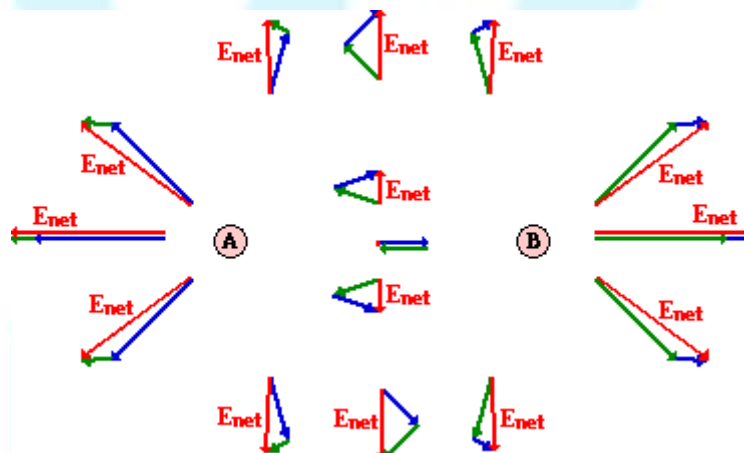


Figura 12. Campo total generado por dos cargas positivas iguales

Hoy día, con computadoras es una tarea relativamente simple, pero si se desea tener un dibujo detallado es necesario presentar muchos vectores y rápidamente la representación gráfica se vuelve confusa. Para mejorar la presentación se convino en que era mejor presentar las así llamadas *líneas de campo*. Estas líneas son curvas tales que en cada punto del espacio

el campo eléctrico resulta *tangente* a dicha curva. Si esta afirmación es confusa vamos a verla en acción con un dibujo simple para la misma situación de las figuras 11 y 12.

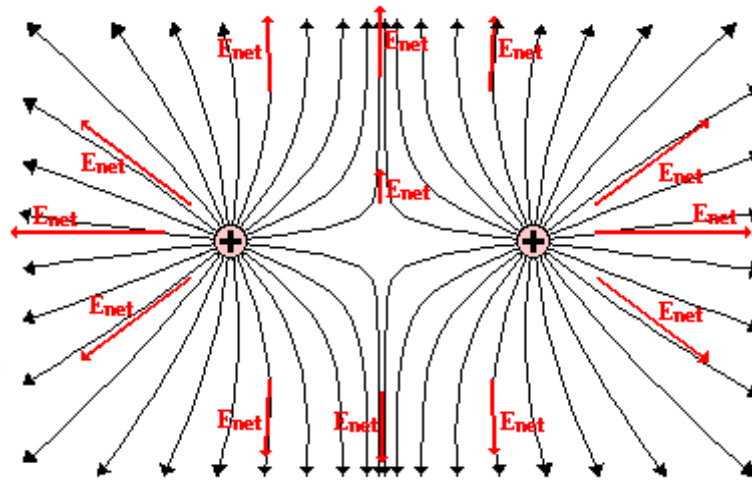


Figura 13. Líneas de campo para dos cargas positivas iguales.

Si bien la figura 13 sigue mostrando los vectores, es habitual no presentarlos y quedarnos sólo con las líneas de campo. Sabemos que en cada punto el campo debe ser tangente a la curva. Dado que hemos perdido la información sobre el módulo del campo al no dibujar el vector debemos dar una convención para reemplazar la información faltante. La regla es que la densidad de líneas dibujadas sea proporcional a la intensidad del campo. La densidad de líneas se mide en la dirección normal al campo y el número total de líneas que “salen” o “entran” de una carga es proporcional a esta. Si el campo es “débil” dibujamos una baja densidad de líneas. Por el contrario, si el campo es “fuerte” dibujamos “muchas” líneas. Otra regla es que trazamos las líneas “naciendo” en las cargas positivas y “muriendo” en las negativas. Por tal motivo decimos que las cargas positivas son “fuentes” del campo y las negativas son “sumideros”. Las palabras “fuentes” y “sumideros” tienen una fuerte raíz del campo de los fluidos. Podemos pensar (muy ligeramente) que las cargas positivas son como una “ducha” en la que nacen las líneas de campo para terminar en un “drenaje” que son las cargas negativas. En una bañera real el agua emana de la regadera (fuente), se va por la rejilla (sumidero) y las líneas de flujo del agua se ven simplemente. En el caso eléctrico la situación es más difícil (no podemos ver el campo) pero la analogía es bastante buena.

Como ayuda a la hora de dibujar las líneas de campo destacamos que no se deben cruzar jamás, puesto que si esto sucediera en un punto P , esto significaría que la fuerza actuante sobre la carga de prueba no estaría unívocamente definida.

Para ayudar un poquito vamos a presentar otros ejemplos (siempre con dos cargas) pero con distintos signos y valores.

Como tarea proponemos determinar cuál carga tiene mayor valor (prescindiendo del signo).

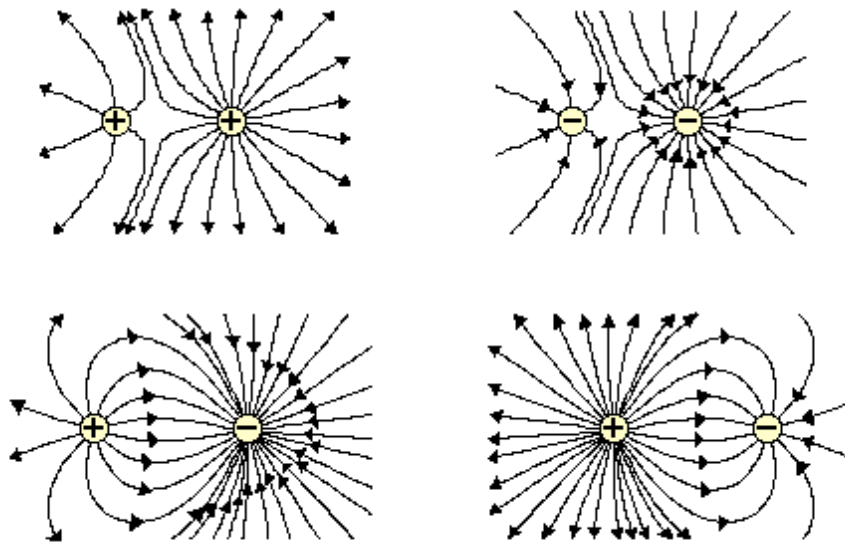


Figura 14. Líneas de campo para dos cargas de diferente valor

Otro ejercicio: Determinar los signos de las cargas y las magnitudes relativas (contar el número de líneas) en la figura 15.

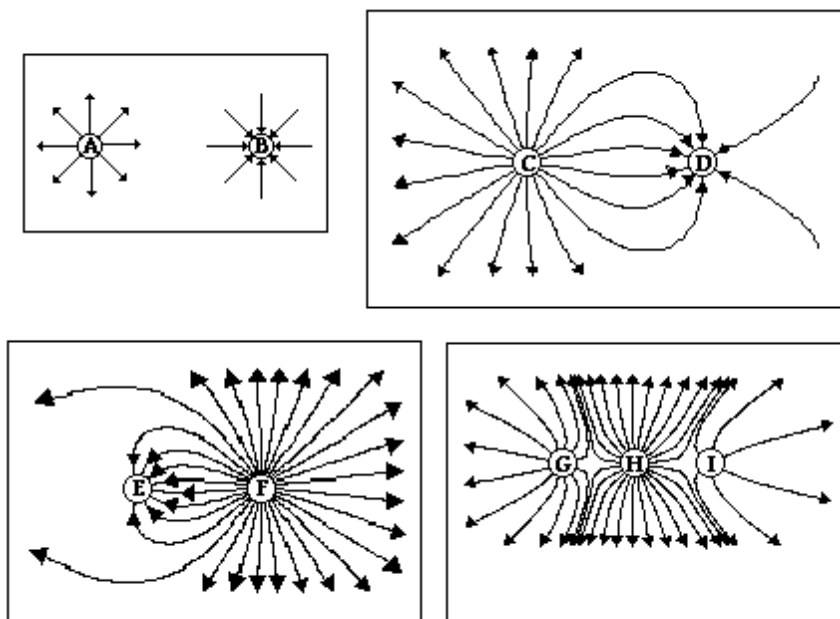


Figura 15. Cuatro configuraciones de campo

¿Para qué nos interesa el campo eléctrico? Algunas personas encuentran razón suficiente en contemplar la belleza de las ecuaciones y dedican mucho tiempo al estudio de las propiedades matemáticas. Otras prefieren verlo en acción, “haciendo” cosas. Siendo la Ingeniería una disciplina dedicada, entre otras cosas, al diseño de “aparatos” vamos a ver algunos ejemplos concretos que nos sirvan de referencia.

Vamos a efectuar descripciones muy generales, porque los detalles tecnológicos son complejos y difíciles de seguir a esta altura.

Ya vimos cómo operaban las fuerzas eléctricas en una fotocopidora (<https://www.youtube.com/watch?v=euVQYSbpFXE>, <https://www.youtube.com/watch?v=rE9QgeR5t64>). Otros casos de interés son el precipitador electrostático de polvo (<https://www.youtube.com/watch?v=x5YFK8mmeR>, <https://www.youtube.com/watch?v=Yz7fVySGugY>) y la pintura electrostática (<https://www.youtube.com/watch?v=LAEGkaqKZhQ>). Para la pintura el principio es igualmente simple; la pintura, en forma de un polvo muy fino, es cargada positivamente, mientras que el objeto a ser pintado (un auto por ejemplo) está cargado negativamente. La fuerza eléctrica atrae a las partículas de pintura hacia el objeto donde quedan adheridas. Un proceso posterior las fija. Esta pintura, a diferencia de las comunes, no utiliza un solvente volátil que deba evaporarse. De esta forma se evita la contaminación ambiental con vapores potencialmente tóxicos. Mucho más glamorosos son los dispositivos MEMs (Micro Electro-Mechanical), éstos son sistemas de escala microscópica que son desplazados con fuerzas eléctricas. Para una pequeña muestra ver la siguiente página: <http://electronics.howstuffworks.com/dlp1.htm>.

1.4. El flujo del campo eléctrico. La ley de Gauss

Muchas propiedades de un campo vectorial quedan determinadas por el flujo y la circulación del mismo, los que a su vez están íntimamente ligados a los teoremas de Gauss y Stokes con sus respectivos operadores divergencia y rotor.

En la sección anterior hablamos de las “fuentes” (las cargas positivas) y “sumideros” (las cargas negativas) del campo eléctrico. Estos términos tienen un fuerte origen “hidráulico” sugiriendo que un fluido emana de las fuentes para ser consumido en los sumideros. Con la palabra flujo pasa exactamente lo mismo. Originariamente fue concebida para calcular, por ejemplo, la cantidad de agua que fluye por un río. En este caso el campo en cuestión es el de velocidades y la interpretación es simple y directa.

Con el campo eléctrico la situación es más difícil porque no lo podemos ver y además es un concepto mucho más abstracto porque involucra la fuerza que actuaría sobre una hipotética carga de prueba puesta en un lugar.

Igualmente conviene refrescar la memoria y recordar que el flujo Φ de un campo vectorial $\vec{F}$ a través de una superficie S está dado por:

$$\Phi = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad (19)$$

El integrando es el *producto escalar* de dos magnitudes vectoriales (no olvidarlo) y la superficie S puede ser abierta o cerrada. En este último caso se conviene en considerar la dirección de $d\vec{S}$ apuntando hacia fuera de la región cerrada y el flujo queda dado por el conocido teorema de Gauss-Ostrogradsky:

$$\Phi = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div}(\vec{F}) dV \quad (20)$$

donde V es el volumen limitado por S y div es el operador divergencia.

Suficiente repaso; hagamos un ejercicio matemático: Computar el flujo del campo eléctrico generado por una carga puntual Q (positiva) a través de una superficie esférica de radio r , tal que el centro de dicha esfera coincida con la carga Q .

Hacemos una vista 2-D del problema en la figura 16.

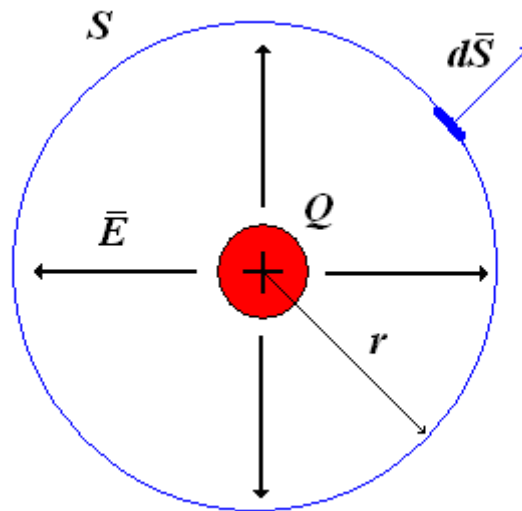


Figura 16. Una carga puntual Q rodeada por una superficie esférica S concéntrica.

Intencionalmente hemos elegido un problema simple. En efecto, por lo visto en el capítulo anterior, el campo eléctrico generado por una carga puntual es sólo función de la distancia a la misma y vale (considerando que la carga está en el origen de coordenadas):

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

Dado que la superficie sobre la que integramos es una esfera de radio r , es conveniente expresar el elemento de área como: $d\vec{S} = r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi \hat{r}$. Notar que el elemento de área también apunta en la dirección radial (hacia fuera de la esfera).

El flujo es entonces:

$$\Phi = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \right) \cdot (r^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi \hat{r}) = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (21)$$

Curiosidad: el resultado es independiente del radio r de la esfera. No debemos detenemos aquí porque se trataría simplemente de un ejercicio matemático más de una larga lista. Conviene ver si logramos extraer algún significado. Volvamos a la analogía hidráulica: Pensemos en una ducha; las líneas de flujo de agua “nacen” en la ducha y caen. Rodeemos la ducha con una superficie real o imaginaria y computemos el flujo del agua a través de dicha superficie. Lo que obtenemos son la cantidad de litros por segundo que atraviesan la superficie. ¿Cuál es la fuente de dicho caudal? Para nuestro problema es la ducha (ya sabemos que el agua vino por dentro del caño desde la planta potabilizadora, pero no es relevante para nuestra discusión). Volviendo al campo eléctrico decimos entonces que la carga Q es fuente del campo eléctrico $\vec{E}$ y que el flujo del mismo a través de una superficie esférica concéntrica es proporcional a la carga (el factor ϵ_0 no importa porque sólo refleja el sistema de unidades). Surge ahora una pregunta obvia: ¿Qué habría pasado si hubiéramos rodeado la carga con una superficie cerrada arbitraria? ¿Tendríamos que repetir el cálculo para un número infinito de superficies? La respuesta requiere del teorema de Gauss y para desarrollarla la bosquejamos en la figura 17.

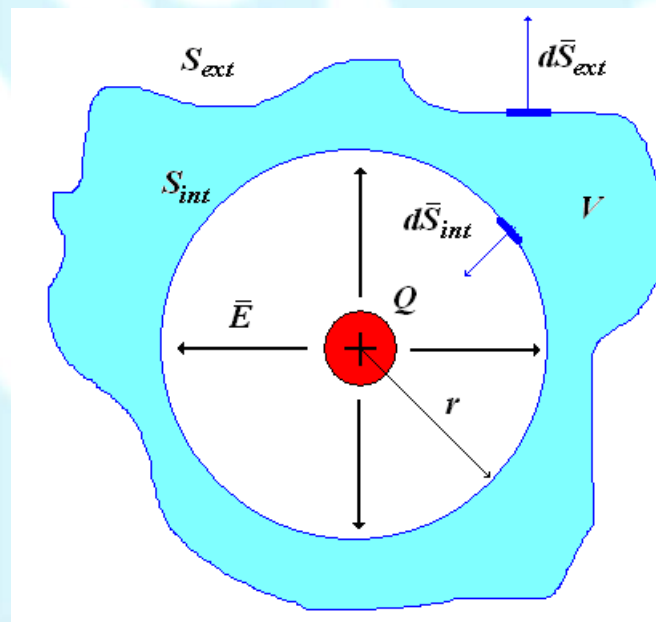


Figura 17. Una carga puntual Q rodeada por una superficie esférica S_{int} y una arbitraria S_{ext}

La solución estriba en considerar un volumen V (turquesa) limitado interiormente por nuestra esfera del problema anterior (S_{int}) y exteriormente por una superficie arbitraria S_{ext} . Aplicamos

el teorema de Gauss a este volumen, para ello debemos computar la divergencia del campo eléctrico generado por la carga Q . En coordenadas esféricas tenemos:

$$\text{div}(\vec{E}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin(\theta) E_\theta) + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} = 0 \quad r \neq 0 \quad (22)$$

CUIDADO: Debemos hacer una mención importante respecto de una notación: El símbolo E_r denota la componente del campo en la dirección del versor radial y significado análogos tienen E_θ y E_ϕ . En muchos cursos de Análisis II se le asigna a la primera el significado de la derivada parcial de E con respecto a r (y conceptos similares con los restantes). Nosotros necesitamos distinguir las componentes de un vector, por lo que el subíndice indica el valor de dicha componente en la dirección indicada. Cuando queremos indicar una derivada parcial, por ejemplo con respecto a r , utilizamos la notación $\partial/\partial r$

La divergencia del campo eléctrico es nula excepto en $r=0$ (lugar donde está la carga). El primer sumando es nulo porque el factor r^2 se cancela con el término $1/r^2$ presente en la componente E_r del campo. Las otras componentes del campo, E_θ y E_ϕ son nulas.

Dado que el volumen V estudiado no contiene al punto $r=0$, podemos asegurar que el flujo total que atraviesa la superficie es nulo, es decir:

$$\Phi=0=\Phi_{S_{ext}}+\Phi_{S_{int}} \quad (23)$$

Por lo que $\Phi_{S_{ext}} = -\Phi_{S_{int}}$

Los flujos son iguales a menos de los signos, pero esto es fácil de comprender (y cambiar) porque notamos que en nuestro ejemplo original la normal a la superficie esférica S_{int} tenía la dirección opuesta a la utilizada en este último cálculo (comparar las figuras 15 y 16). Si invertimos los signos para llevar todo a la misma convención llegamos a la conclusión que el flujo computado a través de la superficie esférica es igual al que obtendríamos sobre cualquier otra superficie cerrada que encerrara a la carga Q .

El resultado de la ecuación (21) es entonces válido para cualquier superficie. Además, en virtud del principio de superposición, podemos extender este resultado a un conjunto de varias cargas encerradas dentro de una superficie, obteniendo:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \quad (24)$$

donde Q_{enc} denota la totalidad de la carga encerrada dentro de la superficie S .

La ecuación (24) se denomina, con poca originalidad, ley de Gauss de la electrostática. Si bien la derivación fue hecha a partir de considerar una o más cargas puntuales, es fácil ver que

la misma también aplica a una distribución continua puesto que cualquier objeto cargado puede ser descompuesto en elementos de carga dq para los cuales aplicamos la misma deducción.

Un último comentario matemático: el caso más general de un objeto cargado corresponde a una distribución volumétrica (3D). En esta condición la (24) se transforma en:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{\int_V \rho dV}{\epsilon_0} \quad (25)$$

Si recurrimos una vez más al teorema del flujo (20) encontramos que:

$$\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (26)$$

Esta última relación contiene *exactamente* la misma cuota de información que la (24), sólo que está escrita en términos de derivadas parciales (por el operador divergencia) en lugar de una integral. Como dicen los libros de cocina *reservamos* la (26) para dentro de unas clases.

Volvamos a la ley de Gauss porque varias veces la utilizaremos para estudiar distintos aspectos del campo eléctrico. Ahora, para aliviar las tensiones de tanta matemática, vamos a mostrar cómo con un poco de buen razonamiento previo (más algo de suerte) y la ayuda de la ley de Gauss podemos determinar el valor del campo eléctrico sin necesidad de recorrer el difícil camino de las ecuaciones (7)-(9).

El núcleo de la idea se encuentra en que algunas distribuciones de carga son lo suficientemente sencillas como para que podamos inferir la dirección de las líneas de campo por simples razonamientos geométricos. Si esta oración sonó complicada vamos a un primer ejemplo basado en la distribución de carga esférica de radio a y densidad uniforme ρ_0 (positiva) de la figura 8, la que miraremos de costado.

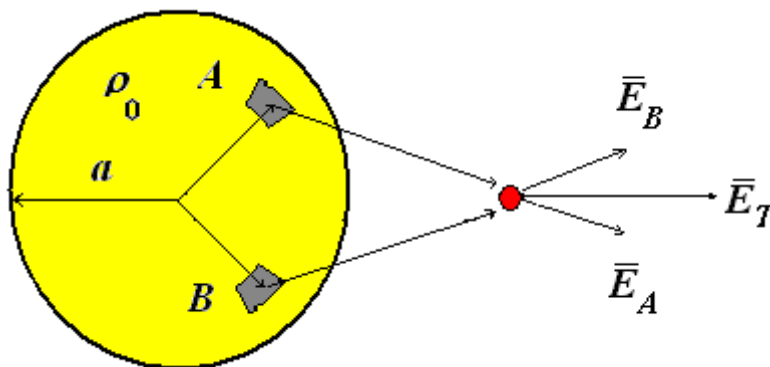


Figura 18. Una distribución volumétrica uniforme de carga

La clave del análisis reside en ubicarnos en el punto rojo, sobre el que deseamos computar el campo eléctrico, y notar que el objeto cargado puede ser dividido en contribuciones elementales de las que mostramos sólo dos, denominadas A y B . Estos elementos están simétricamente posicionados respecto del punto de observación. Las contribuciones de campo que generan, $\vec{E}_A$ y $\vec{E}_B$, dan porresultante $\vec{E}_T$ que se encuentra dirigida en la dirección radial. Como el proceso se puede repetir, encontrando otros elementos distribuidos simétricamente sobre toda la esfera, concluimos que el campo en el punto de observación apunta en la dirección radial. Nótese que el resultado habría sido el mismo para cualquier otro punto de observación que estuviera a la misma distancia r puesto que la distribución de carga es simétrica ante cambios en φ o θ . Este resultado ya lo habíamos encontrado antes, pero ahora lo conseguimos “desarmando” el objeto cargado y analizando las contribuciones elementales.

¿Cuál es el beneficio de todo este empeño? Veremos que la ley de Gauss, junto con haber “adivinado” la dirección de las líneas de campo, nos permitirá computar el campo eléctrico sin necesidad de recurrir al largo proceso de integración de las ecuaciones (7)-(9).

En párrafos anteriores demostramos que el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada es proporcional a la carga encerrada independientemente de la forma de la superficie en cuestión. Tenemos libertad de elegir la superficie más conveniente y nos decidimos por una esférica que pase por el punto de observación (figura 19)

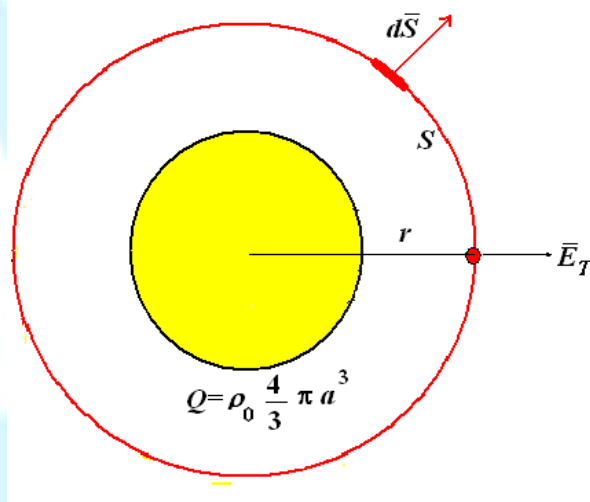


Figura 19. Flujo del campo eléctrico a través de una superficie esférica

Apliquemos la ley de Gauss ($\vec{E}$ y $d\vec{S}$ apuntan en dirección radial ($\hat{r}$)).

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S (E(r) \hat{r}) \cdot (dS \hat{r}) = \oint_S E dS = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (27)$$

Ahora necesitamos una idea importante: Al recorrer el dominio de integración, los dos ángulos, la distancia r permanece constante. No podemos ver diferencias en la distribución de

carga. Concluimos que el módulo del campo eléctrico no varía sobre la región de integración, por lo que podemos escribir:

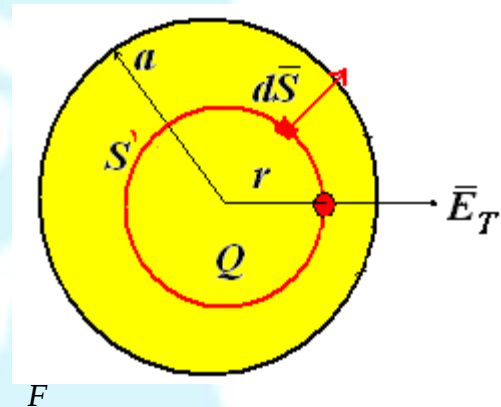
$$\Phi = \oint_S E \, dS = E \oint_S dS = ES = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (28)$$

La superficie S de la esfera vale: $S=4\pi r^2$, por lo que el módulo del campo eléctrico queda:

$$E(r) = \frac{Q}{\epsilon_0} \frac{1}{4\pi r^2} \quad (29)$$

Esta ecuación es idéntica a la (18) y parece que hemos perdido el tiempo en juegos matemáticos. Sin embargo, el trabajo no ha sido en vano; apliquemos la misma técnica al caso de tener que computar el campo en un lugar dentro de la esfera ($r < a$) (figura 20)

Como ya hemos determinado la dirección de las líneas de campo usamos la misma superficie de integración. Entonces, todo lo referente al miembro de la izquierda en la (28) es idéntico. Lo que cambia es el miembro de la derecha porque ahora la superficie S encierra a la totalidad de la carga de la esfera. La expresión correcta para el flujo es:



F

Figura 20. Cálculo del campo eléctrico dentro de una distribución esférica de carga

$$\Phi = \oint_S E \, dS = E \oint_S dS = ES = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_0 \frac{4}{3} \pi r^3 \quad (30)$$

$$E(r) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r \quad ; \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r \hat{r} \quad (31)$$

Es impactante la simplicidad con la que hemos obtenido la (31). Por el camino de integración de la (9) habríamos consumido muchas líneas de desarrollo y ahora, gracias a haber “adivinado” la dirección de las líneas de campo, y con la ayuda de la ley de Gauss, resolvimos el problema con menor esfuerzo. Representamos en la figura 21 el módulo del campo eléctrico para regiones internas y externas a la esfera. Notar que en $r=a$ coinciden las expresiones (28) y (31).

Como comentario accesorio vale la pena mencionar que la superficie a través de la que computamos el flujo suele ser llamada superficie gaussiana (nombre muy poco original por cierto).

Ahora es importante volver sobre nuestros pasos y repasar nuestra estrategia puesto que la repetiremos en otras ocasiones pero debemos estar atentos para no utilizarla mal. En los análisis presentados aparece como crucial la idea de simetría. Esto es correcto pero amerita profundizarlo. El objeto cargado no sólo debe ser geoméricamente simétrico, sino que debemos ser capaces de encontrar la dirección del campo resultante en cualquier punto y una superficie de integración sobre la que el módulo del campo permanezca constante, de forma tal que podamos extraerlo como un factor constante en el miembro de la izquierda en la ley de Gauss. Como ejemplos “malos” podemos considerar un cubo o un anillo uniformemente cargados; a pesar de la simetría geométrica es imposible determinar por razonamientos simples la dirección de las líneas de campo y menos aún concebir una superficie sobre la cual el módulo del campo sea constante (en el caso de cubo piensen en la diferencia de estar parado cerca del punto medio de una de las caras y luego sobre una arista).

¿Es la esfera uniformemente cargada el único ejemplo útil? La respuesta es no. Proponemos como caso a demostrar en casa que una esfera cargada con una densidad de carga que dependa únicamente de la coordenada radial, $\rho=\rho(r)$, es un caso “bueno”.

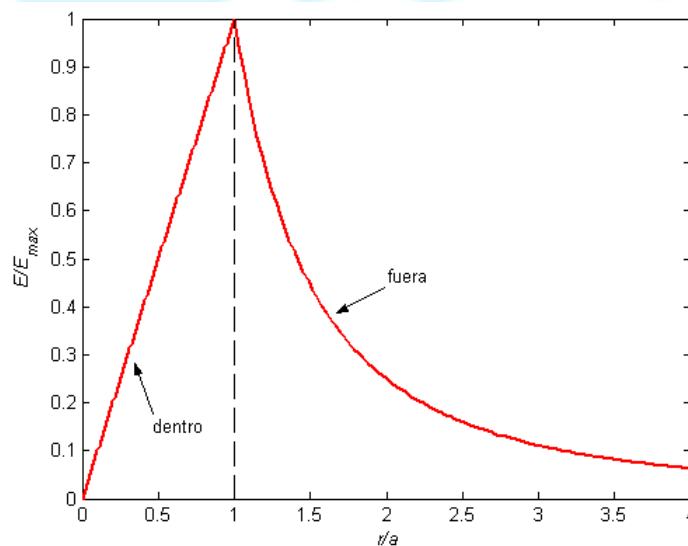


Figura 21. Módulo del campo eléctrico normalizado para una distribución esférica de cargas con densidad volumétrica constante.

Pero quedan más ejemplos sencillos aún. Tomemos como objeto una distribución uniforme y positiva de carga con forma de alambre y de largo infinito (figura 22). Este es un problema tedioso de resolver por integración de la (7). Veremos que podemos “adivinar” la dirección de las líneas de campo y beneficiarnos con el uso de la ley de Gauss. Hacemos una vista de costado de este “hilo” cargado.

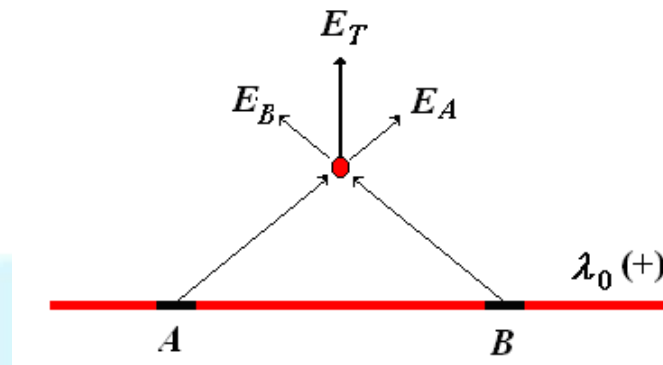


Figura 22. Vista lateral de una distribución lineal uniforme..

Centramos nuestra atención en los elementos A y B, ubicados simétricamente respecto del punto de observación (de color rojo). Notamos que las contribuciones de estos elementos, al ser sumadas vectorialmente, entregan un campo resultante cuya dirección es perpendicular al alambre. Este razonamiento puede ser repetido con otros pares (a izquierda y derecha del punto de observación), obteniéndose el mismo resultado: la dirección del campo neto es perpendicular al alambre. Como el alambre es de longitud infinita, este resultado es válido para *cualquier* punto de observación, por lo que concluimos que el campo, en todo punto del espacio, tiene dirección radial con el alambre como eje. En síntesis: $\vec{E} = E(r)\hat{r}$. Es importante notar que el significado de la palabra radial es diferente en este caso (de obvia simetría cilíndrica) comparado con el ejemplo anterior (de simetría esférica).

En la figura 23 mostramos una perspectiva del alambre junto con algunas líneas de campo.

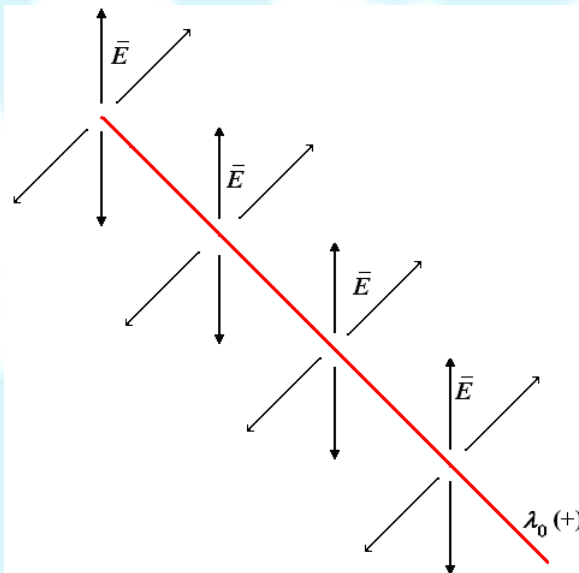


Figura 23. Esquema en perspectiva de una distribución lineal de carga de largo infinito, uniformemente cargada y algunas líneas de campo

La historia se repite; ahora que conocemos la dirección de las líneas de campo debemos encontrar una superficie tal que al recorrerla el módulo del campo permanezca constante. La

respuesta aparece pronto; en la medida en que nos mantengamos a una distancia constante del alambre el valor de campo que esperamos es constante. Tomamos entonces como superficie de integración un cilindro de radio r y largo L , concéntrico con el alambre (figura 24). Por claridad hemos omitido la tapa frontal del cilindro para poder observar el alambre y las líneas de campo, pero es importante destacar que *ambas* tapas deben entrar en el análisis porque necesitamos una superficie *cerrada*.

Para computar el flujo analizamos por separado las tapas y después la superficie lateral. La respuesta para el primer caso es simple puesto que las líneas de campo son perpendiculares a las normales a las tapas, por lo que el flujo a través de ellas es cero (¿se ve claro?). Pasamos ahora al flujo a través de la superficie lateral del cilindro (recordando que el módulo del campo es constante cuando la recorremos):

$$\Phi_{lat} = \int_{lat} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{lat} E \hat{r} \cdot dS \hat{r} = \int_{lat} E dS = E \int_{lat} dS = ES = E 2\pi r L = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda_0 L}{\epsilon_0} \quad (32)$$

$$E(r) = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}; \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \hat{r}$$

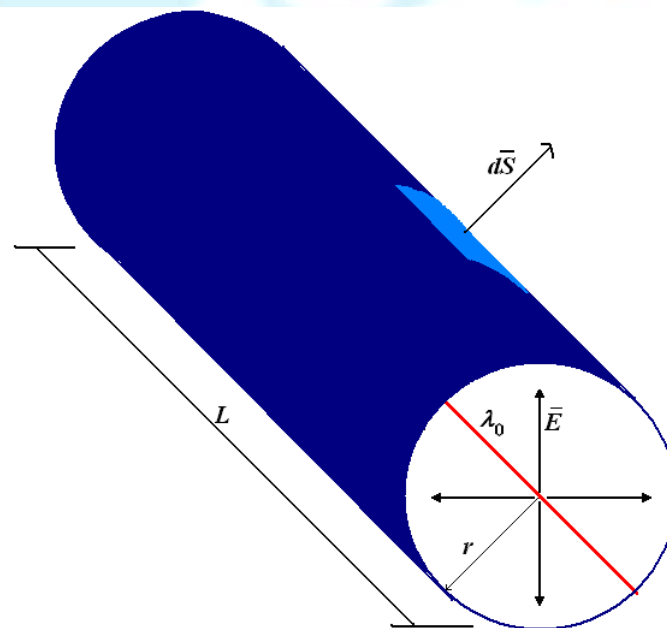


Figura 24. El “hilo” de la figura anterior rodeado de una superficie cilíndrica

Por lo expuesto en el párrafo anterior, la ecuación (32) refleja el flujo total del campo eléctrico a través de la superficie cilíndrica. En el miembro de la derecha hemos reemplazado la carga encerrada por el valor $\lambda_0 L$ por tratarse de un alambre uniformemente cargado.

Resulta obvio comentar que la resolución que brinda la (32) es mucho más simple que por medio de la integración de la (7). Podemos apuntar más alto y pasar de la distribución anterior, que es un objeto 1-D, a uno 3-D semejante: una distribución cilíndrica de radio a y

uniformemente cargada en volumen con densidad ρ_0 (positiva) (ver figura 25). Como ejercicio previo proponemos (más que proponer, ordenamos) efectuar un análisis semejante al de la figura 23. Nuevamente encontraremos que las líneas de campo tienen dirección radial y, por el mismo argumento del caso anterior, conviene tomar por superficie de integración al mismo cilindro.

Con estas consideraciones notamos que hay dos regiones de interés, la que corresponde al exterior del cilindro ($r > a$) y la interior ($r < a$). La primera es la más simple de estudiar porque es virtualmente idéntica al ejemplo precedente dado que la superficie de integración encierra a la totalidad de la carga contenida en el alambre. El flujo, computado en forma análoga a la (32) resulta:

$$\Phi_{lat} = \int_{lat} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{lat} E \hat{r} \cdot dS \hat{r} = \int_{lat} E dS = E \int_{lat} dS = ES = E 2\pi r L = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{\rho_0 \pi a^2 L}{\epsilon_0} \quad (33)$$

$$E(r) = \frac{\rho_0 a^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{r}; \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_0 a^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{r} \hat{r}$$

Distinta es la situación para el segundo caso ($r < a$) porque la superficie cilíndrica a través de la que computamos el flujo no encierra la totalidad de la carga (figura 25). En este caso el flujo y el campo son:

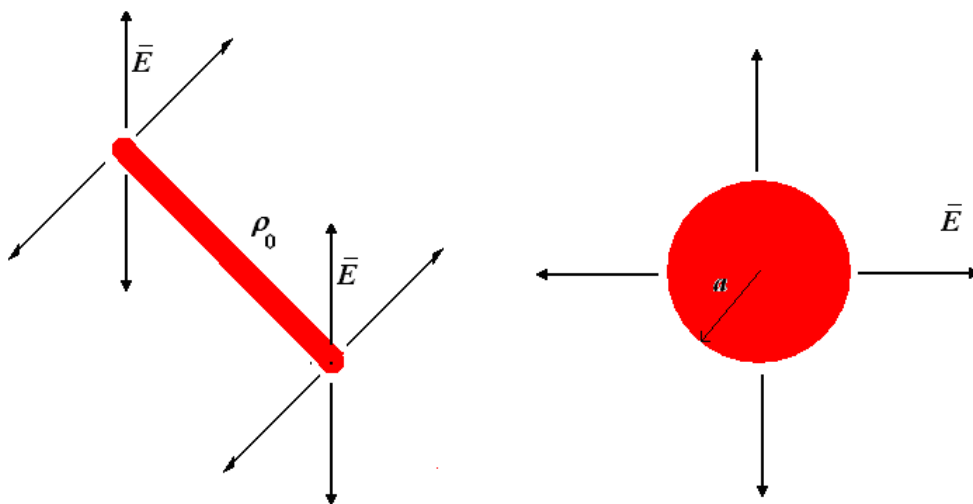


Figura 25. Un cilindro uniformemente cargado y de largo infinito. Izquierda: Vista en perspectiva; derecha vista frontal

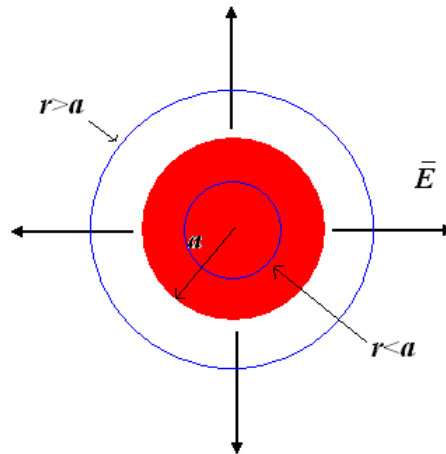


Figura 26. Vista frontal del cilindro de la figura 25. Se muestra la traza de la superficie gaussiana para puntos fuera ($r > a$) y dentro ($r < a$) del cilindro.

$$\Phi_{lat} = \int_{lat} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{lat} E \hat{r} \cdot dS \hat{r} = \int_{lat} E dS = E \int_{lat} dS = ES = E 2\pi r L = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{\rho_0 \pi r^2 L}{\epsilon_0} \quad (34)$$

$$E(r) = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} r; \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} r \hat{r}$$

En la figura 27 mostramos los resultados de las ecuaciones (33) y (34). Es importante marcar que en la frontera del cilindro ($r=a$) ambos valores coinciden. Como tarea para el hogar queda por demostrar que si la distribución de cargas es de la forma $\rho=\rho(r)$, también podemos “adivinar” la dirección de las líneas de campo.

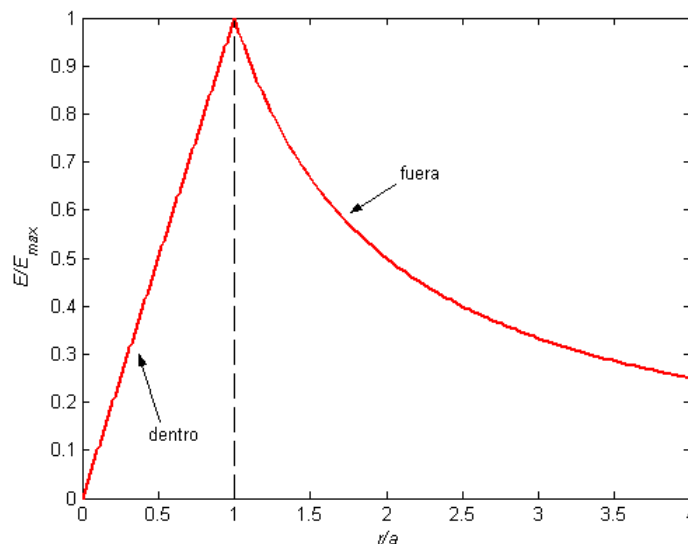


Figura 27. Módulo del campo eléctrico para el cilindro cargado de la figura 25.

Si miramos un poco en perspectiva notaremos que fuimos capaces de encontrar ejemplos simples en los casos de simetría esférica y cilíndrica. También lo hay en el caso cartesiano y

el sistema que estudiaremos es una distribución plana infinita e uniformemente cargada con densidad superficial σ_0 (positiva)(ver figura 28).

Nuevamente mostramos los aportes de distintos aportes elementales, A , B , C y D . Estos elementos están simétricamente distribuidos respecto de la normal al plano que pasa por el punto de observación (punto rojo). El campo resultante apunta en la dirección normal al plano porque las componentes paralelas al mismo se cancelan de a pares. Como todo el plano puede ser descompuesto en elementos semejantes, llegamos a la conclusión que el campo en cualquier lugar de observación es perpendicular al plano. Habiendo encontrado la dirección de las líneas, debemos buscar la superficie gaussiana correspondiente. Hay algunas opciones, pero la más usual es nuevamente un cilindro como presentamos en la figura 29 (lado izquierdo).

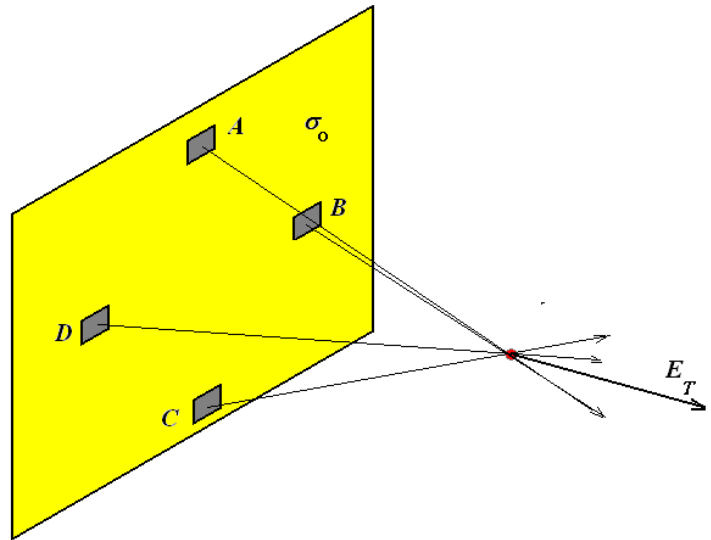


Figura 28. Un plano infinito uniformemente cargado

El análisis es más simple considerando una vista lateral, sin las complejidades de una perspectiva (figura 29 derecha)

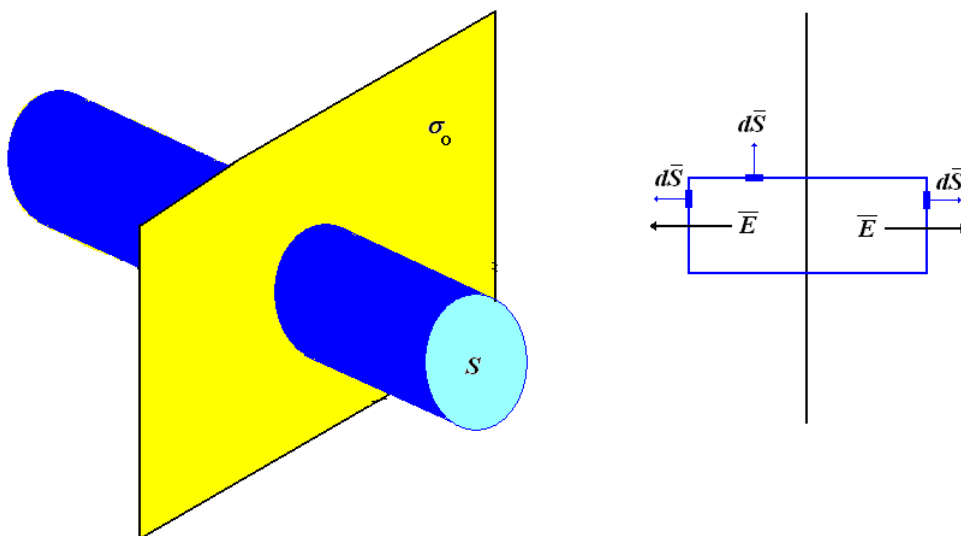


Figura 29. Plano cargado y superficie gaussiana cilíndrica. Izquierda: vista en perspectiva, derecha: vista lateral.

Para computar el flujo conviene separar el análisis en dos partes: la superficie lateral y las dos tapas. De la figura se observa que el flujo por la cara lateral es nulo puesto que la normal a dicha superficie es perpendicular al campo. Queda entonces calcular el flujo por las tapas. Nótese que en ambas tapas la dirección de la normal a la superficie es igual a la del campo, por lo que el ángulo formado es una vez más de cero grados. Como ambas tapas son idénticas el flujo total es simplemente el doble del correspondiente al de una de ellas. Si la superficie de cada tapa es S obtenemos:

$$\Phi = 2 \int_{\text{tapa}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2 \int_{\text{tapa}} E dS = 2E \int_{\text{tapa}} dS = 2E S = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_0 S}{\epsilon_0} \quad (35)$$

$$E = \frac{\sigma_0}{2 \epsilon_0}; \quad \vec{E} = \frac{\sigma_0}{2 \epsilon_0} \hat{n}$$

En la (35) la carga encerrada está dada por el producto $\sigma_0 S$ por tratarse de una distribución uniforme. A primera vista el resultado parece extraño. La (35) predice un campo de módulo constante, independientemente del lugar de observación. Esto parece estar en contradicción con nuestra expectativa de obtener una intensidad de campo que vaya menguando conforme nos alejamos del objeto.

La sospecha es parcialmente correcta. El problema estriba en que hemos considerado un plano *infinito* y esto fue crucial en el proceso durante el que “adivinamos” la dirección de las líneas de campo. En el mundo real podremos tener una hoja cargada y al tener una extensión finita nuestro argumento principal falla, principalmente cuando el punto de observación está próximo a los bordes de la hoja. Sin embargo el resultado de la (35) da una buena aproximación cuando el campo es evaluado “lejos” de los bordes del sistema real. Para discutir este tópico hacemos lo mismo cuando confrontamos la (6) con la (32) para el caso del alambre infinito. Ahora tomamos la (14) y hacemos tender el radio interior a cero y el exterior a infinito. Luego comparamos con la (35). El análisis que hicimos en ocasión del cable infinito y encontrar el factor de corrección en función de la razón (z/R) , donde z es la distancia al disco y R el radio externo del mismo que tiende a infinito. No hacemos todo para que trabajen un poco en casa.

Como comentarios integradores de todos los ejemplos anteriores es importante primero remarcar que al aplicar la ley de Gauss las cargas en cuestión son las que se encuentran *dentro* de la superficie gaussiana. Esto significa que las que quedan fuera no colaboran en el resultado final (repasar los ejemplos con la bola y el cilindro cargados en volumen). Segundo, y **FUNDAMENTAL**, es recordar que la ley de Gauss es válida **SIEMPRE**, más allá de que

el caso sea “fácil” o “difícil”. De tanto aplicar esta ley a los casos simples, muchas personas terminan creyendo que la validez de la misma está restringida a estos ejemplos. Este es un **ERROR GRAVISIMO** que ha costado muchos exámenes.

¿Hay más ejemplos “fáciles”? La respuesta es negativa; no hay otras distribuciones de carga para las que podamos encontrar, por razonamientos simples, la dirección de las líneas de campo y una superficie sobre la cual el módulo del mismo permanezca constante. Esto es imprescindible porque toda la estrategia reside en extraer el módulo del campo eléctrico fuera de la integral del flujo para así reducir el problema a una simple multiplicación.

Pero la falta de otros casos simples no es demasiado grave puesto que muchos casos pueden ser resueltos considerando la superposición de partes basadas en los ejemplos anteriores.

Tomemos una superficie infinita, uniformemente cargada con densidad superficial σ_0 , coincidente con el plano xz. Un alambre cargado con densidad lineal λ_0 , paralelo al eje z, corta al plano xy en (0,d). Se desea conocer el campo eléctrico en la posición (d,d,d).

Desarmamos el problema en los dos constituyentes obvios: el plano y el alambre. Por lo expuesto en párrafos anteriores, el campo generado por el plano es de módulo constante en cualquier posición y apunta en la dirección normal al plano. En nuestro caso obtenemos:

$$\vec{E}_{plano} = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \hat{j} \text{ (}\hat{j} \text{ es el versor normal al plano). El alambre es un poco más difícil de tratar por}$$

el ya mencionado problema del versor radial. Lo peor que podemos hacer es entrar en el modo automático y copiar el resultado de la (32) directamente reportando:

$$\vec{E}_{alambre}(r) = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \hat{r}$$

Hasta que no escribamos correctamente r y $\hat{r}$ en términos del problema no habremos terminado la resolución. Repasemos un poco: $\vec{r}$ es el vector, perpendicular al alambre, que nace en el mismo y termina en el punto de observación. Para nuestro caso es $\vec{r} = (d \hat{i} + d \hat{j}, d \hat{k}) - (0 \hat{i} + d \hat{j} + d \hat{k}) = d \hat{i}$, su módulo vale $r=d$, y el versor correspondiente

$$\text{es } \hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \hat{i}$$

La respuesta correcta es entonces:

$$\vec{E}_{Total}(P) = \vec{E}_{Plano}(P) + \vec{E}_{Alambre}(P) = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \hat{j} + \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{d} \hat{i}$$

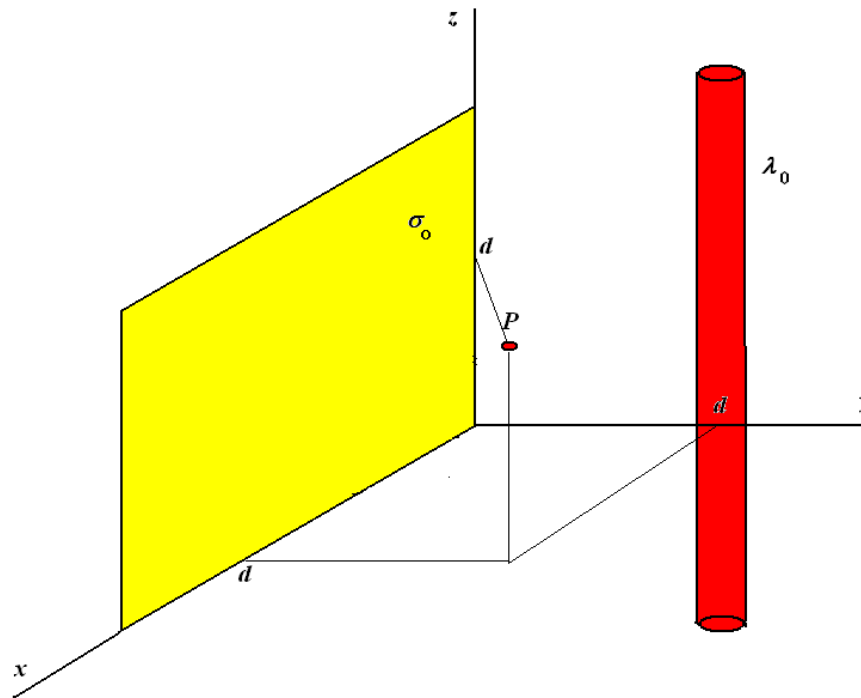


Figura 30. Un problema compuesto

Tema especial 1. Un último ejemplo clásico y que parece desafiar al método: Un cilindro macizo de radio a y largo infinito está perforado con otro cilindro de radio b corrido una distancia d del centro del primero. El cilindro macizo está uniformemente cargado en volumen con densidad ρ_0 . Consigna: calcular el campo eléctrico en el centro del agujero (figura 31). A primera vista parece que estamos condenados. El objeto es asimétrico por culpa del agujero, por lo que parece que no queda más remedio que recurrir al método de integración a través de la (9). Por suerte hay gente ingeniosa que logra descomponer un problema difícil en partes fáciles. La idea genial es concebir al cilindro perforado de la figura 31 como la suma de dos cilindros. Uno de radio a con densidad ρ_0 de carga positiva y otro, más pequeño, de radio b y densidad de carga $-\rho_0$. Al combinar (sumar) ambos cilindros nos queda una zona sin carga (el agujero) y volvemos al sistema original. Increíblemente simple y eficaz.

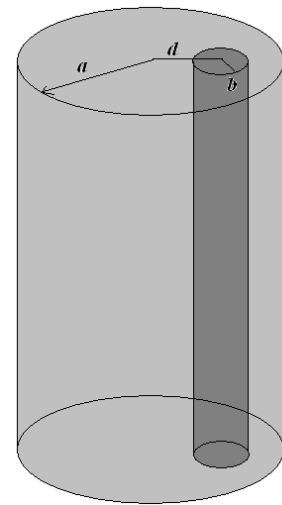


Figura 31. Un cilindro cargado con una perforación

Ahora todo parece más simple; se trata de computar dos campos por separado y luego sumarlos. Elegimos poner el centro del cilindro grande en el origen de coordenadas. El centro del cilindro pequeño lo ubicamos sobre el eje y , es decir en el punto $(0, d, 0)$.

Primero computamos el campo debido al cilindro grande en el punto $(0, d, 0)$. El problema es semejante al analizado en (34), faltando determinar las cantidades. El valor de r es igual a d y el versor radial (en el centro del agujero) apunta en la dirección $\hat{j}$. Así tenemos el aporte

$$\text{del cilindro grande: } \vec{E}_{\text{grande}} = \frac{\rho_0 d}{2\epsilon_0} \hat{j}$$

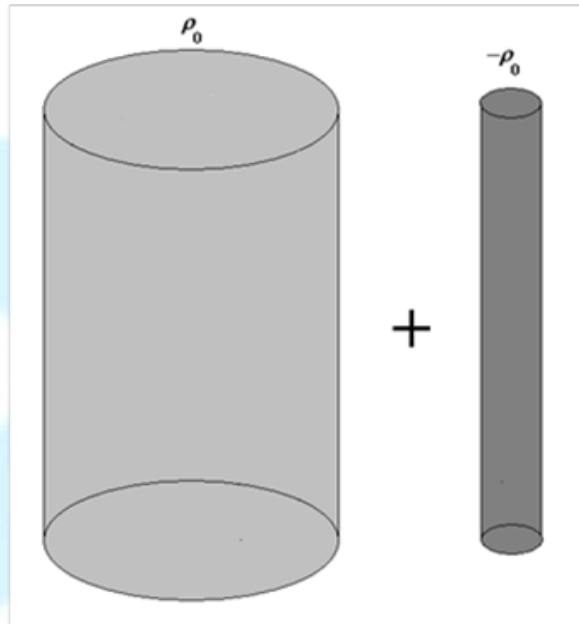


Figura 32. El objeto de la Fig.31 “desarmado”

Pasemos ahora al campo generado por el cilindro chico. El centro del agujero coincide con el del cilindro pequeño. Cuando puntualizamos en la (34) nos encontramos con que el campo generado por el cilindro chico es nulo!! Esto suena raro pero es correcto!! (Distinto habría sido si el punto de observación hubiera sido uno distinto al centro del agujero. Entonces el campo computado anteriormente es la respuesta final e increíblemente coincide con el que habríamos obtenido en ese lugar si el cilindro grande hubiera sido macizo. Desafío extra: calcular el campo en otro lugar (ayuda: aplicar bien la (34) en lo referente a las distancias y los versores; consultar al docente).

Fin tema especial 1

1.5. (Tema especial 2) Un comentario final sobre el uso de la ley de Gauss en situaciones reales

De los tres tipos de ejemplos ilustrados con la ley de Gauss, formalmente sólo uno de ellos puede ser encontrado en la práctica: la distribución esférica. Los otros ejemplos requieren de sistemas de extensión infinita por lo que quedan siempre orbitando dudas del tipo:

¿Es la ley de Gauss solamente una curiosidad matemática sin valor práctico?

¿Existe alguna situación del mundo real la cual pueda ser razonablemente analizada con la ley de Gauss?

La respuesta es afirmativa pero encontrar la justificación requiere de un poco de trabajo porque debemos recurrir al fatigoso método de integración para comparar los resultados, y así tratar de obtener conclusiones más o menos generales.

No hay nada mejor que comenzar con los casos particulares. Volvamos sobre el primero de los sistemas infinitos: el alambre uniformemente cargado.

El conjunto de ecuaciones (6) brinda la fuerza eléctrica entre dicho alambre, de longitud L , y una carga de prueba q_0 ubicada sobre la mediatriz del segmento que define el alambre y a una distancia d . ¿Cómo se relaciona este ejemplo con lo encontrado en (32)? Si en la (6) hacemos tender el largo L a infinito, y dividimos por q_0 , obtenemos lo siguiente:

$$F_{q_0}(\vec{r}) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda L}{d\sqrt{(L^2/4 + d^2)}} = \frac{q_0}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{d}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{d} \quad \vec{r} = 0\hat{i} + d\hat{j} + 0\hat{k}$$

el mismo resultado que brinda (32) (buenas noticias). Pero mejor aún, es que podemos comparar la diferencia entre (6) y (32) conforme crece el largo del alambre (Cuidado: en la (6) la distancia entre la carga de prueba y el alambre se denomina d y en la (32) como r).

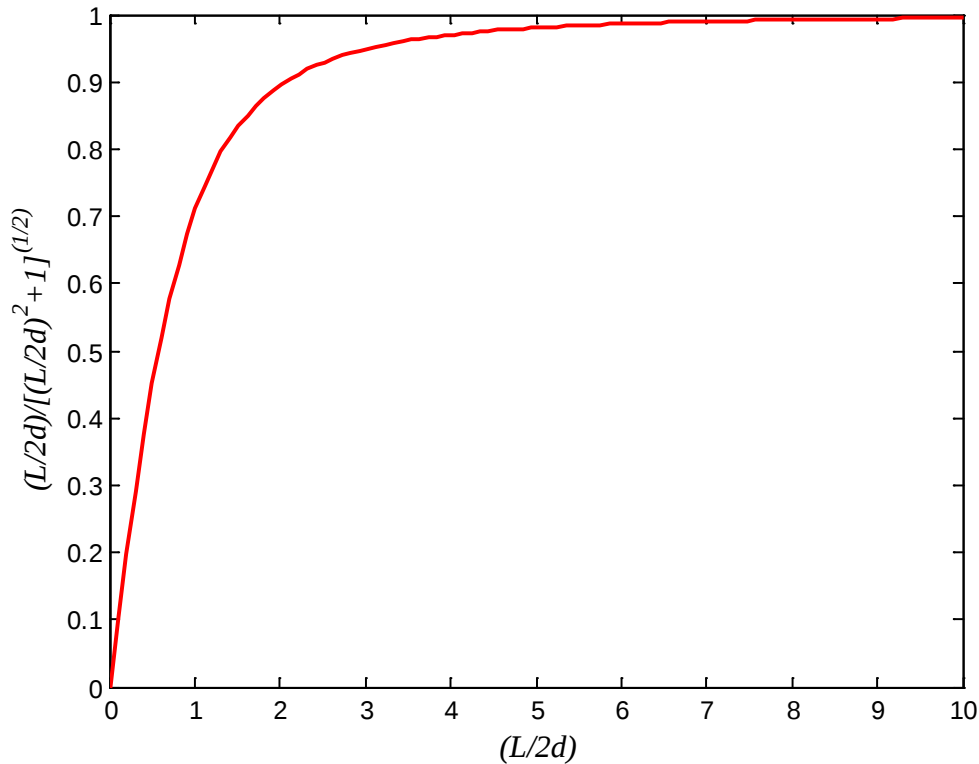
Intuimos que la relación entre el largo del alambre y la distancia del punto de observación al mismo (L/d) es relevante; por lo tanto factoreamos el término no nulo de (6) así:

$$F_{q_0}(\vec{r}) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda L}{d\sqrt{(L^2/4 + d^2)}} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{d} \frac{L}{\sqrt{d^2[(L/2d)^2 + 1]}} = \frac{q_0}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{d} \frac{(L/2d)}{\sqrt{[(L/2d)^2 + 1]}}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \left\{ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{d} \right\} \frac{(L/2d)}{\sqrt{[(L/2d)^2 + 1]}} \quad \vec{r} = 0\hat{i} + d\hat{j} + 0\hat{k}$$

En la última expresión, el término entre llaves es idéntico a la (32); el restante refleja la diferencia entre un alambre finito y uno infinito. Representemos solamente éste término que marca la diferencia entre la (6) y la (32).

El resultado es muy instructivo. Conforme $(L/2d)$ crece, el alambre se hace más largo o nos acercamos a él, la diferencia entre la (6) y la (32) se desvanece porque el factor de corrección tiende a 1. Por ejemplo, para $(L/2d) > 4$ la diferencia es inferior al 5%.



Al haber considerado un punto centrado fuimos afortunados porque es fácil observar que existen aportes al campo simétricamente distribuidos por lo que el resultado convergía rápidamente al límite. Un poco más compleja resulta la situación si el punto de observación no se encuentra centrado. Consideremos entonces que el borde izquierdo del alambre se encuentra en $-L_i$ y el derecho en L_d (El largo total del alambre es $L=L_d+L_i$). El campo eléctrico, recalculado con la idea de la (6), y dividiendo por q_0 para obtener el campo eléctrico, resulta:

$$E_x(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L_i}^{+L_d} \frac{(-x')\lambda dx'}{(x'^2 + d^2)^{3/2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(x^2 + d^2)}} \Big|_{-L_i}^{+L_d} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{L_d^2 + d^2}} - \frac{1}{\sqrt{L_i^2 + d^2}} \right]$$

$$E_y(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L_i}^{+L_d} \frac{(d)\lambda dx'}{(x'^2 + d^2)^{3/2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{d(x^2 + d^2)^{1/2}} \Big|_{-L_i}^{+L_d} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 d} \left[\frac{L_d}{\sqrt{(L_d^2 + d^2)}} + \frac{L_i}{\sqrt{(L_i^2 + d^2)}} \right]$$

$$E_z(\vec{r}) = 0 \quad \vec{r} = 0 \hat{i} + d \hat{j} + 0 \hat{k}$$

Ahora el resultado es más complejo de analizar. Primero notamos que el campo en la dirección x ya no es nulo. Esto es comprensible si notamos que, visto desde el punto de observación, la distribución de cargas ha perdido la simetría con respecto al eje y .

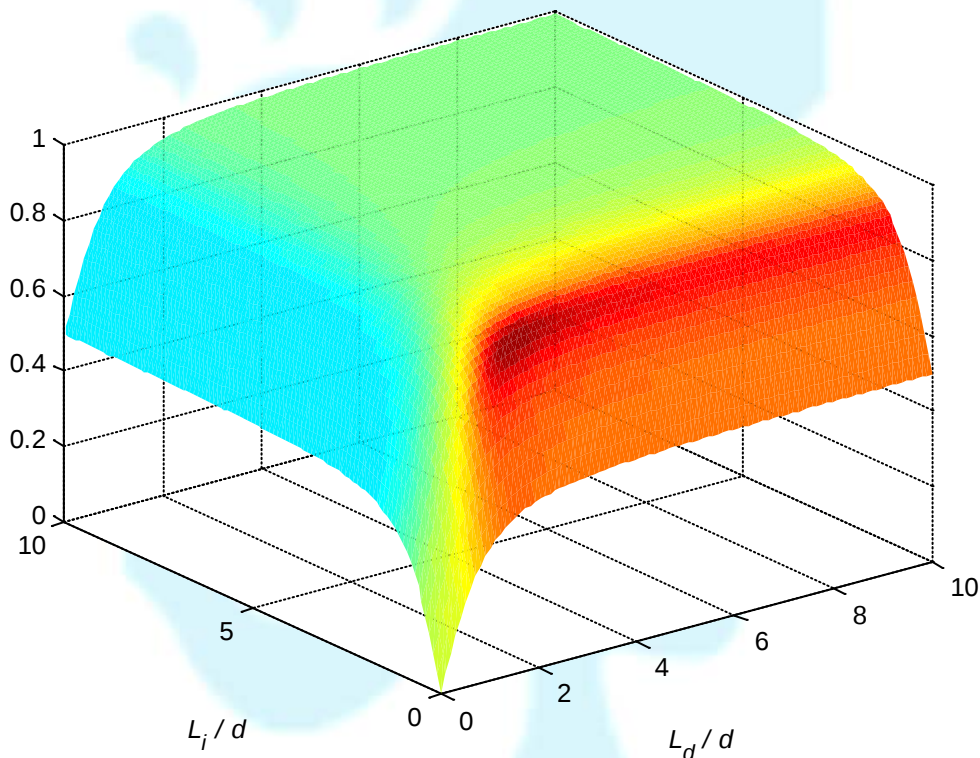
Repetimos el proceso anterior para hacer aparecer la razón L/d

$$E_x(\vec{r}) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{L_d^2 + d^2}} - \frac{1}{\sqrt{L_i^2 + d^2}} \right] = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{(L_d/d)^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{(L_i/d)^2 + 1}} \right]$$

$$E_y(\vec{r}) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 d} \left[\frac{L_d}{\sqrt{(L_d^2/4 + d^2)}} + \frac{L_i}{\sqrt{(L_i^2/4 + d^2)}} \right] = \left\{ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 d} \right\} \left[\frac{(L_d/2d)}{\sqrt{L_d^2/4 + 1}} + \frac{(L_i/2d)}{\sqrt{L_i^2/4 + 1}} \right]$$

$$E_z(\vec{r}) = 0 \quad \vec{r} = 0\hat{i} + d\hat{j} + 0\hat{k}$$

Concentrémonos en la componente E_y del campo (porque esta es la única presente si el hilo fuera infinito). El término entre llaves nuevamente representa el resultado que obtendríamos



en el caso de un largo infinito; el término entre corchetes depende ahora de dos variables, por lo que conviene una representación bidimensional

Notamos que, para valores grandes de L_i/d y L_d/d , el factor de corrección tiende a la unidad como esperábamos.

Vamos a analizar un caso particular que ha traído muchos disgustos. El punto de observación se encuentra en el borde izquierdo del alambre ($L_i/d=0$) y el largo total tiende a infinito ($L_d/d \gg 1$). Aquí viene un resultado peligroso: el factor de corrección para este caso es $\frac{1}{2}$. Algunas personas dicen: es lógico, tengo la mitad de la recta entonces el resultado es la mitad. Lamentablemente este razonamiento es erróneo. Para empezar olvida totalmente la componente en el eje x del campo (si insistimos con el otro punto de vista la componente E_x es

nula). El resultado es simplemente una coincidencia (en el eje y) y no significa que hayamos resuelto bien el problema. NO podemos emplear eficazmente la ley de Gauss porque al problema le falta “la mitad”.

CUIDADO!!!: El ejemplo anterior, si bien muestra que es fácil encontrar ejemplos donde el alambre se comporte como virtualmente infinito, es contrario al interés “aprobístico” de los alumnos. Si bien la gráfica ilustra que nos es necesario que el alambre sea demasiado largo como para que se comporte como infinito, el 99% de los docentes calificarán como insuficiente a un alumno que aplique la (32) en lugar de la (6) cuando el cable es finito. ¿Entonces, por qué lo puse? Lo hice porque quería mostrar la transición suave y que los ejemplos “extremos” no son sólo ejercicios matemáticos desprovistos de interés cotidiano. Recomendación final: Si en un ejercicio el alambre es finito vayan por el camino de la (6), así evitarán disgustos, pero recuerden que el infinito no queda tan lejos.

Fin tema especial 2

1.6. El trabajo de las fuerzas eléctricas. La diferencia de potencial

Los capítulos anteriores estuvieron dedicados al cálculo del campo eléctrico con distintas herramientas. Repetimos que nuestro interés en el campo eléctrico estriba en que con fuerzas eléctricas podemos mover cargas (aunque aún no hemos ahondado mucho en esto) y todo el negocio eléctrico reside en mover cargas ordenadamente (desde la linterna más humilde a la computadora más espectacular).

Si volvemos a nuestra querida carga de prueba e imaginariamente la transportamos desde un punto de partida hasta un punto de llegada resulta claro que, en general, habrá un trabajo involucrado.

Este tema resulta ser tan importante nuestra área que lo vamos a desarrollar lentamente para formularlo en una forma práctica para nuestros objetivos.

Comenzamos con la figura 33. La carga de prueba q_0 está sometida a un campo eléctrico $\vec{E}$ generado por un conjunto de cargas, estáticas, no mostrado. Obviamente actúan fuerzas eléctricas sobre todas las cargas, en particular la de prueba. Para mantener las cargas en sus

respectivas posiciones pensaremos que están fijas gracias a algún adhesivo, salvo por la carga de prueba que es retenida por nuestra mano.

Ahora imaginamos que movemos a q_0 desde una posición de partida hasta una de llegada siguiendo un camino C . Lo hacemos de una manera muy lenta, de forma tal que la velocidad de la carga sea virtualmente nula en todo momento. Para cumplir con esta consigna la fuerza que aplica nuestra mano debe ser de igual módulo y opuesta a la que ejerce el campo eléctrico (de lo contrario habría una fuerza neta sobre la carga, ésta aceleraría y la velocidad no sería casi nula). Esta forma de desplazar la carga recibe el nombre de cuasi-estática (el nombre es claro) y asegura, entre otras cosas, que la energía cinética de la carga sea casi cero, por lo que el trabajo realizado por la mano es opuesto al efectuado por las otras fuerzas (eléctricas en este caso)

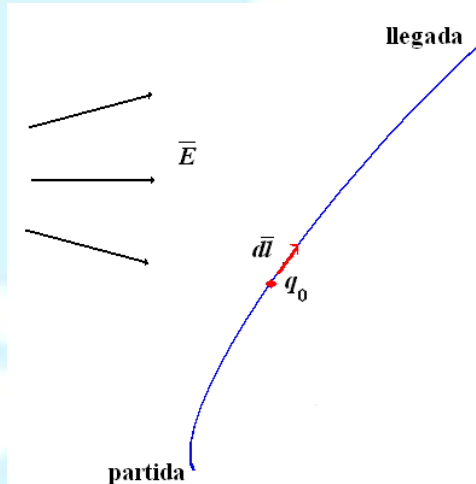


Figura 33. Una carga de prueba sometida a un campo eléctrico recorre un camino

Volvamos por un rato a Física I y computemos el trabajo W hecho por la *mano*:

$$W_{partida-llegada} = \int_{partida}^{llegada} \vec{F}_{mano} \cdot d\vec{l} = \int_{partida}^{llegada} -\vec{F}_{eléctrica} \cdot d\vec{l} = \int_{partida}^{llegada} -q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (36)$$

En la (36) escribimos la fuerza aplicada por la mano como el valor opuesto a las fuerzas eléctricas, es decir el producto de la carga de prueba por el campo. Por un tema de nomenclatura tuvimos que omitir que el camino de integración es la curva C y que por lo tanto $d\vec{l}$ es un elemento de camino tangente en todo punto a C .

Nada mejor que un primer ejemplo fácil. La carga de prueba está sometida al campo generado por una única carga Q positiva, ubicada en el origen de coordenadas (figura 34). Los puntos de partida $\vec{r}_i$ y llegada $\vec{r}_f$ (i por *inicial*, f por *final*) se encuentran sobre una recta que pasa por Q y el camino recorrido es a lo largo de esta recta.

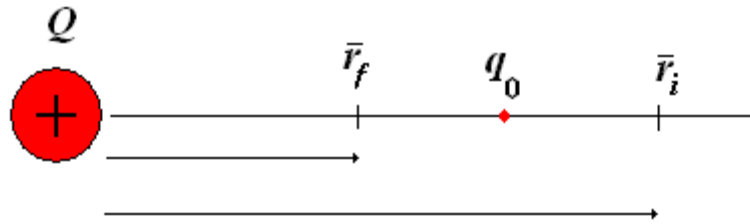


Figura 34. Desplazando la carga de prueba en el campo de una carga puntual

Calculemos entonces el trabajo realizado:

$$W_{\vec{r}_f, \vec{r}_i} = - \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} q_0 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot dr \hat{r} = - \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} q_0 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q_0 Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i} \right) \quad (37)$$

Hay que comentar muy lentamente cada uno de los pasos de la ecuación anterior. Primero tenemos el campo eléctrico generado por Q . La ecuación (18) nos da su módulo y dirección. En este ejemplo tan simple el elemento de camino es recorrido en dirección radial, por lo que escribimos $d\vec{l} = d\vec{r} = dr \hat{r}$. Aquí es importante destacar un error muy común; muchas personas dicen: “Estamos yendo de derecha a izquierda, por lo tanto el elemento de camino debería ser escrito con un signo menos delante”. Esto **NO** es correcto. La mención a que el recorrido es de derecha a izquierda ya está contemplada en los límites de la integral. El camino es a lo largo de la dirección radial y son los límites los que dan el signo correcto. Si esta explicación es insuficiente vamos a verlo desde otro punto de vista. El movimiento de q_0 es tal que nos acercamos a Q . Dado que actúa una fuerza repulsiva entre ambas por ser del mismo signo, el trabajo realizado por nosotros es positivo (verificarlo). Esto está confirmado por el signo de la (37) dado que el factor delante del paréntesis es positivo, además dado que $r_f < r_i$, también el paréntesis es positivo. **CUIDADO:** r_i y r_f son los módulos de $\vec{r}_i$ y $\vec{r}_f$ respectivamente. La (37) es por lo tanto un escalar, que es lo correcto puesto que se trata de un trabajo.

Este fue un ejemplo fácil; vamos a considerar uno más complicado. Los puntos de partida y de llegada no se encuentran sobre una recta que pase por Q (figura 35), pero nos autorizan a tomar el camino que más nos plazca.

Esta libertad de elegir el camino es maravillosa,

vamos a proponer la solución del hombre vago y

tomamos el camino también mostrado en la figura: el trayecto desde $\vec{r}_i$ hasta $\vec{a}$ es un arco de circunferencia con centro en Q . Luego, desde $\vec{a}$ hasta $\vec{r}_f$ retomamos el recorrido radial del

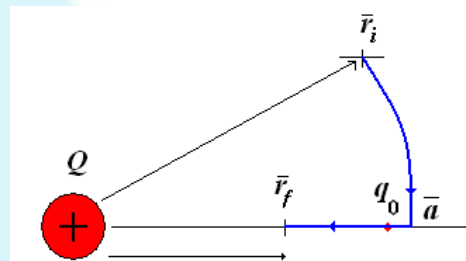


Figura 35. Un camino más complicado

primer ejemplo. El trabajo realizado en el primer tramo es nulo porque el campo es perpendicular al desplazamiento. El trabajo realizado en el segundo tramo queda entonces dado por la (37), pero notamos que $a=r_i$, por lo que el trabajo realizado vuelve a tener la misma expresión que antes aunque los puntos estaban ubicados de otra manera.

¿Es pura casualidad? ¿Qué sucede con otros caminos?

En lugar de probar infinitas posibilidades es mejor recordar que el trabajo es un caso particular de la circulación de un vector a lo largo de una curva. La herramienta que nos facilita la tarea es el cómputo del rotor del vector (recordar teorema de Stokes).

En coordenadas esféricas el rotor está dado por:

$$\begin{aligned} \text{rot}(\vec{E}) = & \frac{1}{r \sin(\varphi)} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} (\sin(\varphi) E_\theta) - \frac{\partial E_\varphi}{\partial \theta} \right] \hat{r} + \\ & \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin(\varphi)} \frac{\partial E_r}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial r} (r E_\theta) \right] \hat{\varphi} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) - \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} \right] \hat{\theta} = 0; \quad r \neq 0 \end{aligned} \quad (38)$$

El resultado se obtiene a partir de notar que $E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$ y $E_\theta = E_\varphi = 0$

El rotor del campo eléctrico generado por una carga puntual es nulo en todo punto que no coincida con la carga. Esto nos dice que la circulación del campo eléctrico en un camino cerrado es cero ($\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$) y por lo tanto se trata de un campo conservativo. Esto no es sorprendente porque la ley de Coulomb tiene la misma forma matemática que la ley de gravitación de Newton, así que ambas comparten las mismas propiedades matemáticas y recordamos de Física I que las fuerzas gravitatorias son conservativas.

En virtud del principio de superposición, lo determinado para una carga puntual puede ser extendido a un conjunto de cargas. Llegamos a la importante conclusión que el campo eléctrico generado por una distribución estática de cargas (electrostático) es conservativo. Este descubrimiento es muy valioso porque nos dice que el trabajo realizado contra las fuerzas eléctricas queda disponible en el sistema para poder ser utilizado posteriormente. En este sentido es idéntico al caso de elevar un peso realizando un trabajo. Sabemos que éste queda almacenado como energía potencial gravitatoria y lo podemos utilizar en otras aplicaciones. A nadie sorprenderá que dentro de unos párrafos introduzcamos el concepto de energía electrostática.

Pero volvamos ahora sobre un argumento que ya utilizamos al definir el campo eléctrico. Al observar la (36) notamos que hay una dependencia lineal trivial del trabajo realizado con el valor de la carga de prueba q_0 . Podemos repetir lo hecho y concebir el trabajo realizado por

unidad de carga. Esta cantidad es útil porque, una vez evaluada, para obtener el trabajo realizado para un valor particular de q_0 nos basta con efectuar un producto. Esta magnitud recibe el nombre de diferencia de potencial V . Por lo dicho queda definida por:

$$V(\vec{r}_f) - V(\vec{r}_i) = \frac{W_{\vec{r}_f, \vec{r}_i}}{q_0} = - \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (39)$$

Los términos del medio y de la derecha de la (39) son de interpretación directa. Distinto es el caso con el de la izquierda. Lo hemos escrito como la diferencia de dos magnitudes evaluadas en dos posiciones diferentes. Esto es válido porque hemos demostrado que el campo eléctrico es conservativo. Por lo tanto la circulación del mismo entre dos puntos es independiente del camino y eso se traduce en que dicha circulación puede ser evaluada como la diferencia de una función escalar, llamada potencial (en sentido matemático, no eléctrico). La unidad SI de la diferencia de potencial se denomina Volt (V), en homenaje a Alessandro Volta quien aportó mucho a nuestro conocimiento de los fenómenos eléctricos. Obviamente $1 \text{ V} = 1 \text{ J/C}$.

Para el caso de la (37) la diferencia de potencial es:

$$V(\vec{r}_f) - V(\vec{r}_i) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i} \right) \quad (40)$$

Vamos a reescribir (39), previa diferenciación, en una forma alternativa:

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -(E_x \hat{i} + E_y \hat{j} + E_z \hat{k}) \cdot (dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}) = -(E_x dx + E_y dy + E_z dz) \quad (41)$$

Por otro lado sabemos que (lo enseñan en Análisis II):

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \quad (42)$$

Finalmente, comparando (41) y (42):

$$\vec{E} = - \left(\frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k} \right) = -\text{grad}(V) \quad (43)$$

La (43) contiene la misma información que la (39). Podemos, ligeramente, decir que una representa la “ida” y la otra la “vuelta”. Conocido uno cualquiera, podemos computar el otro. Una curiosidad matemática a futuro; si combinamos la (26) con la (43) resulta:

$$\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \text{div}[-\text{grad}(V)] = -\nabla^2(V) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (44)$$

La (44) se denomina ecuación de Poisson (El operador ∇^2 recibe el nombre de laplaciano). Es una ecuación diferencial a derivadas parciales de segundo orden. Las técnicas para resolver estas ecuaciones son temario de Análisis III y no todos los alumnos deben cursar esa materia, por lo que no podemos ahondar en ella. Sólo diremos que, a pesar de la complejidad aparente, hay más métodos para resolver ecuaciones diferenciales como la (44) que ecuaciones integrales como las que propone la ley de Gauss. De hecho, los programas tales como FEMM, QuickField (y otros), resuelven en forma numérica la (44) con mucha rapidez. De todas formas, en nuestra materia nos restringiremos a las formas integrales, aplicadas a las formas más simples, de forma tal de mantener la complejidad matemática dentro de un rango “razonable”.

1.7. El problema de la referencia. La maldición de “El potencial”

Hasta aquí tenemos definida la diferencia de potencial entre dos puntos. Siempre surge la pregunta: ¿Dónde está el cero? Respuesta: Donde nos plazca. Así como el nivel de referencia para la energía potencial gravitatoria es el que nos quede más cómodo para un problema en particular, lo mismo sucede en este caso. El tema no daría para más si no se hubiera popularizado, demasiado, la siguiente convención que, si bien es cómoda, ha traído muchos disgustos.

Volvamos a la situación en que la fuente de campo sea una única carga Q e imaginemos que la posición inicial $\vec{r}_i$ de q_0 estuviera extraordinariamente alejada (en el infinito, $\vec{r}_i \rightarrow \infty$). Hagamos de ese lugar el de referencia y asignémosle un valor nulo: $V(\infty)=0$. Ahora que tenemos un lugar y valor de referencia (totalmente arbitrario por cierto), obtenemos una función potencial definida en cualquier punto. Por ejemplo, la (40) se transforma en:

$$\lim_{\vec{r}_i \rightarrow \infty} [V(\vec{r}_f) - V(\vec{r}_i)] = V(\vec{r}_f) - 0 = V(\vec{r}_f) = \lim_{\vec{r}_i \rightarrow \infty} \left[\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i} \right) \right] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_f} \quad (45)$$

$$V(\vec{r}_f) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_f}$$

Esta expresión no sólo es cómoda matemáticamente sino que, como veremos más adelante, nos facilita el cálculo de la cantidad de energía almacenada en un sistema de cargas. Igualmente **NO** hay que olvidar que la (45) representa una elección **ARBITRARIA** del lugar de referencia y el valor correspondiente. Esta asignación se hace tantas veces que degenera en un vicio: el de hablar del potencial de un punto cualquiera. Veámoslo con un ejemplo. Supongamos que en la (45) la carga Q es de 1 nC y la distancia r_f de 1m. El valor numérico

que obtenemos es $V(r_f) \approx 9 \text{ V}$. Es aquí cuando muchas personas se expresan descuidadamente y dicen solamente: “El potencial del punto r_f es aproximadamente 9 V”. Si la oración termina aquí es, cuando menos, incompleta y conduce a razonamientos generalmente erróneos. La oración correcta, aunque muy larga, es: **“El potencial del punto r_f es aproximadamente 9 V, tomando como punto de referencia al infinito y asignándole a éste un valor nulo”**. Esta forma es intolerablemente larga, pero enfatiza la importancia de informar el punto de referencia utilizado.

A esta altura tantas recomendaciones pueden parecer exageradas, pero ilustraremos con un ejemplo los problemas de automatizar la elección del punto de referencia. El objetivo es calcular la diferencia de potencial entre dos puntos si el objeto cargado es el plano infinito de la figura 28. Supongamos que dicho plano coincide con el xy y que los puntos de observación corresponden a la región $z > 0$ para hacer todo más fácil.

El campo vale $E(\vec{r}) = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \hat{k}$ (el versor normal al plano apunta a lo largo del eje z). Los puntos son $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ y $\vec{r}_f = (x_f, y_f, z_f)$ y el camino de integración (que lo elegimos a nuestra conveniencia) lo hacemos primero a lo largo de una recta desde (x_i, y_i, z_i) hasta (x_i, y_i, z_f) y luego otro tramo recto desde (x_i, y_i, z_f) hasta (x_f, y_f, z_f) . Para el primer recorrido el elemento de camino vale $d\vec{l} = dz \hat{k}$, por lo que obtenemos:

$$V(x_i, y_i, z_f) - V(x_i, y_i, z_i) = - \int_{x_i, y_i, z_i}^{x_i, y_i, z_f} \vec{E} \cdot d\vec{l} - \int_{x_i, y_i, z_f}^{x_f, y_f, z_f} \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \hat{k} \cdot dz \hat{k} = - \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} (z_f - z_i) \quad (46)$$

Si pasamos ahora al segundo tramo, notamos que el camino es perpendicular a las líneas de campo, por lo que la diferencia de potencial es cero. La conclusión es que la (46) es la diferencia de potencial total entre los puntos inicial y final. El resultado era de esperar porque las líneas de campo están a lo largo del eje z y entonces sólo importan cambios de posición en esa dirección. Ahora vamos a lo dramático: ¿Qué pasa si insistimos con el criterio de elección para el punto de referencia? Muy pronto vemos que no podemos porque deberíamos hacer tender z_i a infinito y la expresión diverge.

¿Qué sucedió? La respuesta es simple; hemos exagerado tanto para conseguir un cómputo simple del campo eléctrico que terminamos con un objeto (el plano cargado) que contiene una cantidad total de carga infinita. No es de sorprender que el problema se torne divergente. El mismo problema existe con el alambre infinito porque nuevamente la cantidad de carga almacenada es infinita. En el mundo real los alambres y planos son de extensión finita, por lo tanto, al alejarnos mucho en el intento de llevar el punto de referencia al infinito, la ley de

variación del campo se aparta notoriamente de la obtenida bajo la suposición que el sistema es ilimitado y expresiones como la (46) deben ser recalculadas (lamentablemente la expresión del campo se vuelve mucho más difícil). En los casos “fáciles” (plano o alambre infinitos) es **INUTIL**, buscar un punto de referencia y un valor que arreglen el problema. Es una intención destinada al fracaso porque el problema es intrínsecamente divergente.

Sin embargo, los casos “fáciles” son demasiado atractivos como para despreciarlos. Además existen muchos objetos del mundo real que se aproxima a los idealizados. No habrá hilos infinitos, pero sí cables muy largos y lo mismo sucede con placas planas. Para estas situaciones podemos calcular la diferencia de potencial siempre y cuando los puntos inicial o final no involucren al infinito.

Calculemos ahora un caso “fácil”: la diferencia de potencial entre dos puntos debida a un hilo homogéneamente cargado y de largo infinito.

El campo ya lo conocemos y está dado por la (32): $\vec{E} = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \hat{r}$

Dada la forma funcional del campo vemos que sólo es relevante la diferencia en las coordenadas radiales de los puntos inicial y final, por lo que los podemos suponer ubicados sobre una recta que pasa por el hilo y es normal a éste.

$$V(\vec{r}_f) - V(\vec{r}_i) = - \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{r_i}^{r_f} \left(\frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \hat{r} \right) \cdot (dr \hat{r}) = - \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_f}{r_i}\right) \quad (47)$$

Como se puede apreciar, nuevamente estamos en problemas si cualquiera de las posiciones tiende a infinito (o r_i a cero). Si embargo, tanto el caso del plano (46) como el hilo (47), brindan respuestas “buenas” para posiciones acotadas. Además, veremos que en varias circunstancias nos encontraremos con objetos cargados que siguen razonablemente estas últimas expresiones

En síntesis: debemos hablar de diferencias de potencial y tratar de evitar a toda costa decir “el potencial” sin especificar la referencia porque puede traer confusiones graves.

1.8. Diferencia de potencial con varias cargas

Hasta ahora, los ejemplos se han limitado a una única carga puntual y distribuciones planas o cilíndricas infinitas. Pasemos al análisis con varias cargas (figura 36). Queremos calcular la diferencia de potencial entre los puntos inicial y final; no dibujamos el camino porque ya sabemos que no es relevante.

La primer idea es la de computar el campo eléctrico para un punto genérico del espacio, para luego pensar un camino “ingenioso” que permita resolver la (39) con el menor sufrimiento posible.

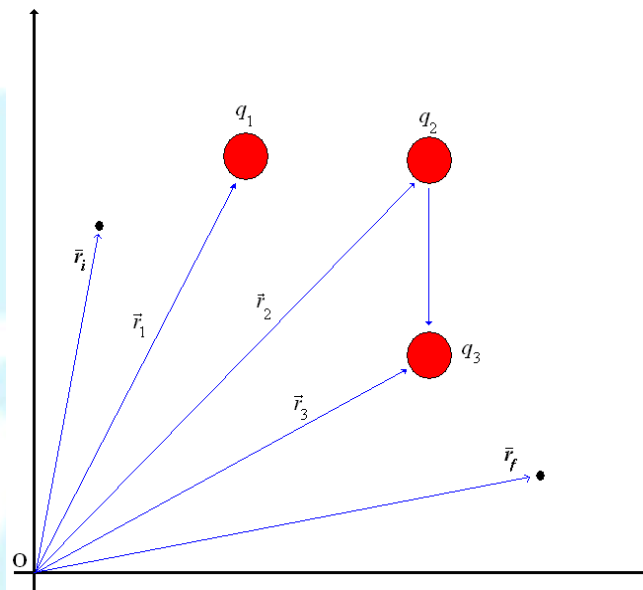


Figura 36. Diferencia de potencial en un sistema de varias cargas

La idea es impecable porque apunta a la aplicación directa de la definición. Lamentablemente no siempre es la mejor porque involucra dos pasos: 1) determinar el campo eléctrico (con sus tres componentes), 2) integrar desde el punto de partida al de llegada. Mucho esfuerzo.

Mejor es volver al principio de superposición y considerar que sólo existe q_1 . En tal situación la diferencia de potencial vale (a partir de la (40)):

$$[V(\vec{r}_f) - V(\vec{r}_i)]_{q_1} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\vec{r}_f - \vec{r}_1|} - \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_1|} \right] \quad (48)$$

En esta expresión aparece explícitamente la posición de q_1 ($\vec{r}_1$) porque ella no se encuentra en el origen de coordenadas. Repitiendo para q_2 y q_3 tenemos:

$$[V(\vec{r}_f) - V(\vec{r}_i)]_{q_2} = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\vec{r}_f - \vec{r}_2|} - \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_2|} \right]$$

$$[V(\vec{r}_f) - V(\vec{r}_i)]_{q_3} = \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\vec{r}_f - \vec{r}_3|} - \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_3|} \right] \quad (49)$$

Ahora sólo queda sumar los tres aportes debidos a q_1 , q_2 y q_3 .

$$[V(\vec{r}_f) - V(\vec{r}_i)]_{q_1, q_2, q_3} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\vec{r}_f - \vec{r}_1|} - \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_1|} \right] + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\vec{r}_f - \vec{r}_2|} - \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_2|} \right] + \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\vec{r}_f - \vec{r}_3|} - \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_3|} \right] \quad (50)$$

Sin dudas es mucho menos trabajo que el método basado en la integración.

Si queremos volver a definir al infinito como el punto inicial de referencia obtenemos una expresión simplificada:

$$[V(\vec{r}_f)]_{q_1, q_2, q_3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1}{|\vec{r}_f - \vec{r}_1|} + \frac{q_2}{|\vec{r}_f - \vec{r}_2|} + \frac{q_3}{|\vec{r}_f - \vec{r}_3|} \right] \quad (V(\infty)=0) \quad (51)$$

Obviamente, si bien presentamos tres cargas, el método se puede extender fácilmente a un conjunto discreto de cargas.

Un poquito más de trabajo requiere el caso de tener una distribución continua de cargas; perola claveestá en generalizarla ecuación (50). Volvemos sobre la distribución unidimensional de carga, aunque después lo generalizaremos (ver figura 37)

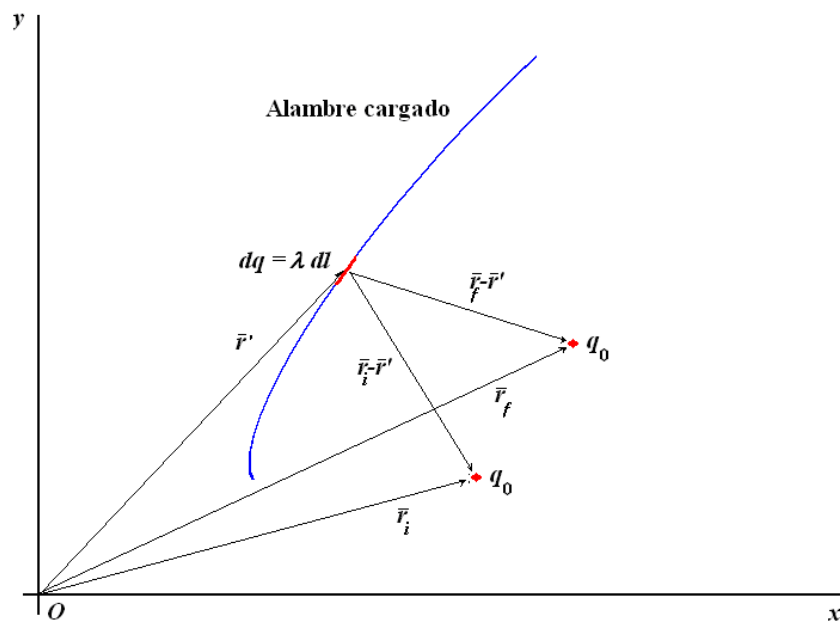


Figura 37. Diferencia de potencial entre dos puntos debido a un alambre cargado

Como siempre, la carga de prueba q_0 es desplazada desde el punto inicial al final (mantenemos la nomenclatura previa). La idea tomada “prestada” de la (50) es que dividimos el sistema en un gran número de partes (luego tomamos el límite hacia infinito). Si centramos nuestra atención en el tramo rojo con carga dq , podemos calcular el diferencial de diferencia de potencial (suena a trabalenguas) como:

$$d[V(\vec{r}_f) - V(\vec{r}_i)] = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\vec{r}_f - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}'|} \right] \quad (52)$$

Nótese que la posición $\vec{r}_i$ de la i -ésima carga ha sido reemplazada por la posición genérica $\vec{r}'$ del elemento rojo.

Ahora sólo resta aplicar el principio de superposición integrando sobre todas las contribuciones para obtener:

$$V(\vec{r}_f) - V(\vec{r}_i) = \int_{\text{Cable}} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\vec{r}_f - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}'|} \right] = \int_{\text{Cable}} \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\vec{r}_f - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}'|} \right] \quad (53)$$

La extensión a sistemas 2-D y 3-D es directa (¿se animan a escribirlas?)

La expresión (53) se simplifica si hacemos del infinito el punto de referencia:

$$V(\vec{r}_f) = \int_{\text{Cable}} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\vec{r}_f - \vec{r}'|} \right] = \int_{\text{Cable}} \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\vec{r}_f - \vec{r}'|} \right] (V(\infty)=0) \quad (54)$$

La expresión anterior, y sus equivalentes bi o tridimensionales, son aplicables en la medida en que el objeto cargado no sea de dimensiones infinitas porque caeríamos en el problema ya comentado.

Ilustremos con un ejemplo. Una distribución uniforme de cargas con forma de anillo de radio a se encuentra en el plano xy con su centro en el origen de coordenadas. Se desea conocer la diferencia de potencial entre los puntos inicial $(0,0,2a)$ y final $(0,0,-a)$ (figura 38).

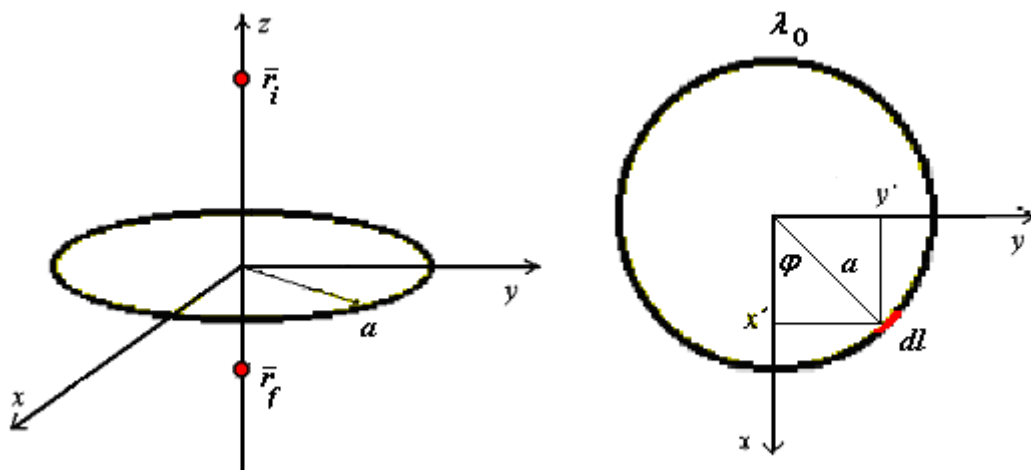


Figura 38. Diferencia de potencial entre dos puntos generada por un anillo cargado

Comencemos asignando variables: $\vec{r}_i = (0,0,2a)$; $\vec{r}_f = (0,0,-a)$

La posición del elemento cargado genérico es: $\vec{r}' = a \cos(\varphi') \hat{i} + a \sin(\varphi') \hat{j} + 0 \hat{k}$. El elemento de camino dl lo obtenemos por derivación de la curva paramétrica anterior:

$$d\vec{l} = (-a \sin(\varphi') d\varphi', a \cos(\varphi') d\varphi', 0); dl = \sqrt{a^2 \sin^2(\varphi') + a^2 \cos^2(\varphi')} d\varphi' = a d\varphi'$$

Ahora podemos armar los distintos términos de la (53)

$$|\vec{r}_i - \vec{r}'| = |(0, 0, 2a) - (a \cos(\varphi'), a \sin(\varphi'), 0)| = |(-a \cos(\varphi'), -a \sin(\varphi'), 2a)| = \sqrt{5}a$$

$$|\vec{r}_f - \vec{r}'| = |(0, 0, -a) - (a \cos(\varphi'), a \sin(\varphi'), 0)| = |(-a \cos(\varphi'), -a \sin(\varphi'), -a)| = \sqrt{2}a$$

$$V(\vec{r}_f) - V(\vec{r}_i) = \int_{Anillo} \frac{\lambda_0 dl}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\vec{r}_f - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}'|} \right] = \int_0^{2\pi} \frac{\lambda_0 a d\varphi'}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{5}a} - \frac{1}{\sqrt{2}a} \right] = \frac{\lambda_0}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right]$$

Como se puede apreciar la complejidad del desarrollo se redujo bastante comparado con la que nos habríamos enfrentado en el caso de computar primero el campo y luego integrarlo a lo largo de algún camino.

No todos los casos se ven beneficiados por esta aproximación. Cuando la forma funcional del campo es fácilmente calculable (como en los ejemplos desarrollados a partir de la ley de Gauss) la aplicación directa de la (39) es más simple.

Consideremos, por ejemplo, el caso ya tratado de una esfera de radio a uniformemente cargada en volumen con densidad ρ_0 (ecuaciones 29 y 31). Tenemos tres alternativas posibles: 1) los puntos inicial y final se encuentran fuera de la esfera, 2) uno se encuentra fuera y otro dentro, 3) ambos se encuentran dentro. Tratar todos los casos es largo y sólo queremos puntualizar ventajas de un método u otro. Tomemos, arbitrariamente, la segunda opción con $r_i > a$ y $r_f < a$.

Dado el carácter radial de las líneas de campo, sólo es relevante la diferencia en dicha coordenada entre los puntos inicial y final. Por lo tanto, aunque no se encuentren en una recta que pase por el centro de la esfera, los podemos imaginar en tal situación. La diferencia de potencial por integración directa brinda:

$$V(\vec{r}_f) - V(\vec{r}_i) = - \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \left(\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \frac{\rho_0 a^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{r} + \int_a^{\vec{r}_f} \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0} \hat{r} \cdot d\vec{r} \right) =$$

$$- \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \left\{ \left[a^3 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r_i} \right) \right] + \frac{1}{2} (r_f^2 - a^2) \right\}$$

Es importante notar que la integración tiene dos sumandos, correspondientes a las dos regiones diferentes. Si optamos por una ecuación análoga a la (53) resulta:

$$V(\vec{r}_f) - V(\vec{r}_i) = \int_{\text{Esfera}} \frac{\rho_0 dv}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\vec{r}_f - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}'|} \right]$$

Acá nos enfrentamos con un problema operativo: Por la forma del objeto cargado parece natural utilizar un sistema de coordenadas esférico. Lamentablemente, en este sistema, las diferencias de vectores son expresiones complicadas. A pesar de lo horrible que parece conviene pasar a un sistema cartesiano, pero claramente los límites de integración resultan terriblemente complejos. Conclusión: a pesar de ser un problema simple, es preferible recurrir a la integración del campo antes que recurrir al cómputo a través de la (53).

El resumen de estos ejemplos nos ilustra que hay que evitar el modo automático y meditar antes de actuar. En algunos casos es preferible calcular la diferencia de potencial a través de la (39) y en otros por la (53). ¿Cómo lo sabemos? Practicando un poco hasta adquirir la habilidad para reconocer el mejor camino.

1.9. Equipotenciales

Volvamos por ahora a la situación en que la elección de la referencia estándar no acarrea dramas. En tal situación todo punto $\vec{r}$ del espacio tiene asignado un potencial $V(\vec{r})$. Las regiones de $V(\vec{r}) = cte$ definen las llamadas curvas o superficies equipotenciales las que, en virtud de la (43), resultan ser perpendiculares a las líneas de campo como muestra la figura 39 para el caso de una carga positiva.

Dada la conexión entre campo eléctrico y potencial ya mencionada (43) no es usual dibujar ambos porque el dibujo se vuelve confuso (particularmente en blanco y negro). Las curvas equipotenciales son de interés porque al desplazarnos sobre ellas no se realiza trabajo. En breve veremos que desplazar cargas dentro de un metal no requiere de trabajo alguno, por lo que son objetos equipotenciales. Por último, y contando algo antes de tiempo, vale la pena mencionar que las pilas comunes son dispositivos que transportan carga entre los bornes de entrada y salida con la peculiaridad que la cantidad de trabajo que realiza por unidad de carga (diferencia de potencial) es un valor constante; por ejemplo 1.5 V. Ya volveremos sobre las pilas.

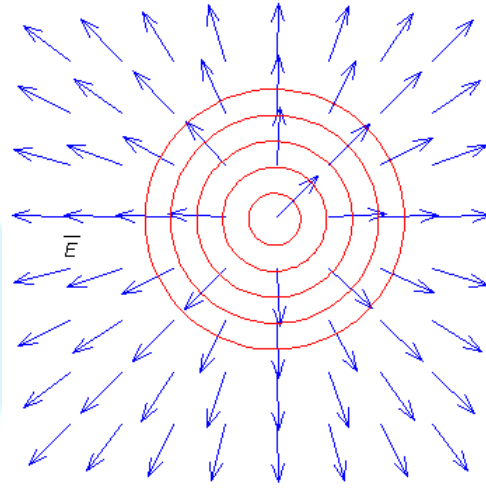


Figura 39. Líneas de campo (azul) y equipotenciales (rojo) de una carga positiva.

Un segundo ejemplo será de ayuda. Dos cargas de igual valor Q y distinto signo (se denomina dipolo a esta configuración) se encuentran ubicadas sobre el eje x en las posiciones $+d/2$ y $-d/2$. La herramienta directa es la (51) con:

$$\vec{r}_1 = (+d/2, 0); \vec{r}_2 = (-d/2, 0)$$

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_2|} \right]$$

Claramente aquí resulta $V(0)=0$ porque dicho punto se encuentra a igual distancia de ambas cargas. Lo mismo ocurre con los puntos sobre el eje y . Con un poco de álgebra (o computadora) se pueden encontrar otras curvas equipotenciales como las que muestra la figura 40.

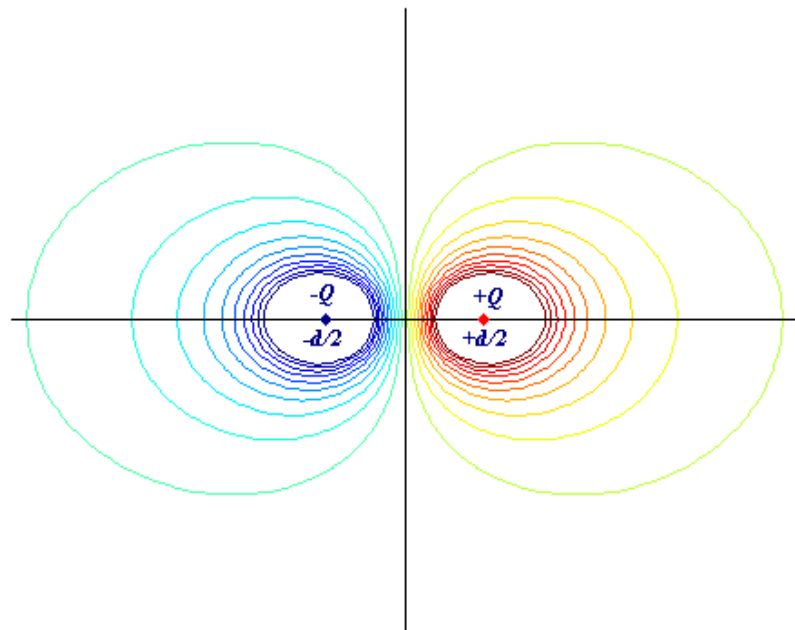


Figura 40. Líneas equipotenciales para un dipolo

Capítulo 2

Conductores y Capacitores

2.1.	<u>Introducción</u>	2-2
2.2	<u>La Ley de Gauss y la irrotacionalidad del campo electrostático</u>	2-3
2.3	<u>Campo electroestático en las cercanías de un conductor</u>	2-6
2.4.	<u>Superficies equipotenciales</u>	2-8
2.5	<u>Los conductores y el principio de superposición</u>	2-10
2.6	<u>Varias configuraciones con conductores: a trabajar!!!</u>	2-19
2.6.1	<i>Placa maciza en un campo electrico uniforme</i>	
2.6.2	<i>Esfera maciza metalica cargada</i>	
2.6.3	<i>Cáscara esférica conductora cargada</i>	
2.6.4	<i>Cáscara esferica cargada con una carga en el centro</i>	
2.6.5	<i>Dos cáscaras esféricas metálicas cargadas</i>	
2.6.6	<i>Cáscara cilíndrica conductora cargada</i>	
2.6.7	<i>Dos cáscaras cilíndricas conductoras cargadas</i>	
2.6.8	<i>Dos cáscaras cilíndricas metálicas concéntricas cargadas con distintas cargas con una distribución lineal de cargas</i>	
2.7	<u>Puntas agudas en conductores</u>	2-19
2.8	<u>Cargando metales: las pilas</u>	2-22
2.9	<u>Los capacitores</u>	2-23
2.9.1	<u>Ejemplos a resolver</u>	2-27
2.9.2	<u>Para qué sirven los capacitores</u>	2-27
2.9.3	<u>El trabajo necesario para cargar un capacitor.</u>	2-30
2.9.3	<u>La fuerza entre placas de un capacitor. (fuera de programa)</u>	2-30

2.1 Introducción

Hasta ahora estudiamos los campos eléctricos creados por distribuciones de carga en “la nada”. No había materia, tenemos un tipo de material (que llamaremos material conductor) sometido a campos eléctricos creados por cargas o distribuciones de ellas, o cuando las cargas “se introducen” (por algún mecanismo) en cuerpos conductores.

Partimos del siguiente resultado experimental: *nunca se pudo medir en una **situación electrostática** un campo eléctrico dentro de un conductor*. Es decir, si por ejemplo se coloca un cuerpo conductor (llamado “el conductor”) en un campo eléctrico uniforme $\vec{E}_{ext}$, los electrones del metal se mueven de forma tal que el campo se deforma y, además, resulta nulo dentro del conductor (Figura 1)

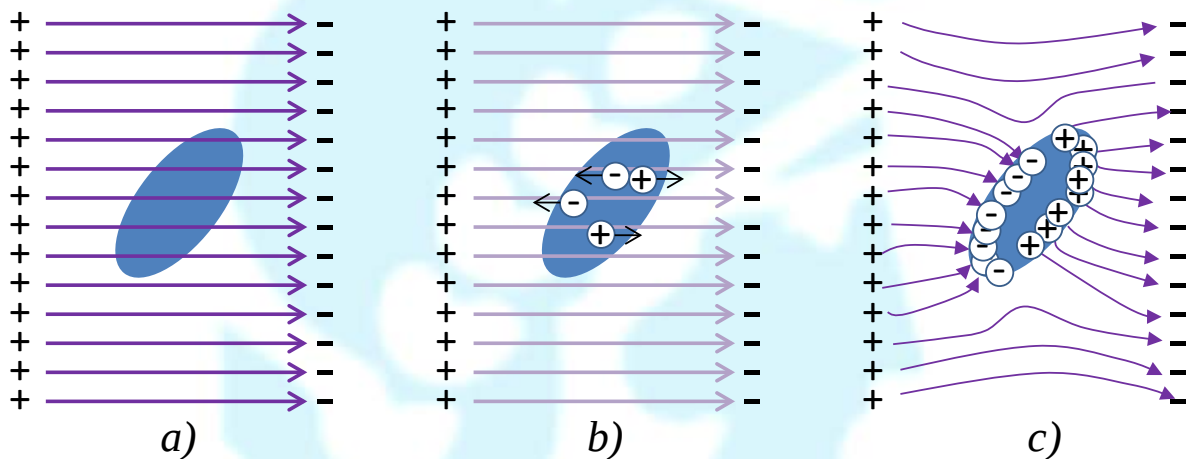


Fig. 1- a) muestra donde es colocado el conductor y dibujo de líneas de campo como si el objeto no tuviera características eléctricas, b) cómo se redistribuyen las cargas en el mismo, c) dibujo de las líneas de campo deformadas

Veamos que el modelo de electrón libre resulta adecuado para describir este comportamiento. Si en las moléculas de un conductor existen uno o más electrones libres de moverse, el campo eléctrico externo hará que éstos se desplacen y reacomoden en una configuración tal que el campo dentro del conductor resulte nulo. Si “quedara” algún campo eléctrico interno, éste haría que los electrones se movieran hasta que se llegara al equilibrio.

Como consecuencia, podemos decir que **los conductores no tienen campo estático interno**. Al movimiento de cargas en respuesta a campos eléctricos aplicados se lo llama **Inducción Eléctrica** (más adelante veremos otro tipo de Inducción llamada Electromagnética). En la Fig. 1 vemos que algunos electrones se mueven hacia la izquierda, dejando una deficiencia de ellos a la derecha. Así, con este modelo de electrón libre podemos

pensar que esta disposición de cargas positivas y negativas crea dentro del conductor un campo $\vec{E}_{int}$ tal que $\vec{E}_C = \vec{E}_{int} + \vec{E}_{ext} = 0$.

2.2 La Ley de Gauss y la irrotacionalidad del campo electrostático

Pero... ¿valdrá la Ley de Gauss en medios conductores? ¿Existe alguna distribución de las cargas dentro del conductor compatible con la Ley de Gauss?

Veamos: para cualquier superficie cerrada dentro del conductor

$$\Phi = \oint_S \vec{E}_c \cdot d\vec{s} = 0 \quad (1)$$

pues el campo es nulo en el interior. En consecuencia, si consideramos que los electrones viajaron hacia la izquierda dejando con exceso de carga positiva a las moléculas de la derecha y todas están ubicadas en la superficie externa del conductor, tendremos que la carga encerrada en cualquier superficie *interna* es nula. Por lo tanto, al considerar que las cargas se distribuyen en la superficie, la Ley de Gauss será válida también en medios materiales conductores. (Traten de pensar si existe alguna otra distribución de cargas que pudiera cumplir con la condición experimental de campo nulo dentro de un conductor en condiciones electrostáticas y con la Ley de Gauss al mismo tiempo).

Tomaremos al resultado experimental de no poder medir (y por lo tanto, encontrar) campos eléctricos en conductores en situaciones electrostáticas como **una ley experimental**. Esta experiencia transformada en ley y el consecuente modelo de electrón libre, nos dará una descripción del comportamiento de cargas en conductores cuando hay cargas dentro o fuera de ellos.

Entonces, sabemos que:

- 1) $\vec{E}_C = 0$ en condiciones electrostáticas
- 2) Los electrones tienen libertad de moverse dentro de un conductor.
- 3) Estas dos condiciones son compatibles con la Ley de Gauss postulando que las cargas se distribuyen en la superficie externa del conductor (Fig.2).



Fig.2. Distribución de cargas en un conductor

Veamos qué ocurre cuando se agrega una carga Q (por un mecanismo cualquiera) a un conductor originalmente neutro. Independientemente de la forma del conductor, para que se cumplan 1), 2) y 3) el exceso de carga al llegar al equilibrio debe estar distribuida sobre la superficie externa. Y esto será independiente también de que la carga sea positiva o negativa.

Tema especial 1

Todo lo que dijimos hasta ahora lo aplicamos a conductores macizos. ¿Qué ocurre si hacemos las mismas experiencias pero con conductores con una “burbuja” de vacío? Supongamos primero que tenemos un conductor con una burbuja y se le agrega una carga Q (no habiendo cargas dentro de la burbuja) (Figura 3). ¿Cómo se distribuye Q ?

Si aplicamos la Ley de Gauss a cualquier superficie cerrada S_1 que incluya a toda la burbuja (Fig.4), el flujo Φ a través de S_1 será nulo porque el campo eléctrico es nulo (S_1 está dentro del conductor). En consecuencia, la **carga neta** encerrada en S_1 será nula. En este caso, la Ley de Gauss nos “asegura” que la carga neta es nula pero no nos asegura que no haya una distribución de cargas sobre la superficie de la burbuja (aunque la carga neta sea nula). Por ejemplo, que haya un exceso de cargas positivas en un lado y negativas en otro de forma tal que el campo no sea nulo en la burbuja.

Si tomamos una superficie que limite un volumen que en parte incluye al conductor y en parte a la burbuja (Fig.5)

$$\Phi = \oint_S \vec{E}_c \cdot d\vec{s} = \oint_{S_c} \vec{E}_c \cdot d\vec{s} + \oint_{S_B} \vec{E}_c \cdot d\vec{s} = 0 = \frac{Q_{encS}}{\epsilon_0} \quad (2)$$

Es decir, aunque tomemos muchas superficies diferentes, no sabemos cuánto vale la carga encerrada en ninguno de los casos y tampoco el campo. Veamos por qué NO es posible que el campo sea distinto de cero dentro de la burbuja en este caso. Debemos pensar en “la otra Ley”, la que refleja que los campos electrostáticos son conservativos:

$$\text{rot}(\vec{E}) = 0 \text{ en forma diferencial o } \oint_{\text{curva}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \text{ en forma integral}$$

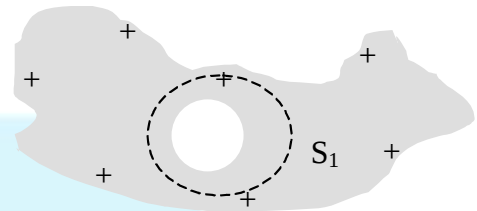


Fig.3. Conductor con una burbuja en su interior

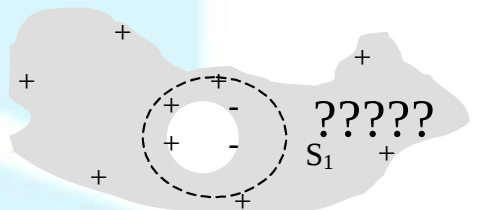


Fig.4. ¿Cómo se redistribuye la carga en el interior?

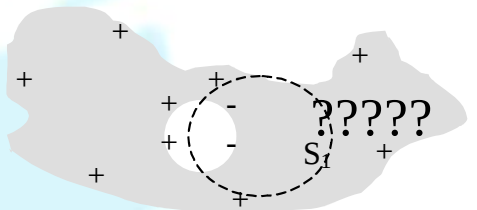


Fig.5. ¿Cuál debo considerar como distribución acertada?

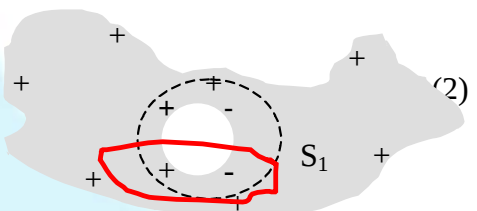


Fig.6. Circulación general, con un tramo en el conductor y otro en la burbuja

Tomemos una curva cerrada C lo más genérica posible: un tramo estará en el conductor C_{cond} y otro en la burbuja C_{burb} (Figura 6). La circulación del campo eléctrico está dada por

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_{C_{cond}} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \oint_{C_{burb}} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (3)$$

El primer término del segundo miembro es siempre nulo porque el campo en el conductor es nulo. Pero, como consecuencia, el segundo término también lo debe ser para todo camino L_B dentro de la burbuja. La única posibilidad, entonces es que

$$\vec{E}_{burb} = 0 \quad (4)$$

¿Qué pasaba si colocábamos un conductor hueco descargado en un campo eléctrico externo?. Haciendo los mismos razonamientos que en el caso del conductor hueco cargado, llegamos a que el campo electrostático dentro de la burbuja es nulo.

Hemos llegado a un resultado muy interesante: los conductores pueden “aislar” regiones del espacio; podemos tener regiones del espacio libres de campos electrostáticos!! A esto se lo llama **blindaje electrostático**: si una cavidad está totalmente encerrada dentro de un conductor, **ninguna** distribución estática de cargas en el exterior puede producir campos eléctricos en el interior¹.

Nos faltan plantear muchas otras situaciones de cargas en presencia de conductores. Veamos otra de ellas: el mismo conductor descargado con una burbuja pero se coloca una carga Q en la burbuja (Figura 7).

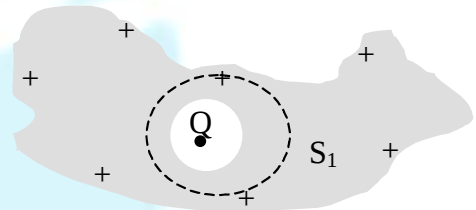


Fig.7. *Burbuja en un conductor con una carga en su interior*

Si aplicamos la Ley de Gauss tomando una superficie dentro del conductor que incluya a toda la burbuja, el flujo a través de ella debe ser cero porque el campo eléctrico es nulo en la superficie

(por estar dentro del conductor) y, como consecuencia, la carga neta encerrada también debe ser cero

$$\Phi = \oiint_S \vec{E}_c \cdot d\vec{S} = 0 = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \quad (5)$$

¹ Cuando consideramos situaciones no electrostáticas, podemos hablar también de blindaje. Por ejemplo, si colocamos una radio dentro de una Jaula de Faraday, no la podremos escuchar porque no pueden penetrar las ondas de radio dentro de la Jaula.

Pero... la carga neta encerrada ¿es la carga Q solamente???? Podemos pensar, entonces, que sobre la superficie interna de la burbuja se indujo una carga $-Q$ (distribuida de alguna manera) de forma tal que se cumpla la ley experimental de no encontrar campos eléctricos en condiciones electrostáticas y también se cumpla la Ley de Gauss. ¿Cuánto vale el campo eléctrico dentro de la burbuja $\vec{E}_B$? ¿Podemos saber si es o no nulo? Aplicando la Ley de Gauss a una superficie que encierre **parte** de la burbuja, tendremos

$$\Phi = \oiint_S \vec{E}_c \cdot d\vec{S} = \oiint_{S_B} \vec{E}_c \cdot d\vec{S} + \oiint_{S_e} \vec{E}_B \cdot d\vec{S} = 0 + \oiint_S \vec{E}_B \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc \text{ por } S}}{\epsilon_0} \quad (6)$$

Pero en este caso, no sabemos cuánto vale la carga neta pero sí que no es nula (para que sea nula la superficie debe encerrar toda la burbuja, es decir, estar toda en el conductor. Es decir, $\Phi \neq 0$ si la superficie no encierra a toda la burbuja y su valor dependerá de cuál sea la superficie. Esto lleva a que $\vec{E}_B \neq 0$.

Apliquemos otra vez la Ley que refleja que el campo electrostático es conservativo. Tendremos que

$$\oint_{\ell} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 = \oint_{\ell_c} \vec{E}_c \cdot d\vec{l} + \oint_{\ell_B} \vec{E}_B \cdot d\vec{l} \quad (7)$$

Nuevamente el primer término del segundo miembro es nulo y por lo tanto el segundo también. ¿Es compatible $\vec{E}_B \neq 0$ con $\oint_{\ell_B} \vec{E}_B \cdot d\vec{l} = 0$? Es decir, ¿puede ser que la “circulación” del campo electrostático a través de un camino cualquiera que va desde un punto de la superficie de la burbuja a otro punto cualquiera de la superficie de la burbuja sea nula?. La respuesta es ¡¡SÍ!! Podríamos demostrarlo matemáticamente, pero preferimos hacerlo a través de la física del problema. Para ello, deduciremos primero algunas otras propiedades de los conductores cargados o inmersos en campos electrostáticos.

Fin tema especial 1

2.3 Campo electrostático en las cercanías de un conductor

De la descripción realizada podemos sacar una conclusión muy importante que se refiere a cómo son los campos electrostáticos inmediatamente fuera de un conductor. Si sobre la superficie del conductor hubiera una componente tangente a la superficie, las cargas (que están ubicadas en la superficie, como hemos visto) “reaccionarían” ante el campo (es decir sufrirían una fuerza y se moverían). En ese caso estamos contradiciendo nuestra hipótesis inicial de equilibrio. En consecuencia, la única posibilidad es que el campo

electrostático tenga solamente dirección perpendicular a la superficie (es decir, paralelo al diferencial de superficie). Pero, ¿cuánto vale el campo eléctrico en la superficie de un conductor? ¿Puede tomar cualquier valor? ¿De qué depende?

Hallemos el flujo a través de una superficie (recordar que debe ser cerrada) como la indicada en la Figura 8

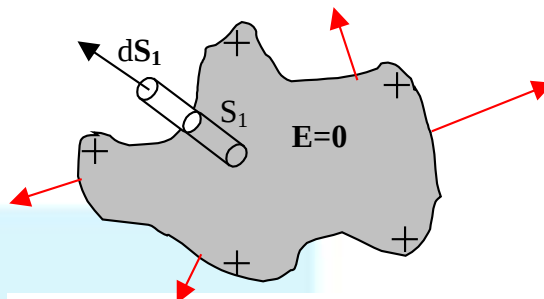


Fig.8. Esquema de la ley de Gauss en las cercanías de la superficie de un conductor

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_{S_1} E dS = \frac{Q_{enc.}}{\epsilon_0} = \frac{\iint_{S_1} \sigma dS}{\epsilon_0} \quad (8)$$

Como esto es válido en toda la superficie del conductor, valdrá, en general

$$E_{sup} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \text{Módulo del campo en la superficie externa de un conductor}$$

Veamos unos **ejemplos**:

- 1) Esfera conductora de radio R cargada con Q (necesariamente debe tener carga distribuida uniformemente por razones de simetría). $\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$ El campo producido

$$\text{por esta distribución es } E(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & r < R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{r} & r > R \end{cases} \quad (9)$$

$$\text{Vemos que en la frontera } (r=R) \text{ se cumple que } |\vec{E}| = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (10)$$

- 2) Plano conductor (cargado uniformemente por los mismos motivos que en el caso de la esfera). En el caso de una distribución superficial de carga uniforme σ sabemos que el campo eléctrico es uniforme en cada semi-espacio, teniendo un módulo dado por

$$|\vec{E}| = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (11)$$

siendo su dirección perpendicular al plano y su sentido dependiente de que la densidad sea

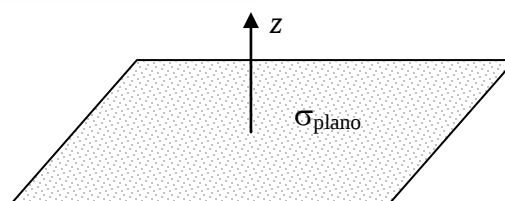


Fig.9. Plano cargado uniformemente 2-7

positiva o negativa y del semi-plano en estudio. Es decir

$$\vec{E} = \frac{\sigma_{plano}}{2\epsilon_0} \text{sgn}(z) \hat{z} \quad (12)$$

Pensemos ahora un conductor plano infinito. Debe tener un espesor porque es de material. Y supongamos que lo cargamos con una carga Q (que debe ser infinita porque la superficie es infinita). ¿Dónde se distribuyen las cargas? Como el campo dentro del conductor es nulo las cargas se distribuirán mitad en la superficie superior y mitad en la inferior. Supongamos que de ahí resulta que la densidad superficial es σ en ambas caras. Aplicando la Ley de Gauss obtenemos que el campo vale

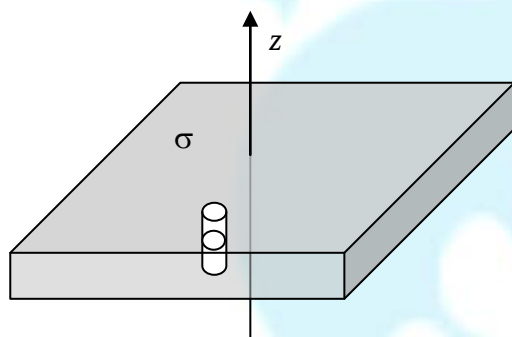


Fig.10. Placa conductora cargada
(en superficie porque es conductora)

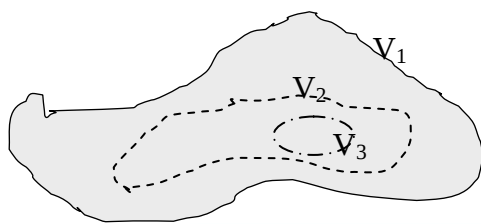
$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & \text{en el conductor} \\ \frac{\sigma_{cond}}{\epsilon_0} \text{sgn}(z) \hat{z} & \text{fuera del conductor} \end{cases} \quad (13)$$

Es decir, vale el doble que lo que vale en el caso de una distribución plana con la misma densidad superficial. Se puede pensar como que en el primer caso $\sigma_{plano} = Q_{plano}/A$ mientras que en el

caso del conductor $\sigma_{conductor} = Q_{conductor}/A$. Para que los campos tengan la misma magnitud, debe ser $Q_{plano}/2 = Q_{conductor}$. Bueno, sumando la carga superior e inferior del conductor plano, nos da ese resultado. Es decir, si tenemos una carga Q distribuida en forma plana, el campo generado será $Q/2A\epsilon_0$. Si esa misma carga se usa para cargar al conductor plano, la carga sobre cada superficie será $Q/2$. Y el campo generado será $Q/2A\epsilon_0$. También se puede pensar que para una dada densidad superficial, el número de líneas en el caso del plano conductor debe ser el doble porque no hay líneas hacia adentro del conductor.

2.4 Superficies equipotenciales

Sabemos que el campo es nulo dentro de un conductor, independientemente de que haya campos electrostáticos externos o que el conductor esté cargado. Sabemos también que



el campo electrostático es perpendicular a la superficie de un conductor. Como $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$, las líneas equipotenciales deben ser siempre perpendiculares al campo eléctrico. Se sigue, entonces que la superficie de un conductor es una equipotencial. Veamos ahora que TODO el conductor está al mismo potencial. Supongamos que hay superficies a diferentes potenciales. Entonces $-\text{grad}(V) \neq 0 \Rightarrow \vec{E} \neq 0$ (punto a punto) $\Rightarrow$ **ABSURDO!!!**

Tema especial 2: Como un ejemplo de la información que nos da el saber que un conductor es una superficie equipotencial y que el campo en la superficie es perpendicular a la misma, tomemos un conductor plano infinito como el de la figura y acerquémosle una carga puntual q . Sabemos que el plano es una equipotencial y que las líneas de campo son perpendiculares

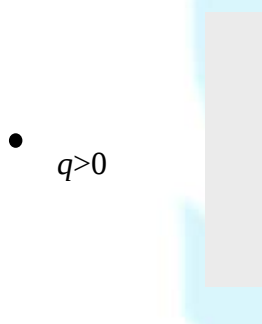
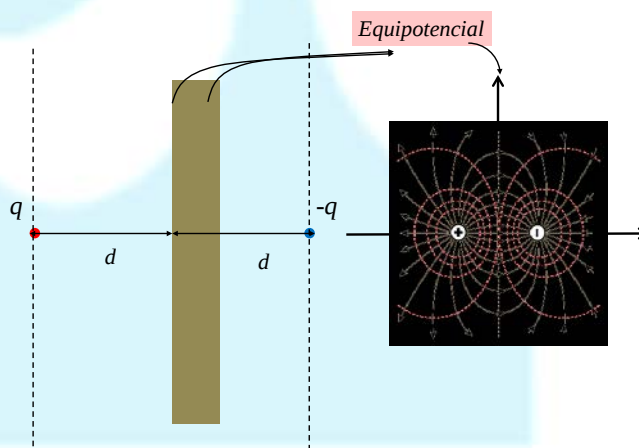


Fig.11. Plano conductor infinito y carga q

en su superficie. Por otro lado sabemos que las líneas de campo eléctrico nacen en cargas positivas (y mueren en negativas). ¿A qué se parece esto? Fíjense que son las condiciones de un dipolo. Esto es un método que no veremos en Física II y que se llama **método de imágenes** (por su parecido con un espejo). Se calcula el campo como si fuera un dipolo y luego se dice que es válido solamente a la izquierda de nuestro esquema.

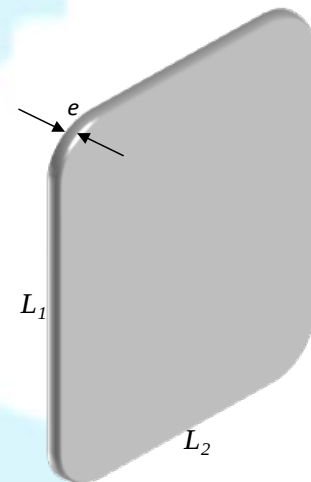


Fin tema especial 2

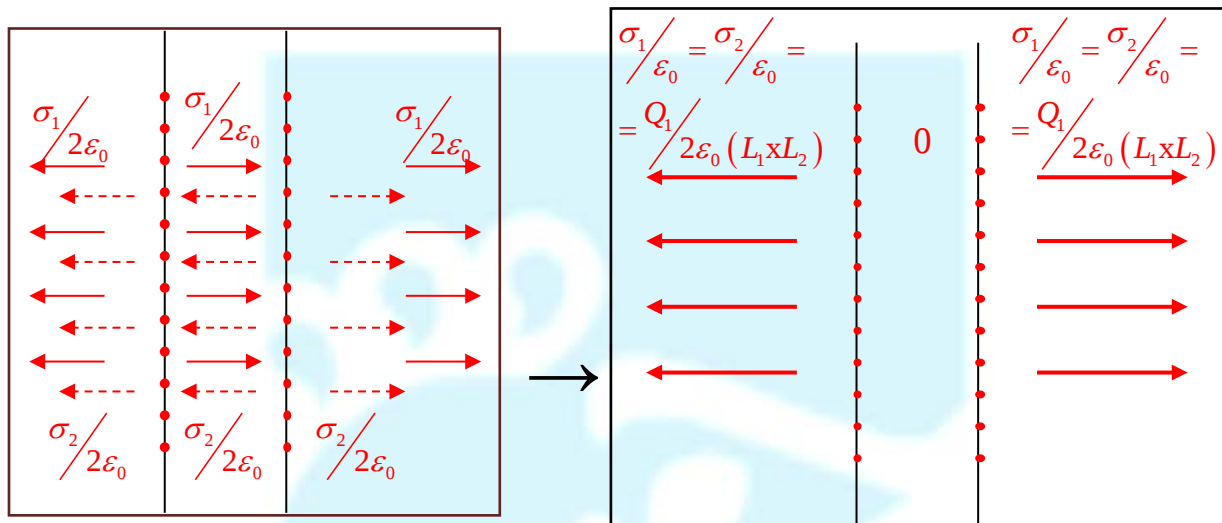
2.5 Los conductores y el principio de superposición

Estamos habituados a usar el Principio de Superposición con fuerzas sobre cuerpos o cargas que no afectan a las características o propiedades del cuerpo. Pero ¡¡¡¡ CUIDADO!!!! No siempre es así. Hasta ahora (Electrostática en vacío) consideramos que la presencia de una nueva distribución de cargas no afectaba a la otra distribución en el sentido de reordenar la configuración original (ni que la distribución original afectaba a la nueva). Con el modelo de conductores (y el del electrón libre) el Principio de Superposición se vuelve complicado y, en general, no es posible usarlo sin ser muy cuidadoso. Sigue siendo válido pero el problema que se presenta es que cambian las distribuciones de carga y, como consecuencia, el campo generado por cada distribución resulta diferente que el campo generado por cada distribución cuando no interactuaban. ¿Por qué? Porque en condiciones estáticas, el campo dentro de un conductor debe ser nulo y eso requiere de una redistribución de cargas (podríamos decir que “siempre” aunque podemos encontrar alguna excepción).

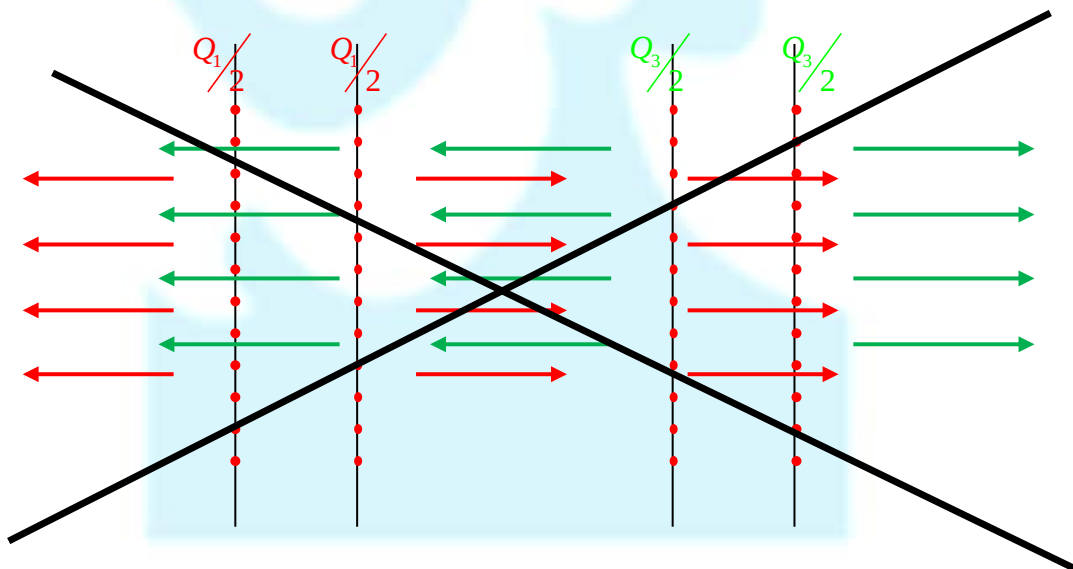
Veamos un ejemplo sencillo. Supongamos que tenemos una chapa metálica (que tiene espesor, por supuesto) de gran área aislada eléctricamente de cualquier distribución de cargas. ¿Qué significa “gran área”? Por ahora, no significa nada. Encontraremos su sentido en un minuto... Si esta chapa de dimensiones e , L_1 y L_2 es cargada con una carga Q_1 la carga se distribuirá de forma tal que **en el equilibrio** (después de pasado un tiempo llamado “transitorio”) el campo eléctrico sea nulo en su interior. ¿Cómo se distribuyen las cargas? Sobre su superficie. Pero, ¿cómo? No es fácil determinarlo excepto que hagamos un modelo sencillo en el que despreciemos lo que pasa cerca de los bordes. Es decir, considerar que la distribución de cargas es uniforme sobre las áreas laterales $L_1 \times L_2$ y nula en las áreas laterales $e \times L_1$ y $e \times L_2$. Así podemos considerar que en cada área lateral $L_1 \times L_2$ se distribuye uniformemente $Q_1/2$, i.e., tendremos $\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{Q_1}{2(L_1 L_2)}$. De esta manera, el campo dentro del conductor resulta nulo, ya que tenemos 2 distribuciones de carga superficiales paralelas e



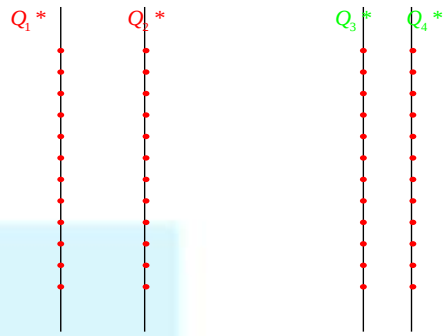
iguales (las flechas con línea sólida indica el campo creado por σ_1 y las de trazos por σ_2 .
Sumando los campos vectorialmente, obtenemos la figura de la derecha.



Si tuviéramos otra chapa **aislada** y de las mismas dimensiones pero cargada con una carga Q_3 tendríamos una situación equivalente. Es decir, $Q_3/2$ de una “lado” y $Q_3/2$ del otro. Veamos qué pasa si las acercamos. Supongamos (**erróneamente**) que las distribuciones de carga siguen siendo las mismas, es decir, sumamos los campos en las distintas regiones y obtenemos un ABSURDO: el campo eléctrico no resulta nulo dentro de los conductores (independientemente de su espesor). Lo que no puede suceder es, entonces:



¿Cómo deberían distribuirse las cargas? Por conservación de la carga, en cada conductor la carga total no puede variar (nunca se pusieron en contacto) o sea que será la original. Entonces debemos suponer que cada superficie está cargada (no puede haber cargas libres en los conductores) con cargas Q_1^* , Q_2^* , Q_3^* , Q_4^* y se debe cumplir:



1. $Q_1 = Q_1^* + Q_2^*$
2. $Q_3 = Q_3^* + Q_4^*$
3. $\vec{E} = 0$

en los conductores, i.e., debemos ver cuál es la contribución de las cargas sobre las cuatro superficies dentro de los conductores. En el conductor de la izquierda,

$$\vec{E} = \frac{Q_1^*}{2\epsilon_0(L_1 \times L_2)} - \frac{Q_2^*}{2\epsilon_0(L_1 \times L_2)} - \frac{Q_3^*}{2\epsilon_0(L_1 \times L_2)} - \frac{Q_4^*}{2\epsilon_0(L_1 \times L_2)} = 0$$

Y en el de la derecha

$$\vec{E} = \frac{Q_1^*}{2\epsilon_0(L_1 \times L_2)} + \frac{Q_2^*}{2\epsilon_0(L_1 \times L_2)} + \frac{Q_3^*}{2\epsilon_0(L_1 \times L_2)} - \frac{Q_4^*}{2\epsilon_0(L_1 \times L_2)} = 0$$

Es decir,

$$Q_1^* - Q_2^* - Q_3^* - Q_4^* = 0 \quad \text{y} \quad Q_1^* + Q_2^* + Q_3^* - Q_4^* = 0$$

Resolviendo las cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, resultan

$$Q_1^* = Q_4^* = \frac{Q_1 + Q_3}{2} \quad Q_2^* = \frac{Q_1 - Q_3}{2} \quad Q_3^* = -\frac{Q_1 - Q_3}{2}$$

Ahora no está de más corroborar que el campo es nulo dentro de los conductores. ¿Cuánto vale el campo en todo el espacio? ¿Existe alguna combinación de cargas que haga nulo el campo entre los conductores? ¿Existe alguna combinación de cargas que haga nulo el campo en alguna otra zona del espacio?

Veamos otro ejemplo

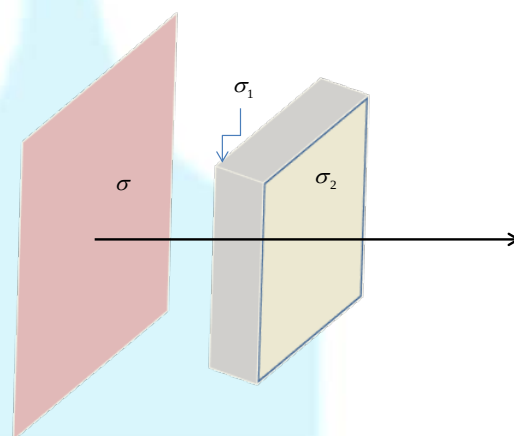
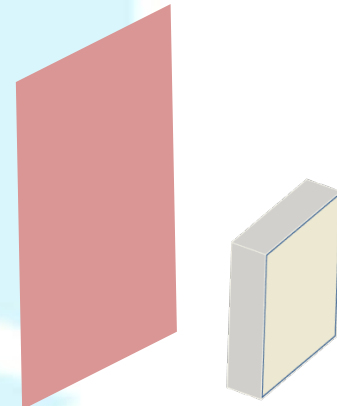
Se tiene una lámina cuadrada no conductora plana de área $A_1 = 20\text{m}^2$ con densidad uniforme de carga $\sigma = -2\mu\text{C}/\text{m}^2$. Próxima y paralela a ella, y a una distancia $d = 0.3\text{m}$ se halla una placa metálica maciza cuadrada de área $A_2 = 10\text{m}^2$ y espesor $e = 1\text{mm}$ con una carga $Q = 10\mu\text{C}$ conocidos. Determine las densidades σ_1 (la más cercana a la lámina) y σ_2 en cada cara de la

placa y haga un gráfico que indique la diferencia de potencial entre un punto en la zona donde considere válida la aproximación de simetría “infinita” y un punto sobre la cara de la placa con densidad σ . ¿Cuál es la zona? Justifique dicha aproximación.

Lo primero que debemos hacer es un esquema para poder elegir un sistema de coordenadas adecuado para resolver el problema propuesto. No somos buenos dibujantes pero sería algo así. Pero, ¿cómo los ubicamos? Resolver este problema con consideraciones de efectos de borde es muy complicado. No es difícil calcular el campo eléctrico que genera la distribución plana finita (DPF) por separado (por integración). Y la distribución no cambiará aunque acerquemos otras distribuciones (porque la DPF no está sobre un conductor... son cargas “pegadas” uniformemente formando un cuadrado o puestas sobre un material que no permite el movimiento de cargas, i.e. un aislante o dieléctrico). Al acercarla a la placa P conductora (aunque esté descargada), P sufrirá el efecto del campo eléctrico que genera la DPF y sus cargas (libres de moverse dentro de la P) se comenzarán a ubicar de forma tal que en el estado de equilibrio (i.e. electrostático) el campo dentro de P sea nulo. Seguramente la distribución de cargas debe ser complicada. Sabemos que las cargas estarán sobre TODAS las superficies porque ya lo demostramos pero, vaya a saber cómo! Con las herramientas usadas en esta asignatura no será posible calcular la distribución exacta de cargas sobre la superficie de P.

Entonces, releemos el enunciado. La placa cuadrada tiene lados $L = \sqrt{A_2} \approx 3 \text{ m}$ y un espesor $e = 1 \text{ mm}$. Es decir, aunque esté cargada (por cualquier motivo) podríamos considerar despreciable la carga sobre las cuatro superficies $L \cdot e$. Si las ubicaciones relativas fueran las de la figura anterior, no podríamos asegurar que la distribución de

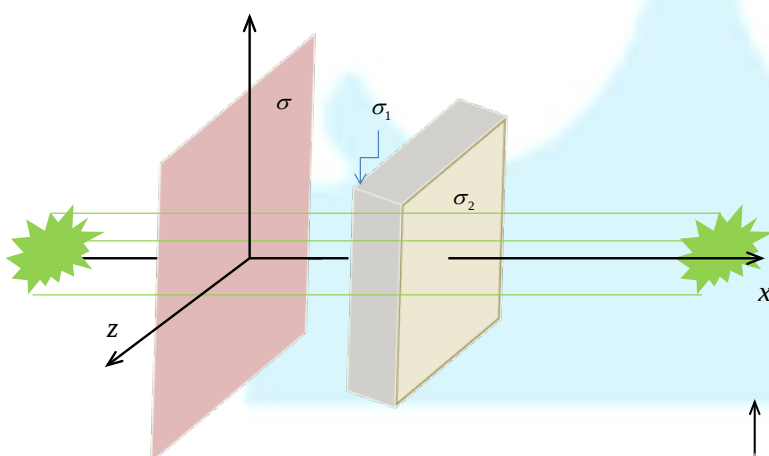
carga inducida sobre la P sea uniforme. Para que pueda ser considerado así, debemos asegurarnos que el campo eléctrico generado por la DPF en el espacio que ocupará la placa P sea uniforme y que los bordes de la P no intervengan. ¿Cómo lo logramos? Si ponemos a P y



DPF paralelas a las distribuciones y “en el medio”, vamos logrando cierta simetría. Y todo gracias a que el espaciamiento entre ellas es de 30 cm (por lo que hemos visto en el Capítulo 1, el campo generado por P podría ser considerado uniforme en el lugar donde se colocará P). Bajo estas condiciones, podemos decir que la distribución de cargas sobre las superficies “grandes” de P es uniforme. Eso no significa que podamos calcular el campo eléctrico ni la diferencia de potencial en “todo el espacio”. ¿Por qué lo decimos? Porque lo que calculemos (una vez que tengamos σ_1 y σ_2) será válido dentro de las suposiciones que hicimos. Es decir, “cerca” de las distribuciones en el sentido del eje dibujado y “lejos” de sus bordes. ¿Qué es “cerca” y “lejos”? En conjunto significa que lo que obtengamos será válido solo dentro de cierto valor de error que consideremos aceptable y que solo podríamos estimar si calculáramos el campo generado por las distribuciones sin despreciar efectos de borde. Y entonces.... ¿¿¿Para qué sirve todo?!?! Sirve para estimar órdenes de magnitud de densidades superficiales de carga, campos y diferencias de potencial: una aproximación a primer orden sin hacer cálculos complicados. Podríamos pensar dónde sería aceptable nuestra aproximación.

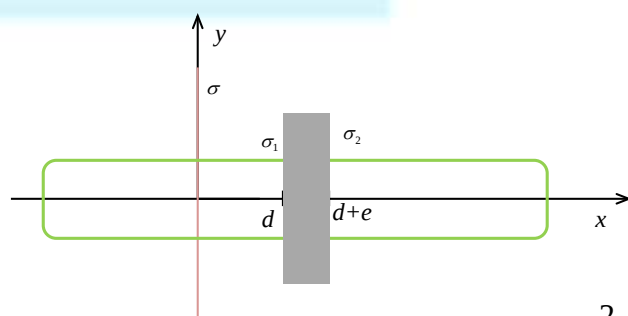
Entonces, podríamos intentar hacer el dibujo 3D, donde la zona “estrellada” indicaría los puntos del espacio donde nuestra aproximación no es tan mala (recordar que es un esquema...no está hecho a escala!!). Observen que habiendo hecho tantas suposiciones, podemos afirmar que las formas de la DPF y de P no importan. Podrían haber sido un círculo y un cilindro de base elíptica, respectivamente, porque despreciamos los efectos del borde: las consideraremos distribuciones infinitas.

Pero esto tiene simetría de revolución alrededor del eje x por lo que podemos hacer un dibujo



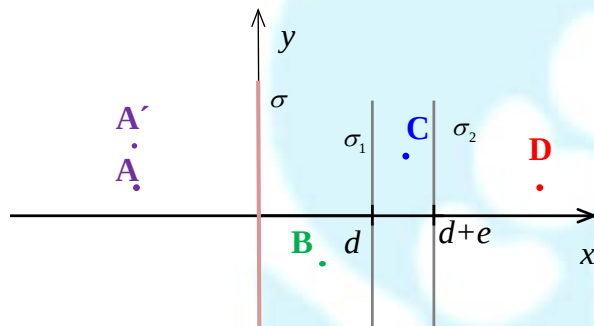
2D, lo que resulta mucho más amigable (por lo menos para nosotros). TENER en cuenta que la escala en la dirección x no es la misma que en la dirección y (y z, no dibujada).

Sabemos, por lo que ya demostramos que las cargas en la placa conductora se



ubicarán en su superficie. Como el problema enuncia que la DPF es negativa y la P está cargada positivamente, no es obvio cómo se distribuirán las cargas sobre P. **Si P estuviera descargada**, sería de esperar que sus cargas negativas móviles se movieran hacia la derecha, quedando la superficie ubicada en $x=d$ cargada positivamente y la superficie ubicada en $x=d+e$ con un plus de cargas negativas porque la placa P está aislada eléctricamente de cualquier objeto que le pueda transferir carga y la carga total final debe ser igual a la inicial. Es decir, la carga total debe ser cero.

Hemos convertido a este problema en uno aproximado, pero más simple. Sabemos que, una vez alcanzado el equilibrio, se llega a la condición estática en la que **el campo eléctrico dentro del conductor debe ser nulo**. La otra condición es que **la carga debe conservarse** en la placa porque está aislada eléctricamente. Además, vale el Principio de Superposición (¡ya todo está “quieto”, estamos en equilibrio!). Es decir, podemos calcular todo lo pedido



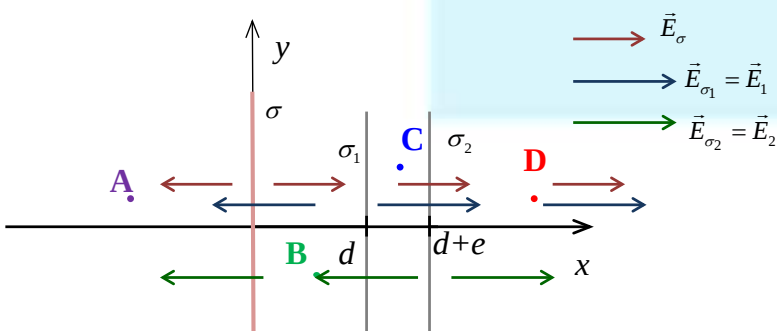
pensando que tenemos 3 superficies cargadas con distribuciones uniformes de carga como se indica en el esquema. Pasemos estas ideas a ecuaciones:

$$1) \vec{E} = 0 \text{ si } d < x < d + e$$

$$2) \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{Q}{A_2}$$

Además, como los resultados son independientes de la coordenada y , lo que obtengamos para A valdrá para A'.

Para imponer que se cumpla 1), debemos calcular los campos generados por cada distribución, sumarlos y aplicar la condición de campo nulo en el punto C. Sabemos que están tentados en considerar de entrada que σ y σ_2 son negativos y σ_1 positivo (como sería en el caso en que P estuviera descargada). Sin embargo, para poder generalizar este problema a cualquier signo de σ y a que la carga total inicial en el conductor sea Q , es conveniente



plantear a todas las densidades como positivas, resolver el problema, reemplazarlos valores que son datos del problema y comprobar que se obtiene cualitativamente lo previsto. Ya hemos visto que el campo eléctrico generado por una distribución

uniforme plana infinita de carga σ ubicada en el origen de coordenadas O vale

$\vec{E}(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{|x|}{x} \hat{x}$. Entonces, si para $d < x < d + e$, es decir, para todo punto del tipo C, el

campo eléctrico es nulo.

$$\begin{aligned}\vec{E}(x_C) &= \vec{E}_\sigma(x_C) + \vec{E}_1(x_C) + \vec{E}_2(x_C) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{|x - (-d)|}{x - (-d)} + \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} \frac{|x - 0|}{x - 0} + \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} \frac{|x - (d + e)|}{x - (d + e)} = \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{|x + d|}{x + d} + \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} \frac{|x|}{x} + \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} \frac{|x - d - e|}{x - d - e} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} = 0\end{aligned}$$

Es decir, $\sigma + \sigma_1 - \sigma_2 = 0$ por condición de campo nulo dentro del conductor y $\sigma_1 + \sigma_2 = \frac{Q}{A_2}$

por conservación de la carga. Tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$2\sigma_1 + \sigma = \frac{Q}{A_2} \Rightarrow \sigma_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{Q}{A_2} - \sigma \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{10 \cdot 10^{-6} \text{C}}{10 \text{m}^2} + 2 \cdot 10^{-6} \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \right) = \frac{3}{2} 10^{-6} \frac{\text{C}}{\text{m}^2} = \frac{3}{2} \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{Q}{A_2} - \sigma_1 = 1 \cdot 10^{-6} \frac{\text{C}}{\text{m}^2} - \frac{3}{2} 10^{-6} \frac{\text{C}}{\text{m}^2} = -\frac{1}{2} 10^{-6} \frac{\text{C}}{\text{m}^2} = -\frac{1}{2} \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$$

Es decir,

$$\sigma_1 = \frac{3}{2} \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2} \quad \sigma_2 = -\frac{1}{2} \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$$

Es interesante hacer el siguiente cálculo:

$$\sigma_2 = \frac{Q}{A_2} - \sigma_1 = \frac{Q}{A_2} - \frac{1}{2} \left(\frac{Q}{A_2} - \sigma \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{Q}{A_2} + \sigma \right)$$

$$\sigma_1 = \frac{Q}{A_2} - \sigma_2 = \frac{Q}{A_2} - \frac{1}{2} \left(\frac{Q}{A_2} + \sigma \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{Q}{A_2} - \sigma \right)$$

Podemos ver que, si la placa no hubiera estado cargada originalmente, σ_1 y σ_2 resultan (como hemos previsto) iguales y opuestas.

Si, en cambio, $Q = 30 \mu\text{C}$ y $\sigma = -2 \mu\text{C}/\text{m}^2$, tanto σ_1 como σ_2 resultarían positivas. Podemos ver diferentes “casos”... Queda para ustedes.

Ahora debemos hacer un gráfico indicando la diferencia de potencial entre un punto “cualquiera del espacio” (donde sea válida la aproximación) y un punto sobre la cara de la placa con σ_1 . Antes de comenzar a hacer el cálculo, debemos tener en claro que la placa es una equipotencial por ser conductora (la justificación está en la teoría). En consecuencia, se

puede tomar cualquier punto de la placa como referencia. Lo haremos a partir de la definición de diferencia de potencial y luego analizaremos si fue la forma más conveniente para calcularlo. Como el campo eléctrico es conservativo, podemos tomar cualquier camino entre dos puntos. Además, como nuestra solución tiene validez en zonas donde el campo puede considerarse que solamente tiene componente en $\hat{x}$, tomaremos como camino una línea recta en la dirección de x

$$V(x) - V(x=0) = - \int_0^x \vec{E} \cdot d\vec{x}$$

¿Cuál es el campo $\vec{E}$ que debemos considerar? El campo que corresponde a la línea de integración. Debemos calcular el campo, entonces, en “todos los puntos del espacio”. Esto ya nos debe resultar sencillo porque podemos aplicar el principio de superposición a los campos eléctricos. Sabemos que

$$1) \quad \vec{E}_1 = \frac{1}{2\epsilon_0}(-\sigma - \sigma_1 - \sigma_2)\hat{x} = -\frac{1}{2\epsilon_0}\left(\sigma + \frac{Q}{A_2}\right)\hat{x} \text{ si } x < -d$$

$$2) \quad \vec{E}_2 = \frac{1}{2\epsilon_0}(\sigma - \sigma_1 - \sigma_2)\hat{x} = \frac{1}{2\epsilon_0}\left(\sigma - \frac{Q}{A_2}\right)\hat{x} \text{ si } 0 < x < d$$

$$3) \quad \vec{E}_3 = \frac{1}{2\epsilon_0}(\sigma + \sigma_1 - \sigma_2)\hat{x} = 0 \text{ si } d < x < d + e$$

$$4) \quad \vec{E}_4 = \frac{1}{2\epsilon_0}(\sigma + \sigma_1 + \sigma_2)\hat{x} = \frac{1}{2\epsilon_0}\left(\sigma + \frac{Q}{A_2}\right)\hat{x} \text{ si } d + e < x$$

Entonces, para un punto A, ubicado en x_A (x_A es negativo) (Ver figura)

$$\begin{aligned} V(x_A) - V(x=d) &= - \int_d^{x_A} \vec{E} \cdot d\vec{x} = - \int_d^0 \vec{E}_2 \cdot d\vec{x} - \int_0^{x_A} \vec{E}_1 \cdot d\vec{x} = \\ &= - \int_d^0 \frac{1}{2\epsilon_0}(\sigma - \sigma_1 - \sigma_2)\hat{x} \cdot d\vec{x} - \int_0^{x_A} \frac{1}{2\epsilon_0}(-\sigma - \sigma_1 - \sigma_2)\hat{x} \cdot d\vec{x} = \\ &= \frac{1}{2\epsilon_0} [-(\sigma - \sigma_1 - \sigma_2)(0-d) - (-\sigma - \sigma_1 - \sigma_2)x_A] = \\ &= \frac{1}{2\epsilon_0} \left[\left(\sigma - \frac{Q}{A_2}\right)d + \left(\sigma + \frac{Q}{A_2}\right)x_A \right] = \frac{1}{2\epsilon_0} \left[-3 \frac{\mu C}{m^2} 0,3m - 1 \frac{\mu C}{m^2} x_A \right] = \\ &= \frac{1}{2\epsilon_0} [-0,9 - x_A] \frac{\mu C}{m} \end{aligned}$$

Para un punto B ubicado en x_B (x_B es negativo)

$$V(x_B) - V(x=d) = - \int_d^{x_B} \vec{E}_2 \cdot d\vec{x} = - \int_d^{x_B} \frac{1}{2\epsilon_0} (\sigma - \sigma_1 - \sigma_2) \hat{x} \cdot d\vec{x} =$$

$$= - \frac{1}{2\epsilon_0} (\sigma - \sigma_1 - \sigma_2) (x_B - d) = - \frac{1}{2\epsilon_0} \left(\sigma - \frac{Q}{A_2} \right) (x_B - d) = \frac{1}{2\epsilon_0} 3 \frac{\mu C}{m^2} (x_B - 0,3)$$

Para un punto C (dentro del conductor) $V(x_C) - V(x=d) = 0$ y para un punto D en x_D

$$V(x_D) - V(x=d) = - \int_d^{x_D} \vec{E}_4 \cdot d\vec{x} = 0 - \int_{d+e}^{x_D} \frac{1}{2\epsilon_0} (\sigma + \sigma_1 + \sigma_2) \hat{x} \cdot d\vec{x} =$$

$$= - \frac{1}{2\epsilon_0} (\sigma + \sigma_1 + \sigma_2) (x_D - d - e) = - \frac{1}{2\epsilon_0} \left(\sigma + \frac{Q}{A_2} \right) (x_D - 0,301m) =$$

$$= \frac{1}{2\epsilon_0} 1 \frac{\mu C}{m^2} (x_D - 0,301m)$$

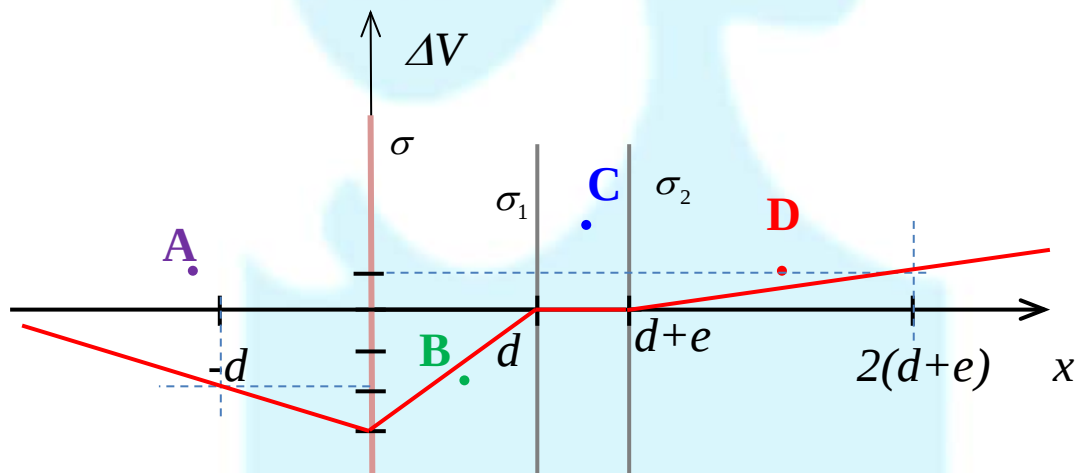
Comprobemos en primer lugar que es continuo. Para eso debemos evaluar en los puntos

$x_A = x_B = -d$ y ver que coinciden:

$$V(x_A = 0) - V(x=d) = \frac{1}{2\epsilon_0} \left[-3 \frac{\mu C}{m^2} (0,3m) \right] = - \frac{1}{2\epsilon_0} 0,9 \frac{\mu C}{m}$$

$$V(x_B = 0) - V(x=d) = \frac{1}{2\epsilon_0} 3 \frac{\mu C}{m^2} (-0,3m) = - \frac{1}{2\epsilon_0} 0,9 \frac{\mu C}{m}$$

Y sobre el conductor: $x_B = 0$ y $x_D = 0$. En ambos casos el resultado es cero. Y ahora, el gráfico



*****Notar que los valores de los campos en las superficies conductoras corresponden a la densidad superficial de carga dividido $2\epsilon_0$**

2.6 Varias configuraciones con conductores: a trabajar!!!!

En las siguientes configuraciones, la distribución de carga resulta uniforme sobre cada superficie. **Recordar que los conductores siempre tienen espesor.** Analizar por qué esta afirmación es correcta en cada caso. Calcular la distribución de cargas en cada superficie. Justificar. Parecen muchas pero si los hacen a conciencia, todas les parecerán “iguales”.

2.6.1 *Placa maciza en un campo eléctrico uniforme (despreciando efectos de borde: geometría “infinita”)*

2.6.2 *Esfera maciza metálica cargada*

2.6.3 *Cáscara esférica conductora cargada (¿En qué difiere del caso 2.4.2?)*

2.6.4 *Cáscara esférica conductora cargada con una carga puntual q_0 en el centro*

2.6.5 *Dos cáscaras esféricas metálicas concéntricas cargadas con distintas cargas*

2.6.6 *Cáscara cilíndrica conductora cargada (despreciando efectos de borde: geometría “infinita”)*

2.6.7 *Dos cáscaras cilíndricas metálicas concéntricas cargadas con distintas cargas (despreciando efectos de borde: geometría “infinita”)*

2.6.8 *Dos cáscaras cilíndricas metálicas concéntricas cargadas con distintas cargas con una distribución lineal de cargas coincidiendo con los ejes de los cilindros (despreciando efectos de borde: geometría “infinita”)*

2.7 Tema especial3. Puntas agudas en conductores

Ahora vamos a ver por qué los aviones lucen como en la foto siguiente. ¿Para qué se ponen esas puntas en las alas? Haremos un modelo muy sencillo que nos permitirá encontrar el motivo.

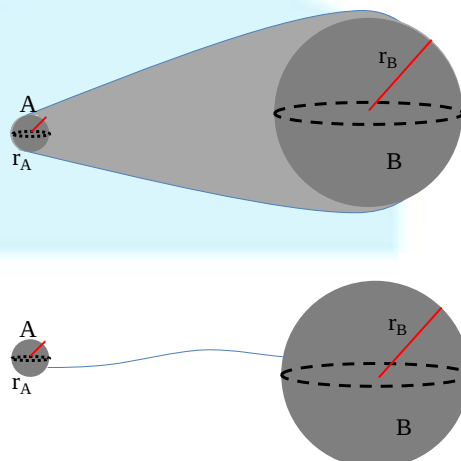


Fig.12. Conductor perfecto de forma irregular

Si tenemos un conductor “irregular” (como el de la fig. 12), podemos caracterizar los extremos A y B por 2 esferitas de radios r_A y r_B siendo $r_B > r_A$. Ahora pensemos sólo en esas dos esferas conductoras con cargas q_A y q_B .

En rigor, no se puede aplicar el principio de superposición “así nomás”. Las fuerzas de atracción o repulsión entre las cargas de A y de B (que por ser conductoras tienen libre movilidad) ocasionarán una “acumulación” de cargas no uniforme sobre las esferas. En consecuencia, el campo y el potencial respecto a cualquier punto fuera de las esferas no serán iguales a los que corresponderían a dos cargas puntuales q_A y q_B . Sin embargo, cada esfera es una superficie equipotencial. Consideraremos que su valor no puede depender de “dónde o cómo” esté distribuida la carga. Esta es también una simplificación del problema. Es decir, como modelo simple, consideramos que la redistribución de cargas al acercar o alejar estas dos esferas metálicas cargadas es despreciable, valiendo en promedio

$$\sigma_A = \frac{q_A}{4\pi r_A^2} \quad \sigma_B = \frac{q_B}{4\pi r_B^2}$$

Así podremos calcular la diferencia de potencial entre cada esfera metálica y algún punto de referencia (por ejemplo, el infinito). Elegiremos al infinito como punto de referencia y le asignaremos el valor cero. Con esa consideración

$$\left. \begin{aligned} \Rightarrow V(r=r_A) &= \frac{q_A}{4\pi\epsilon_0 r_A} = \frac{\sigma_A r_A}{\epsilon_0} \\ V(r=r_B) &= \frac{q_B}{4\pi\epsilon_0 r_B} = \frac{\sigma_B r_B}{\epsilon_0} \end{aligned} \right\} \text{(respecto del infinito)}$$

Observar que el resultado es idéntico al que se obtiene si se considerara que la carga está en el centro de la esfera y que la referencia del potencial está en el infinito y valiera cero.

Si ahora “conectamos” las dos esferas con un conductor (de cualquier forma), debe valer $V(r=r_A) = V(r=r_B)$. Eso sólo puede ocurrir si

$$\frac{q_A}{r_A} = \frac{q_B}{r_B} \Rightarrow \text{como } q_A = \sigma_A 4\pi r_A^2 \text{ y } q_B = \sigma_B 4\pi r_B^2, \text{ resulta}$$

$$\sigma_A r_A = \sigma_B r_B$$

Como $r_A < r_B \Rightarrow \sigma_A > \sigma_B$. Si bien la densidad superficial de carga resulta mayor en la esfera de menor radio, la carga total sobre su superficie resulta menor, es decir, $Q_A < Q_B$

Si volvemos a pensar en nuestro dibujo original, la mayor “cantidad” de cargas estará en el extremo más “agudo”

Sabemos de lo que vimos en 2.1 que el campo eléctrico justo en la superficie de cada conductor vale σ/ϵ_0 donde σ es el valor en ese punto con la aproximación realizada:

$$\frac{E(r=r_A)}{E(r=r_B)} = \frac{\sigma_A}{\sigma_B} > 1$$

En consecuencia, aplicando la propiedad de que el conductor es una superficie equipotencial, en la “punta” de menor radio tanto el campo como la densidad de carga superficial son mayores que en la de mayor radio (y no depende de la carga directamente sino de su densidad superficial)

$$\begin{aligned} \sigma_A &= \epsilon_0 \frac{V}{r_A} & E(r=r_A) &= \frac{\sigma_A}{\epsilon_0} = V \frac{1}{r_A} \\ \sigma_B &= \epsilon_0 \frac{V}{r_B} & E(r=r_B) &= \frac{\sigma_B}{\epsilon_0} = V \frac{1}{r_B} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Aunque la diferencia de potencial sea baja, en las zonas de pequeños radios de curvatura, los campos eléctricos pueden ser muy grandes.

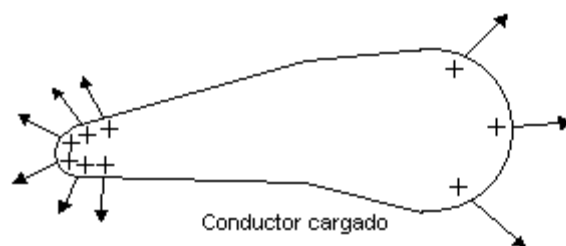


Fig.13. A mayor curvatura mayor número de líneas de campo

Fin tema especial 3

2.8 Cargando metales: las pilas.

En los párrafos anteriores dedicamos mucho tiempo a discutir cómo debían distribuirse las cargas en un conductor cargado. Lamentablemente omitimos hablar sobre un tema muy importante: ¿Cómo obtenemos un metal cargado? La pregunta no es ociosa puesto que la naturaleza siempre nos entrega átomos o moléculas neutros, por lo que nos queda pendiente la cuestión práctica de romper el balance eléctrico del cuerpo para volverlo positivo o negativo. Este desbalance eléctrico lo conseguimos agregando electrones (para tornarlo negativo) o quitándolos (para tornarlo positivo). La carga eléctrica de un cuerpo siempre se resuelve por ganar o perder electrones dado que alterar la carga de los núcleos atómicos involucra energías muy elevadas, propias de reacciones nucleares.

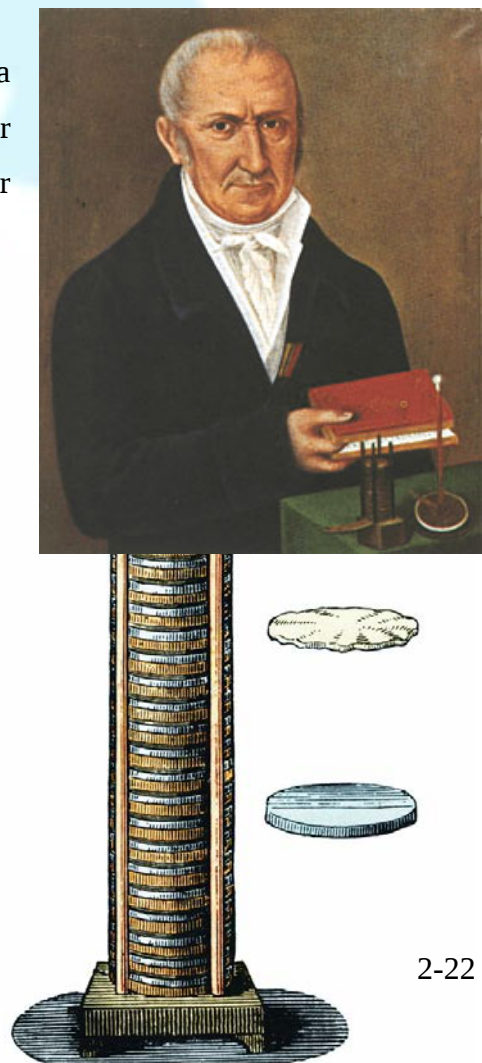
Ahora bien, para que un cuerpo A gane o pierda electrones necesitamos de algún agente que concrete tal transporte entre A y otro/s objetos que intercambien carga con A .

Esta última oración, muy oscura por cierto, es crucial porque manifiesta el principio de conservación de la carga (no la podemos crear ni destruir, sólo transportar). Entonces, si decimos que al objeto A le agregamos una cantidad N de electrones, éstos deben haber sido removidos de otro/s cuerpos para conservar la carga. En todos los párrafos anteriores este tema tuvo relevancia menor, sólo pensábamos que teníamos un objeto cargado y listo, pero ahora le daremos la debida importancia.

En el caso de los metales el medio más simple para concretar el mencionado transporte de cargas es utilizar una pila o batería (antes cargábamos siempre por frotamiento).

Alessandro Giuseppe Antonio Anastasio Gerolamo Umberto Volta (1745-1827) no sólo se caracterizó por tener seis nombres (los padres temían que en el colegio lo confundieran con otro pibe) sino que nos legó la pila o batería, un aparato particularmente apto para transportar electrones (después lo homenajeamos con la unidad de diferencia de potencial eléctrico).

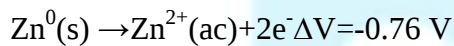
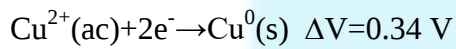
En 1800 Volta, a partir de trabajos de [William Nicholson](#), [Tiberius Cavallo](#), y [Abraham Bennet](#),



presentó su primer modelo de pila, una sucesión de discos de cobre y zinc separados por fieltro mojado en solución acuosa de ácido sulfúrico (no intentar en casa por favor).

En la figura de la derecha se observan los discos de cobre (amarillentos), de fieltro (blanquecinos) y de zinc (grisáceos). Mirando el dibujo entendemos por qué la llamamos “pila”.

Tomando un único grupo podemos describir las reacciones que ocurren como:



La diferencia de potencial total es: $0.34 \text{ V} - (-0.76) \text{ V} = 1.10 \text{ V}$

Al armar una “pila” de N de estos conjuntos se obtiene una diferencia de potencial igual a $1.10 N \text{ V}$.

En términos muy simples decimos que la primera reacción “captura” electrones, dejando al objeto al que está conectado con un déficit de los mismos (es decir positivo). La segunda reacción “libera” electrones, dejando al objeto que los tome con un exceso de los mismos (es decir negativo). Es interesante notar que la pila, vista externamente, opera como un transportador de electrones sobre los que realiza un trabajo.

2.9 Los capacitores

Vamos a poner a este transportador en acción. Tenemos dos objetos metálicos: una llave y una pava que son conectados a una pila. Las líneas negras representan cables conductores.

www.youtube.com/watch?v=MMmtiqyF8Lc



Si bien el transporte ocurre rápidamente nos vamos a tomar tiempo y vamos a pensar que la pila transporta “paquetes” de carga lentamente. Comenzamos con la llave y la pava en condición natural, es decir descargados. Conforme pasa el tiempo, el borne positivo de la pila va “capturando” electrones de la llave mientras que el negativo los “libera” en la pava. En esta situación va apareciendo un campo eléctrico, con líneas de campo que comienzan en la llave y terminan en la pava. En la figura dibujamos en rojo dos de las infinitas líneas de campo.

A medida que los electrones son transportados el módulo del campo eléctrico crece. Es interesante notar que cada “paquete” de carga que es movido requiere de más trabajo porque los electrones son desplazados en la dirección contraria a la que lo harían bajo la acción de la fuerza eléctrica*. El transporte cesa cuando el trabajo por unidad de carga necesario para mover el último “paquete” de carga es igual a la diferencia de potencial de la reacción electroquímica. Esto significa que el campo eléctrico tiene un valor tal que:

$$\int_{pava}^{llave} -\vec{E} \cdot d\vec{l} = V_p$$

La elección del orden de los límites asegura que nos desplazamos “en contra” del campo eléctrico, por lo que debemos obtener un valor positivo que es la diferencia de potencial entre bornes de la pila.

Es importante notar que por cada electrón “liberado” en la pava tenemos otro “capturado” en la llave, de forma tal que podemos afirmar que $Q_{llave} = -Q_{pava}$. Para mayor énfasis: no podríamos tener la pava con un exceso de electrones sin tener al mismo tiempo la llave con un déficit de electrones. La pila de ninguna manera crea carga, solamente la transporta.

Ahora encontraremos un resultado importante. Primero notamos que la forma espacial de las líneas de campo eléctrico entre la llave y la pava es independiente de la cantidad de carga que la pila haya transferido. Asimismo, a partir de la ley de Coulomb sabemos que el módulo del campo eléctrico es proporcional a la carga. Con estas dos ideas y la ecuación anterior llegamos a que hay una relación de proporcionalidad directa entre la cantidad de carga transferida por la pila y la diferencia de potencial entre sus bornes. Definimos así lo que denominamos capacidad eléctrica C como:

$$Q = C V$$

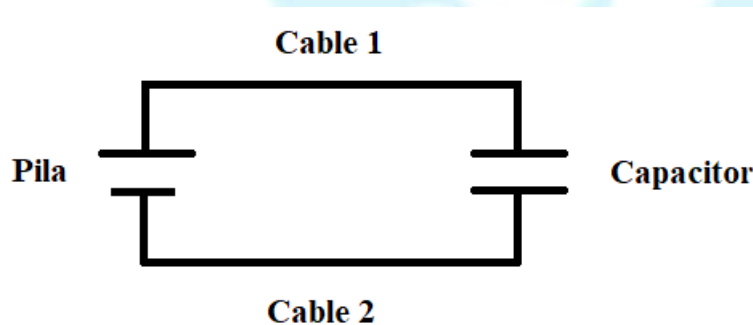
Donde Q es el valor absoluto de la carga de la llave o la pava (son iguales y de signo contrario) y V la diferencia de potencial entre ambos objetos (también en valor absoluto).

La unidad de capacidad eléctrica se llama Faradio (F) en homenaje a Michael Faraday y corresponde a un par de objetos tal que la carga almacenada en cualquiera de ellos es de 1 C cuando la diferencia de potencial entre ambos es de 1 V.

Largo tiempo atrás se solía decir que un Faradio era una capacidad demasiado grande y que lo “normal” era trabajar con valores mucho más pequeños, del orden de micro Faradios (μF) por ejemplo. La técnica avanza y eso ya no es cierto; miren este video para no cometer errores:

www.youtube.com/watch?v=EoWMF3VkI6U

Necesitamos un ícono para representar de manera abstracta al capacitor sin necesidad de dibujar exactamente la forma concreta de los objetos que lo conforman. Dicho ícono son dos líneas paralelas como muestra la figura. Cada una de las líneas es uno de los objetos que consideramos. También agregamos el ícono abstracto de la pila para completar la representación de todos los objetos de la figura con la llave y la pava. Notar los largos diferentes de las líneas en la pila; el más largo es el borne positivo.



El cómputo de la capacidad para un par arbitrario de objetos suele ser complicado porque desconocemos la forma de las líneas de campo. Por el contrario, en algunos casos simples (¿adivinan cuáles son?), conocemos de antemano la dirección de las líneas y el cómputo se simplifica mucho.

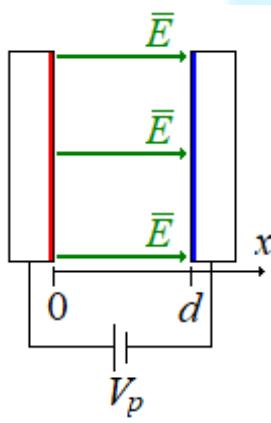
La estrategia es siempre la misma: primero suponemos que, como resultado de conectar la pila, uno de los objetos tiene carga Q y el otro $-Q$ (por ahora desconocidas). A partir de esto calculamos el campo eléctrico correspondiente (que depende linealmente con Q). Como último paso exigimos que la circulación del campo eléctrico entre ambos objetos iguale a la diferencia de potencial de la pila.

Comenzamos, como ejemplo, con dos placas planas paralelas de superficie S y separadas una distancia d . La forma de las mismas no importa en la medida en que la dimensión

característica de las mismas sea mucho más grande que d , así aseguramos que podamos tratar a las placas como de dimensión infinita.

Este problema ya lo tratamos más arriba y sabemos que la distribución estática de cargas es como la que indica la figura, con una densidad superficial uniforme $\sigma=Q/S$.

También de los ejemplos anteriores sabemos que el campo eléctrico asociado con dicha distribución de carga es: $\vec{E} = (\sigma/\epsilon_0)(\hat{i})$ (apunta en la dirección normal a la placa)



Ahora integramos (ver figura previa) desde la placa que se encuentra en $x=d$ hasta la otra $x=0$. Vamos en contra de las líneas de campo, así obtenemos una diferencia de potencial positiva (igual a la de la pila).

$$V_p = -\int_d^0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_d^0 (\sigma/\epsilon_0)(\hat{i}) \cdot dx(\hat{i}) = \sigma d/\epsilon_0$$

¡¡¡CUIDADO!!! Aunque vamos de derecha a izquierda, dx NO es negativo, el tema signos está contemplado en los límites de la integral.

Ahora multiplicamos y dividimos por el área S de la placa; tenemos así la expresión en términos de la carga Q .

$$V_p = \sigma S d / S \epsilon_0 = Q d / S \epsilon_0 \Rightarrow Q = (S \epsilon_0 / d) V_p$$

El término $(S \epsilon_0 / d)$ es la capacidad eléctrica buscada.

Puede notarse que, dado el pequeño valor ϵ_0 , la capacidad tiende a ser pequeña a menos que el cociente S/d sea muy grande. Más adelante veremos cómo, al reemplazar el vacío entre las placas por un material aislante, podemos obtener capacidades más grandes. La capacidad depende de factores geométricos (forma, tamaños) y, según veremos más adelante, de los materiales aislantes que coloquemos entre las placas.

El capacitor existe por el mero hecho de tener los objetos, se encuentren éstos cargados o no. Un error común es el de afirmar que el capacitor “aparece” cuando está cargado. Es fácil ver que la razón Q/V es siempre la misma constante y sólo depende de aspectos geométricos.

2.9.1 Quedan dos casos simples a resolver:

- Calcular la capacidad de un sistema formado por un cilindro metálico de radio a y otro cilindro metálico, concéntrico con el primero, de radios b (interno) y c (externo) ($a < b < c$). Ambos cilindros tienen un largo $L \gg a, b, c$.
- Ídem para un sistema formado por una esfera metálica de radio a y otra esfera metálica, concéntrica con la primera, y de radios b (interno) y c (externo).

¿Qué sucede si tenemos más de dos objetos? La respuesta es que podemos extender el concepto de capacidad tomando los objetos de a pares. Definimos C_{ij} ($i \neq j$) como la capacidad entre el objeto i y el j . En general este cálculo es muy difícil salvo para unos pocos casos simplificados. Nosotros nos mantendremos dentro del concepto simple original.

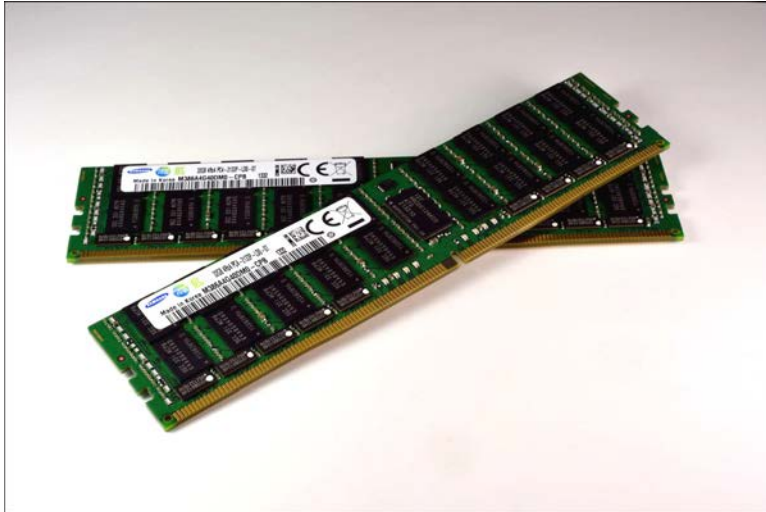
2.9.2 ¿Para qué sirven los capacitores?

Vamos a contar dos ejemplos muuuuuuuuuuuuy simplificados porque la tecnología que hay detrás es muy compleja, resultado de una cantidad gigantesca de horas-persona de trabajo e inversiones multi millonarias.

La memoria de la computadora.

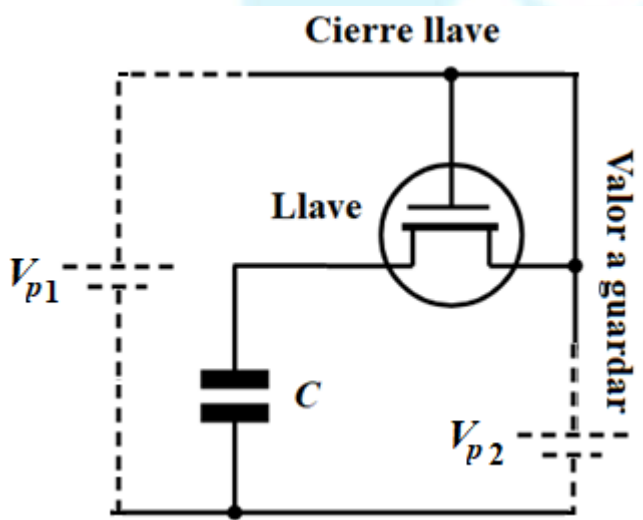
En este momento estoy escribiendo en una computadora con 8 GB de memoria (marzo 2020). No es ni mucho, ni poco. La letra G es por giga (10^9) y B es por byte. Un byte está formado por 8 bits. Un bit es la unidad elemental de información que la representamos por un **1** o un **0**. Entonces, mi computadora es capaz de guardar unas 64×10^9 unidades elementales de información. La siguiente figura muestra las memorias de mi computadora. Miden 14 cm de largo, 3 cm de alto y 6 mm de espesor. Los contactos dorados las conectan con el resto de la computadora.

Sólo los rectángulos negros son las memorias (y la parte útil está adentro y es más pequeña).



En 1970 Intel presentó la primera memoria útil basada en capacitores y cuya unidad elemental, muy simplificada, aparece en la siguiente figura.

El capacitor C estará en dos estados: cargado, en cuyo caso interpretamos que equivale a un **1** y descargado, que lo interpretamos como **0**.



Las “pilas” V_{p1} y V_{p2} son circuitos complicados y sus valores pueden ser 1.5 V (**1**) ó 0V (**0**) cada una de forma independiente. Cuando $V_{p1} = 1.5$ V la llave se cierra y conecta a C con V_{p2} . Si ahora $V_{p1} = 0$ V la llave se abre y C ha quedado cargado con la carga transferida por V_{p2} , es decir que ha “memorizado” el valor. Hemos guardado un **1** o un **0**.

Vamos a saltarnos la parte de lectura del valor guardado porque sólo queríamos presentar la idea y no abrumar con detalles. Síntesis: la memoria de la computadora o el teléfono usa capacitores para almacenar datos.

La pantalla del teléfono

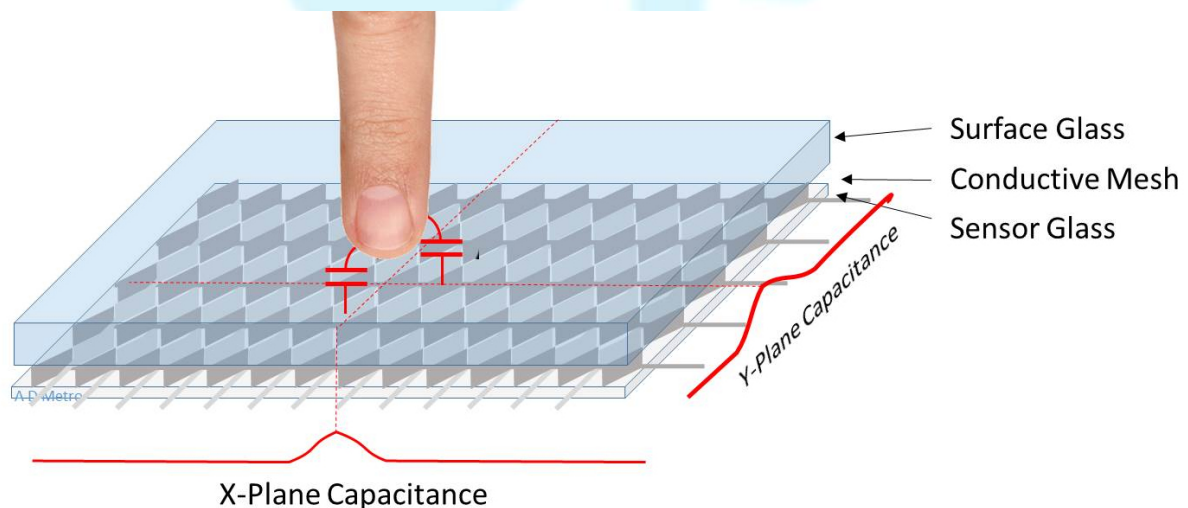
Los intentos de hacer una interfaz táctil con la computadora son tan antiguos como de 1965. A lo largo del tiempo aparecieron varias soluciones ingeniosas que tuvieron mayor o menor éxito comercial, pero ninguna tan generalizada como la pantalla capacitiva que introdujo Apple en el primer iPhone de 2007. Vamos a contar un tipo de pantalla, no podemos asegurar en qué teléfono se usa porque hay secretos comerciales de por medio.

Resulta que el vidrio del teléfono no es un vidrio común. Es extremadamente resistente (se llama GorillaGlass y es producido por Corning Glass). Por debajo de este vidrio (Surface Glass) hay otra capa de vidrio (Sensor Glass) que tiene depositadas, sobre sus caras, dos finísimas estructuras metálicas (rombos claros y oscuros) transparentes a la luz (se pueden hacer metales transparentes).

Los rombos claros y oscuros son las placas de muchos capacitores; cuando tocamos con el dedo agregamos un extra de capacidad (ver figura) que aparece en una coordenada en el eje X y en otra coordenada en el eje Y. A partir de este dato, el procesador distingue dónde pusimos el dedo.

¿Tenemos dedos metálicos de robot? No, pero la superficie del dedo siempre está húmeda y con suciedad que es conductora, así que igual sirve para formar un capacitor extra entre el dedo y las estructuras con forma de rombo que están abajo del vidrio principal.

Por supuesto que faltan muchos detalles, tanto en el caso de la memoria como en el del teléfono, pero queríamos contar dos usos posibles de los capacitores.



2.9.3 El trabajo necesario para cargar un capacitor.

En párrafos anteriores adelantamos la idea que al cargar un capacitor el agente que transporta las cargas realiza un trabajo. Vamos ahora a calcularlo.

La figura muestra un capacitor mientras es cargado. En el momento en el que lo observamos la cantidad de carga acumulada es Q e imaginamos que el agente externo la incrementa en dQ . Si la carga del capacitor es Q entonces la diferencia de potencial entre sus placas es: $V=Q/C$. Para agregar el extra de carga dQ el agente externo debe realizar un trabajo $dW=VdQ$ (recordar definición de diferencia de potencial). Para calcular la cantidad total de trabajo realizado “sumamos” los aportes infinitesimales.

$$W = \int_0^Q V dQ = \int_0^Q (Q/C) dQ = Q^2/2C = QV/2 = CV^2/2$$

Como el agente realizó trabajo contra la fuerza eléctrica, que es conservativa, el trabajo realizado queda almacenado en el sistema (capacitor), listo para ser recuperado más tarde (<https://www.youtube.com/watch?v=-K3PTlybroc>). En este caso conviene recordar un caso análogo. Al comprimir o expandir una distancia d un resorte de constante elástica k se realiza un trabajo $W=kd^2/2$. Este trabajo, también realizado contra fuerzas conservativas, queda almacenado en el sistema.

2.9.4 Tema especial 4. La fuerza entre placas de un capacitor.

Si tenemos un capacitor cargado esperamos que exista una fuerza de atracción eléctrica entre ambas. Esta fuerza de atracción determina un esfuerzo mecánico sobre las placas que puede llegar a ser muy grande y deformarlas. Esta deformación se explota en los llamados sistemas micro electro- mecánicos (<https://www.youtube.com/watch?v=CNmk-SeM0ZI>)

Vamos a calcular la fuerza a partir de la siguiente estrategia: pensamos que alteramos la distancia d entre placas en una pequeña cantidad δd . Al desplazar las placas la energía almacenada cambiará en una cantidad δW . Igualamos esta cantidad al producto de una fuerza desconocida por el desplazamiento: $\delta W=F \delta d$. Formamos la razón $\delta W/\delta d$ y luego tomamos el límite en el que δd tiende a cero. Con esto obtenemos la fuerza buscada.

Primer caso. Un capacitor a carga constante Q .

La energía almacenada cuando la distancia entre placas es d vale: $U=Q^2/2C(d)$; al incrementar la distancia pasa a ser $U'=Q^2/2C(d+\delta d)$. Calculamos la energía en términos de la carga porque ésta permanece constante. Así obtenemos:

$$\begin{aligned}\delta U = U' - U &= \frac{Q^2}{2} \left[\frac{1}{C(d+\delta d)} - \frac{1}{C(d)} \right] = \frac{Q^2}{2} \left[\frac{C(d) - C(d+\delta d)}{C(d+\delta d)C(d)} \right] \\ \delta U &\approx \frac{Q^2}{2} \left[\frac{C(d) - \left(C(d) + \frac{\partial C}{\partial d} \delta d \right)}{C^2(d)} \right] \approx \frac{Q^2}{2} \frac{-\frac{\partial C}{\partial d} \delta d}{C^2(d)}\end{aligned}$$

El segundo renglón contiene dos aproximaciones. En el denominador consideramos que el producto $C(d)C(d+\delta d)$ lo podemos expresar como $C^2(d)$. En el numerador expandimos $C(d+\delta d)$ como una serie de Taylor alrededor de $C(d)$ truncada a primer orden.

La variación de energía la expresamos como el producto de la fuerza ejercida para separar las placas por la distancia recorrida: $\delta U = F \delta d$. Entonces obtenemos $F = -\left[Q^2/2C^2(d) \right] (\partial C/\partial d)$

Vamos a aplicar este resultado a un capacitor plano de placas de área S . En párrafos anteriores calculamos que $C=\epsilon_0 S/d$, por lo que $\partial C/\partial d = -\epsilon_0 S/d^2$. La fuerza resulta entonces: $F=Q^2/2\epsilon_0 S$.

Segundo caso. Un capacitor a diferencia de potencial constante

Este caso es conceptualmente más difícil puesto que para mantener la diferencia de potencial constante es necesario que incorporemos otro actor: una pila que satisfaga dicha condición. Esto hace que al mover imaginariamente las placas del capacitor debamos tomar en consideración la transferencia de carga entre el capacitor y la pila. En la condición inicial la energía guardada en el capacitor es:

$U=C(d)V^2/2$. Ahora computamos la energía en términos de la diferencia de potencial porque ésta es constante.

Al aumentar la distancia entre placas tenemos:

$$U'=C(d+\delta d) V^2/2$$

$$\begin{aligned}\delta U = U' - U &= \frac{V^2}{2} [C(d+\delta d) - C(d)] \\ \delta U &\approx \frac{V^2}{2} \left[C(d) + \frac{\partial C}{\partial d} \delta d - C(d) \right] \approx \frac{V^2}{2} \frac{\partial C}{\partial d} \delta d\end{aligned}$$

Donde hemos utilizado las mismas aproximaciones que en el caso anterior.

Ahora nos enfrentamos con una paradoja importante. Si ampliamos la distancia entre placas ($\delta d > 0$) la energía almacenada en el capacitor disminuye y entonces $\delta U < 0$. ¿Cómo podemos tener este resultado? Claramente nos cuesta trabajo apartar las placas porque se atraen electrostáticamente y sin embargo la cantidad de energía almacenada en el capacitor disminuye. ¿Dónde está el error?

La respuesta es sutil e involucra el intercambio de carga entre el capacitor y la pila.

En la condición inicial la carga vale: $Q = C(d) V$. Al separar las placas tenemos $Q' = C(d + \delta d) V$. Esto implica un cambio

$$\begin{aligned}\delta Q &= Q' - Q = [C(d + \delta d) - C(d)]V \\ \delta Q &\approx \left[C(d) + \frac{\partial C}{\partial d} \delta d - C(d) \right] V \approx \frac{\partial C}{\partial d} \delta d V\end{aligned}$$

Por lo que hemos analizado antes $\delta Q < 0$ cuando $\delta d > 0$. Esta cantidad de carga vuelve del capacitor a la pila y ésta recibe una cantidad de trabajo $\delta W = -\delta Q V$ (el menos es porque sale carga del capacitor pero entra a la pila). Si ahora sumamos la variación de energía del capacitor y el trabajo entregado a la pila (cantidad total de trabajo realizado) obtenemos:

$$\delta U + \delta W = \frac{V^2}{2} \frac{\partial C}{\partial d} \delta d - V^2 \frac{\partial C}{\partial d} \delta d = -\frac{V^2}{2} \frac{\partial C}{\partial d} \delta d$$

Ahora tenemos el signo correcto. Al alejar las placas realizamos trabajo, la energía almacenada en el capacitor disminuye pero la pila recibe trabajo, dándonos un total positivo.

Retomando el mismo método de la sección anterior calculamos una fuerza:

$$F = -\frac{V^2}{2} \frac{\partial C}{\partial d}$$

*Si alguien encuentra contradictoria esta afirmación con la que dice que el trabajo que realiza la pila por unidad de carga movida es constante, está totalmente en lo cierto. La resolución de esta contradicción es compleja y la dejamos para más adelante.

Fin tema especial 4

Capítulo 3

Los Dieléctricos y los Campos

3.1.	<u>Introducción</u>	3-2
3.2.	<u>Descripción microscópica de los materiales dieléctricos</u>	3-7
3.3.	<u>Ecuaciones electrostáticas en presencia de dieléctricos</u>	3-14
3.4.	<u>Condiciones de frontera o de contorno o de borde</u>	3-15
3.5.	<u>Buscando la normal adecuada...</u>	3-19
3.6.	<u>Aplicaciones</u>	3-20
3.6.1.	<u>Esfera dieléctrica uniformemente cargada en volumen</u>	3-20
3.6.2.	<u>Conductor cargado-dieléctrico descargado-vacío</u>	3-23
3.6.3.	<u>Conductor cargado –dieléctrico descargado-dieléctrico descargado-vacío</u>	3-25
3.7	<i>Sistemas con más de un capacitor</i>	3-27
	<u>Apéndice: el dipolo puntual</u>	3-30

3.1 Introducción

Hasta ahora estuvimos viendo cómo influyen los campos eléctricos en los materiales en los conductores. En ellos, las cargas se mueven de forma tal que responden a los campos

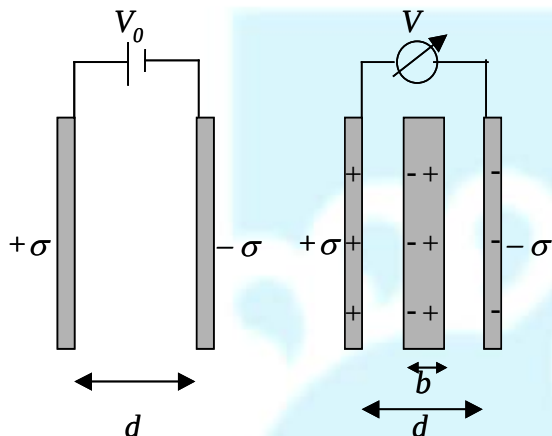


Fig.1.a) Capacitor con vacío entre placas, **b)** con un bloque conductor

eléctricos haciendo que sean nulos en su interior en condiciones electrostáticas. Supongamos un capacitor de placas plano-paralelas (de dimensiones tales que se puedan despreciar los efectos de borde) conectado a una batería V_0 . Las placas se cargarán con una densidad superficial σ de forma tal que

$$V_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d = \frac{Qd}{\epsilon_0 A} \quad (1)$$

siendo A el área de la placa del capacitor. La

$$\text{capacidad es: } C_0 = \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad (2)$$

¿Qué ocurre si colocamos un bloque conductor descargado entre las placas de este capacitor si previamente retiramos la batería? Como el campo eléctrico debe ser nulo dentro de los conductores en situación electrostática, los electrones libres del conductor se desplazarán como indica la Figura 1. De esta manera el campo eléctrico tendrá un valor σ/ϵ_0 en las zonas de vacío y cero en los conductores. ¿Cuál será la nueva diferencia de potencial entre las placas? ¿Cuál es la capacidad de este dispositivo? Como el campo eléctrico es nulo en el interior del bloque de espesor b , la nueva diferencia de potencial es la circulación del campo eléctrico en la zona donde NO es nulo:

$$\Delta V = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (d - b), \quad (3)$$

es decir, el nuevo voltaje es menor que el original. La capacidad resulta

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{\frac{Q}{A\epsilon_0} (d - b)} = \frac{A\epsilon_0}{(d - b)} = \frac{A\epsilon_0}{d(1 - \frac{b}{d})} > C_0 \quad (4)$$

En consecuencia, la capacidad C es mayor que la que tenía antes de colocarle el bloque conductor. Es interesante observar que esta capacidad es independiente del lugar donde se coloque el conductor. Si el conductor es de espesor despreciable frente a la separación entre

placas, resulta $C \approx C_0$, es decir, la capacidad no se ve seriamente afectada por una lámina conductora muy delgada colocada paralelamente a las placas.

Ahora discutiremos qué ocurre cuando **materiales que no conducen** la electricidad se colocan en campos eléctricos. Les recomendamos un video del MIT (que reproduce una experiencia de Laboratorio) para que observen qué ocurre cuando se separan las placas de un capacitor plano-paralelo (entre ellas hay aire, que es un aislante eléctrico) y cuando se introduce otro dieléctrico (Plexiglass) <https://www.youtube.com/watch?v=e0n6xLdwaT0>.

Faraday descubrió que los materiales aisladores eran afectados por los campos eléctricos a pesar de que no podía haber conducción. Faraday se basó en el siguiente hecho experimental:

- 1) Cargaba un capacitor vacío estableciendo una V_0 entre las placas
- 2) Retiraba la batería y colocaba un aislante entre las placas (en todo el espacio entre placas).
- 3) Medía el nuevo voltaje entre placas, el que siempre resultó menor que V_0 .

Como la carga sobre cada placa no había variado y $C = \frac{Q}{\Delta V}$, este resultado mostraba que la capacidad aumentaba. Cuánto aumentaba dependía del material. Así estableció la relación entre la capacidad en vacío C_0 y la capacidad con material aislante C : $C = \kappa C_0$ denominando a κ como la constante dieléctrica relativa al vacío¹. Esta constante dependía del material exclusivamente.

Así, en un capacitor de placas plano-paralelas resulta

$$C = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d}, \quad \text{siendo } V = \frac{Q}{C} = \frac{1}{\kappa} \frac{Q}{C_0} \quad (5)$$

Al observar la expresión para la capacidad, pareciera que se puede disminuir d todo lo que se desee pudiendo almacenar toda la carga que se quiera. Así, consideramos un capacitor conectado a una pila V_0 y cambiamos la separación entre las placas como indica la Figura 2. Como la capacidad varió (por cambiar la distancia entre placas) y la diferencia de potencial no varió porque siempre estuvo conectado a la pila, tiene que haber variado la carga sobre cada placa. Es decir:

¹ Una notación más habitual y cómoda es asignarle el símbolo ϵ_r a la constante dieléctrica relativa al vacío κ

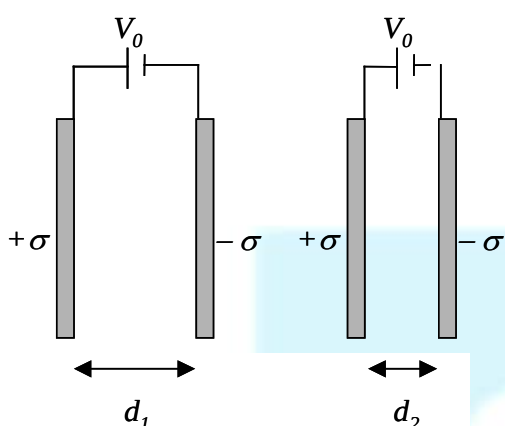


Fig.2. Capacitor con placa plano paralela a V_0 constante

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= C_1 V_0 = \kappa \epsilon_0 V \frac{A}{d_1} \\ Q_2 &= C_2 V_0 = \kappa \epsilon_0 V \frac{A}{d_2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow Q_2 > Q_1 \text{ si } d_1 > d_2 \quad (6)$$

Sin embargo, existe un límite inferior para d (dado un valor de V_0) que depende del material. Conforme d disminuye, el campo eléctrico aumenta hasta que, alcanzado un valor $E_{\text{máximo}}$, se produce lo que se llama **ruptura dieléctrica**, el dieléctrico pierde sus propiedades de aislante y se vuelve conductor. La siguiente tabla muestra el campo máximo admisible

en algunos dieléctricos.

Medio	κ	$E_{\text{máximo}}$ (V/m)
Aire	1,00059	3×10^6
Teflón	2,1	60×10^6
Mylar	3,2	7×10^6
Plexiglass	3,4	40×10^6
Papel	3,7	16×10^6
Vidrio Pyrex	5,6	14×10^6

Vemos, entonces, que agregar un material dieléctrico tiene algunas ventajas (además de brindar soporte mecánico): aumenta la capacidad y permite resistir mayores tensiones.

Tema especial 1. Aumentar la capacidad ¿significa acumular más energía?

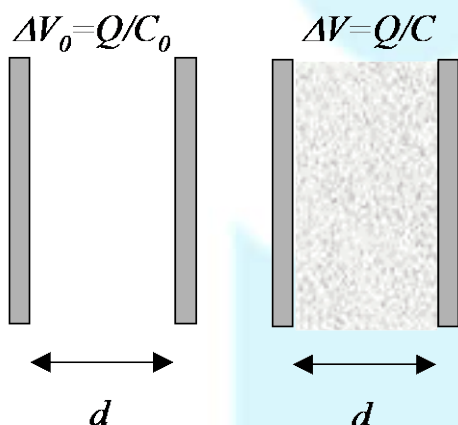


Fig.3.a) Capacitor vacío con carga Q ,
b) a Q constante, con dieléctrico

Veamos primero **un capacitor sin y con dieléctrico con la misma carga Q** . La energía acumulada en el capacitor vacío es

$$U_0 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_0} \quad (7)$$

mientras que cuando todo el espacio entre placas está lleno de dieléctrico resulta

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (8)$$

De esta manera $\frac{U_0}{U} = \frac{C}{C_0} > 1$. Es decir, la energía que almacena en vacío es mayor que la que almacena con un dieléctrico ¿Cómo se entiende esto? Si la carga Q se mantuvo constante, los pasos seguidos fueron:

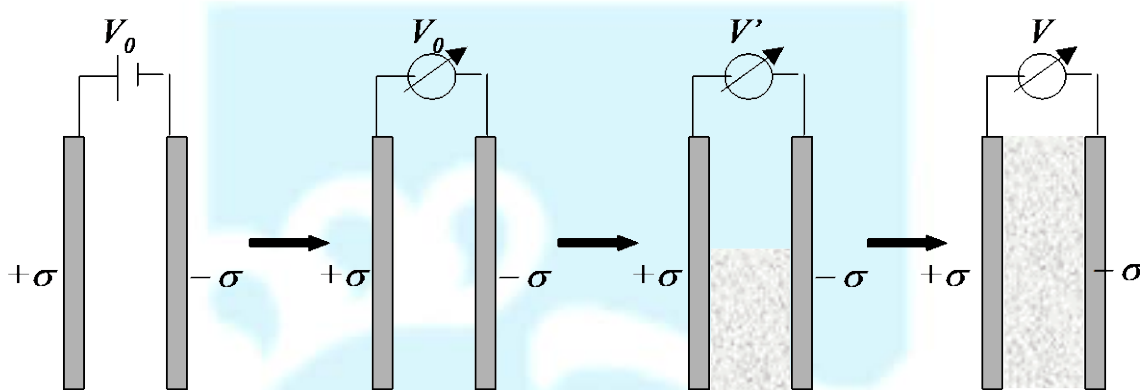


Fig.4. a) Capacitor a Q constante (cargado a través de una batería con V_0). b) Se mide la diferencia de potencial. c) Se va introduciendo un dieléctrico y se miden diferencias de potencial (que dependen de cuánto se introdujo el material) d) Capacitor con dieléctrico y carga Q cuando el dieléctrico ha sido introducido en su totalidad

Si disminuyó la energía potencial electrostática, el campo debe haber realizado un trabajo W tal que

$$W_{\text{realizado por el campo}} = -\Delta U > 0 \quad (9)$$

Experimentalmente se encuentra que el dieléctrico es atraído, es decir, actúa una fuerza sobre él que “lo tira hacia adentro”. El análisis detallado es bastante complicado; las líneas de campo no son rectas cerca del límite del dieléctrico, aunque hayamos considerado al capacitor como “infinito”. Justamente la deformación de las líneas de campo es la que permite describir cualitativamente la fuerza. Pero para determinar su valor se pueden hacer consideraciones energéticas exclusivamente.

Es de esperar que la energía potencial U vaya disminuyendo a medida que se introduce el dieléctrico, es decir, que dependa de x únicamente. Como ΔU en un capacitor está dado por

$$U = \Delta U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2 \quad (10)$$

independientemente de la forma del capacitor, la fuerza sobre el dieléctrico estará dada por

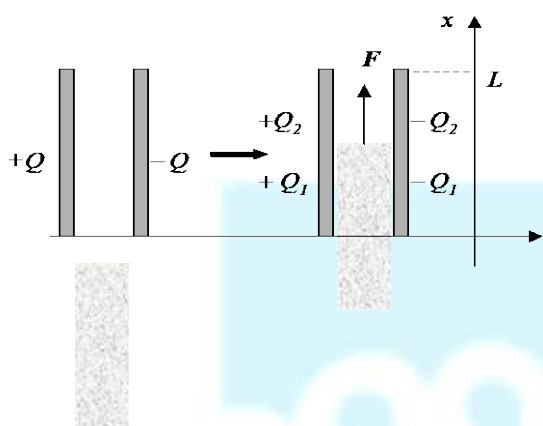


Fig.5. Energía de un capacitor de capacidad variable

$$\vec{F} = -\nabla U = -\frac{\partial U}{\partial x} \vec{e}_x \quad (11)$$

ya que no puede haber dependencia en las otras coordenadas por tratarse de “planos infinitos”.

Analicemos el problema:

1) la carga total se mantiene constante en cada placa porque no hay contacto eléctrico entre ellas es decir, $Q = Q_1 + Q_2$ en todo momento

2) Cada conductor es una equipotencial, por lo tanto, en todo instante

$$V = \frac{Q_1(x)}{C_1(x)} = \frac{Q_2(x)}{C_2(x)} \quad (12)$$

Si despreciamos los efectos de borde, las placas del capacitor son de área $D \times L$, y el dieléctrico fue introducido una distancia x , tendremos

$$C_1 = \kappa C_0 = \kappa \epsilon_0 \frac{Dx}{d} \quad C_2 = \epsilon_0 \frac{D(L-x)}{d} \quad (13)$$

Este sistema será equivalente a un capacitor con capacidad C , diferencia de potencial entre placa V y carga $Q = Q_1 + Q_2$, es decir,

$$Q = VC = Q_1 + Q_2 = VC_1 + VC_2 = V(C_1 + C_2) \quad (14)$$

De (13) y (14) se obtiene

$$C = \frac{\epsilon_0 D}{d} (\kappa x + L - x) \quad (15)$$

Como de (14) resulta

$$Q_1 = C_1 \frac{Q}{C} \quad Q_2 = C_2 \frac{Q}{C} \quad (16)$$

se tiene

$$Q_1 = Q \frac{\kappa x}{\kappa x + L - x} \quad Q_2 = Q \frac{L - x}{\kappa x + L - x} \quad (17)$$

es decir las densidades superficiales de carga resultan distintas en la zona donde hay o no hay dieléctrico.

$$\sigma_1 = \frac{Q}{D} \frac{\kappa}{\kappa x + L - x} \quad \sigma_2 = \frac{Q}{D} \frac{1}{\kappa x + L - x} \quad (18)$$

Resulta así que $\sigma_1 > \sigma_2$. Analizaremos después este resultado.

De (10), (11) y (15) resulta (se puede realizar a $V=\text{cte}$ o a $Q=\text{cte}$)

$$\vec{F} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} \frac{\epsilon_0 D}{d} (\kappa - 1) \vec{e}_x = \frac{1}{2} V^2 \frac{\epsilon_0 D}{d} (\kappa - 1) \vec{e}_x \quad (19)$$

Es decir que resulta una fuerza de atracción sobre el dieléctrico (como ocurre experimentalmente)

Veamos ahora **un capacitor sin y con dieléctrico mantenido a potencial constante V_0** (Figura 6). La energía potencial acumulada en el capacitor sin dieléctrico será

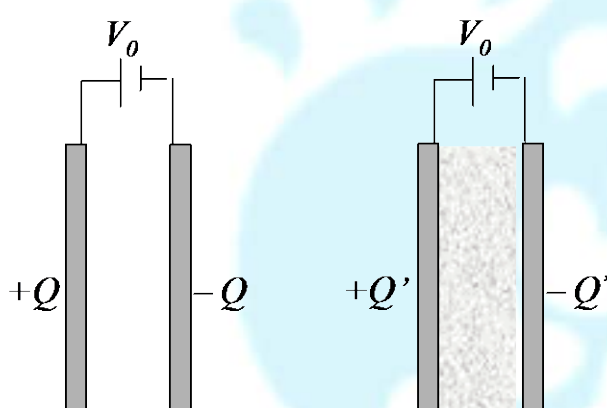


Fig.6. Capacitor a V_0 constante (a) con dieléctrico (b) sin dieléctrico

$$U_0 = \frac{1}{2} V_0^2 C_0 \quad (20)$$

y con dieléctrico de permitividad relativa κ

$$U = \frac{1}{2} V_0^2 C = \kappa \frac{1}{2} V_0^2 C_0 \quad (21)$$

Es decir, resulta $U > U_0$. La energía potencial electrostática del sistema aumentó. Esto se debe a que se hizo trabajo sobre el sistema. ¿Quién hizo ese trabajo? La batería, ya que es una fuente

adicional de energía.

¿Y qué pasó con la carga en las placas conductoras? De (8), (20) y (21)

$$\frac{U}{U_0} = \kappa = \frac{\frac{1}{2} \frac{Q'^2}{C}}{\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_0}} = \frac{Q'^2}{Q^2} \frac{C_0}{C} = \frac{Q'^2}{Q^2} \frac{1}{\kappa} \quad (22)$$

De esta expresión es fácil deducir que

$$Q' = \kappa Q \quad (23)$$

O sea que aumentó la carga sobre la placa conductora al introducir el dieléctrico. Este resultado será también analizado más adelante.

Fin tema especial 1.

3.2 Descripción microscópica de los materiales dieléctricos

Cuando Faraday “descubrió” el comportamiento de los materiales dieléctricos al colocarlos entre las placas de un capacitor, no se conocía el modelo atómico como una agrupación de electrones y protones (el electrón se descubrió en 1897). La teoría atómica en ese entonces provenía de la Química (modelo de Dalton) donde cada átomo era una esfera maciza indivisible.

El resultado experimental de Faraday era que la diferencia de potencial entre las placas disminuía al introducir el dieléctrico entre placas cargadas y aisladas entre sí, con lo que la capacidad debía aumentar (por su definición). Pero si el voltaje (diferencia de potencial) era menor, como

$$\Delta V = - \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (24)$$

el campo eléctrico tenía que haber disminuido, aunque la carga sobre las placas no había cambiado. ¿Cómo se explica este comportamiento? Sabemos de la Ley de Gauss que el flujo del campo eléctrico está directamente relacionado con la carga encerrada. Como el campo se reduce, la carga encerrada en el volumen ¿debe ser menor!! La Figura 1 nos da la pista para hacer un modelo: el campo es menor pero no nulo; la única posibilidad es que en la superficie

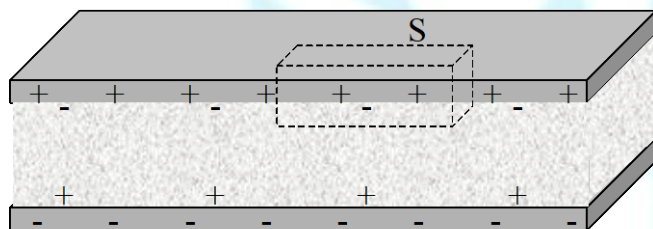


Fig.7. Carga inducida en un dieléctrico

externa al conductor haya cargas de signo opuesto como se muestra en la Fig.7. es decir, el fenómeno se puede explicar considerando que se induce una cierta cantidad de carga en la superficie intersección entre el conductor y el dieléctrico. Se dice que existe una **carga**

inducida o carga de polarización, cuya densidad superficial está notada como σ_{pol} .

En el capacitor de placas plano-paralelas aislado (es decir se mantiene la carga constante con densidad superficial σ_{Lib}) de área A y separación entre placas d , habrá una diferencia de potencial entre las placas dada por

$$\Delta V_{vacio} = E_{vacio} d \quad (25)$$

$$\Delta V_{diel} = E_{diel} d \quad (26a)$$

$$E_{diel} = \frac{\sigma_{total}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_{Lib} + \sigma_{Pol}}{\epsilon_0} \quad (26b)$$

De (5), (25) y (26)

$$\frac{\Delta V_{diel}}{\Delta V_{vacio}} = \frac{E_{diel}}{E_{vacio}} = \frac{1}{\kappa} = \frac{\sigma_{Lib} + \sigma_{pol}}{\sigma_{Lib}} \quad (27)$$

de lo que se deduce que la densidad superficial de carga de polarización está dada por

$$\sigma_{Lib} \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right) = -\sigma_{Pol} \quad (28)$$

Como $\kappa > 1$, la **densidad de carga superficial de polarización** σ_{pol} resulta de distinto signo y menor en módulo que la densidad de carga en el conductor (que llamaremos de ahora en más **densidad superficial de carga libre** σ_{Lib}).

Pero... ¿cómo se genera esa distribución de carga de polarización? Un modelo atómico o molecular que considerara que hay cargas positivas y negativas resulta muy adecuado. ¿Por qué? Pensemos en moléculas en las cuales el centro de cargas negativas no coincide con el de positivas (ese tipo de molécula se llama **polar**). Como modelo más sencillo, sería un **dipolo**.

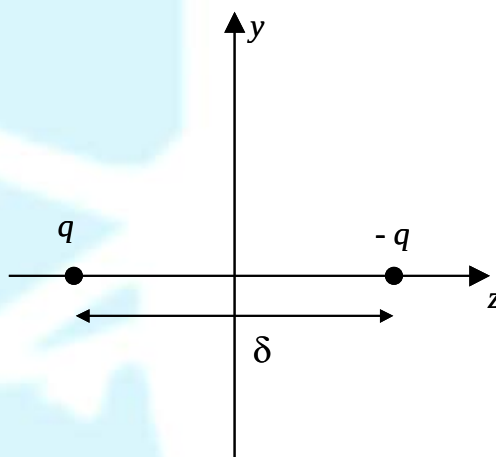


Fig.8. Esquema de un dipolo

Tema especial 2. El campo eléctrico generado por un dipolo (para más detalles, ver APÉNDICE).

Habíamos calculado la expresión del campo eléctrico en todo el espacio:

$$E_x(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q x \left\{ \frac{1}{\left[x^2 + y^2 + \left(z + \frac{\delta}{2} \right)^2 \right]^{3/2}} - \frac{1}{\left[x^2 + y^2 + \left(z - \frac{\delta}{2} \right)^2 \right]^{3/2}} \right\} \quad (29)$$

$$E_y(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q y \left\{ \frac{1}{\left[x^2 + y^2 + \left(z + \frac{\delta}{2} \right)^2 \right]^{3/2}} - \frac{1}{\left[x^2 + y^2 + \left(z - \frac{\delta}{2} \right)^2 \right]^{3/2}} \right\} \quad (30)$$

$$E_z(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left\{ \frac{\left(z + \frac{\delta}{2} \right)}{\left[x^2 + y^2 + \left(z + \frac{\delta}{2} \right)^2 \right]^{3/2}} - \frac{\left(z - \frac{\delta}{2} \right)}{\left[x^2 + y^2 + \left(z - \frac{\delta}{2} \right)^2 \right]^{3/2}} \right\} \quad (31)$$

Como existe simetría de revolución alrededor del eje z , estudiaremos el campo en el plano yz es decir, en $x = 0$. Resulta, entonces

$$E_x(0, y, z) = 0 \quad (32)$$

$$E_y(0, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q y \left\{ \frac{1}{\left[y^2 + \left(z + \frac{\delta}{2} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\left[y^2 + \left(z - \frac{\delta}{2} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right\} \quad (33)$$

$$E_z(0, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left\{ \frac{\left(z + \frac{\delta}{2} \right)}{\left[y^2 + \left(z + \frac{\delta}{2} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{\left(z - \frac{\delta}{2} \right)}{\left[y^2 + \left(z - \frac{\delta}{2} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right\} \quad (34)$$

y a lo largo del eje y (es decir, en $z = 0$) el campo eléctrico solamente tiene componente z ya que

$$E_x(0, y, 0) = 0 \quad (35)$$

$$E_y(0, y, 0) = 0 \quad (36)$$

$$E_z(0, y, 0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{\delta}{\left[y^2 + \left(\frac{\delta}{2} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \quad (37)$$

De (37) es fácil deducir que para puntos del espacio a lo largo de la mediatriz y alejados del dipolo ($y \gg \delta$) el campo disminuye como $\frac{1}{y^3}$. Por la simetría de revolución el mismo resultado corresponde a cualquier punto alejado del dipolo sobre el plano xy . Analicemos ahora cuál es la dependencia del campo con la distancia al dipolo cuando se considera un punto sobre el eje z (es decir, $x=y=0$)

$$E_z(0, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left\{ \frac{\left(z + \frac{\delta}{2} \right)}{\left[y^2 + \left(z + \frac{\delta}{2} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{\left(z - \frac{\delta}{2} \right)}{\left[y^2 + \left(z - \frac{\delta}{2} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right\} \quad (38)$$

Como para $z \gg \delta$

$$\frac{1}{\left(z \pm \frac{\delta}{2} \right)^2} = \frac{1}{z^2 \left(1 \pm \frac{\delta}{2z} \right)^2} = \frac{1}{z^2} \left(1 \mp \frac{\delta}{z} \right) \quad (39)$$

el campo eléctrico resulta

$$E_z(0,0,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} q\delta \frac{2}{z^3} \quad (40)$$

Es decir, el campo eléctrico lejos del dipolo varía como $1/r^3$ y depende del producto $q\delta$. A este producto se lo denomina **momento dipolar**.

Fin tema especial 2

Definimos, porque será útil, un vector llamado momento dipolar $\vec{p} = q\vec{\delta}$ (41), donde el vector $\vec{\delta}$ tiene su origen en la carga negativa y su fin en la positiva.

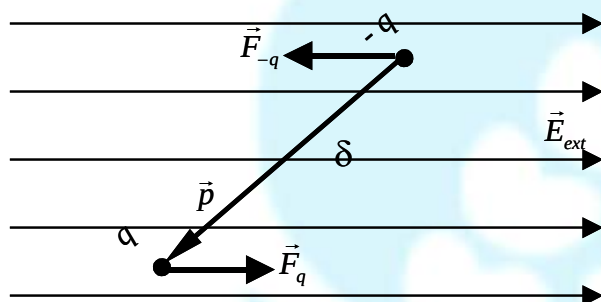


Fig.9. Torque sobre un dipolo

¿Qué ocurre cuando un dipolo rígido es puesto bajo la acción de un campo eléctrico uniforme?

La fuerza total sobre el dipolo es nula (el centro de masa no acelera). En consecuencia, el torque $\vec{\tau}$ será independiente del punto desde el cual se lo calcule. Tomamos, entonces, como centro de momentos a la carga negativa.

$$\vec{\tau}_{-q} = \vec{r}_q \times \vec{F}_q = \delta \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \times q\vec{E}_{ext} = \vec{p} \times \vec{E} \quad (42)$$

De lo cual se deduce que el dipolo tiende a orientarse de forma tal que la dirección y sentido del momento dipolar $\vec{p}$ sea la del campo $\vec{E}_{ext}$.

Volvamos, entonces, al modelo atómico de cargas positivas y negativas. Si los materiales dieléctricos fueran “dipolos” (se dice que tienen un **momento dipolar permanente**), al colocarlos en un campo eléctrico externo (como el producido por un capacitor) los dipolos se orientarían paralelos al campo eléctrico externo. Entonces un modelo de este tipo podría explicar el comportamiento de los capacitores con material dieléctrico. Cuando un material es colocado entre las placas de un capacitor, los “dipolos” pasan de tener una distribución al azar a una orientación paralela al campo. El grado de paralelismo dependerá del dieléctrico, de la temperatura y de la magnitud del campo.

Pero sabemos que hay materiales **no polares**, es decir, materiales donde el centro de cargas positivas coincide con el de negativas. Podemos pensar que el campo eléctrico externo separa el centro de las cargas positivas del de las negativas; éste es un **momento dipolar inducido**. Estos momentos también tienden a alinearse con el campo eléctrico externo. Como conclusión: tanto para moléculas polares como no polares tendremos **momentos dipolares (permanente o inducido)** y los materiales quedan “polarizados” en un campo externo.

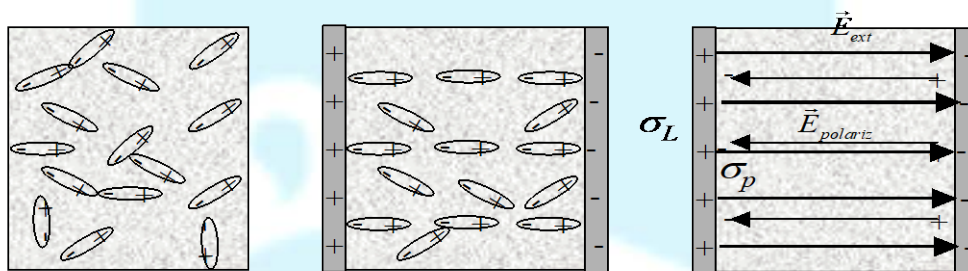


Fig.10. a)Dieléctrico desordenado, b)Ordenado en un campo,
c)Esquema macroscópico del campo.

Parece razonable pensar que el momento dipolar inducido depende del valor del campo eléctrico externo. Es decir, un campo intenso desplazará al centro de cargas positivas y negativas más que uno leve. Supongamos que en un átomo o molécula hay cargas q y $-q$, cuyos centros están separados una distancia δ . El momento dipolar de cada molécula será, entonces, $q\delta$. Si hay en promedio N moléculas por unidad de volumen con momento dipolar con la “misma” dirección y sentido, el momento dipolar total por unidad de volumen será,

$$\vec{P} = Nq\vec{\delta} \quad (43)$$

En general, $\vec{P}$ variará de un punto a otro de un dieléctrico homogéneo. Pero valdrá lo mismo en todos los puntos dentro del dieléctrico donde el campo externo sea el mismo. Proponemos (sujeto a verificación experimental) una relación de proporcionalidad simple entre $\vec{P}$ y $\vec{E}$ la constante de proporcionalidad depende del material ²

$$\vec{P} = cte \vec{E} \equiv \epsilon_0 \chi \vec{E} \quad (44)$$

² Habrá moléculas orientadas en otras direcciones producto, por ejemplo, de la agitación térmica lo que da una orientación al azar con momento dipolar nulo en promedio. Pero en presencia de un campo eléctrico habrá una dirección preferencial y una cierta cantidad de moléculas por unidad de volumen N que se alinearán con el campo.

La inclusión de ϵ_0 en la constante permite que χ sea un número adimensional que se llama polarizabilidad y se busca en internet. En el caso del capacitor de placas plano-parallelas, $\vec{P}$ será uniforme. Es decir, en cada unidad de volumen tendremos N dipolos, no habrá ninguna región donde haya más cargas positivas que negativas y la densidad de dipolos será la misma en promedio. ¿Qué ocurre en la superficie del dieléctrico? Los electrones se han separado una distancia δ de los núcleos y, en consecuencia, queda una carga efectiva sobre la superficie del dieléctrico: **densidad superficial de cargas de polarización**. En el volumen $V=A\delta$, hay N moléculas por unidad de volumen y en total $NA\delta$ moléculas (dipolos), cada uno con una carga sobre la superficie q . La densidad superficial de carga será $\sigma_p = Nq\delta = N|\vec{p}| = |\vec{P}|$ (45). En este caso el vector $\vec{P}$ es perpendicular a las placas. De no serlo, la forma más general es

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n} \quad (45)$$

siendo $\vec{n}$ la normal a la superficie del dieléctrico (el sentido de $\vec{n}$ lo estudiaremos más adelante).

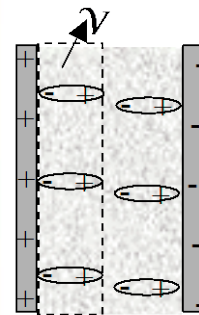


Fig.11. Dipolos moleculares

Tema especial 3

Si $\vec{P}$ es uniforme no habrá ninguna región del espacio donde haya más densidad de cargas positivas que negativas (ni la inversa), es decir tendremos la misma densidad promedio (como en el capacitor de placas plano-parallelas). Por ejemplo, en la Figura 12 se muestra un capacitor esférico (cáscaras conductoras con cargas Q y $-Q$) con un material dieléctrico. El campo generado por Q es radial, los dipolos se acomodarán en promedio como indica la figura, apareciendo una densidad superficial de polarización en las superficies interior y exterior de la

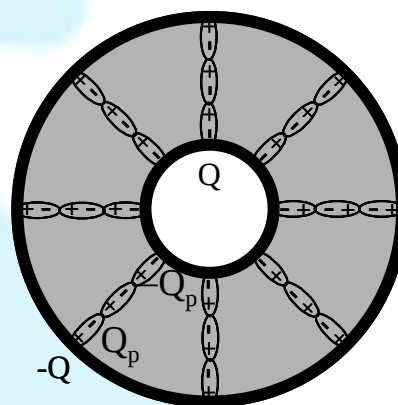


Fig.12. Dipolos moleculares en una geometría esférica

cáscara dieléctrica (tener cuidado: las densidades de cargas de polarización son distintas en cada superficie, lo que son iguales son las cantidades de carga positiva y negativa). La densidad de cargas de polarización en el volumen es nula, es decir, si se toma un volumen, la

cantidad de líneas de $\vec{P}$ que salen de ese volumen será igual a la cantidad de líneas que entren.

Pero si $\vec{P}$ no es uniforme, dependiendo de cómo sea el vector polarización puede haber zonas donde haya más acumulación de cargas positivas que negativas (o viceversa). En este caso, como la densidad volumétrica de cargas de polarización no es nula, si se toma un volumen, la cantidad de líneas de $\vec{P}$ que salen de ese volumen será distinta a la cantidad de líneas que entren. Es por eso que se tiene

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\rho_{\text{polarización}} \quad (46)$$

El signo negativo proviene de la definición del momento dipolar (su sentido es de $-$ a $+$). Veremos más adelante (sección 3.6) algunos ejemplos donde la densidad volumétrica de carga de polarización es nula a pesar de que $\vec{P}$ no es uniforme.

Fin tema especial 3

3.3 Ecuaciones electrostáticas en presencia de dieléctricos

Cuando estudiamos distribuciones de carga en el vacío, a partir del Teorema de Gauss vimos que:

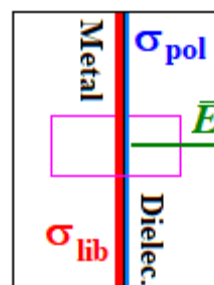
$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \quad (47)$$

Ahora, en presencia de dieléctricos corresponderá considerar TODA la carga: la “libre” y la de polarización (recordar Fig.7 y ec.(26)), es decir, $Q_{\text{enc}} = Q_{\text{libre}} + Q_{\text{polarización}}$. En consecuencia

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} = \frac{Q_{\text{libre}} + Q_{\text{polarización}}}{\epsilon_0} \quad (48)$$

Vamos a analizar el tema signos haciendo un zoom de la figura 10c en el que vemos únicamente la placa de la izquierda y el dieléctrico pegado a la misma (la placa de la derecha es igual con signos cambiados).

Marcamos con rojo (σ_{lib}) la densidad de carga libre superficial en el metal; con azul (σ_{pol}) la densidad de carga de polarización superficial en el dieléctrico. La zona roja es más ancha que la azul para reflejar la ecuación (28). También mostramos en violeta una superficie de Gauss embebida parte en el metal y parte en el dieléctrico y, en verde, una línea de campo genérica.



Cuando aplicamos el teorema de Gauss con esta figura obtenemos:

$$E = \frac{\sigma_{lib} - \sigma_{pol}}{\epsilon_0}$$

Hemos hecho un cambio de notación importante: σ_{pol} está escrita en módulo. El signo, opuesto al de σ_{lib} está contemplado en el signo menos. Hemos hecho esto para poder igualar a σ_{pol} (ahora número positivo) con el módulo de P (que debe ser positivo, ecuación 45). Pasamos de término:

$$(\epsilon_0 E + P) = \sigma_{lib}$$

Esto sugiere definir un vector $(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P})$ que tendría la propiedad que su flujo a través de la superficie de Gauss mostrada sería igual a la carga libre encerrada ($\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{lib_{enc}}$). Este vector $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ se llama **desplazamiento** (nada se desplaza) y vamos a ver que es un auxiliar útil para estudiar sistemas con dieléctricos

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (49)$$

Pero, para la mayoría de los materiales (lineales e isótropos) $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$ (ver ec.(44)), y

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E} \quad (50)$$

Como $\chi > 0$ resulta $\epsilon_r > 1$. El valor ϵ_r es la constante dieléctrica relativa (por eso la r) y $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ es la constante dieléctrica (sin adjetivos).

La relación $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{lib_{enc}}$ suele llamarse Ley de Gauss generalizada.

La situación parece complicada porque tenemos tres actores: el campo eléctrico, la polarización y el desplazamiento. Sin embargo, veremos que ésta aparente complicación nos permite desarmar un problema en partes más simples.

Ejemplo

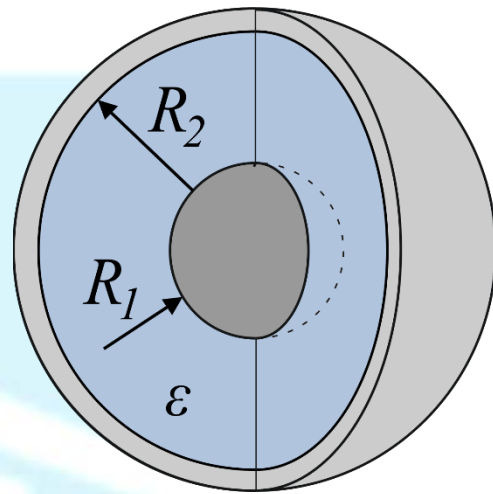
Una esfera de radio R_1 y una cáscara esférica, de radio interior R_2 y exterior R_3 (no dibujado), ambas metálicas (zonas grises), forman un capacitor esférico. El espacio entre la esfera y la cáscara está ocupado por un dieléctrico de permitividad ϵ (zona celeste). Si la esfera es conectada al borne positivo de una pila V_p , y la cáscara al borne negativo de la misma pila, determinar: los tres vectores eléctricos en las distintas regiones y la capacidad eléctrica del sistema.

Primera observación: los vectores $\vec{D}$, $\vec{E}$ y $\vec{P}$ están relacionados entre sí por constantes positivas (ver ecuaciones anteriores); entonces todos tienen la misma dirección y sentido.

El enunciado dice que la esfera está conectada al borne positivo de la pila y la cáscara al negativo; entonces el campo eléctrico $\vec{E}$ apunta de la esfera a la cáscara y lo mismo con $\vec{D}$ y $\vec{P}$.

El sistema consta de cuatro regiones:

- a) $r < R_1$
- b) $R_1 < r < R_2$
- c) $R_2 < r < R_3$
- d) $R_3 < r$



Las zonas (a) y (c) son simples, perteneciendo al interior de un metal todos los campos son nulos. Quedan entonces las zonas (b) y (c).

No calcularemos directamente el campo eléctrico porque necesitamos saber las cargas libres y las de polarización (ecuación 48) y todavía no las conocemos.

Vamos a comenzar por el desplazamiento y su propiedad fundamental:

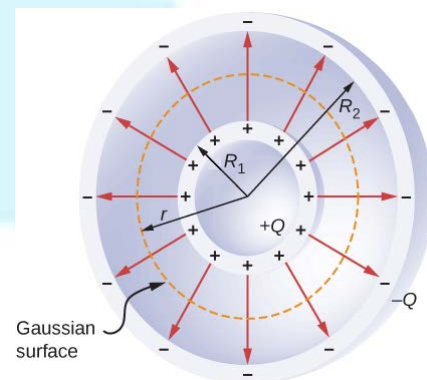
$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{lib_{enc}}$$

En línea naranja punteada vemos la superficie de Gauss esférica que hemos tomado para la zona (b). La carga libre encerrada es la que corresponde a la esfera interior. No conocemos cuánto vale, pero procederemos como si la supiéramos y le asignamos el valor Q .

La figura muestra las líneas de los campos en rojo, que también pueden representar a la normal a la superficie de Gauss. Por análisis anteriores sabemos que el campo sólo depende de la coordenada radial. Tenemos entonces:

$$\oint_S [D(r)\hat{r}] \cdot [dS\hat{r}] = Q$$

Al integrar recorreremos los elementos de área dS sobre la superficie de Gauss. Esto lo hacemos recorriendo los dos ángulos (θ y φ) y manteniendo constante r . Al hacer esto nos mantenemos a una distancia fija y, como la distribución de carga es uniforme, todos los valores angulares son iguales: El módulo del campo es el mismo



sobre la superficie de Gauss:

$$\oint_S [D(r)\hat{r}] \cdot [dS\hat{r}] = \oint_S [D(r)] [dS] = D(r) \oint_S dS = D(r) 4\pi r^2 = Q$$

$$D(r) = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

No conocemos aún el valor de Q , pero ya lo encontraremos.

Con la ayuda de (50) tenemos:

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2}$$

El paso final es reconocer que la circulación del campo eléctrico entre la cáscara y la esfera debe ser igual al valor de la pila utilizada, es decir:

$$-\int_{R_2}^{R_1} E(r)\hat{r} \cdot dr\hat{r} = -\int_{R_2}^{R_1} \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = V_p$$

$$Q = \left[\frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} \right] V_p = CV_p$$

Como era de esperar, la capacidad ha aumentado en el factor ϵ .

Calculemos la polarización. Lo hacemos sólo en la zona (b) que es la única en la que hay dieléctrico. Usamos la (44) y la (50).

$$P(r) = \epsilon_0\chi E(r) = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)E(r)$$

Éste es el módulo de la polarización, la dirección y sentido las sabíamos de antes.

¿Qué pasa en la zona (d)? Extendemos la esfera de Gauss para que se encuentre en esa zona. Notamos que la carga encerrada es cero. Toda la carga positiva de la esfera se cancela con la negativa de la cáscara, entonces el miembro de la derecha de la ley de Gauss es cero. Que una integral sea nula no garantiza automáticamente que el integrando sea nulo. En nuestro caso, cuando recorremos la superficie de Gauss el signo del producto escalar entre el campo y el elemento de área no cambia. Ahora sí podemos decir que el integrando debe ser nulo con lo que $D(r)=0$, así como los otros vectores.

Síntesis: Al comenzar por el cálculo de $\vec{D}$ bajamos la complejidad del problema porque separamos, en lo que hace al cálculo, las cargas libres de las de polarización. Luego calculamos de manera fácil los otros vectores. Son más pasos, pero cada uno es más simple.

3.4 Condiciones de frontera, de contorno o de borde

La ley de Gauss y la condición de rotor nulo del campo eléctrico no son útiles solamente para determinar los campos eléctricos generados por distribuciones de carga conocidas, sino que permiten establecer algunas propiedades de los campos a ambos lados de una interfaz formada por dos medios de propiedades dieléctricas conocidas. Supongamos que tenemos dos medios dieléctricos de constantes dieléctricas ε_1 y ε_2 tal que en la interfaz (superficie de separación) hay una densidad de carga libre (superficial) dada por σ_L (Figura 13). Tomemos un cilindro de altura h mucho menor que su radio R , es decir, $h \rightarrow 0$ más rápidamente que su radio. Si aplicamos la Ley de Gauss Generalizada, tomando como superficie cerrada al cilindro, tendremos

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_{\text{Libre encerrada en } S} = \iint_{A_1} \vec{D} \cdot d\vec{S} + \iint_{A_2} \vec{D} \cdot d\vec{S} + \iint_{\text{Sup lateral}} \vec{D} \cdot d\vec{S} \quad (51)$$

Si se hace tender a cero la altura h (es decir, tomamos un “volumen” infinitesimal alrededor de la interfaz) podremos considerar que el campo sobre la interfaz es uniforme y vale $\vec{D}_1$ (con cualquier dirección y sentido), debajo de la interfaz vale $\vec{D}_2$ (con cualquier dirección y sentido) y en la superficie lateral tendrá un valor $\vec{D}_{lat}$ (con cualquier dirección y sentido). Consecuentemente,

$$\begin{aligned} \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} &= \iint_{A_1} \vec{D}_1 \cdot \vec{n}_1 dS_1 + \iint_{A_2} \vec{D}_2 \cdot \vec{n}_2 dS_2 + \int_{-h/2}^0 \vec{D}_{lat} \cdot \vec{e}_r 2\pi R dl + \int_0^{h/2} \vec{D}_{lat} \cdot \vec{e}_r 2\pi R dl = \\ &= \vec{D}_1 \cdot \vec{n}_1 \pi R^2 + \vec{D}_2 \cdot \vec{n}_2 \pi R^2 + \vec{D}_{1lat} \cdot \vec{e}_r \pi R h + \vec{D}_{2lat} \cdot \vec{e}_r \pi R h \end{aligned} \quad (52)$$

Los tercer y cuarto términos del tercer miembro tenderán más rápidamente a cero que los dos primeros y, para un cilindro infinitesimal ($h \rightarrow 0$ independientemente de R), valdrá

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \vec{D}_1 \cdot \vec{n}_1 \pi R^2 + \vec{D}_2 \cdot \vec{n}_2 \pi R^2 = (\vec{D}_1 \cdot \vec{n}_1 + \vec{D}_2 \cdot \vec{n}_2) \pi R^2 \quad (53)$$

En consecuencia, de (57) y (59)

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = (\vec{D}_1 \cdot \vec{n}_1 + \vec{D}_2 \cdot \vec{n}_2) \pi R^2 = \sigma_L \pi R^2 \quad (54)$$

Como $-\vec{n}_1 = \vec{n}_2 = \vec{n}$, resulta de (60)

$$\begin{aligned} (D_2 - D_1) \cdot \vec{n} &= \sigma_L \\ D_{2_n} - D_{1_n} &= \sigma_L \end{aligned} \quad (55)$$

Así, si en una superficie de discontinuidad no hay carga LIBRE, la componente normal del vector desplazamiento tiene el mismo valor de un lado que del otro. Se dice que se conserva. Si, en cambio, hay una densidad superficial de carga LIBRE, la situación será la de la Figura 14a).

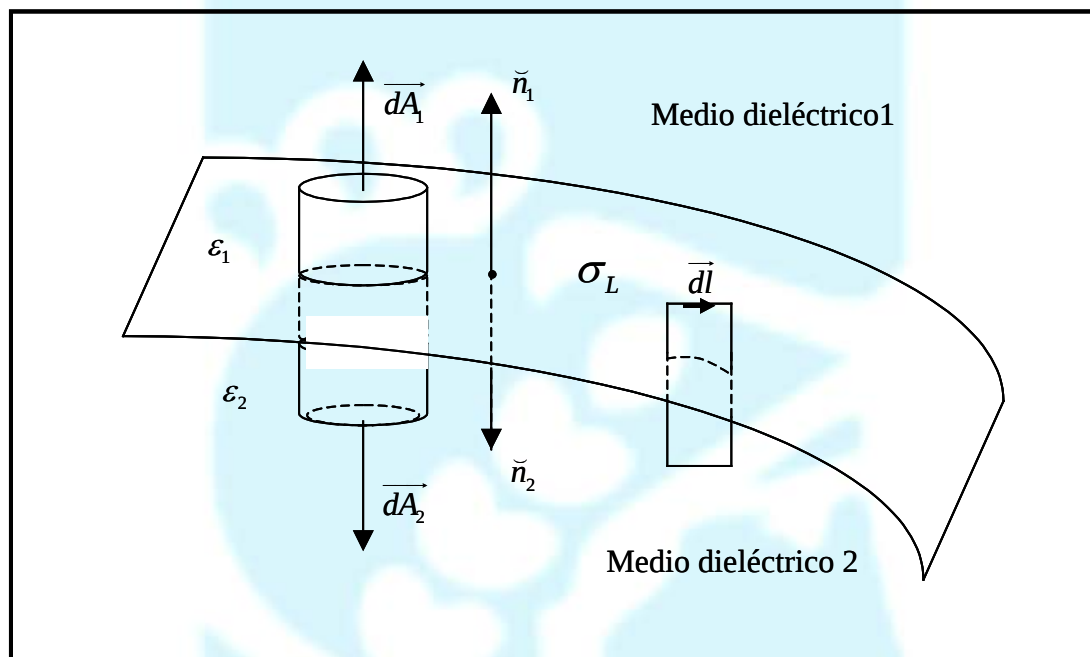


Fig.13. Condiciones de borde entre dieléctricos

Es decir, nos será útil esta condición si sabemos que no hay carga LIBRE SUPERFICIAL porque si sabemos cuánto vale el vector desplazamiento a un lado, ya sabremos cuánto vale una componente del otro lado. Y mucho mejor sería si el vector desplazamiento tuviera solamente una componente normal a la interfaz. Bueno, nos ocurrirá muchas veces.... Y lo interesante es que si estamos considerando medios isótropos, lineales y homogéneos, y el vector desplazamiento tiene solamente componente normal a la interfaz, como $D_1 = D_2$ de la ec.(50) deducimos que en la interfaz el campo eléctrico solamente tendrá componente normal y estará relacionado por $\epsilon_1 E_1 = \epsilon_2 E_2$. Es decir, con sólo tener D_1 y las constantes dieléctricas sabremos cuánto vale el campo eléctrico a cada lado de la interfaz.

Pero esto no es todo. Ahora veamos si podemos determinar otra propiedad, pero esta vez a partir de la irrotacionalidad del campo eléctrico. Tomemos una curva cerrada como la de la

Figura 13 (donde “la altura” h tiende a cero más rápidamente que las longitudes de la curva “paralelas” a la interfaz. Calculemos la circulación del campo eléctrico en un camino cerrado.

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 = \oint_{l_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{l}_1 + \oint_{l_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{l}_2 = \vec{E}_1 \cdot l_1 \vec{t} + \vec{E}_2 \cdot l_2 (-\vec{t}) \quad (56)$$

donde $\vec{t}$ es un versor tangencial a la superficie en la dirección de la curva. De la ec. (56) se deduce que

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (57)$$

lo que significa que la componente tangencial del campo eléctrico en condiciones electrostáticas no cambia (ni en módulo ni en sentido) en una interfaz. Dicho de otro modo, la componente tangencial es continua. Esto está esquematizado en la Fig.14b), ya que la componente tangencial de $\vec{E}$ cuando la normal a la interfaz es el versor $\vec{x}$ se escribe $\vec{E} \times \vec{x}$.

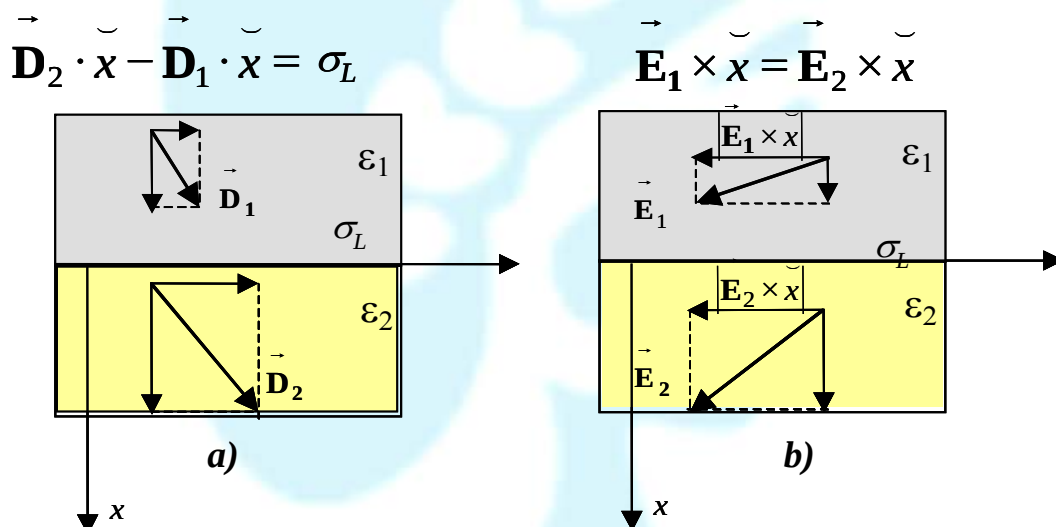


Fig.14.a) Condición para D normal b) para E tangencial a la interfaz

3.5 Tema especial 4. Buscando la normal adecuada...

El problema que siempre se presenta es que no es fácil acordarse cuál es la normal $\vec{n}$ en una interfaz. Vamos a tratar de “jugar” con las relaciones entre los campos $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{P}$ que nos puede ayudar a dar un cierre a ellos. Por un lado, tenemos la relación general entre los vectores desplazamiento eléctrico $\vec{D}$, campo eléctrico $\vec{E}$ y polarización eléctrica $\vec{P}$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (58)$$

Veamos qué obtenemos si tomamos la divergencia de (64)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad (59)$$

El miembro de la izquierda de (65) corresponde a $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{Libre}$, el primer término del segundo miembro $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ y el segundo $\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\rho_{polarizacion}$, es decir, obtenemos

$$\rho = \rho_{Libre} + \rho_{polarizacion} \quad (60)$$

Ahora hagamos el producto es escalar con la normal a una superficie $\vec{n}$ (después discutiremos qué es esta normal)

$$\vec{D} \cdot \vec{n} = \epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{n} + \vec{P} \cdot \vec{n} \quad (61)$$

El primer miembro está relacionado con σ_L , el primer término del segundo miembro con la densidad superficial total de carga σ y el segundo con σ_p , es decir

$$\sigma_T = \sigma_L + \sigma_p \quad (62)$$

Como

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n} = \sigma_L \quad (63)$$

Si $\vec{D}_1 = \epsilon_0 \vec{E}_1 + \vec{P}_1$ y $\vec{D}_2 = \epsilon_0 \vec{E}_2 + \vec{P}_2$ tendremos que

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n} = \epsilon_0 (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{n} + (\vec{P}_2 - \vec{P}_1) \cdot \vec{n} = \sigma_L = \sigma_T - \sigma_p \quad (64)$$

Así el primer término del segundo miembro se podrá relacionar con la densidad superficial total de carga y el segundo con la de polarización.

$$(\vec{P}_2 - \vec{P}_1) \cdot \vec{n} = -\sigma_p \quad (65)$$

¿Qué significa? Veamos ahora algunos casos particulares en interfaces dieléctrico-conductor y dieléctrico-dieléctrico para ver cómo usar las condiciones de contorno

Fin tema especial 4

3.5 Aplicaciones

3.6.1 Ejemplo 1

Consideremos que tenemos una distribución esférica de carga ρ , pero no en el vacío sino distribuida uniformemente en un cuerpo de material dieléctrico de constante dieléctrica ϵ (de forma

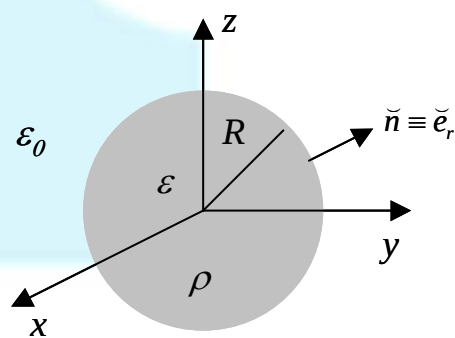


Fig.16. Distribución esférica de densidad de carga ρ uniforme

esférica). Este cuerpo está en el vacío. Queremos determinar el campo eléctrico en todo el espacio.

Como siempre, dibujamos un sistema de coordenadas (aunque es indistinto por ahora usar terna derecha o izquierda debemos acostumbrarnos a usar terna derecha porque cuando estudiemos el campo magnético no será lo mismo una que otra). Como siempre plantearemos el problema viendo si podemos resolverlo a través de la Ley de Gauss y no a través de la Ley de Coulomb generalizada para medios dieléctricos.

Recordemos: debemos encontrar una superficie cerrada donde podamos conocer la dirección del campo y que es constante sobre ella. De esta manera, si conocemos la carga encerrada, podremos calcular el campo a través de la Ley de Gauss. Pero, ¿podemos usar la Ley de Gauss? ¿O debemos usar la Ley de Gauss generalizada? Si quisiéramos usar la Ley de Gauss (“la del campo eléctrico”) deberíamos conocer no solamente las cargas libres (“las que están puestas”) sino también las de polarización porque la expresión que corresponde es

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{total\ enc.\ por\ S}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{V(S)} \rho_{total} dV$$

En principio, el campo y el vector desplazamiento podrían depender de las tres coordenadas (usaremos esféricas) y tener tres componentes (también usaremos las esféricas). Pero, haciendo los mismos razonamientos que hacíamos cuando no había medio material (una distribución esférica de carga con densidad volumétrica uniforme), el campo no puede depender de ϕ ni de θ . Tampoco puede tener componentes ϕ ni θ (ver Capítulo I). Tanto $\vec{E}$ como $\vec{D}$ solamente pueden tener componente radial y podrían depender únicamente de la coordenada r . En consecuencia, si tomamos como superficie para aplicar la Ley de Gauss Generalizada una esfera de radio r centrada en el origen de coordenadas de la Fig.15, tendremos la seguridad que en todos los puntos de la superficie de la esfera del vector desplazamiento tendrá el mismo módulo y será paralelo a la normal a la superficie.

Si bien podríamos saber cualitativamente cómo se acomodan las cargas de polarización, no lo sabemos cuantitativamente. ¿Cómo lo podemos saber? Cualitativamente podemos pensar que si ρ es uniforme y positivo, las cargas positivas de las moléculas serán repelidas y, en consecuencia, “tratan de irse lo más lejos posible de la esfera” cargada positivamente y, las negativas son atraídas. Pero, como no es un material conductor (es decir, los electrones no pueden moverse libremente, no se independizan las cargas positivas de las negativas) ni las

cargas pueden escaparse de la esfera, habrá una densidad neta positiva de carga en la superficie de la misma.

Pasemos al cálculo y comprobemos nuestro razonamiento.

Consideraremos la zona I (interior a la esfera; $r < R$) y la zona II (el vacío, $r > R$) y usemos ec.(54)

- Zona I

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_{\text{libre enc. por } S} = \iiint_{V(S)} \rho_{\text{libre}} dV$$

donde S será una esfera de radio r concéntrica a la distribución de cargas. La carga libre encerrada en dicha superficie será la parte proporcional de carga que corresponda, es decir,

$$q_{\text{encerrada}} = \rho \frac{4}{3} \pi r^3 = Q \frac{r^3}{R^3} \quad (\text{siendo } Q \text{ la carga total libre en la esfera}) \text{ porque } \rho \text{ es uniforme}$$

(¿Cuál sería si ρ dependiera de r ? ¿Se podría calcular el vector desplazamiento a través de la Ley de Gauss generalizada?). Sobre la superficie de la esfera $\vec{D} = D(r) \vec{e}_r$ y

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = D(r) 4\pi r^2 = Q \frac{r^3}{R^3} \text{ de lo que se deduce que } D(r) = \frac{Q}{4\pi} \frac{r}{R^3} \text{ para } r < R$$

- Zona II

En este caso para cualquier superficie esférica con $r > R$, la carga encerrada será Q y

$$D(r) = \frac{Q}{4\pi} \frac{1}{r^2}$$

Como la constante dieléctrica del material es ϵ y la de afuera es ϵ_0 y como $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$

$$\vec{D}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{Qr}{4\pi R^3} \vec{e}_r & r < R \\ \frac{Q}{4\pi r^2} \vec{e}_r & r > R \end{cases} \quad \vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{Qr}{4\pi \epsilon R^3} \vec{e}_r & r < R \\ \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \vec{e}_r & r > R \end{cases}$$

También podemos calcular el vector polarización, ya que de (51) $\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E}$. Se tiene, entonces,

$$\vec{P}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{Qr}{4\pi \epsilon R^3} \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \vec{e}_r & r < R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

El vector polarización tiene, entonces sentido radial. Como va de cargas negativas a positivas, las

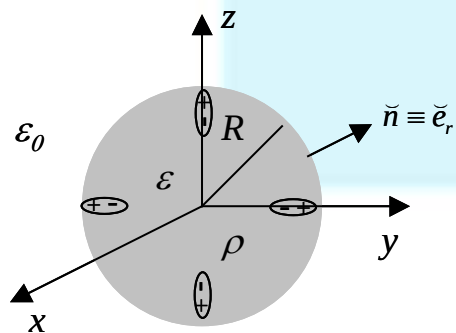


Fig.16. Dipolos en una geometría esférica

moléculas se alinean como indica la Fig. 16. ¿Qué significa el cero en la polarización? El resultado es correcto porque en $r > R$ hay vacío y, por lo tanto, no hay moléculas. También vemos que, la componente normal del vector desplazamiento se conserva en la interfaz (lo que está bien porque no hay carga superficial libre en ella). Es decir, de (61) se obtiene

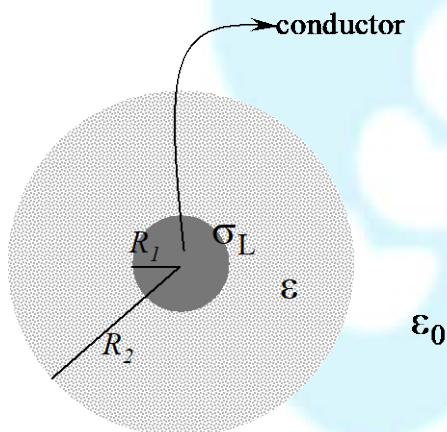
$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{e}_r = \sigma_L = 0$$

¿Cuánto vale la densidad superficial de carga de polarización? ¿Qué normal tomamos? ¿La exterior o la interior? La respuesta es la exterior (aunque deberemos tener cuidado si en lugar de vacío hay otro material) Entonces

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{e}_r \Big|_{r=R} = \frac{Q}{4\pi\epsilon R^2} \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \right) > 0$$

3.6.2 Conductor cargado-dieléctrico descargado-vacío

Consideremos un conductor esférico de radio R_1 cargado con una carga Q y rodeado de un dieléctrico de constante dieléctrica ϵ .



La densidad de carga libre en la superficie del conductor es: $\sigma_L = \frac{Q}{4\pi R_1^2}$.

Si σ_L es positivo, los dipolos permanentes o inducidos se acomodarán de forma tal que aparecerá una densidad superficial de carga inducida negativa σ_1 en R_1 (del lado del dieléctrico) y otra positiva σ_2 en R_2 (del lado del dieléctrico). En el vacío no hay materia y no habrá nada que se polarice.

Fig.17. Conductor cargado-dieléctrico descargado-vacío

Resolvamos analíticamente. A partir de la Ley de Gauss generalizada y teniendo en cuenta la simetría del problema (ya discutida ampliamente en el apunte de Electrostática), se obtiene

$$\vec{D}(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \frac{Q}{4\pi} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r = \sigma_L \frac{R_1^2}{r^2} \vec{e}_r & R_2 > r > R_1 \\ \frac{Q}{4\pi} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r = \sigma_L \frac{R_1^2}{r^2} \vec{e}_r & r > R_2 \end{cases} \quad \vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r = \frac{1}{\epsilon} \sigma_L \frac{R_1^2}{r^2} \vec{e}_r & R_2 > r > R_1 \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma_L \frac{R_1^2}{r^2} \vec{e}_r & r > R_2 \end{cases}$$

$$\vec{P}(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \frac{Q(\epsilon - \epsilon_0)}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r = \frac{(\epsilon - \epsilon_0)}{\epsilon} \sigma_L \frac{R_1^2}{r^2} \vec{e}_r & R_2 > r > R_1 \\ 0 & r > R_2 \end{cases}$$

Como era de esperar, en R_2 el vector desplazamiento no se ve alterado, ya que es normal a la superficie de separación y no hay carga libre superficial en esa interfaz. En cambio, en R_1 hay densidad superficial de carga libre y el vector desplazamiento no será continuo pues. $(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n} = \sigma_L$. Acá sabemos que $\sigma_L > 0$. Si 1 es el conductor y 2 el dieléctrico, $\vec{D}_1 = 0$ y $\vec{D}_2$ apunta en la dirección de $\vec{e}_r$. Entonces la normal debe tener el sentido de $\vec{e}_r$ para que $\sigma_L > 0$ (es decir, es el normal exterior a la superficie esférica). Como $\vec{D}_1 = \vec{E}_1 = \vec{P}_1 = 0$, de (70) resulta que en la interfaz

$$\sigma_P|_{r=R_1} = \vec{P}_2 \cdot \vec{n}|_{r=R_1} = \sigma_L \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) > 0$$

¿Qué significa $\sigma_P|_{r=R_1} > 0$? Como el signo había sido puesto arbitrariamente en ec.(26), se debe interpretar que la densidad superficial de polarización en R_1 es negativa (como se había deducido “conceptualmente”). En la segunda interfaz (es decir en la interfaz dieléctrico-vacío), tendremos $\vec{P}_2 = 0$ aunque $\vec{D}_2 = \vec{E}_2 \neq 0$ y

$$\sigma_P|_{r=R_2} = -\vec{P}_1 \cdot \vec{n}|_{r=R_2} = -\sigma_L \frac{R_1^2}{R_2^2} \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) < 0$$

Lo que significa que en la superficie interior de la esfera dieléctrica en $r=R_2$ la densidad de carga superficial de polarización es positiva.

3.6.3 Conductor cargado –dieléctrico descargado-dieléctrico descargado-vacío

La resolución de este problema es análoga a la del problema anterior en cuanto a la obtención de los campos eléctricos, vectores desplazamiento y vectores polarización. El problema que aquí se presenta es que, en principio, podríamos decir que en R_1 (en el dieléctrico), la densidad de carga superficial de polarización será negativa si $\sigma_L > 0$, en R_2 (pero dentro del dieléctrico 1) la carga superficial de polarización será positiva; en R_2 (pero dentro del dieléctrico 2) la carga superficial de polarización será negativa; y en R_3 (pero dentro del dieléctrico 3) la carga superficial de polarización será positiva; y en R_3 (pero en el vacío) la carga superficial de polarización será nula.

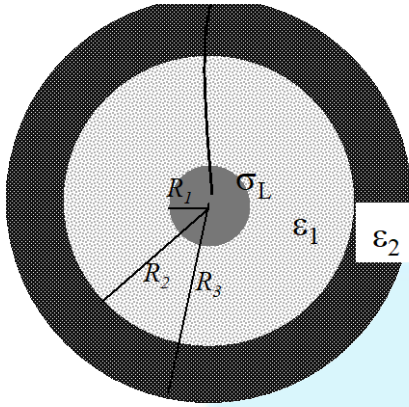


Fig.18. Conductor cargado,
dieléctrico descargado-dieléctrico
descargado-vacío

Pero ¿cómo será la densidad de carga neta de polarización en R_2 ? ¿Positiva o negativa?

ϵ_0 En este caso deberemos aplicar con cuidado (71). Si tomamos como $\vec{n}$ a $\vec{e}_r$, $\vec{P}_1$ corresponderá al vector polarización en el medio con constante dieléctrica ϵ_1 y $\vec{P}_2$ corresponderá al vector polarización en el medio con constante dieléctrica ϵ_2 .

Tendremos

$$\vec{D}(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \frac{Q}{4\pi} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r = \sigma_L \frac{R_1^2}{r^2} \vec{e}_r & R_2 > r > R_1 \\ \frac{Q}{4\pi} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r = \sigma_L \frac{R_1^2}{r^2} \vec{e}_r & R_3 > r > R_2 \\ \frac{Q}{4\pi} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r = \sigma_L \frac{R_1^2}{r^2} \vec{e}_r & r > R_3 \end{cases}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_1} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r = \frac{1}{\epsilon_1} \sigma_L \frac{R_1^2}{r^2} \vec{e}_r & R_2 > r > R_1 \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_2} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r = \frac{1}{\epsilon_2} \sigma_L \frac{R_1^2}{r^2} \vec{e}_r & R_3 > r > R_2 \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma_L \frac{R_1^2}{r^2} \vec{e}_r & r > R_3 \end{cases}$$

$$\vec{P}(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \frac{Q(\epsilon_1 - \epsilon_0)}{4\pi\epsilon_1} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r = \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_0)}{\epsilon_1} \sigma_L \frac{R_1^2}{r^2} \vec{e}_r & R_2 > r > R_1 \\ \frac{Q(\epsilon_2 - \epsilon_0)}{4\pi\epsilon_2} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r = \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_0)}{\epsilon_2} \sigma_L \frac{R_1^2}{r^2} \vec{e}_r & R_3 > r > R_2 \\ 0 & r > R_3 \end{cases}$$

Entonces, la densidad de carga superficial NETA en R_2 será

$$(\vec{P}_2 - \vec{P}_1) \cdot \vec{n} = -\sigma_p = \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_0)}{\epsilon_2} \sigma_L - \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_0)}{\epsilon_1} \sigma_L = \epsilon_0 \left(\frac{1}{\epsilon_1} - \frac{1}{\epsilon_2} \right) \sigma_L = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_1 \epsilon_2} (\epsilon_2 - \epsilon_1) \sigma_L$$

Si $\sigma_L > 0$ y $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ resulta $\sigma_p < 0$, lo que significa que la densidad superficial neta es negativa. Esto se entiende de la siguiente manera: si la densidad superficial neta es negativa, hay más cargas negativas (del lado del dieléctrico 2) que positivas (del lado del dieléctrico 1), lo que significa que el dieléctrico 2 “se pudo” polarizar más (y eso es lo que significa tener una constante dieléctrica mayor). Tarea: considerar los otros casos (respecto al signo de σ_L) y distinta relación de constantes dieléctricas.

3.6 Sistemas con más de un capacitor

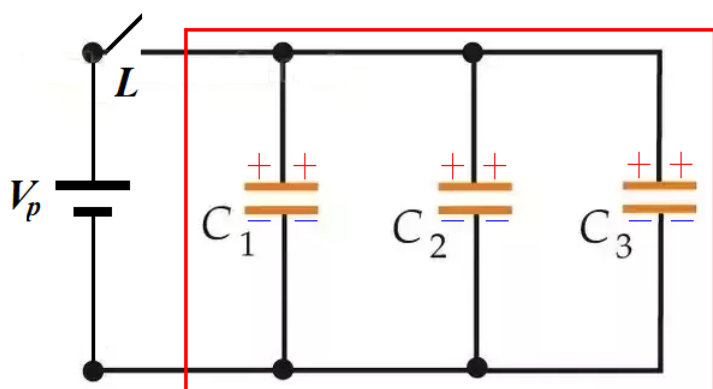
Sistemas eléctricos y electrónicos utilizan capacitores con objetivos más amplios que los que mencionamos en un capítulo previo (memorias de computadora y pantalla táctil).

De los infinitos casos que podemos tratar hay dos que, por la frecuencia de utilización y, por los conceptos subyacentes, resultan interesantes de presentar para construir sistemas más complejos.

Primer ejemplo

Consideramos el sistema formado por tres capacitores C_1 , C_2 , C_3 cuyas placas superiores están unidas entre sí por conductores (trazo negro). Lo mismo ocurre con las placas inferiores.

Suponemos que inicialmente los capacitores se encuentran descargados. Al cerrar la llave la pila transferirá cargas de forma tal que los capacitores se cargan con la polaridad indicada.



Nos preguntamos qué cantidad de carga ha transferido la pila una vez que se ha alcanzado el equilibrio.

Movamos una hipotética carga de prueba desde el terminal positivo de la pila hasta cualquiera de las placas cargadas positivamente. Notamos que no hacemos trabajo porque nos desplazamos dentro de un metal en condiciones electrostáticas. Lo mismo podemos decir si

vamos desde el borne negativo de la pila hasta una de las placas negativas. Concluimos que la diferencia de potencial entre las placas de cualquiera de los capacitores es igual a V_p .

Aplicamos la relación entre carga, capacidad y diferencia de potencial para cada uno de los capacitores:

$$Q_1 = C_1 V_p$$

$$Q_2 = C_2 V_p$$

$$Q_3 = C_3 V_p$$

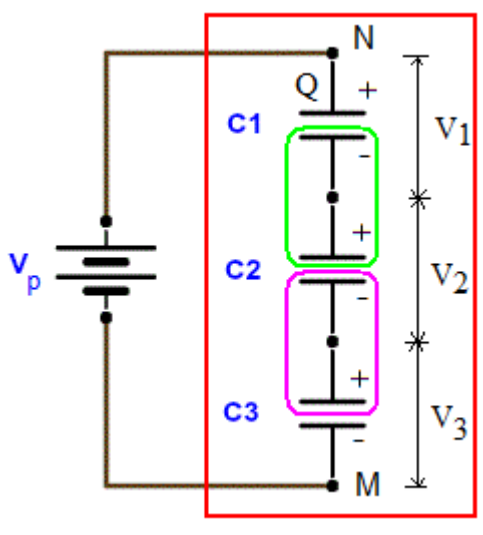
$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q_{tot} = (C_1 + C_2 + C_3) V_p$$

La cantidad total de carga que ha transferido la pila es la suma de las cargas entregadas a cada capacitor. Visto desde el lado de la pila, todo lo encerrado dentro de la caja roja equivale a un capacitor igual a la suma de los tres considerados. Es como si tuviéramos un capacitor más grande. Es fácil generalizar el ejemplo para cualquier número de capacitores.

Esta configuración de capacitores suele llamarse...

Segundo ejemplo

Ahora, la placa inferior de C_1 está conectada a la superior de C_2 y la inferior de C_2 , a la superior de C_3 . Hacemos la misma pregunta que en el primer ejemplo.



Este ejemplo es más difícil que el anterior porque hay temas a discutir.

La placa superior del uno toma carga positiva y la inferior del tres negativa por cómo están conectados a la pila. Los electrones contenidos dentro de la región verde se mueven hacia la placa inferior del dos porque son atraídos por la placa superior del uno. De forma similar, la

placa superior del tres queda con carga positiva. Sean Q_s las cargas de las placas superiores y Q_i las de las inferiores.

Como la pila sólo transfiere cargas tenemos: $Q_{s1} = -Q_{i3}$.

Las placas dentro de la zona verde estaban inicialmente descargadas; como no intercambiaron carga con ningún otro objeto, el conjunto debe permanecer neutro: $Q_{s2} = -Q_{i1}$. Lo mismo ocurre con las placas dentro de la zona violeta: $Q_{s3} = -Q_{i2}$.

Además, estas cargas deben satisfacer que el campo eléctrico en el interior de los metales sea nulo; esto se consigue si, y sólo si, son todas iguales en módulo (verificarlo).

En síntesis, los módulos de las cargas de todas las placas son iguales y la llamamos simplemente Q .

Ahora calcularemos la diferencia de potencial entre el punto N (final) y el M (inicial), aplicando la relación entre carga, capacidad y diferencia de potencial y recordando que las tres variables son definidas positivas (el signo lo ponemos mirando el sentido de $\vec{E}$ y $d\vec{l}$):

$$V_p = V(N) - V(M) = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} = Q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_2} \right)$$

$$V_p \frac{1}{\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_2} \right)} = Q$$

Es fácil generalizar esta expresión para cualquier número de capacitores.

Visto desde el lado de la pila, todo lo encerrado dentro de la caja roja equivale a un extraño capacitor cuyo valor, para el caso de tener N capacitores es:

$$C = \frac{1}{\sum_{k=1}^N \frac{1}{C_k}}$$

Esta configuración de capacitores suele llamarse...

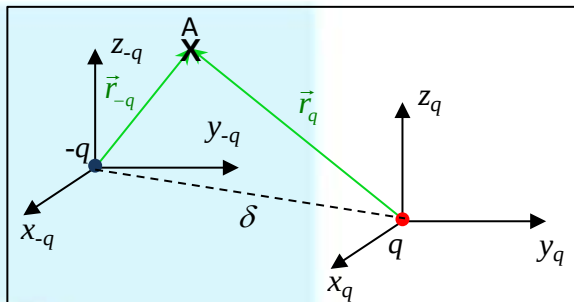
Tema especial 5. APENDICE: El dipolo puntual

Un dipolo eléctrico puntual consiste en un par de cargas puntuales de la misma magnitud q y distinto signo, separadas una distancia que llamaremos δ (usualmente se considera pequeña aunque no sepamos bien qué es para nosotros "pequeña" por ahora). A esta distribución de cargas se la llama también "electrete".

¿Por qué puede ser de interés dedicarle tiempo a un dipolo eléctrico? Porque sirve para explicar cómo se comportan los materiales cuando están inmersos en campos eléctricos

estáticos. Por otra parte, si un dipolo oscila en el tiempo podremos tener una antena. Pero esto es mucho más complicado y no está dentro de los alcances de esta materia.

Cuando se calcula el campo producido por un conjunto de cargas discretas, el problema que se les presenta (después de comprender qué significa el Principio de Superposición) es más geométrico y algebraico que conceptual. La situación en este caso sería la siguiente: dos cargas q y $-q$ separadas una cierta distancia δ generan campo eléctrico en todos los puntos del espacio, que, en forma genérica, designamos con la letra A. Parece muy sencillo escribir el campo generado por ambas cargas, ya que sabemos cuál es el campo generado en todo el espacio por una carga puntual q si la carga está ubicada en el origen de coordenadas



$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 \frac{\vec{e}_r}{|\vec{r}|^2}$$

donde $\vec{e}_r$ es el versor radial en coordenadas esféricas (es decir, une el origen de coordenadas con el punto donde se está calculando el campo). Así tendremos que el campo eléctrico generado en el punto A por las cargas q y $-q$ será

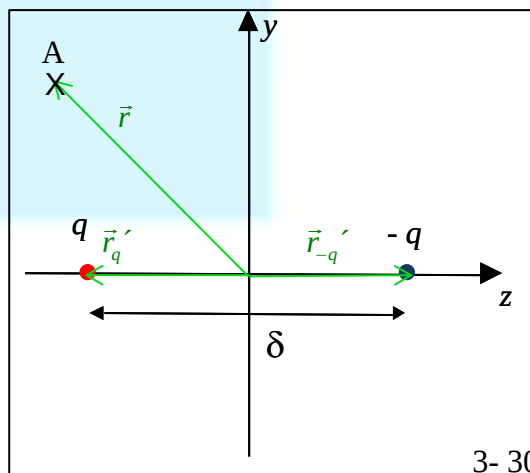
$$\vec{E}_q(\vec{r}_q) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{\vec{r}_q}{|\vec{r}_q|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{\vec{e}_{r_q}}{|\vec{r}_q|^2} \quad \text{y} \quad \vec{E}_{-q}(\vec{r}_{-q}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} (-q) \frac{\vec{r}_{-q}}{|\vec{r}_{-q}|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} (-q) \frac{\vec{e}_{r_{-q}}}{|\vec{r}_{-q}|^2}$$

respectivamente.

Al campo eléctrico total podríamos escribirlo como

$$\vec{E}_T(A) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{\vec{e}_{r_q}}{|\vec{r}_q|^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} (-q) \frac{\vec{e}_{r_{-q}}}{|\vec{r}_{-q}|^2}$$

Observen que puse “A” porque no podría haber puesto ni $\vec{r}_q$ ni $\vec{r}_{-q}$ porque “se miden” desde lugares diferentes. Como siempre debemos elegir un sistema de coordenadas común a ambas cargas para que el punto A esté caracterizado por solo 3 coordenadas. Lo primero que hay que observar es que el sistema tiene simetría de revolución



alrededor del eje que une a las cargas. De esta manera, resolviendo el problema en un plano, fácilmente se podrá extender a todo el espacio. Ya que esto corresponde a lo que se llama simetría cilíndrica, elegiremos el eje de coordenadas z coincidente con el eje de simetría. Si, además, el origen del sistema de coordenadas se pone a mitad de distancia de las cargas, la expresión del campo va a resultar muy simétrica. Pero no es imprescindible.

Escribamos el campo generado por cada carga en cualquier punto del plano yz (Observar que las dos figuras se pueden relacionar por $\vec{r} = \vec{r}_q + \vec{r}'_q = \vec{r}_{-q} + \vec{r}'_{-q}$)

$$\vec{E}_q(0, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{\vec{r} - \vec{r}'_q}{|\vec{r} - \vec{r}'_q|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{(y\vec{e}_y + z\vec{e}_z) - (-\delta/2)\vec{e}_z}{\left[y^2 + \left(z + \delta/2\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{y\vec{e}_y + \left(z + \delta/2\right)\vec{e}_z}{\left[y^2 + \left(z + \delta/2\right)^2\right]^{3/2}}$$

$$\vec{E}_q(0, y, z) = \frac{(-q)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}'_{-q}}{|\vec{r} - \vec{r}'_{-q}|^3} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{(y\vec{e}_y + z\vec{e}_z) - (+\delta/2)\vec{e}_z}{\left[y^2 + \left(z - \delta/2\right)^2\right]^{3/2}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{y\vec{e}_y + \left(z - \delta/2\right)\vec{e}_z}{\left[y^2 + \left(z - \delta/2\right)^2\right]^{3/2}}$$

En consecuencia el campo generado por el dipolo en el plano yz resulta

$$\vec{E}(0, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left[\frac{y\vec{e}_y + \left(z + \delta/2\right)\vec{e}_z}{\left[y^2 + \left(z + \delta/2\right)^2\right]^{3/2}} - \frac{y\vec{e}_y + \left(z - \delta/2\right)\vec{e}_z}{\left[y^2 + \left(z - \delta/2\right)^2\right]^{3/2}} \right]$$

Si queremos extenderlo a todo el espacio se puede pensar de dos maneras:

1. Como la coordenada x juega el mismo papel que la y , podemos extender a

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left[\frac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + \left(z + \delta/2\right)\vec{e}_z}{\left[x^2 + y^2 + \left(z + \delta/2\right)^2\right]^{3/2}} - \frac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + \left(z - \delta/2\right)\vec{e}_z}{\left[x^2 + y^2 + \left(z - \delta/2\right)^2\right]^{3/2}} \right]$$

Conviene escribir las componentes cartesianas del campo para poder observar mejor la dependencia con las coordenadas

$$E_x(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q x \left\{ \frac{1}{\left[x^2 + y^2 + \left(z + \delta/2\right)^2\right]^{3/2}} - \frac{1}{\left[x^2 + y^2 + \left(z - \delta/2\right)^2\right]^{3/2}} \right\}$$

$$E_y(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q y \left\{ \frac{1}{\left[x^2 + y^2 + \left(z + \frac{\delta}{2} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\left[x^2 + y^2 + \left(z - \frac{\delta}{2} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right\}$$

$$E_z(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left\{ \frac{\left(z + \frac{\delta}{2} \right)}{\left[x^2 + y^2 + \left(z + \frac{\delta}{2} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{\left(z - \frac{\delta}{2} \right)}{\left[x^2 + y^2 + \left(z - \frac{\delta}{2} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right\}$$

2. Para pasar del plano yz a todo el espacio, se puede transformar la coordenada y en la radial de cilíndricas de nuestro sistema de coordenadas. Es decir, pasamos de

$$\vec{E}(0, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left[\frac{y\vec{e}_y + \left(z + \frac{\delta}{2} \right)\vec{e}_z}{\left[y^2 + \left(z + \frac{\delta}{2} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{y\vec{e}_y + \left(z - \frac{\delta}{2} \right)\vec{e}_z}{\left[y^2 + \left(z - \frac{\delta}{2} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right]$$

a

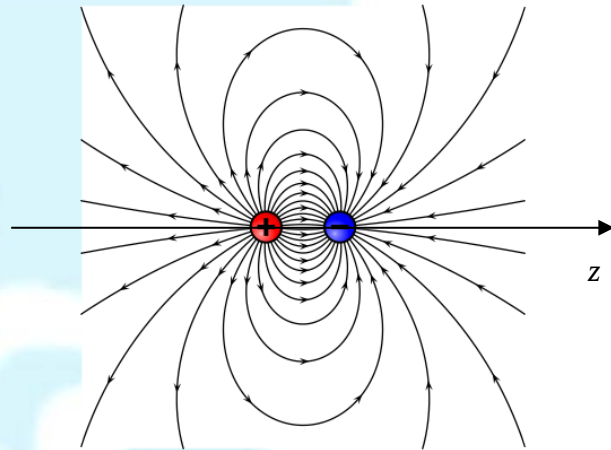
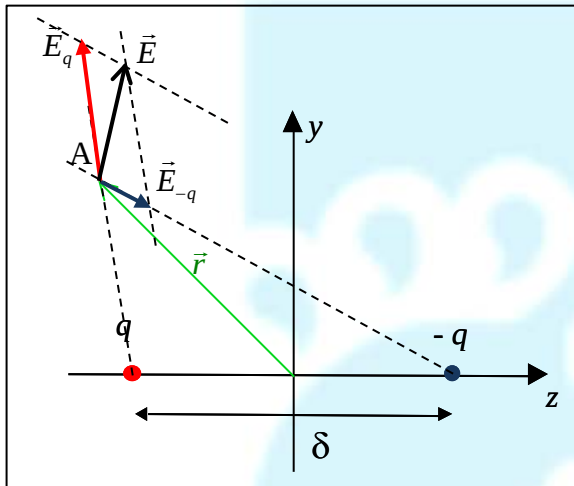
$$\vec{E}(\rho, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left[\frac{\rho\vec{e}_\rho + \left(z + \frac{\delta}{2} \right)\vec{e}_z}{\left[\rho^2 + \left(z + \frac{\delta}{2} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{\rho\vec{e}_\rho + \left(z - \frac{\delta}{2} \right)\vec{e}_z}{\left[\rho^2 + \left(z - \frac{\delta}{2} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right]$$

Ahora vamos a tratar de estudiar el comportamiento del campo eléctrico para ver si podemos hacer un esquema cualitativo de las líneas de campo (Recuerden que el campo eléctrico en un punto del espacio es tangente a la línea de campo en ese punto). Como existe simetría de revolución alrededor del eje z, estudiaremos el campo en el plano yz i.e. en $x = 0$. Resulta, entonces

$$E_x(0, y, z) = 0$$

$$E_y(0, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q y \left\{ \frac{1}{\left[y^2 + \left(z + \frac{\delta}{2} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\left[y^2 + \left(z - \frac{\delta}{2} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right\}$$

$$E_z(0,y,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left\{ \frac{\left(z + \frac{\delta}{2}\right)}{\left[y^2 + \left(z + \frac{\delta}{2}\right)^2\right]^{3/2}} - \frac{\left(z - \frac{\delta}{2}\right)}{\left[y^2 + \left(z - \frac{\delta}{2}\right)^2\right]^{3/2}} \right\}$$



Es decir, el campo eléctrico en un punto del plano solo tiene componentes en el plano (determinado por las cargas y el punto). Determinar los valores del campo en distintos puntos es una tarea sencilla. No así dibujar las líneas de campo. Por suerte, hay programas que lo pueden hacer (algunos solo aproximadamente como el FEMM).

En particular, a lo largo del eje y (i.e. en $x=z=0$) el campo eléctrico solamente tiene componente z ya que

$$E_x(0,y,0) = 0$$

$$E_y(0,y,0) = 0$$

$$E_z(0,y,0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{\delta}{\left[y^2 + \left(\frac{\delta}{2}\right)^2\right]^{3/2}}$$

Sobre el eje z , vale $y=0$ por lo que el campo tiene solo componente z

$$E_z(0,0,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left\{ \frac{\left(z + \frac{\delta}{2}\right)}{\left[\left(z + \frac{\delta}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{\left(z - \frac{\delta}{2}\right)}{\left[\left(z - \frac{\delta}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \right\} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left\{ \frac{\left(z + \frac{\delta}{2}\right)}{\left|z + \frac{\delta}{2}\right|^3} - \frac{\left(z - \frac{\delta}{2}\right)}{\left|z - \frac{\delta}{2}\right|^3} \right\} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left\{ \frac{\operatorname{sgn}\left(z + \frac{\delta}{2}\right)}{\left|z + \frac{\delta}{2}\right|^2} - \frac{\operatorname{sgn}\left(z - \frac{\delta}{2}\right)}{\left|z - \frac{\delta}{2}\right|^2} \right\}$$

Analicemos qué pasa para las “3 zonas”. Si $z > \frac{\delta}{2}$, $\operatorname{sgn}\left(z + \frac{\delta}{2}\right)$ y $\operatorname{sgn}\left(z - \frac{\delta}{2}\right)$ son positivos, por lo que $E_z < 0$. Si $z < -\frac{\delta}{2}$, $\operatorname{sgn}\left(z + \frac{\delta}{2}\right)$ y $\operatorname{sgn}\left(z - \frac{\delta}{2}\right)$ son negativos y $E_z < 0$ (probarlo). Si $-\frac{\delta}{2} < z < \frac{\delta}{2}$, $E_z > 0$ (probarlo). Hint: consideren $z = \pm \frac{3}{2}\delta$ y $z = 0, \pm \frac{\delta}{4}$.

De estas expresiones es fácil deducir que para puntos del espacio a lo largo de la mediatriz y alejados del dipolo (i.e. $y \gg \delta$) el campo disminuye como $\frac{1}{y^3}$. Por la simetría de revolución el mismo resultado corresponde a cualquier punto alejado del dipolo sobre el plano xy . Analicemos ahora cuál es la dependencia del campo con la distancia al dipolo cuando se considera un punto sobre el eje z (i.e. $x=y=0$)

$$E_z(0,0,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left\{ \frac{\left(z + \frac{\delta}{2}\right)}{\left[\left(z + \frac{\delta}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{\left(z - \frac{\delta}{2}\right)}{\left[\left(z - \frac{\delta}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \right\} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left\{ \frac{1}{\left(z + \frac{\delta}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(z - \frac{\delta}{2}\right)^2} \right\}$$

Como para $z \gg \delta$

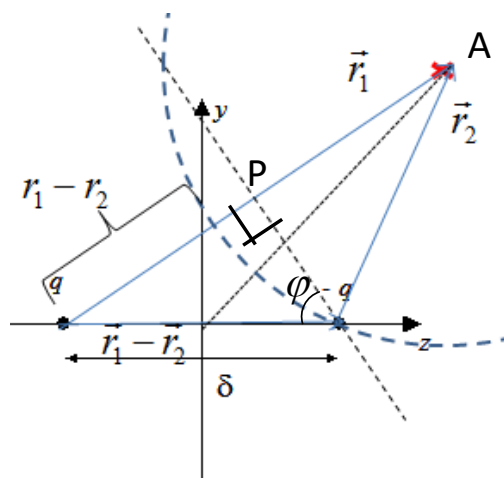
$$\frac{1}{\left(z \pm \frac{\delta}{2}\right)^2} = \frac{1}{z^2 \left(1 \pm \frac{\delta}{2z}\right)^2} \approx \frac{1}{z^2} \left(1 \mp \frac{\delta}{z}\right)$$

el campo eléctrico resulta

$$E_z(0,0,z) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \delta \frac{2}{z^3}$$

Es decir, que alejándonos del dipolo a lo largo de los ejes x , y o z el campo eléctrico tiene una dependencia de la inversa del cubo de la distancia. Por supuesto, si nos alejamos más (límite para distancia tendiendo a infinito) el campo tiende a cero (lo que es lógico ya que desde lejos las dos cargas se ven como una partícula de carga nula).

El hacer un cálculo más formal requiere de algunos conocimientos de geometría y recordar ciertas aproximaciones que usaron en Interferencia (experiencia de Young, la doble rendija).



En el esquema, si el punto donde se calculará el campo eléctrico o la diferencia de potencial respecto de otro punto está muy alejado de ambas cargas, la distancia $r_1 - r_2$ se puede aproximar a la distancia entre la carga q y el punto P.

Es decir, $\cos \varphi = \frac{r_1 - r_2}{\delta}$. La diferencia de potencial respecto del infinito³, se puede escribir como

$$\Delta V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\delta \cos \varphi}{r^2}$$

Como

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla} V = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{2\delta \cos \varphi}{r^3} \vec{e}_r + \frac{\delta \sin \varphi}{r^3} \vec{e}_\varphi \right] = \\ &= \frac{q\delta}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} [2 \cos \varphi \vec{e}_r + \sin \varphi \vec{e}_\varphi] \end{aligned}$$

Es decir, el campo eléctrico lejos del dipolo varía como $1/r^3$ y depende del producto $q\delta$. A este producto se lo denomina **momento dipolar eléctrico**. Se lo define como un vector en la dirección de la recta que une a las cargas y cuyo sentido está determinado desde la carga negativa hacia la positiva (sentido contrario a un campo eléctrico). Así, en nuestro caso

$$\vec{p} = q\delta (-\vec{e}_z)$$

Más adelante, definiremos el equivalente para campos magnéticos.

Fin tema especial 5.

³Ver Capítulo 1

Capítulo especial. Capítulo 4

Energía del campo electrostático

4.1. <u>Trabajo y variación de la energía potencial. Analogías y diferencias entre el campo gravitatorio y el electrostático</u>	4-2
4.2. <u>Energía de una distribución discreta de cargas en vacío</u>	4-7
4.3. <u>Energía de una distribución continua de cargas en vacío</u>	4-8
4.4. <u>Un ejemplo para introducir la densidad de energía electrostática</u>	4-9
4.5. <u>Una aproximación más formal al compute de la densidad de energía electrostática</u>	4-11
4.6. <u>Energía necesaria para formar distribuciones de cargas en vacío y en medios materiales</u>	4-12
4.6.1 <u>Distribución esférica de carga de densidad volumétrica uniforme</u>	4-12
4.6.2. <u>Distribución cilíndrica de carga de densidad superficial uniforme</u>	4-14

Observación: parte de los temas tratados en este Capítulo comenzaron a ser desarrollados en los capítulos anteriores. Vamos a ampliar el concepto de Energía del Campo Electrostático para aplicarlo no solamente en el vacío sino también en medios materiales.

4.1 Trabajo y variación de energía potencial. Analogías y diferencias entre el campo gravitatorio y el electrostático

¿Cuál es el interés en calcular campos eléctricos? Los campos eléctricos nos determinan las fuerzas que “sufren” las cargas; con fuerzas se pueden mover cargas y el movimiento de cargas nos puede traer beneficios si logramos hacerlo en forma “ordenada”: podremos generar corrientes y hacer funcionar una cafetera, una computadora o un avión.... Así, al mover cargas de manera adecuada podremos acumular energía y luego utilizarla con fines determinados. Vamos a empezar viendo si hay energía acumulada al armar un sistema de cargas. Intuitivamente... si tenemos una carga (por ejemplo, positiva) en un lugar del espacio y otra carga positiva muy alejada, debemos hacer un trabajo para acercarlas (venciendo la fuerza de repulsión). Pero con esto no sabemos qué y cuánto se acumuló.

Como en el caso de Mecánica, muchos problemas se pueden simplificar notablemente si se usan consideraciones energéticas. Es por ello que vamos a ver qué se puede hacer en situaciones electrostáticas. Vamos a ir por pasos. Supongamos que en algún lugar del espacio tenemos una carga aislada (es decir, no sufre interacción con otras cargas) y la llevamos hasta un punto del espacio. Para ello no deberemos hacer ningún trabajo ya que no actúan fuerzas eléctricas sobre ella (y desde ya despreciábamos las gravitatorias). Esta carga queda “pegada”

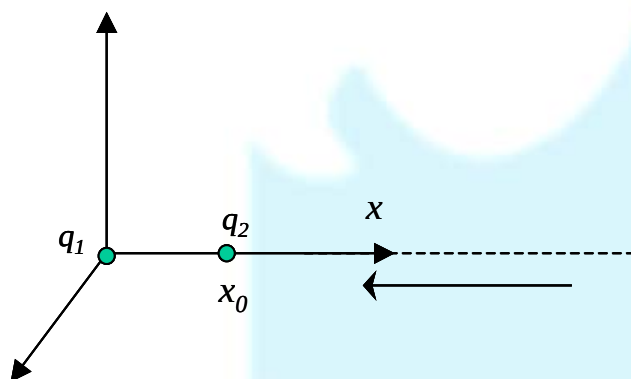


Fig.1. Dos cargas en el espacio separadas una distancia x_0

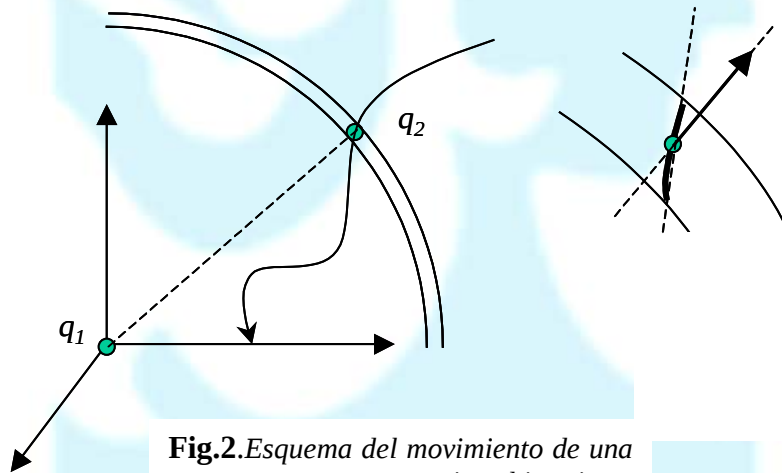
en ese lugar del espacio, está y estará siempre estática... Pero ahora, para traer otra carga positiva q_2 desde muy lejos (desde un lugar donde no hay otras cargas) deberemos hacer un trabajo. Supongamos que la traemos por un camino C de forma tal que no se acelere i.e. lo hacemos en una forma tan lenta que la velocidad de la carga será casi nula. Para ello debemos aplicarle en todo instante una fuerza igual

y contraria a la que la carga q_1 le ejerce. En consecuencia, $\vec{F}_{aplicada} = -\vec{F}_{q_2}$ y

$$W_{\text{realizado por mi mano}} = - \int_{\infty}^{x_0} \vec{F}_{q_1 \text{ sobre } q_2} \cdot d\vec{x} = \frac{-q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^{x_0} \frac{\vec{e}_x}{x^2} \cdot \vec{e}_x dx = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x_0} \quad (1)$$

Este es el trabajo realizado **sobre el sistema** para tener separadas las dos cargas una distancia x_0 . Pero... ¿depende del camino? Es muy fácil verlo en este caso. Tomamos una capita esférica y un camino arbitrario para traer a q_2 . En la capita el campo generado por q_1 será $\vec{E}_{q_1}$ y la fuerza sobre q_2 será $\vec{F}_{q_1 \rightarrow q_2}$. El diferencial de trabajo para trasladar la carga q_2 estará dado por $\vec{F}_{q_1 \rightarrow q_2} \cdot d\vec{l}$.

Como la fuerza es radial, al hacer el producto escalar “se proyecta” el $d\vec{l}$ sobre la dirección radial. Y, como además, la fuerza solamente depende de la distancia, el trabajo será independiente del camino. ¿Sucedre lo mismo si en lugar de una carga q_1 se tiene una distribución de cargas? En virtud del Principio de Superposición, lo que surge para una carga puede ser extendido a muchas cargas. En consecuencia, el trabajo para llevar en forma cuasiestática una carga puntual de un lado al otro del espacio en presencia de otras cargas es independiente del camino, i.e. la fuerza electrostática es conservativa. Hay otra forma de verlo matemáticamente a través del rotor de la fuerza electrostática.



$$\text{Como } F_r = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \text{ y } F_\theta = F_\phi = 0 \quad (2)$$

El rotor en coordenadas esféricas resulta para $r \neq 0$

$$\text{rot}(\vec{F}) = \frac{1}{r \sin(\varphi)} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} (\sin(\varphi) F_\theta) - \frac{\partial F_\varphi}{\partial \theta} \right] \vec{r} + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin(\varphi)} \frac{\partial F_r}{\partial \theta} - \frac{\partial(r F_\theta)}{\partial \theta} \right] \vec{\varphi} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r F_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} \right] \vec{\theta} = 0 \quad (3)$$

con lo que comprobamos que el rotor es nulo. En consecuencia, la fuerza electrostática es **conservativa**. (Por extensión, y dada la proporcionalidad de la fuerza con el campo eléctrico, se dice que el campo **electrostático** es conservativo).

Análogamente, habrá una energía potencial electrostática producto del trabajo realizado para desplazarla en contra de las fuerzas eléctricas. Como

$$\Delta E = \Delta E_{\text{cin}} + \Delta U = W_{\text{Fzas no conservativas}} = W_{\text{todas las fzas}} - W_{\text{Fuerzas Conservativas}}, \quad (4)$$

la variación de energía se refiere a la variación del sistema y el trabajo al trabajo realizado por las fuerzas **sobre** el sistema (que en nuestro caso es el sistema $q_1 q_2$)

$$\Delta U = -W_{\text{Fzas conservativas sobre } q_1} = W_{\text{realizado por nosotros}} = -\int_A^B \vec{F}_{q_1 \rightarrow q_2} \cdot d\vec{l} = -q_2 \int_A^B \vec{E}_{q_1} \cdot d\vec{l} \quad (5)$$

Se dice que el **trabajo realizado por el campo es igual a menos la variación de energía potencial del sistema** $W_{\text{realizado por el campo}} = -\Delta U$

Pregunta: ¿Cuánto vale el trabajo de todas las fuerzas? Si la variación de energía cinética es nula, ¿cuál es la fuerza no conservativa que hace trabajo y que provoca variación de la energía total del sistema?

De esta manera obtenemos que al armar una distribución de cargas tendremos energía disponible para ser utilizada en mejor ocasión. Esto es formalmente idéntico a lo obtenido para el campo gravitatorio.

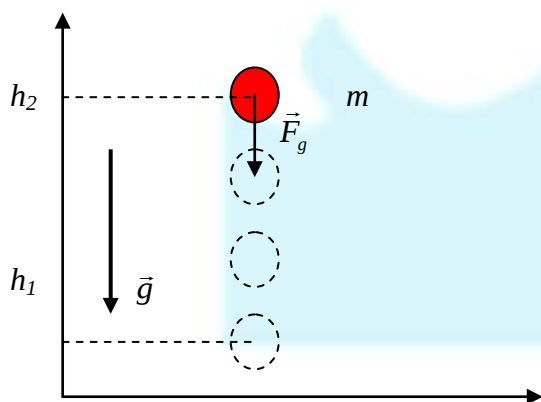


Fig.3. Desplazando una masa desde h_2 hasta h_1

Sabemos que la energía potencial gravitatoria proviene de “levantar” un cuerpo. I.e. del trabajo contra las fuerzas gravitatorias. El trabajo que mi mano debe realizar para llevar a la masa m desde una altura h_1 hasta h_2 es

$$W_{\text{realizado por mi mano}} = -\int_{h_1}^{h_2} \vec{F}_{\text{tierra sobre } m} \cdot d\vec{y} = -\int_{\infty}^{x_0} \vec{F}_g \cdot \vec{e}_y dy = -mg \int_{h_1}^{h_2} -\vec{e}_y \cdot d\vec{y} \quad (6)$$

Y el trabajo realizado por el campo gravitatorio es (lo hacemos aunque es reiterativo para que vean que no cambiamos nada excepto la aplicación del principio de acción y reacción):

$$W_{\text{realizado por el campo}} = + \int_{h_1}^{h_2} \vec{F}_{\text{tierra sobre } m} \cdot d\vec{y} = \int_{\infty}^{x_0} \vec{F}_g \cdot \vec{e}_y dy = mg \int_{h_1}^{h_2} (-\vec{e}_y) \cdot dy \vec{e}_y = -mg(h_2 - h_1) = -\Delta U \quad (7)$$

Y este trabajo solamente depende de los puntos inicial y final, y no de la trayectoria. Debemos notar que la fuerza gravitatoria siempre es de atracción, mientras que la electrostática es de atracción en el caso en que las cargas sean de naturaleza diferente (es decir, de signo contrario)

De Física I sabemos que

$$\Delta E = \Delta E + \Delta U = W_{\text{Fzas no conservativas}} = W_{\text{Fzas Totales}} - W_{\text{Fzas conservativas}} \quad (8)$$

donde la variación de energía se refiere a la variación del sistema y el trabajo al trabajo realizado por las fuerzas **sobre** el sistema.

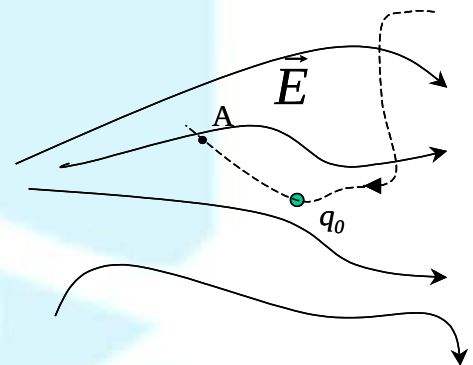


Fig.4desplazando una carga en el campo E desde infinito hasta A

Resumiendo...Si existe un campo eléctrico en el espacio $\vec{E}$ (producido ya no por la carga puntual q_1 sino por un conjunto o distribución de cargas) y traemos cuasiestáticamente una carga de prueba (positiva por convención) q_0 desde el infinito hasta un punto A, el trabajo realizado por nosotros será

$$1) W_{\text{realizado por nosotros}} = - \int_{\infty}^A q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (9)$$

pues actúa una fuerza $q_0 \vec{E}$ sobre q_0 y debemos aplicar una fuerza igual y contraria en cada punto para llevarla hasta A.

$$2) W_{\text{realizado por nosotros}} = \Delta U \quad (10)$$

$$3) W_{\text{realizado por el campo}} = + \int_{\infty}^A q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = -W_{\text{realizado por nosotros}} = -\Delta U \quad (11)$$

$$\text{Entonces } \Delta U = - \int_{\infty}^A q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (12)$$

Si consideramos llevar la carga de prueba desde A hasta B tendremos que

$$\Delta U = U(B) - U(A) = \int_A^B dU = - \int_A^B q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = -q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (13)$$

Como se ve claramente, la variación de energía potencial del sistema de cargas al llevar la carga de prueba q_0 desde A hasta B es directamente proporcional a q_0 . Habíamos definido el trabajo realizado (o a realizar) por nosotros por unidad de carga, i.e. definimos la **diferencia de potencial entre los puntos A y B** como

$$\frac{W_{\text{realizado por nosotros}}}{q_0} = V(B) - V(A) = \int_A^B dV = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (14)$$

Lo que nos tiene que quedar muy claro es que el potencial eléctrico “no existe” de la misma manera que no existe la energía potencial eléctrica ni la gravitatoria. Lo que tiene sentido es “la **diferencia de potencial**”. Es decir, existe la función potencial que es una función matemática a la que le asignaremos sentido físico si tenemos en cuenta que siempre nos referiremos a una diferencia de potencial.

Veamos otro ejemplo: mover una carga de prueba en un campo generado por una carga $q_1 > 0$.

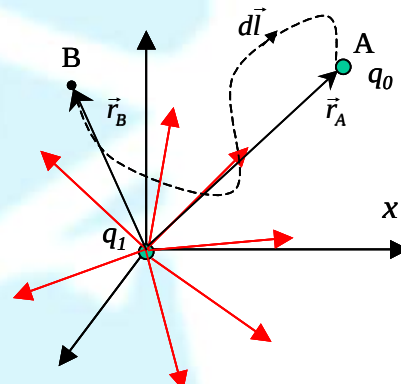


Fig.5. movimiento de una carga q_0 desde A hasta B

$$W_{\text{realizado por el campo}} = + \int_{\infty}^A q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = -W_{\text{realizado por nosotros}} = -\Delta U \quad (15)$$

En nuestro caso (ver figura) elegimos $\vec{r}' = 0$. En consecuencia, la diferencia de energía potencial entre B (punto final) y A (punto inicial) estará dado por

$$\begin{aligned} \Delta U &= -q_0 \int_A^B \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}|^3} \cdot d\vec{l} = -q_0 \int_A^B \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}|^3} \cdot dr = -q_0 \int_A^B \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}|^2} = \\ &= -q_0 \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{dr}{|\vec{r}|^2} = \frac{q_0 q_1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \right]_A^B = \frac{q_0 q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

Esto significa que si el punto A está más alejado que el punto B de la carga que produce el campo, la diferencia de energía potencial será positiva. Lo cual es correcto porque haríamos un trabajo para traer una carga positiva. Si, **en particular**, el punto inicial de la carga de prueba es el infinito, tendremos

$$\begin{aligned}\Delta U &= -\int_{\infty}^B \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}|^3} r dr = -\int_{\infty}^B \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{|\vec{r}|^2} = \\ &= + \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \Big|_{\infty}^{r_B} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_B} = U(B) - U(\infty)\end{aligned}\quad (17)$$

Podemos darle un valor arbitrario al valor de la energía potencial en el infinito: cero, 21J o -3J. No importa!! **Lo importante es la diferencia!!!**

4.2 Energía de una distribución discreta de cargas en vacío

Una distribución cualquiera de cargas eléctricas tiene una cierta cantidad de energía asociada. Esto es particularmente fácil de ver en el caso de contar con N cargas Q_i ubicadas en las posiciones $\vec{r}_i$. Consideramos que este sistema es armado trayendo sucesivamente cada una de las cargas desde una distancia muy grande. Así, para traer la primera no efectuamos trabajo alguno dado que sobre la misma no actúan fuerzas eléctricas. Luego, para poner la segunda carga en su posición final debemos hacer un trabajo W_{12} .

$$W_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{|\vec{r}_{12}|} \quad (18)$$

Observemos que el trabajo para traer una cualquiera de las cargas cuando está la otra es independiente del orden y que $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{|\vec{r}_{12}|}$ es “el potencial” creado en la posición 2 por la carga 1, i.e. V_1 . Entonces

$$W_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{|\vec{r}_{12}|} = Q_1 V_2 = Q_2 V_1 = \frac{1}{2} (Q_1 V_2 + Q_2 V_1) \quad (19)$$

Si ahora movemos imaginariamente la tercera carga podemos calcular el trabajo realizado computando los términos entre la carga 1 y la 3 y luego entre la 2 y la 3.

$$W_{13} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_3}{|\vec{r}_{13}|} \quad W_{23} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2 Q_3}{|\vec{r}_{23}|} \quad (20)$$

Podemos continuar así con las demás cargas hasta haber conformado toda la distribución de cargas. La cantidad total de trabajo realizado (y por lo tanto la energía almacenada) es simplemente la suma de los términos anteriormente mencionados.

$$W = \sum_{\substack{\text{Todos} \\ \text{los pares}}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i Q_j}{|\vec{r}_{ij}|} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i Q_j}{|\vec{r}_{ij}|} \quad i \neq j \quad (21)$$

En la última expresión incluimos el factor $\frac{1}{2}$ para evitar contabilizar dos veces el mismo término al recorrer las sumatorias todos los valores de i y j .

Por otra parte, habíamos visto que si teníamos N cargas en el espacio

$$V_{\text{sistema}}(\vec{r}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j < i} Q_j \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \quad (22)$$

En consecuencia

$$W = \sum_{i < j} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i Q_j}{|\vec{r}_{ij}|} = \frac{1}{2} \sum_i Q_i V(\vec{r}_i) \quad (23)$$

Es decir, sabiendo “el potencial” que genera la distribución de $N-1$ cargas restantes sobre cada carga, podemos saber el trabajo total realizado para armar nuestra distribución de N cargas. En esta expresión $V(\vec{r}_i)$ es el potencial que “ve” cada carga Q_i

4.3 *Energía de una distribución continua de cargas en vacío*

Cuando tenemos una distribución continua de cargas las sumas anteriores deben ser reemplazadas por integrales. Así, si consideramos que cada elemento de volumen dv tiene una cantidad de carga $dQ = \rho dv$ obtenemos:

$$W = \frac{1}{2} \int_{\text{Todo el espacio}} \frac{\rho(1)\rho(2)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_{12}|} dv_1 dv_2 \quad (24)$$

donde tenemos ahora dos integrales que recorren toda la distribución de cargas (por eso mantenemos el factor $\frac{1}{2}$ al comienzo).

Si nos concentramos en la integral sobre dv_2 observamos lo siguiente:

$$\int \frac{\rho(2)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_{12}|} dv_2 = V(1) \quad (25)$$

Observamos que la misma devuelve el potencial generado en la posición 1 por toda la distribución 2, por lo que podemos reducir la expresión (5) a:

$$W = \frac{1}{2} \int \rho(1) V(1) dv_1 \quad (26)$$

El uso del subíndice para indicar la región es entonces innecesario puesto que no quedan variables de la región 2 en la expresión. Entonces reducimos a:

$$W = \frac{1}{2} \int \rho V dv \quad (27)$$

Esta es la relación final que nos permite computar la cantidad de energía almacenada en el sistema. Es decir, vamos incrementando la carga en un δq con lo que el trabajo se incrementará en $\delta q V$

Este “trabajo por unidad de carga” cuando pasamos al continuo resulta

$$V = \frac{dU}{dq} \text{ de forma tal que } \int dU = \int V dq \quad (28)$$

4.4 Un ejemplo para introducir la densidad de energía electrostática

De los muchos ejemplos que podemos dar para aplicar esta expresión tomamos el caso simple de un capacitor de placas paralelas de área A , separación d y conectado a una pila de valor V_p . Si asignamos a la placa negativa el potencial de referencia nulo, entonces la otra se encuentra a un potencial V_p y la cantidad de energía almacenada es:

$$W = \frac{1}{2} \int \rho V dv = \frac{1}{2} V_p \int \rho dv = \frac{1}{2} V_p Q = \frac{1}{2} C V_p^2 \quad (29)$$

donde C es la capacidad.

Introducimos ahora el concepto de densidad de energía u como la cantidad de energía dW almacenada por unidad de volumen dv , es decir:

$$u = \frac{dW}{dv} \quad (30)$$

En el sistema MKS la densidad de energía se mide en J/m^3 .

En nuestro ejemplo esta cantidad es muy fácil de calcular puesto que todas las magnitudes son uniformes así que el cómputo se reduce a dividir la cantidad de energía almacenada por el volumen.

$$u = \frac{W}{v} = \frac{1/2 Q V_p}{A d} = \frac{1}{2} \frac{Q}{A} \frac{V_p}{d} = \frac{1}{2} \sigma \frac{V_p}{d} = \frac{1}{2} |\vec{D}| |\vec{E}| \quad (31)$$

$$u = \frac{U}{A d} = \frac{1}{2} \frac{C V^2}{A d} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon \frac{A}{d} V^2}{A d} = \frac{1}{2} \epsilon \frac{V^2}{d^2} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} |\vec{D}| |\vec{E}| \quad (32)$$

En esta última expresión recordamos que la razón de la carga Q almacenada en una placa al área A de la misma es la densidad superficial de carga σ y que ésta coincide con el módulo del vector desplazamiento $\vec{D}$. Asimismo recordamos que la razón de la diferencia de

potencial entre placas V_p a la distancia d entre las mismas coincide con el módulo del campo eléctrico $\vec{E}$.

Vemos que, al menos en este caso simple, pudimos reducir el cálculo de la densidad de energía almacenada a una expresión simple en los campos $\vec{D}$ y $\vec{E}$.

Por supuesto que nada sabemos de la generalidad de la expresión anterior y debemos hacer una demostración más cuidadosa antes de aplicarla a otros casos, por lo que procederemos con más cuidado.

En el caso del capacitor esférico, el volumen involucrado es el que hay entre los conductores, es decir, $\frac{4\pi}{3}(R_2^3 - R_1^3)$ y

$$\Delta U = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right) = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \quad (33)$$

Sin embargo, la densidad de energía no se puede calcular como $\Delta U / \frac{4\pi}{3}(R_2^3 - R_1^3)$ pues resulta no uniforme. Observemos lo siguiente:

Si consideramos, en cambio, que, como en el caso del capacitor de placas plano-paralelas, la densidad volumétrica de energía potencial es

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \right)^2 = \frac{Q^2}{2 \cdot (4\pi)^2 \epsilon_0} \frac{1}{r^4} \text{ e integramos en el volumen, tendremos}$$

$$U = \iiint_{\text{todo el espacio}} u \, dV = \iiint_{\text{todo el espacio}} \frac{Q^2}{2 \cdot (4\pi)^2 \epsilon_0} \frac{1}{r^4} 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \iiint_{\text{todo el espacio}} \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \quad (34)$$

que coincide con el calculado a través de la expresión de la capacidad.

4.5 Una aproximación más formal al cómputo de la densidad de energía²

Recordemos la forma integral del teorema de Gauss:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q \quad (35)$$

que llevado a su forma diferencial es:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (36)$$

Utilizamos esta última forma para computar nuevamente la energía del sistema:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho V dv = \frac{1}{2} \int_V (\nabla \cdot \vec{D}) V dv \quad (37)$$

Una identidad útil del análisis vectorial es la siguiente. Dada una función escalar ϕ y una vectorial $\vec{A}$ podemos escribir (otra vez hay que repasar Análisis II):

$$\nabla(\phi \vec{A}) = \phi \nabla \cdot \vec{A} + \vec{A} \nabla \phi \quad (38)$$

Que aplicadas a nuestro caso resultan en:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \nabla(V \vec{D}) dv - \frac{1}{2} \int_V \vec{D} \cdot (\nabla V) dv \quad (39)$$

Por el teorema de la divergencia, la primera integral puede transformarse de una de volumen a una de superficie del producto $V \vec{D}$ sobre la superficie cerrada que rodea a la región. Pero si esta región ha de contener a todos los campos es necesario extenderla hasta el infinito. Dado que V varía como $1/r$ y D lo hace como $1/r^2$ entonces el integrando tiene una dependencia de la forma $1/r^3$. Por otra parte la superficie aumenta como r^2 por lo que la tendencia general del integrando es de la forma $1/r$. Entonces el valor total de primera integral tiende a cero conforme la superficie tiende a infinito.

$$\int_V \nabla(V \vec{D}) dv = \int_{S_\infty} V \vec{D} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (40)$$

Por lo tanto para el cómputo de la energía sólo es necesaria la segunda integral.

Si recordamos que el campo eléctrico lo podemos computar como menos el gradiente del potencial obtenemos:

$$W = -\frac{1}{2} \int_V \vec{D} \cdot \nabla V dv = \frac{1}{2} \int_V \vec{D} \cdot \vec{E} dv \rightarrow u = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} \quad (41)$$

Esta última relación coincide con la que habíamos obtenido para el capacitor plano pero ahora tiene validez general y no restringida a ese ejemplo en particular.

Al resolver un problema electrostático tenemos fácilmente disponibles los valores de $\vec{D}$ y $\vec{E}$ por lo que computar la densidad de energía no representa mayor problema. Si integramos dicha densidad de energía a todo el volumen donde haya campo no nulos entonces obtendremos la cantidad total de energía que hay almacenada en el sistema.

¿Qué hacemos ahora con la teoría de la sección anterior?

Primero, **NO** pretendemos que recuerden de memoria la demostración. Sólo quisimos mostrar que el concepto de densidad de energía y cómo se calcula tienen validez más allá del caso simple (capacitor plano) con el que fueron introducidas.

Vamos a ver ahora cómo operamos con ellas para encontrar respuestas útiles.

Por supuesto que no tiene sentido volver sobre el capacitor plano puesto que de allí venimos, así que no tiene gracia.

4.6 Energía necesaria para formar distribuciones de carga en vacío y en medios materiales

Se puede hacer de dos “maneras”: 1) $W = \frac{1}{2} \int V dq' \quad (42)$

$$2) W = \frac{1}{2} \int \vec{E} \cdot \vec{D} dV \quad (43)$$

Es importante enfatizar que la integración debe proceder sobre toda región que tenga campos no nulos y no limitarse a la región donde hay cargas. Sin embargo, en el caso 1) la integración sobre todo el espacio se convierte en la integración sobre los volúmenes donde hay cargas libres, y en 2) sobre los volúmenes donde hay campo. Pero usar una u otra expresión dependerá de los datos que tengamos.

4.6.1 Distribución esférica de carga de densidad volumétrica uniforme

La distribución de cargas se puede pensar como muchos elementos de carga dq que se trae desde el infinito. Cada uno de ellos adquiere energía potencial al ser colocado en “la esfera”, es decir, el trabajo realizado para fabricar la distribución de cargas es igual a la energía potencial electrostática almacenada. Se debe primero llevar el dq hasta la esfera y luego distribuirlo uniformemente, o voy manteniendo “quietas” las cargas en una esferita de radio menor que R y voy agregando las otras dq .

En vacío

Consideraremos, en primer lugar que no hay ningún medio material. Si la esfera tiene radio R , sabemos que

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \rho \frac{R^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r & r > R \\ \rho \frac{1}{3\epsilon_0} r \vec{e}_r & r < R \end{cases} \quad (44)$$

$$V(\vec{r}) = \begin{cases} \rho \frac{R^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r} & r > R \\ \rho \frac{R^2}{2\epsilon_0} - \rho \frac{1}{6\epsilon_0} r^2 & r < R \end{cases} \quad (45)$$

habiendo **definido** el cero de potencial en el infinito.

1) A través del potencial

$$\begin{aligned} W_{\text{vacío}} &= \frac{1}{2} \int_{\text{todo el espacio}} V dq' = \frac{1}{2} \int_{\text{esfera}} V \rho 4\pi r^2 dr = \frac{1}{2} \int_{\text{esfera}} \left(\rho \frac{R^2}{2\epsilon_0} - \rho \frac{1}{6\epsilon_0} r^2 \right) \rho 4\pi r^2 dr = \\ &= \rho^2 \frac{2\pi}{6\epsilon_0} \left(R^5 - \frac{R^5}{5} \right) = \rho^2 \frac{4\pi}{15\epsilon_0} R^5 = Q^2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \frac{3}{5} \end{aligned} \quad (46)$$

2) A partir del campo eléctrico

$$\begin{aligned} W_{\text{vacío}} &= \frac{1}{2} \int \vec{E} \cdot \vec{D} dV = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int |\vec{E}|^2 dV = \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \left[\int_R^\infty \left(\rho \frac{R^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr + \int_0^R \left(\rho \frac{1}{3\epsilon_0} r \right)^2 4\pi r^2 dr \right] = (47) \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{4\pi}{9\epsilon_0^2} \rho^2 \left(R^5 + \frac{R^5}{5} \right) = Q^2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Como era de esperar, se obtiene el mismo resultado

En un medio material

Si en la zona donde ubicaremos las cargas hay un medio material con permitividad dieléctrica ϵ y en el resto del espacio hay vacío, se tiene que

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \rho \frac{R^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r & r > R \\ \rho \frac{1}{3\epsilon} r \vec{e}_r & r < R \end{cases} \quad (48)$$

$$V(\vec{r}) = \begin{cases} \rho \frac{R^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r} & r > R \\ \rho \frac{R^2}{3\epsilon_0} + \rho \frac{1}{6\epsilon} (R^2 - r^2) & r < R \end{cases} \quad (49)$$

habiendo también **definido** el cero de potencial en el infinito.

En este caso, elegimos para el cálculo la forma 1) (ec.(42))

$$\begin{aligned}
 W_{\text{dieléctrico}} &= \frac{1}{2} \int_{\text{todo el espacio}} V dq' = \frac{1}{2} \int_{\text{esfera}} V \rho 4\pi r^2 dr = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\text{esfera}} \left(\rho \frac{R^2}{3 \epsilon_0} + \rho \frac{1}{6 \epsilon} (R^2 - r^2) \right) \rho 4\pi r^2 dr = \quad (50) \\
 &= \rho^2 \frac{4 \pi R^5}{6} \left(\frac{1}{15 \epsilon} + \frac{1}{3 \epsilon_0} \right) = Q^2 \frac{1}{8 \pi \epsilon_0 R} \left(1 + \frac{1}{5 \epsilon_{\text{rel}}} \right)
 \end{aligned}$$

Así

$$\frac{W_{\text{vacío}}}{W_{\text{dieléctrico}}} = \frac{Q^2 \frac{1}{4 \pi \epsilon_0 R} \frac{1}{5}}{Q^2 \frac{1}{8 \pi \epsilon_0 R} \left(1 + \frac{1}{5 \epsilon_{\text{rel}}} \right)} = \frac{\frac{6}{5}}{\left(1 + \frac{1}{5 \epsilon_{\text{rel}}} \right)} > 1 \quad (51)$$

Es decir, la energía necesaria para “armar” una distribución esférica cargada uniformemente en volumen es menor si la carga se la distribuye en un dieléctrico que si se lo quiere hacer en vacío. ¿Se puede tratar de explicar este comportamiento a través de nuestro modelo de materiales dieléctricos?

4.6.2 **Distribución cilíndrica de carga de densidad superficial uniforme**

Vamos a tratar un caso ligeramente diferente, el de un **cable coaxial** (capacitor cilíndrico) de radio interior a , exterior b , largo L y cuyo espacio entre placas está relleno por un dieléctrico de permitividad relativa ϵ_r .

Este caso ya lo hemos resuelto y es particularmente simple si nuevamente despreciamos los efectos de borde. En tal caso las líneas de campo son simplemente radiales; nacen en el conductor central (supuesto positivo) y mueren en el conductor externo (supuesto negativo).

Aunque ya hemos desarrollado en las clases el cómputo de la capacidad vamos a repetirlo para ver cómo lo conectamos con lo que hemos aprendido.

Primero asumimos que el sistema fue cargado con una pila de valor V_p aplicada entre el conductor central y el exterior. Las cargas almacenadas en cada uno de ellos tienen módulo Q . Dados que hemos sido eficientes y pudimos “adivinar” la dirección de las líneas de campo entonces podemos emplear con provecho el teorema de Gauss para calcular la intensidad de los campos.

La superficie gaussiana más práctica es un cilindro coaxial con el conductor central y cuyo radio r se encuentra comprendido entre a y b .

En estas condiciones computamos el flujo del vector desplazamiento a través de dicha superficie. Utilizamos dicho vector porque igualaremos el flujo a la cantidad de carga libre ubicada dentro de la superficie que es precisamente la carga Q perteneciente al conductor central.

Como ya procedimos otras veces reconocemos que el flujo por las tapas del cilindro es nulo dado que las líneas de campo son perpendiculares al vector que representa al elemento de superficie.

En la cara lateral del cilindro las líneas de campo son paralelas al elemento de superficie, por lo que el producto escalar que determina el elemento de flujo es simplemente el producto de los módulos de los vectores.

Por último, al ver que el problema carece de detalle angular, concluimos que a cada radio la intensidad de los campos es única, por lo que dicha intensidad puede ser extraída fuera de la integral para obtener:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_{Sup\ lat} |\vec{D}| |d\vec{S}| = |\vec{D}| \int_{Sup\ lat} |d\vec{S}| = |\vec{D}| 2\pi r L = Q \quad (52)$$

$$|\vec{D}| = \frac{Q}{2\pi r L} \quad |\vec{E}| = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r r L}$$

Vemos (como ya sabíamos) que los campos varían en forma inversamente proporcional a la distancia al centro.

Para conectar la cantidad de carga almacenada con el valor de la pila computamos la circulación del campo eléctrico desde el conductor central hasta el exterior.

$$V(b) - V(a) = -V_p = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_a^b \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r L} \frac{dr}{r} = -\frac{Q}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r L} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$C = \frac{Q}{V_p} = \frac{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad (53)$$

Resultados estos que ya conocíamos (ya los debíamos conocer????)

La cantidad de energía acumulada es entonces

$$W = \frac{1}{2} C V_p^2 = \frac{1}{2} \frac{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} V_p^2$$

Vamos a ver cómo podemos llegar al mismo resultado operando con nuestra recién definida densidad de energía. Primero vamos a computarla:

$$u = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2} \frac{Q}{2\pi L} \frac{Q}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r r L} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{(2\pi L)^2 \epsilon_0 \epsilon_r} \quad (55)$$

Esta relación nos dice que hay más densidad de energía en las regiones próximas al conductor central puesto que el campo es más intenso allí.

Ahora, a diferencia del capacitor plano, no podemos computar la energía total simplemente multiplicando la densidad de energía por el volumen puesto que no hay uniformidad de los campos. Lo que hacemos es integrar sobre el volumen.

$$W = \int_v u dv = \int_a^b \int_0^{2\pi L} \int_0^0 u \, dz \, r d\varphi \, dr = 2\pi L \frac{Q^2}{(2\pi L)^2 \epsilon_0 \epsilon_r} \int_a^b \frac{1}{2} \frac{r dr}{r^2} = \frac{Q^2}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r L} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (56)$$

Que coincide con la (19) si nos ayudamos con la (18) (hagan el reemplazo).

Hasta aquí puede parecer que nos hemos complicado mucho para recuperar un resultado que podíamos computar fácilmente con la capacidad.

Este último ejemplo con seguridad parecerá muy difícil de seguir y hasta es probable que alguien considere que le resultará imposible repetirlo sin copiarlo y menos aún acometer otro ejemplo. Sin embargo es una sensación errónea. Es posible repetir este ejemplo y aún desarrollar otros, sólo hace falta entrenamiento y práctica.

Ahora es el turno de ustedes...

Capítulo 5

Corriente Continua

(como sinónimo de no dependiente del tiempo)

5.1.	<u>Introducción</u>	5-2
5.2.	<u>Densidad de corriente</u>	5-2
5.3.	<u>Circuitos eléctricos</u>	5-3
5.4.	<u>Corriente eléctrica: modelo microscópico elemental en conductores</u>	5-3
5.5.	<u>Resistividad</u>	5-6
5.6.	<u>Resistencia</u>	5-8
5.7.	<u>Circuitos y fems (pilas...)</u>	5-10
5.8.	<u>Ley de Joule</u>	5-14
5.9.	<u>Acomodando resistencias...Resistencias en serie y en paralelo</u>	5-15
5.10.	<u>Reglas o Leyes de Kirchhoff</u>	5-18

5.1. *Introducción*

Hasta ahora hemos estudiado la interacción entre cargas en reposo, ya sea en el vacío como en presencia de medios conductores o dieléctricos. Ahora nos vamos a ocupar del estudio de las cargas **en movimiento**.

La corriente eléctrica es el movimiento de cargas en una y otra región del espacio.

No importa la naturaleza de los portadores de carga en esta materia. Pueden ser físicamente partículas (electrones o protones) o iones.

La corriente eléctrica I en un hilo se define como la cantidad de carga que pasa por un punto fijo del hilo por unidad de tiempo.

Es decir, $I = dQ/dt$ y sus unidades son C/s. Cuando por un lugar pasa una carga de 1 C en el lapso de 1 s, decimos que la corriente es de 1 Ampere (1 A), en homenaje a André-Marie Ampère (1775-1836).

Así definida la corriente es un escalar porque la carga y el tiempo lo son. Sin embargo nos interesa hacia dónde se mueven los portadores; esto nos llevará a definir un vector.

En la definición anterior la carga la tomamos en módulo, con lo que suponemos que transportamos cargas positivas. Los problemas de signo con cargas negativas lo discutiremos después.

Para tener corriente, lo que cuenta es el **transporte neto de carga**. El agua que sale por una manguera transporta una gran cantidad de electrones. Pero como la cantidad de electrones que se mueven es igual a la cantidad de protones que se mueven con la misma velocidad, la corriente eléctrica es nula.

Si, en cambio, trasladamos un hilo “infinito” cargado tendríamos una corriente eléctrica.

Un tipo de corriente más general será una donde los portadores de carga se mueven en un volumen tridimensional. Para describirlo, necesitaremos hablar de una densidad de corriente.

5.2. *Densidad de corriente*

Antes de pasar al transporte de carga en conductores, vamos a estudiar un poco el transporte de cargas. Supongamos que tenemos n partículas por unidad de volumen que se mueven con velocidad media $\vec{u}$ y todas tienen una carga q . ¿Cuántas partículas pasan por unidad de tiempo por un rectángulo como el de la cara superior del paralelepípedo de la figura de área A ?

En un intervalo dt las partículas barren un volumen: $d\mathcal{V} = \vec{u} \cdot \vec{N} A dt$, si multiplicamos por la densidad volumétrica n de objetos cargados obtenemos:

$$I \equiv \frac{dQ}{dt} = n q \vec{u} \cdot \vec{N} A \quad (5.1)$$

En el caso de tener M tipos de portadores con distinta carga y/o distintas velocidades, tendremos que sumar sobre los distintos aportes

$$I = \sum_{k=1}^M n_k q_k \vec{u}_k \cdot \vec{N} A \quad (5.2)$$

Definimos el vector la densidad de corriente $\vec{J}$ de forma tal que cumpla:

$$I = \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} \quad (5.3)$$

Las unidades de $\vec{J}$ son A/m^2 .

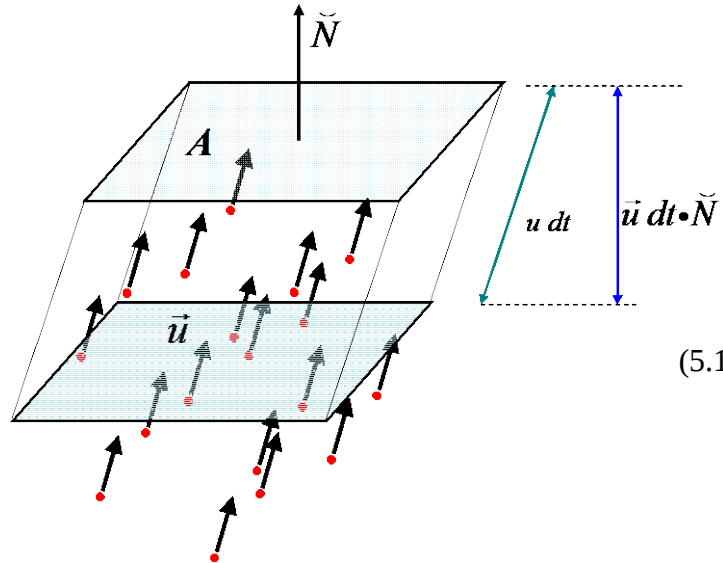
Hablaremos de corrientes constantes cuando $\vec{J}$ permanece constante en el tiempo en todo punto. ¿Podemos relacionar esto con la conservación de la carga? En un volumen cerrado al no haber creación de carga, deben salir tantas como entran para que la densidad de corriente se mantenga constante, es decir

$$\oiint_{\text{prisma}} \vec{J} \cdot d\vec{A} = 0 \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad (5.4)$$

5.3. Circuitos eléctricos

¿Qué es un circuito eléctrico? Es un camino conductor cerrado en forma de espira donde se produce desplazamiento de cargas.

¿Para qué sirven los circuitos eléctricos? Son un medio para llevar energía de un lado a otro. Tecnológicamente son útiles porque, sin emplear partes móviles, permiten transportar energía. Ejemplo: central hidroeléctrica y heladera hogareña. Cuando se trasladan partículas dentro de un circuito, se transfiere energía potencial de una fuente (pila) hacia un dispositivo en el que la energía se almacena (capacitor) y/o se convierte en otra forma de energía (luz,



calor, mecánica). Vamos a estudiar corrientes eléctricas en medios conductores, es decir, una de las clases de corriente. El agente más común para mover cargas es el campo eléctrico.

5.4. *Corriente eléctrica: modelo microscópico elemental en conductores*

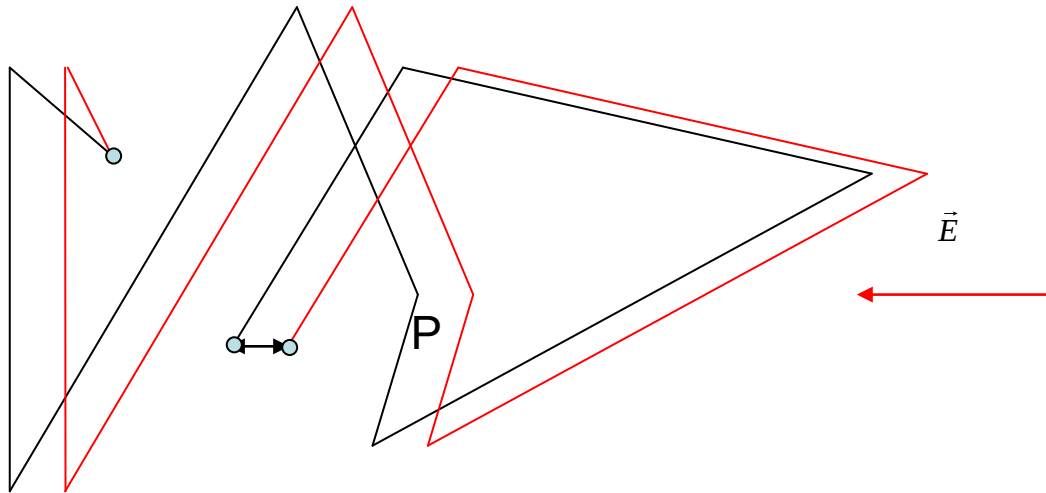
Cuando estudiamos cargas en conductores en condiciones electrostáticas, el campo eléctrico era nulo en todos los puntos del interior del conductor y no podía haber movimiento de cargas (i.e. no podría haber corriente) porque estábamos en condiciones electrostáticas. Ese era el modelo que hacíamos. Pero ahora vamos a hacer un modelo microscópico más elaborado usando algunos conocimientos sobre la estructura de los metales. En un metal común, como el Cu, Fe o Al, algunos electrones tienen la libertad de trasladarse dentro del material. Son los **electrones libres** que se trasladan al azar en todas direcciones (como si fueran moléculas de un gas) a velocidades muy grandes (aproximadamente 10^6 m/s). Pero los electrones libres, en esta condición, se mueven en direcciones al azar. Como consecuencia de todo esto, no hay flujo neto de carga en ninguna dirección y, por lo tanto, no hay corriente.

Si dentro del conductor existiera un campo eléctrico constante en el tiempo, sobre cada partícula actuaría una fuerza $\vec{F} = q\vec{E}$ constante. ¿Qué pasaría si el electrón estuviera en el vacío? Aumentaría su velocidad con aceleración constante pues

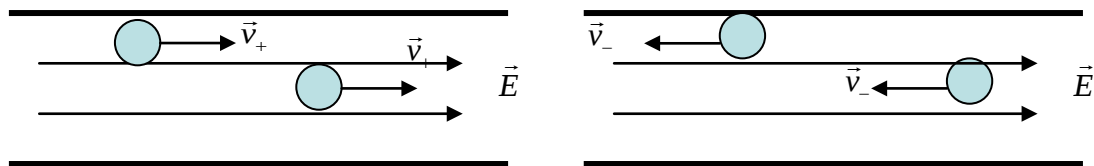
$$\vec{F} = -e\vec{E} = m a_x \vec{e}_x = m \frac{dv_x}{dt} \vec{e}_x \quad (5.5)$$

$$v_x = v_{0x} + \frac{e|\vec{E}|}{m} t \quad v_y = cte \quad v_z = cte \quad (5.6)$$

donde el término de velocidad inicial tiene promedio temporal nulo y corresponde al movimiento al azar de los electrones. Sin embargo, la velocidad de un electrón real no está dada por la 5.6; los electrones están sometidos a colisiones con iones muy grandes y “fijos” que cambian la velocidad del electrón de una manera compleja. El efecto neto en presencia de un campo eléctrico $\vec{E}$ es un movimiento aleatorio más un movimiento muy lento (**arrastré o deriva**) en la dirección de la fuerza. Se la llama **velocidad de deriva o arrastre** y hay un movimiento neto de cargas en el conductor: hay una corriente neta. Calcularemos después cuál es la magnitud de esa velocidad de arrastre.



En general, los portadores de cargas pueden ser positivos o negativos. En los conductores, los portadores son los electrones. Sin embargo, se usa una corriente convencional que es de portadores positivos, lo que es equivalente. ¿Por qué?



En ambos casos hay un flujo de carga positiva hacia la derecha: esa es la dirección de la corriente. I.e. el sentido de la corriente convencional (portadores positivos) no coincide con el sentido de traslación de los electrones.

Tanto cambio de signo logra confundir, por lo que daremos la regla convencional: en un metal pensamos que lo que se mueve, dando corriente, son objetos cargados positivamente.

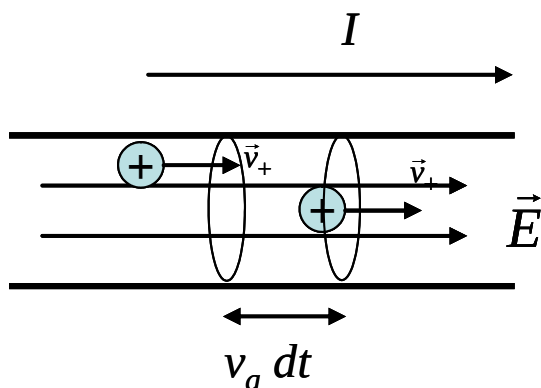
Para tener una idea de las corrientes involucradas en dispositivos cotidianos podemos dar algunos ejemplos¹:

1. “Burro” de arranque de un motor de auto (el “burro” de arranque es un motor eléctrico que trabaja con la batería de 12V del auto y pone en marcha al motor principal): 30 A (auto mediano)- 300 A (camión).
2. Televisor (depende mucho si es muy viejo o muy nuevo): 1A
3. Teléfono celular encendido pero inactivo: 10 mA
4. Motor hogareño de 1 HP $\approx$ 746 W como, por ejemplo, el de la cortadora de pasto: 3,3 A

¹ De paso, revisar submúltiplos: mili, nano, micro, pico, femto

¿Cómo relacionamos la corriente con la velocidad de arrastre? Hagamos lo mismo que cuando no teníamos al conductor. Supongamos que hay n portadores de carga por unidad de volumen. En un intervalo de tiempo dt cada portador se traslada $v_a dt$. En el cilindrito, las que entraron en $t=t_0$, saldrán dt segundos después. En ese cilindro (de volumen $Av_a dt$) habrá $nAv_a dt$ portadores. Si cada uno tiene una carga q , la cantidad de carga dQ que fluye es

$$dQ = qn v_a A dt \Rightarrow I = qn v_a A \quad (5.8)$$



Se llama **densidad volumétrica de corriente** $\vec{J}$ a la corriente que fluye por unidad de área. Es decir $|\vec{J}| = qn v_a$. $\vec{J}$ es un vector de unidades A/m^2 . Es uno de los nombres más desafortunados que conocemos: una magnitud definida por unidad de área resulta que es nombrada como volumétrica. Parece cosa de

locos. Dicen que la palabra volumétrica vendría de considerar el área y además agregarla la noción de que la corriente implica un movimiento de cargas y eso conlleva otra dimensión más y por eso $\vec{J}$ se llama densidad volumétrica de corriente. La “explicación” no es muy convincente y quizás sea mejor usar el nombre sin meterse mucho en el origen del nombre. En todo caso $\vec{J}$ tiene la dirección y el sentido de la velocidad (si consideramos la de los portadores positivos) y sentido contrario (si consideramos la velocidad de los portadores negativos), i.e. siempre **tiene la dirección y sentido del campo eléctrico**.

Ejemplo: ¿Cuál es la velocidad de arrastre si tenemos un cable de 2mm de diámetro de plata (densidad 10.5 g/cm^3) por el que circula una corriente de 1 A? Suponiendo que hay un portador libre por átomo,

$$v_a = \frac{1 \text{ A}}{nqA} = \frac{1 \text{ A}}{neA} \quad (5.9)$$

Cuidado: La A del numerador es por Ampere, la unidad de corriente; la A del denominador es por el área. El área del cable es $A = \pi (0.1 \text{ cm})^2$, la carga de un electrón es $e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ y la densidad volumétrica de portadores es $n =$ número de electrones/unidad de volumen. Como en un mol de plata (107,9 g) hay $6,02 \times 10^{23}$ electrones y la densidad de la plata es de 10.5 g/cm^3 ,

un mol tiene aproximadamente 10 cm^3 . Entonces $n = 6.02 \times 10^{23} / 10 \text{ cm}^3 = 6.02 \times 10^{22}$ portadores/ cm^3 . Entonces:

$$v_a = 1 \text{ A} / [(6.02 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3})(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(\pi 0.01 \text{ cm}^2)] = 1 \text{ A} / (6 \times 2 \times 3 \times 10^1) \approx 1 \text{ A} / 350 \text{ cm/s} \approx 0.003 \text{ cm/s}$$

Ésta es una velocidad muy baja; indica que las colisiones dentro de un metal son muy frecuentes e impiden que la velocidad crezca a pesar de la presencia de un campo eléctrico que tiende a acelerarlas.

Pregunta: Pero....si los electrones se mueven tan despacio, ¿cómo aparece una bombita se enciende tan rápido???? El campo eléctrico $\vec{E}$ se establece en todo el conductor casi a la velocidad de la luz. Entonces los electrones comienzan a moverse casi al mismo tiempo.

Ahora es el turno de ustedes... Calculen lo mismo si en lugar de plata es cobre. Buscar los datos necesarios en internet.

5.5. Resistividad

Vimos que cuando se produce el movimiento de cargas en un material conductor, la velocidad promedio (llamada velocidad de arrastre) es muy baja y está relacionada con la corriente que circula por el conductor por

$$v_a = \frac{I}{n_{\text{portadores}} q_{\text{cada portador}} A_{\text{seccion}}} \quad (5.10)$$

siendo $I = \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A}$

La densidad de electrones libres depende fundamentalmente del material y es la responsable de la existencia de conductores, dieléctricos y semiconductores. En los metales el número de electrones débilmente unidos a la red cristalina (electrones de conducción) varía entre 1 y 3

Por otra parte, la densidad de corriente $\vec{J}$ de un conductor depende fundamentalmente del material y del campo eléctrico aplicado.

Para muchos conductores, dentro de ciertas temperaturas, vale la relación:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (5.11)$$

donde σ se denomina **conductividad**. A la inversa de la conductividad se la denomina **resistividad** $\rho = 1/\sigma$. Es decir, cuanto mayor es la resistividad, se debe aplicar un campo eléctrico más intenso para lograr la misma densidad de corriente. Las unidades de resistividad están dadas por:

$$[\rho] = \frac{[E]}{[J]} = \frac{\text{V/m}}{\text{A/m}^2} = \frac{\text{V}}{\text{A}} \text{m} \equiv \Omega \text{m}$$

donde hemos definido una nueva unidad: el ohm ($\Omega = \text{V/A}$) que explicaremos más adelante.

Para tener una idea de órdenes de magnitud en materiales comunes, la plata y el cobre tienen una resistividad de $10^{-8} \Omega \text{m}$; el germanio (un semiconductor) $0.6 \Omega \text{m}$; y el vidrio o el teflón (aislantes) mayor a $10^{13} \Omega \text{m}$.

Un conductor que la (5.11) se denomina **conductor lineal u óhmico**. En ellos la resistividad no depende del campo eléctrico. La resistividad de un **conductor metálico** casi siempre aumenta con la temperatura T : a mayor T los iones vibran con mayor amplitud, aumenta la probabilidad de que un electrón en movimiento choque con un ión y, por lo tanto, disminuye la velocidad de arrastre, es decir, disminuye la corriente.

Tema especial 1

¿Cómo podemos representar a los conductores con modelos conocidos? En una primera aproximación, los electrones forman un “gas” de partículas que chocan al azar. Cuando se aplica un campo eléctrico E se aceleran pero alcanzan una velocidad terminal v_a debido a los choques con la red cristalina. Es decir, hay fuerzas de resistencia que actúan sobre los electrones (como si fuera una fuerza viscosa). El modelo más sencillo es considerar que hay una fuerza proporcional a la velocidad de los electrones. Entonces:

$$m\vec{a} = q\vec{E} - b\vec{v} \quad (5.12)$$

donde m es la masa del electrón; $q = -e$. Cuando la aceleración se hace nula, la velocidad corresponde a la de arrastre (¿Por qué?).

$$m \frac{dv}{dt} = |q_e| E - bv \rightarrow \frac{dv}{\frac{|q_e|}{m} E - \frac{b}{m} v} = dt \quad (5.13)$$

Este tipo de ecuación lleva a que existe una velocidad límite para tiempos grandes, es decir, no se acelera indefinidamente.

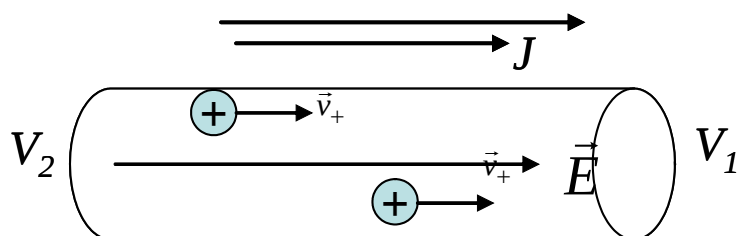
$$\ln \left[\frac{|q_e| E - bv}{|q_e| E} \right] = -\frac{b}{m_e} t \rightarrow v(t) = \frac{|q_e| E}{b} \left(1 - e^{-\frac{b}{m} t} \right) \quad (5.14)$$

Esto es lo que se relaciona con la resistividad ρ (que depende de cada material) y la “resistencia” a moverse ya que $\vec{E} = \rho \vec{J}$.

Fin tema especial 1

5.6. Resistencia

Si tenemos un material y sabemos cuál es el campo eléctrico aplicado, podríamos deducir cuál es la densidad de corriente. Sin embargo, no es fácil medir campos eléctricos ni densidades de corriente en forma directa. Es mucho más fácil medir diferencias de potencial y corrientes. Veamos la relación entre todas estas cantidades.



Si $\vec{J}$ es proporcional al campo eléctrico dentro del conductor, la corriente debe ser proporcional a la diferencia de potencial entre los extremos

del conductor. ¿Por qué? Porque ΔV es la integral de línea del campo eléctrico y la corriente I es la integral sobre la superficie transversal de $\vec{J}$, que es proporcional a $\vec{E}$.

Supongamos que tenemos un conductor de alambre con sección transversal A y longitud L . Sabemos que las cargas positivas se dirigen “naturalmente a zonas de menor potencial (recordar carga puntual en vacío y carga de prueba positiva). Entonces, la corriente va de zonas de mayor a zonas de menor potencial. Si el campo eléctrico es constante,

$$\Delta V = EL = V_2 - V_1 = \rho JL = \rho \frac{I}{A} L = \frac{\rho L}{A} I \equiv RI \quad (5.15)$$

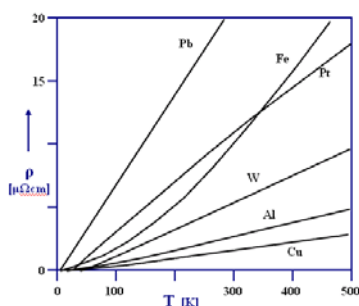
habiendo definido **resistencia de un conductor cilíndrico** $\frac{\rho L}{A} \equiv R$ (5.16)

La (5.15) es la famosa Ley de Ohm, reportada en 1827 por Georg Ohm después de realizar muchos ensayos con conductores de diferentes materiales y dimensiones. Es una ley experimental, Ohm desconocía la descripción microscópica que hemos dado.

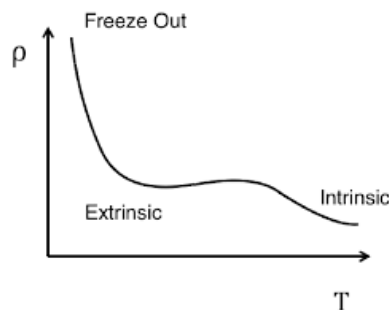
La unidad de resistencia eléctrica es el ohm (Ω) en su homenaje.

Observar que, a menor área, hay mayor resistencia (como en una manguera de jardín por la que sale agua). Se puede hacer una interpretación: cuanto más largo es el conductor, mayor será el número de choques de cada electrón (en promedio); y cuando mayor es el área A habrá más espacios por los que pueda pasar sin chocar. Es decir, comparamos la resistencia eléctrica con la resistencia mecánica. Por la experiencia cotidiana, cuando hay fuerzas de fricción parte de la energía se convierte en energía térmica. Análogamente, el paso de la corriente eléctrica por una resistencia produce calor (aumento de la energía interna como veremos en Termodinámica). Atrás del concepto de resistencia está la disipación de energía. Los choques de los electrones con los iones son mayormente inelásticos y, por lo tanto, se pierde energía cinética.

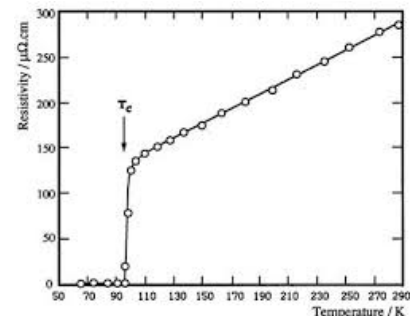
La resistividad de un material depende de la temperatura. En los siguientes gráficos se ve la dependencia de la resistividad con la temperatura absoluta². En todos los materiales, la



Conductor



Semiconductor



Superconductor

resistividad depende de la temperatura.

En un conductor metálico, la resistividad aumenta con la temperatura (lo podemos explicar por la mayor cantidad de choques con los “núcleos”)ⁱ. Un modelo que prediga la dependencia de la resistividad con la temperatura no es fácil de desarrollar, pero siempre es posible medir la resistividad en función de la temperatura, es decir que tenemos experimentalmente $\rho(T)$. Si consideramos una temperatura de referencia T_0 , que suele ser la

² Muchos de ustedes podrán ver modelos no clásicos en Física III que describen microscópicamente los distintos comportamientos de los materiales respecto a su resistividad.

ambiente (20-25 °C), podemos desmenuar el concepto del polinomio de Taylor y escribir la resistividad a una temperatura T a partir de la resistividad a T_0 como:

$$\rho(T) = \rho(T_0) + \left. \frac{d\rho}{dT} \right|_{T=T_0} (T - T_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\rho}{dT^2} \right|_{T=T_0} (T - T_0)^2 + \frac{1}{6} \left. \frac{d^3\rho}{dT^3} \right|_{T=T_0} (T - T_0)^3 + \dots \quad (5.17)$$

Aplicamos la regla del mínimo esfuerzo y truncamos el polinomio de Taylor en el término de primer orden; obviamente nos quedaremos con una dependencia lineal.

$$\rho(T) \approx \rho(T_0) + \left. \frac{d\rho}{dT} \right|_{T=T_0} (T - T_0) \approx \rho(T_0) \left[1 + \frac{1}{\rho(T_0)} \left. \frac{d\rho}{dT} \right|_{T=T_0} (T - T_0) \right] \approx \rho(T_0) [1 + \alpha (T - T_0)]$$

$$\alpha \equiv \frac{1}{\rho(T_0)} \left. \frac{d\rho}{dT} \right|_{T=T_0} \quad (5.18)$$

El número α se denomina coeficiente de deriva en temperatura y representa el cambio fraccional de la resistividad ante un cambio de temperatura ($T - T_0$). Obviamente la ley anterior sólo podrá dar buenos resultados cuando la resistividad varíe en forma aproximadamente lineal con la temperatura. En los metales la aproximación es buena, pero en otros materiales la aproximación lineal no es buena y hay que recurrir a incluir más términos en el desarrollo o usar otros modelos que no consideraremos.

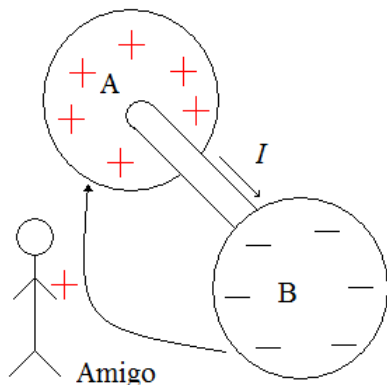
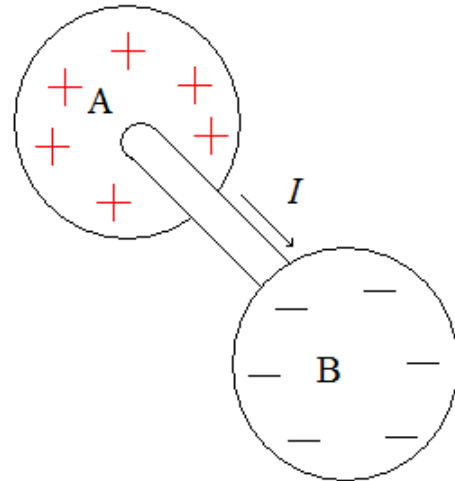
En los semiconductores, la resistividad decrece con la temperatura (sin justificación en nuestra materia). La función que los caracteriza es complicada pero, para ciertos semiconductores y rangos de temperatura se puede considerar que $\rho = \rho_0 e^{-\beta T}$ donde β es un coeficiente cuya unidad es K^{-1}).

Hay otro tipo de materiales (superconductores) que tiene resistividad nula hasta ciertas temperaturas ($T_c < 160K$) y luego aumenta con la temperatura.

5.7. Circuitos y FEM

En todos los párrafos anteriores supusimos la existencia de un campo eléctrico que sirviera para obtener una velocidad media de desplazamiento de las cargas (corriente eléctrica). ¿Bien, de dónde sacamos un campo eléctrico? Bueno, pongamos dos objetos A (positivo) y B (negativo) (ambos metálicos para que puedan conducir) y ya tenemos el campo eléctrico necesario. Conectamos un cable (resistencia) entre uno y otro y ya tenemos la corriente. Cómo cargamos A y B no es relevante.

Justo cuando estamos tan contentos descubrimos un problema terrible. Conforme se mueven las cargas el objeto A pierde “positividad” y el B “negatividad”. El módulo del campo eléctrico va disminuyendo, la corriente baja y todo se va apagando. Este proceso existe en el mundo real, se llama comportamiento transitorio y lo estudiaremos más adelante. Por ahora no nos sirve porque queremos corriente continua, estable en el tiempo. ¿Qué hacemos ahora?



Alguien tuvo una idea brillante: llamemos a un amigo y encomendémosle que cada vez que una carga elemental (supuesta positiva) llega al objeto B, él debe retornarla al objeto A para mantener así constante el módulo del campo eléctrico y con ello la corriente.

En la figura ahora aparece nuestro amigo quien lleva en su mano una carga desde B hacia A a lo largo de una curva. El rol de nuestro amigo es muy importante porque debe mantener un ritmo constante de transporte de cargas. Si se equivoca el módulo del campo eléctrico y la corriente no serán constantes.

Para mover las cargas él debe realizar trabajo porque mueve cargas positivas en contra del campo eléctrico. ¿A dónde va a parar este trabajo? No podemos asignarlo a la distribución de cargas porque esta permanece siempre en el mismo valor. La respuesta es sutil; el trabajo realizado por nuestro amigo compensa exactamente la energía cinética perdida por los portadores de carga durante los choques inelásticos contra los núcleos atómicos.

¿Cómo hace nuestro amigo para transportar las cargas? No nos interesa. Quizás tenga una pinza mágica con la que “arranca” cargas del cuerpo B, luego las mueve hacia el cuerpo A y las “inyecta” en él. El mecanismo no es lo relevante, sólo importa el transporte.

Si seguimos a una de las cargas desde que sale de A, circula por el cable, llega a B y luego es transportada por nuestro amigo de retorno a A, podemos aplicar el teorema de las

fuerzas vivas que decía algo así: “*El trabajo realizado por la fuerza resultante actuante sobre un cuerpo es igual a la variación de energía cinética del mismo*”.

Partiendo de cualquier punto y retornando al mismo nos encontramos con la misma velocidad de los portadores de carga por lo que concluimos que la variación de energía cinética es nula. Vamos ahora a las fuerzas. En principio tenemos tres: a) eléctricas, b) choques dentro del conductor, c) nuestro amigo. Las fuerzas eléctricas están presentes en todo el espacio, pero los choques están limitados al interior del conductor y nuestro amigo interviene sólo en el camino de retorno. Tenemos entonces:

$$W_{F_{ext}} = \Delta E_c$$

$$W_{F_{elec}} + W_{F_{choques}} + W_{F_{Amigo}} = \Delta E_c = 0$$

Como recorremos un camino cerrado $W_{F_{elec}}=0$ porque demostramos que las fuerzas eléctricas conservativas. Nos queda entonces:

$$W_{F_{choques}} + W_{F_{Amigo}} = 0$$

Podemos comprender los signos. Nuestro amigo hace trabajo (positivo) mientras que los choques implican una pérdida de energía (esa es una idea central del concepto de resistencia). La ecuación anterior dice que lo que se gana por un lado (nuestro amigo), se pierde por el otro (los choques inelásticos).

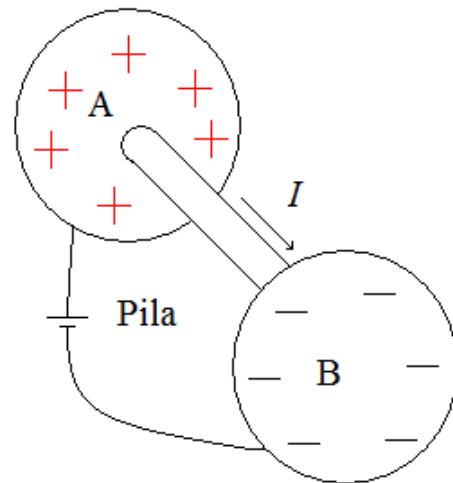
Podemos dividir cada uno de los sumandos por la carga transportada y tendremos entonces trabajos por unidad de carga, tema que ya hemos tratado.

¿Cómo denominaremos a cada uno de estos términos? Mejor no usar diferencia de potencial porque tanto la fuerza aplicada por nuestro amigo como la fuerza media asociada con los choques son no conservativas y entonces caemos en un lío de nombres que aún hoy nos trae dolores de cabeza.

El trabajo por unidad de carga realizado por nuestro amigo tiene un nombre espantoso dado hace mucho tiempo: “*Fuerza electro-motriz*” o FEM (ℰ). Pésima asignación porque estamos hablando de un trabajo y no de una fuerza. Las unidades son distintas. Fue una elección horrible pero ya está y con ella tenemos que vivir. Claramente las unidades de la FEM deben ser Volts para mantener la idea de trabajo por unidad de carga. El término correspondiente a la resistencia ya lo calculamos gracias a la ley de Ohm y vale IR . En cuanto al nombre tenemos varias opciones: a) “*voltaje*” (sin mayores detalles), b) “*caída de tensión*”. Este es un nombre que viene de una teoría antigua debida a Michael Faraday. Aunque la teoría fue superada el nombre aún se usa. Igual, si se nos escapa y decimos “*diferencia de potencial*” no nos vamos a escandalizar demasiado.

Dejemos el tema nombres de lado y pasemos a algo más importante. Entendemos el rol de nuestro amigo, pero está claro que en el mundo real necesitamos otro objeto. Hay varias posibilidades, pero una de las más simples, confiables, robustas y efectivas son las pilas o baterías. Ya conocimos a Alessandro Volta en otro capítulo y su aporte como inventor de la pila. Ahora nos enfocamos en un aspecto crucial: la reacción de óxido-reducción que ocurre dentro de la pila mueve cargas de la misma forma en la que lo hacía nuestro amigo. El efecto externo es el mismo. El trabajo que venía de la estructura muscular ahora viene de la diferencia de energía entre los reactivos y los productos. Hay otros aparatos que cumplen el mismo rol que la pila (panel solar, celda de combustible, dínamo, etc...). Ahora no los vamos a tratar porque los dejamos para más adelante. Por ahora la pila reinará como FEM.

Nuestro esquema queda ahora así:

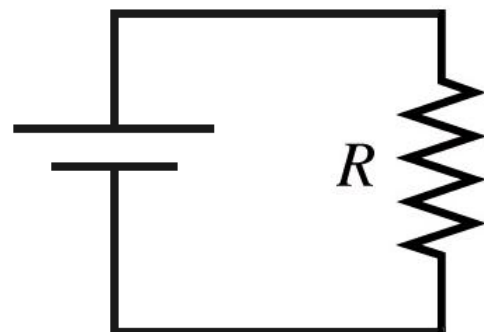


Ahora la pila reemplazó a nuestro amigo y el trazo curvo que une a la pila con los objetos A y B no es una curva imaginaria, sino que es un conductor por el que las cargas son transportadas.

Ahora damos un paso rumbo al mundo real. Los objetos A y B no tienen que ser tan grandes como muestran los dibujos (era sólo un recurso expositivo). Basta conectar la pila al cable y ya la misma consigue una acumulación de carga positiva (y otra negativa) en los extremos del cable resistivo.

El diagrama esquemático habitual es el de la figura.

El trazo en zig-zag es el ícono habitual de la resistencia. Quizás, el camino tortuoso quiera representar que los portadores de carga les “cuesta” pasar debido a los choques (¿será ese el origen? Los trazos rectos son cables imaginarios perfectos, sin resistencia. ¿Dónde están los objetos



A y B? Pues bien, bastan los cables, superior (positivo) e inferior (negativo), para tener sobre

ellos las distribuciones de carga que proveen el campo eléctrico necesario para obtener la corriente (En realidad la distribución de cargas es más compleja pero no podemos adentrarnos en ese tema).

La resistencia interna de las pilas

La tabla estándar de reacciones de óxido-reducción permite calcular la FEM de una pila. Supongamos que entre los bornes de la misma conectamos cables de resistencia decreciente. La ley de Ohm nos indica que la corriente tiende a crecer. ¿Lo hará sin límite?

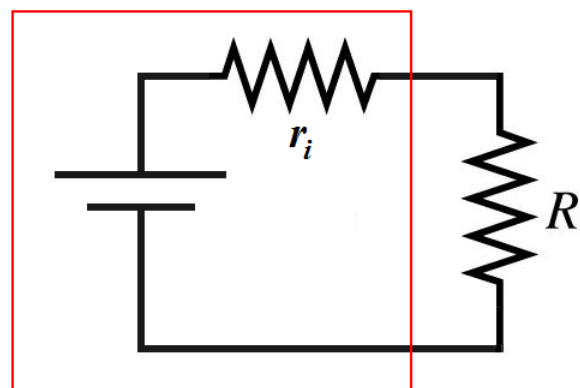
La respuesta es negativa y lo mejor es comenzar mirando pilas comunes

La imagen muestra varias de las pilas más comunes. Excluimos las de aspecto de paralelepípedo y nos concentramos en las cilíndricas. Se izquierda a derecha tenemos los modelos C, AA, AAA y D.



Todos ellos tienen una FEM de aproximadamente 1.5 V. ¿En qué difieren? La respuesta obvia es el tamaño y, por lo tanto, la cantidad de reactivos. A mayor tamaño mayor cantidad de reactivo y esperamos mayor cantidad de energía disponible. Pero también sucede que a mayor tamaño es más grande la superficie expuesta de los electrodos y por lo tanto es más grande la corriente que la pila puede entregar.

Hagamos el siguiente experimento: conectemos entre los bornes de una pila un cable de resistencia decreciente. La corriente que obtenemos no tiende a infinito sino a un valor característico de cada pila asociado con el área de los electrodos (y otros factores). Ésta es la llamada corriente de cortocircuito. En una pila AA es de aproximadamente 4 A cuando está nueva. Si ponemos 8 pilas AA en serie obtenemos una FEM de 12 V y una corriente máxima de unos 4 A. Si intentamos arrancar un auto con estas 8 pilas en serie vamos a fracasar porque vimos anteriormente que la corriente que consume el motor de arranque de un auto no es inferior a los 30 A.



No sorprende que debamos recurrir a una batería de 12 V “más grande”. Por “más grande” entendemos que sea capaz de entregar los 30 A que mencionamos y eso se consigue

esencialmente con mayor área de electrodos. La corriente de cortocircuito de la batería de un auto es de unos 300 A para uno chico y de unos 1000 A para un camión. Para dar cuenta de esta corriente máxima que puede entregar una batería modificamos la visión de la misma pasando al siguiente modelo. Dentro de la caja roja tenemos la pila separada en dos componentes: a) la FEM y b) la llamada resistencia interna r_i . Más adelante veremos cómo dicha resistencia interna limita la corriente máxima.

Ya mencionamos que a mayor cantidad de reactivos tenemos más energía disponible. En las baterías es habitual reportar la “*capacidad*” de la misma (no confundir con la capacidad eléctrica de un sistema de objetos que ya estudiamos y que se mide en Faradios). La capacidad de una pila es la cantidad de carga que puede transportar manteniendo la FEM en un rango. Luego la pila “se agota” (si es recargable podemos volver las cosas para atrás). Así, una pila AA tiene una capacidad típica de unos 3000 mAh. La unidad extraña es mili Ampere-hora. Dado que Ampere es la unidad de corriente y hora mide tiempos, el producto es una carga. Multiplicamos y obtenemos 10800 C. El trabajo realizado por la pila para mover esta cantidad de carga es: $W = 1.5 \text{ V} \times 10800 \text{ C} = 16200 \text{ J}$.

¿Es mucho? ¿Es poco? Hagamos un ejemplo macabro. Con algún aparato usamos esa energía para levantar una persona y luego dejarla caer sobre el piso. La altura a la que podemos levantarla es: $H = W/(mg) = 16200 \text{ J} / (75 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2) \approx 21 \text{ m}$ (7 pisos). Una caída fatal sin dudas. Es cierto que el ejemplo no contempla fuerzas de roce y otros mecanismos de pérdida de energía, pero hay mucha energía guardada en una simple pila AA.

5.8. Ley de Joule

Supongamos que tenemos un elemento conductor en un circuito por el que circula una corriente I , existiendo una diferencia de potencial entre sus extremos a y b . Cuando una carga $q > 0$ pasa a través del elemento del circuito, su energía potencial disminuye en qV_{ab} . Si en lugar de disminuir la energía potencial, ésta aumentara, no queda otra que estar en presencia de una **fuente**. En el caso de una pila, ésta transforma energía química en eléctrica y la entrega al circuito. La rapidez con que se extrae o entrega energía de o a un elemento de un circuito se denomina **potencia**.

Si la corriente es I , en un intervalo de tiempo dt pasa por un elemento del circuito una carga $dq = Idt$. Para calcular la energía perdida por unidad de tiempo (potencia perdida) cuando una corriente pasa por una resistencia, pensemos en una carga dq que se mueve por el conductor entre V_1 y V_2 , es decir, se mueve a través de una diferencia de potencial V . El

cambio de energía potencial es dU y es igual al trabajo efectuado por la fuerza eléctrica, i.e.

$$dU = dW = V dq$$

En consecuencia, la potencia será

$$P = \frac{dW}{dt} = V \frac{dq}{dt} = VI \quad (5.19)$$

siendo las unidades de la potencia $[P] = VA \equiv W$ (Watt)

¡Cuidado! Esta expresión es independiente del material. Por otra parte, como la relación (5.15) establece la relación entre diferencia de potencial y corriente, i.e. define qué es la resistencia de cualquier objeto (aunque dependa de la corriente I), resulta

$$P = VI = \frac{V^2}{R} = I^2 R \quad (5.20)$$

En el caso de un material óhmico, la resistencia R es constante y a la potencia perdida se la llama potencia perdida por **efecto Joule**.

Normalmente, las resistencias tienen además otro dato: la potencia nominal que corresponde a la potencia máxima que puede soportar. I.e. dada una R nos da la I máxima que puede circular sin dañarse a causa del sobrecalentamiento.

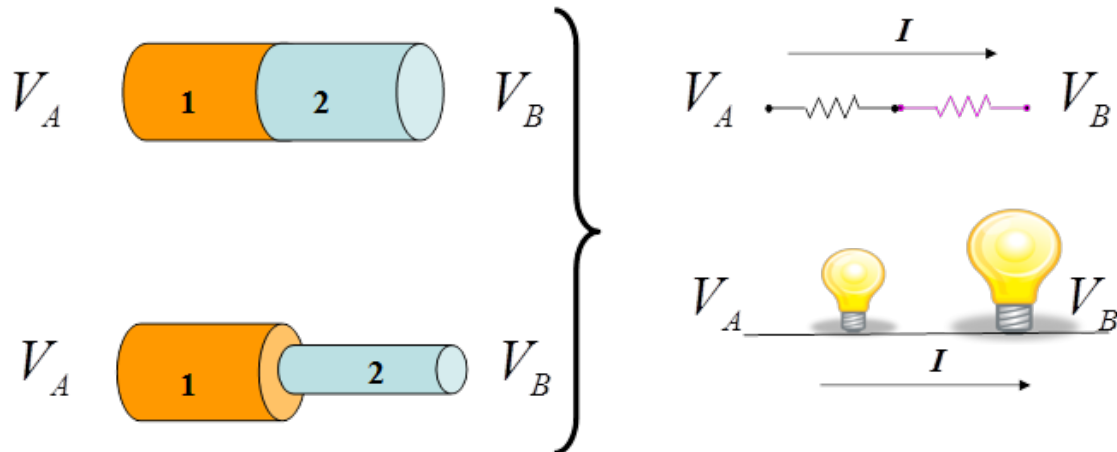
Observación: En consecuencia, si tenemos una fuente con resistencia interna r_i , la potencia de salida neta útil será $P = IV_{ab} = I(\mathcal{E} - Ir_i)$

5.9. Acomodando resistencias... Resistencias en serie y en paralelo

En un circuito eléctrico, las resistencias pueden estar asociadas de muchas formas. Sin embargo, hay dos formas de asociar las resistencias muy tipificables: resistencias en serie y en paralelo. Veamos esto con más detalle:

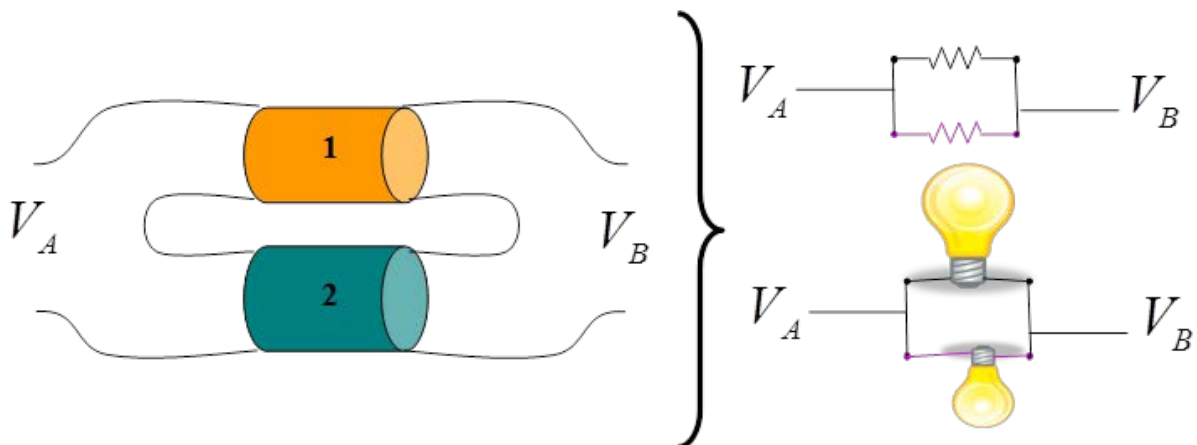
- 1) Las resistencias están en **serie** cuando la corriente que pasa por ellas es la misma i.e. el flujo de carga por unidad de tiempo es el mismo.

Podemos esquematizar dos resistencias en serie de la siguiente manera



¿Qué relación hay entre las densidades de corriente en cada resistencia (la naranja y la celeste)? Y cuál es la relación entre las corrientes? Y la relación entre los campos eléctricos “dentro” de cada resistencia? Esto queda para ustedes.

- 2) Las resistencias están en **paralelo** cuando la diferencia de potencial entre sus extremos (bornes) es la misma.

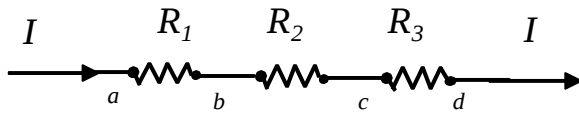


Ahora les toca contestar las mismas preguntas que en el caso de resistencias en serie y completar el cuadro siguiente:

	J_1/J_2	I_1/I_2	E_1/E_2
Resistencias en serie			
Resistencias en paralelo			

Cuando las resistencias están en serie o en paralelo en un circuito, es posible reemplazar el conjunto por una sola resistencia, que se llama **resistencia equivalente**.

Por ejemplo, si tenemos la siguiente distribución de resistencias:



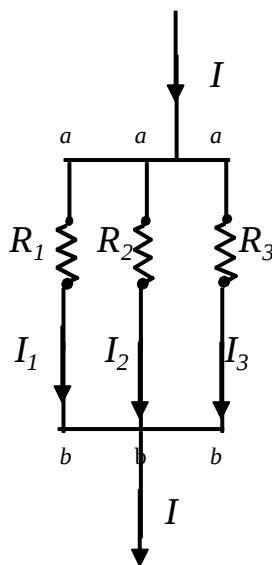
Como las cargas positivas van “naturalmente” hacia las zonas de mayor potencial, tenemos:

$$V_a - V_b \equiv V_{ab} = IR_1 \quad V_b - V_c \equiv V_{bc} = IR_2 \quad V_c - V_d \equiv V_{cd} = IR_3 \quad (5.21)$$

Entonces

$$V_{cd} = I(R_1 + R_2 + R_3) = IR_{equivalente} \quad (5.22)$$

En consecuencia, siempre es $R_{equivalente} > R_j$.



Si, en cambio, tenemos el circuito de la figura de la izquierda:

$$V_a - V_b \equiv V_{ab} = I_1 R_1 = I_2 R_2 = I_3 R_3 \quad (5.23)$$

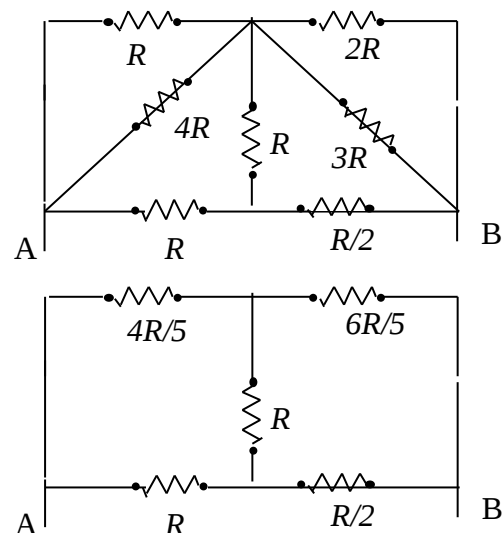
$$I = I_1 + I_2 + I_3 = V_{ab} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) = \frac{V_{ab}}{R_{equivalente}} \quad (5.24)$$

Entonces

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) = \frac{1}{R_{equivalente}} \Rightarrow R_{equivalente} < R_j \quad (5.25)$$

No siempre se puede sencillamente....

No siempre las resistencias están tan simplemente conectadas como en serie o en paralelo. En el circuito de la figura A y B indican que el circuito estaría conectado como bloque a esos dos bornes. Por ejemplo, conectado a una batería. Vemos que las resistencias dadas por $2R$ y $3R$ están conectadas en paralelo porque entre sus bornes existe la misma diferencia de potencial. Lo mismo para la R y $4R$. De esta forma, queda un circuito más simplificado como se indica. Sin embargo, no podemos hacer

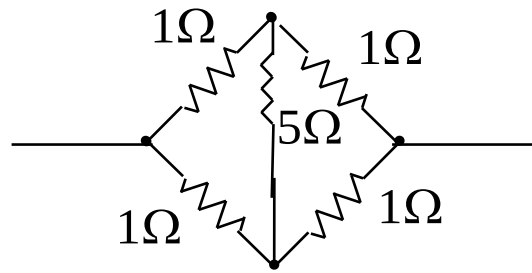


mucho más ya que las resistencias no están ni en serie ni en paralelo (no pasa la misma corriente por ninguna ni existe la misma diferencia de potencial entre los bornes).

Es decir, en términos generales, las resistencias no tienen por qué estar exclusivamente en serie o paralelo. Algunas veces es posible determinar la resistencia equivalente **por simetría**.

Por ejemplo: ¿podría pasar corriente por la resistencia de 5Ω ? NO porque independientemente

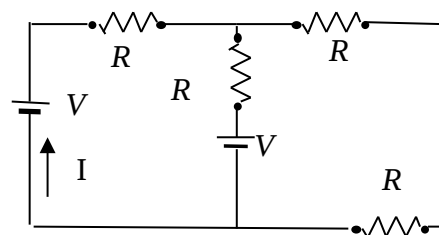
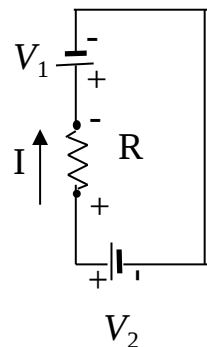
de la corriente, no hay ninguna asimetría que permitiera circular la corriente en algún sentido y no en otro. En consecuencia, la resistencia equivalente de este circuito estaría dada por el paralelo entre la serie de dos resistencias. Resulta $R_{equivalente} = 1\Omega$



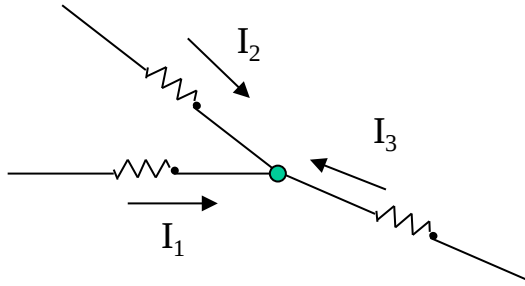
5.10. Reglas (o Leyes) de Kirchhoff

Como vimos, hay situaciones donde no es posible o puede ser difícil hallar la resistencia equivalente de un circuito porque ellas no están ni en serie ni en paralelo. Alrededor de 1850 Kirchhoff estableció reglas que dan la posibilidad de hallar las corrientes que circulan por circuitos complicados. Es decir, dadas las *fem* y las resistencias, hallar las corrientes. También sirven para resolver circuitos donde se conocen algunas magnitudes y otras no.

Incluso, en casos simples como los de las figuras, ¿para dónde circula la corriente?, ¿cuánto vale? ¿Es correcto el sentido en que dibujé la corriente? Antes de continuar, debemos recordar que el sentido de la corriente es una **convención**. Consecuentemente, la corriente es una cantidad algebraica cuyo signo nos debe dar “para dónde van los portadores positivos”.



Kirchhoff usó dos **Principios de la Física** (o sea, postulados, afirmaciones validadas experimentalmente):



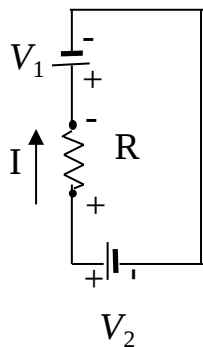
1) **Principio de conservación de la carga:** La suma algebraica de las corrientes que fluyen hacia cualquier punto de unión de conductores es cero. Es decir, no ha acumulación de cargas en ningún punto. En este esquema (tomando como positivas las corrientes que llegan al punto)

tendremos que

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0. \quad (5.26)$$

Por supuesto, por lo menos una de las corrientes resultará tener sentido contrario al indicado en la figura.

2) **Principio de conservación de la energía:** La suma de las caídas y aumentos de potencial alrededor de cualquier camino cerrado en un circuito es cero. Es decir, el trabajo realizado en un objeto debe ser provisto por otro (recordar que la potencia disipada por efecto Joule es provisto por la *fem*). En el circuito de la figura, debe cumplirse



i) Si hacemos la circulación en sentido antihorario

$$V_1 + IR - V_2 = 0$$

ii) Si hacemos la circulación en sentido horario

$$-V_1 - IR + V_2 = 0 \quad (5.27)$$

Es decir, es lo mismo.

Pero... ¿por qué puse esos signos y ese sentido de corriente?

Todo es convencional pero una vez que se tomó la

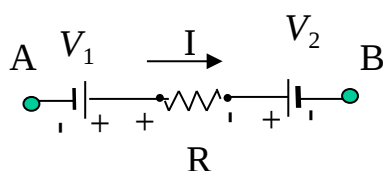
convención hay que seguirla hasta el final de la resolución.

a) Por convención, en la batería la raya más larga indica que está a mayor potencial que la más corta.

b) Elegí, arbitrariamente, el sentido de I

c) Elegido el sentido de I , como los portadores positivos siempre se dirigen a zonas de menor potencial, al pasar la resistencia, la I será la misma pero el potencial habrá disminuido.

El sentido final de la corriente estará dado por los valores de tensión en las baterías. Como vemos, si $V_1 > V_2$ la corriente circulará en sentido contrario al indicado (Se manifiesta en un valor negativo de I).



¿Cómo se generaliza en un trozo de circuito como el de la figura? Si el sentido de I se toma como está

indicado A debe estar a mayor potencial que B. Es decir, $V_A - V_B \geq 0$ (será 0 si A y B son el mismo punto, eléctricamente hablando)

$$(V_A - V_B) + V_1 - IR - V_2 = 0. \quad \text{O sea, } (V_A - V_B) = -V_1 + IR + V_2$$

Definiremos qué es un **NODO** y qué es una **MALLA**. Un **nodo** es un punto de unión de 3 o más cables en un circuito. Una **mall**a es cualquier camino cerrado en un circuito. Para “resolver” un circuito deberemos escribir tantas ecuaciones como incógnitas tengamos (con cuidado de que no sean linealmente dependientes). A través del tiempo se han establecido “reglas” para determinar cuántas “ecuaciones de malla” y cuántas “ecuaciones de nodo” son necesarias para resolver un circuito complicado que tiene N nodos y M mallas. Nunca haremos circuitos tan complicados en Física II!!!

<https://www.youtube.com/watch?feature=related&hl=en-GB&v=IpaEGhipZqc&gl=IE> Hay otros videos no tan vintage! Y vale la pena verlos.

https://www.youtube.com/watch?v=-Rb9guSEeVE&list=PLkyBCj4JhHt8DFH9QysGWm4h_DOxT93fb

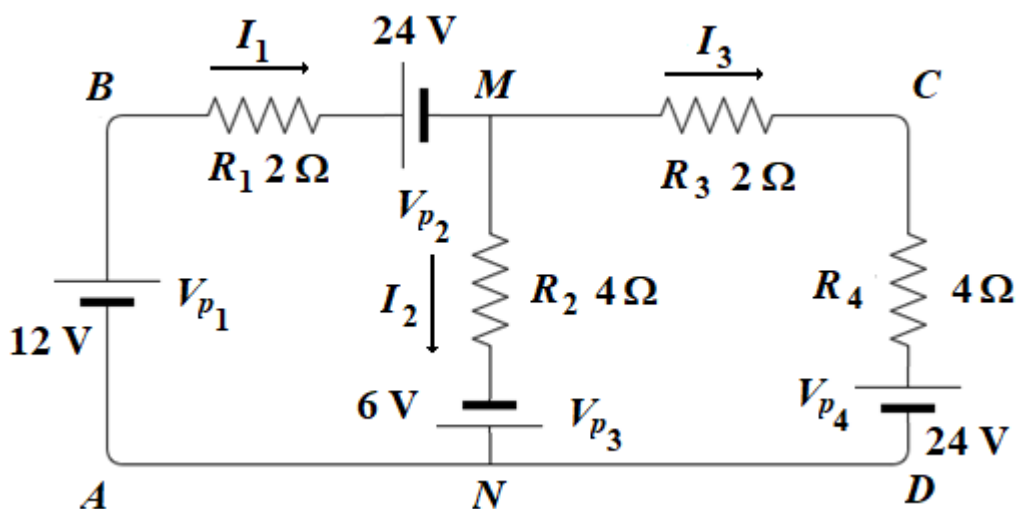
<https://www.youtube.com/watch?v=u4FpbaMW5sk&t=33s>,

<https://www.youtube.com/watch?v=m4jzgqZu-4s>

ⁱ<http://www.absorblearning.com/media/attachment.action?quick=11a&att=2673>

Un ejemplo completo

Dado el circuito de la figura, en el que conocemos los valores de las pilas y las resistencias, queremos calcular las corrientes que circulan por cada uno de los componentes.



Paso 1: asignamos corrientes de dirección arbitraria. NO es necesario adivinar el sentido correcto; el sistema de ecuaciones lineales que generaremos arregla los signos automáticamente.

Sólo es necesario considerar tres corrientes I_1 , I_2 e I_3 . En efecto, I_1 circula por R_1 , V_{p1} y V_{p2} , I_2 lo hace por R_2 y V_{p2} e I_3 por R_3 , R_4 y V_{p4} . Ya hemos cubierto todos los componentes.

Paso 2: ecuaciones de nodos: el circuito tiene dos nodos M y N. Vamos a escribir la primera

ley de Kirchhoff. $\sum_{k=1}^N I_k = 0$

Nodo M: $I_1 - I_2 - I_3 = 0$ (5.28)

Nodo N: $-I_1 + I_2 + I_3 = 0$

Vemos que las ecuaciones son linealmente dependientes. Podemos tomar una sólo de ellas, cualquiera; tomamos la primera. Faltan entonces dos ecuaciones linealmente independientes para terminar el problema.

Paso 3: ecuaciones de mallas: buscamos dos mallas diferentes y en ellas aplicamos la segunda

ley de Kirchhoff. $\sum_{k=1}^M V_k = 0$

Malla ABMNA (punto de partida A, sentido horario):

$$V_{p1} - I_1 R_1 - V_{p2} - I_2 R_2 + V_{p3} = 0 \quad (5.29)$$

Malla NMCDN (punto de partida N, sentido horario):

$$-V_{p3} + I_2 R_2 - I_3 R_3 - I_3 R_4 - V_{p4} = 0 \quad (5.30)$$

Juramos que las dos ecuaciones de malla son linealmente independientes porque en una aparecen variables que no están en la otra.

El sistema matricial resultante es:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -R_1 & -R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & -(R_3 + R_4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ V_{p2} - V_{p1} - V_{p3} \\ V_{p3} + V_{p4} \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

Después de triangular el sistema encontramos la solución:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.0909 \text{ A} \\ 0.5455 \text{ A} \\ -4.6364 \text{ A} \end{bmatrix}$$

El signo negativo de I_1 e I_3 indica que en el mundo real la circulación de portadores positivos sería en sentido contrario al supuesto.

El problema está bien resuelto y **NO** tocamos absolutamente nada. **NO** es necesario rehacer el problema.

Podemos reemplazar el vector solución en 5.31 y verificar, pero está bien porque lo calculó una computadora.

Vamos a hacer algo más interesante. Calculemos las potencias entregadas o recibidas por cada elemento y veamos si el balance cierra.

Todas las resistencias reciben energía y la disipan como calor: $P_R = I^2 R$

$$P_{R_1} = I_1^2 R_1 = 33.4711 \text{ W}$$

$$P_{R_2} = I_2^2 R_2 = 1.1901 \text{ W}$$

$$P_{R_3} = I_3^2 R_3 = 42.9917 \text{ W}$$

$$P_{R_4} = I_3^2 R_4 = 85.9835 \text{ W}$$

$$P_{R_{total}} = 163.6364 \text{ W}$$

El cálculo para las pilas es un poco más complejo por el tema signos. Miremos el dibujo del circuito: según asignamos las direcciones de corriente la pila 1 entrega energía, es decir que anotamos $V_{p1}I_1$. Por el contrario, la pila 2 recibe energía, por lo que anotamos $-V_{p2}I_2$. Así continuamos con las otras pilas: la 3 entrega y la 4 recibe. Estos son los signos que respetan el dibujo original, luego, al calcular, debemos reemplazar la solución con los signos obtenidos:

$$P_{V_{p1}} = V_{p1}I_1 = 12 \text{ V} (-4.0909 \text{ A}) = -49.0909 \text{ W}$$

$$P_{V_{p2}} = -V_{p2}I_1 = -24 \text{ V} (-4.0909 \text{ A}) = 98.1818 \text{ W}$$

$$P_{V_{p3}} = V_{p3}I_3 = 6 \text{ V} (0.5455 \text{ A}) = 3.2727 \text{ W}$$

$$P_{V_{p4}} = -V_{p4}I_3 = 6 \text{ V} (-4.6364 \text{ A}) = 111.2727 \text{ W}$$

$$P_{V_{p_{total}}} = 163.6364 \text{ W}$$

Y respiramos tranquilos porque todo lo entregado es igual a lo recibido y el principio de conservación de la energía está a salvo.

Capítulo 6

Campos Magnéticos y Eléctricos: Fuerzas sobre cargas

<u>6.1.Introducción</u>	6-2
<u>6.2.Fuerzas producidas por campos magnéticos sobre cargas</u>	6-3
<u>6.3.Fuerza magnética sobre un conductor que transporta corriente eléctrica</u>	6-6
<u>6.4.Torque sobre una espira rectangular con corriente en un campo magnético uniforme. Momento Magnético</u>	6-7
<u>6.5.Fuerza de Lorentz</u>	6-10
<u>6.6.Equipos que basan su funcionamiento en la Fuerza de Lorentz</u>	6-12
<u>6.7.Efecto Hall</u>	6-12
<u>6.8.Relación entre campos magnéticos y eléctricos desde marcos de referencia en movimiento</u>	6-13

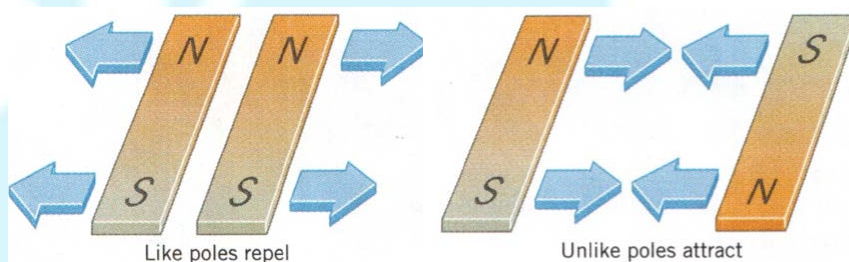
6.1. Introducción

Las primeras observaciones de fenómenos magnéticos reportadas datan de hace más de 2500 años. Al oeste de Turquía se observaron fragmentos de material (Fe_3O_4 : magnetita) con propiedades muy particulares. Es lo que hoy se llama un **imán permanente**. El uso de

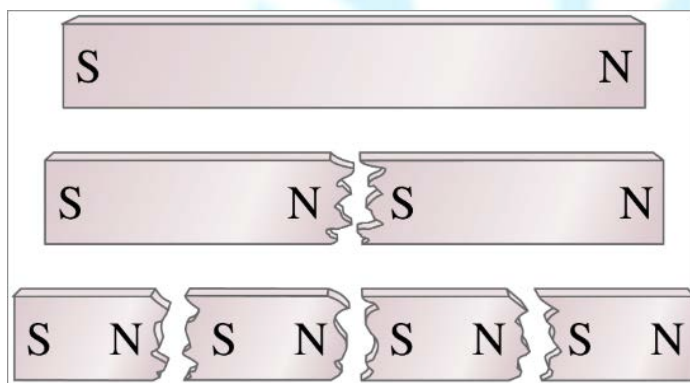


Magnetita atrayendo clavos y limaduras de hierro

El uso de imanes en navegación data de más de 1000 años en Occidente aunque es muy probable que en China se conociera la orientación N-S de los imanes. También se conocía que los imanes permanentes ejercían fuerzas entre sí y también sobre fragmentos de hierro no magnetizado. Otra cosa conocida era que un trozo de hierro puesto en contacto con un imán, se magnetizaba, i.e. se convertía en imán. Cuando un trozo de hierro magnetizado se deja girar libremente, toma dirección N-S (la brújula).

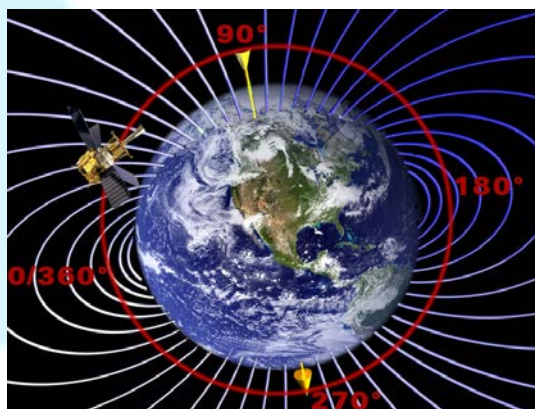


Otra observación experimental: si se parte un imán en dos, se obtienen dos imanes. Y

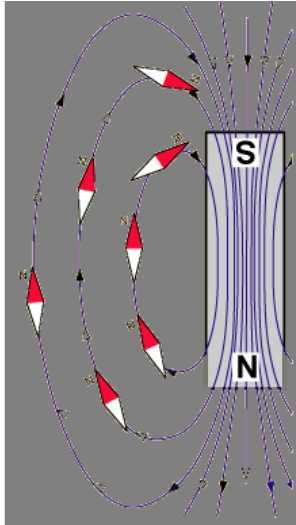


aún más, se pueden producir fuerzas de atracción o repulsión entre dos imanes dependiendo de las orientaciones de los mismos. Polos distintos se atraen y polos iguales se repelen.

Es por eso que, debido a la orientación de una aguja imantada, se concluye que la Tierra debe considerarse un gran imán con el S magnético en el polo norte. ¿Para dónde apunta una brújula puesta en la atmósfera terrestre?



Durante la Edad Media el estudio del magnetismo dio un gran paso gracias a los estudios de Pierre de Maricourtⁱⁱⁱ (probablemente un cruzado en las trincheras). Escribió el primer tratado de



Magnetismo, donde por primera vez se habló de polos de un imán. A pesar de esto, el magnetismo comenzó a ser bien conocido a principios del siglo XIX. En esa época Electricidad era sinónimo de Electrostática, Magnetismo era el estudio de los imanes, la brújula y el campo magnético terrestre (no se había progresado desde Gilbert en 1600), y Galvanismo se refería a los fenómenos relacionados con corrientes continuas producidos por baterías (descubrimiento fortuito de Galvani y subsiguientes experimentos de Volta).



6.2. Fuerzas producidas por campos magnéticos sobre cargasⁱⁱⁱ

En las figuras anteriores, el ordenamiento espacial de las brújulas (izquierda) o los pequeños alambres de hierro (derecha), sugieren la presencia de un objeto abstracto que llamamos campo magnético $\vec{B}$. Los experimentos indican que cuando hay cargas en movimiento, el campo magnético de los imanes interactúa con las cargas en determinadas condiciones. Podemos resumir los resultados experimentales:

1) Puede existir sobre una carga q en movimiento una fuerza $\vec{F}_m$ debida a algún imán o equivalente.

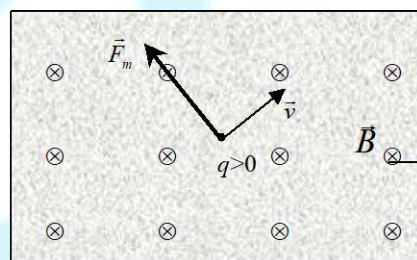
2) $|\vec{F}_m| \propto q$. Si cambia el signo de q cambia el sentido de la fuerza.

3) $\vec{F}_m \cdot \vec{v} = 0$ y $\vec{F}_m \cdot \vec{B} = 0$, es decir

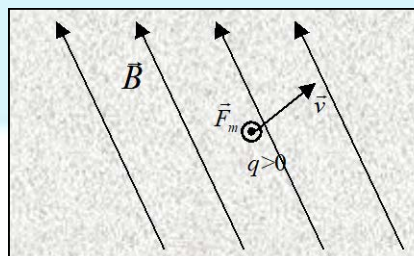
4) $|\vec{F}_m| \propto |\vec{v}|, |\vec{B}|, |\vec{v} \times \vec{B}|$

5) Si $\vec{v}$ y $\vec{B}$ son paralelos $\vec{F}_m = 0$

6) Si $\vec{v}$ y $\vec{B}$ son



Zona con campo magnético



$\vec{F}_m$ perpendicular saliente

perpendiculares $|\vec{F}_m|$ es máxima

7) Si cambia el sentido de $\vec{v}$ o $\vec{B}$ cambia el sentido de $\vec{F}_m$

Todo esto lleva a que la fuerza que ejerce un campo magnético sobre una carga está dado por

$$\vec{F}_m = q \vec{v} \times \vec{B}$$

de donde surge que el campo magnético no puede ser un vector sino un pseudovector o vector axial. Como la unidad de fuerza es el Newton, la unidad de campo magnético debe ser tal que

$$[B] = \frac{\text{N s}}{\text{C m}} = \frac{\text{N}}{\text{A m}} = \text{Tesla} = \text{T}$$

Se lo denomina así en honor a Nikola Tesla, quien fue el responsable de los sistemas de potencia de corriente alterna a larga distancia.

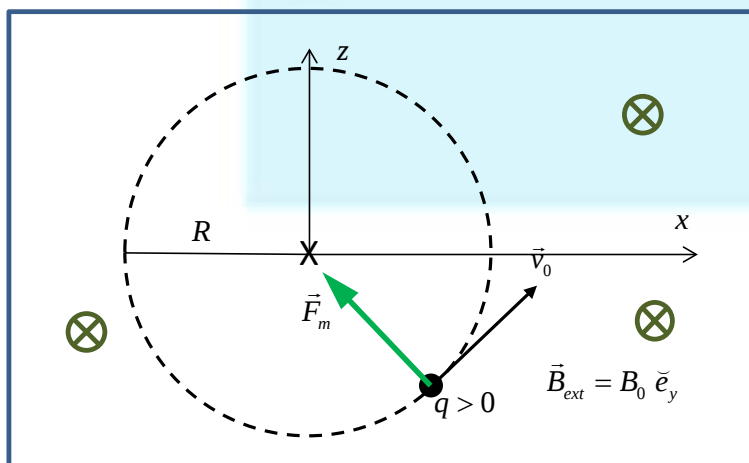
Como la fuerza magnética es siempre perpendicular a la velocidad y $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ resulta siempre $\vec{F}_m \perp d\vec{r}$ y por lo tanto la fuerza magnética nunca realiza trabajo. Es decir, no es una fuerza conservativa en el sentido de que deriva de una función potencial y siempre $\int_A^B \vec{F}_m \cdot d\vec{r} = 0$. Por otra parte, como

$$W_{total} = W_{F_{nc}} + W_{F_c} = W_{F_{nc}} + 0 = \Delta T = 0$$

el **módulo de la velocidad** permanece constante cuando una carga se mueve y está presente solo un campo magnético.

Vamos a determinar cómo un campo magnético modifica el movimiento de una carga puntual q . Primero consideraremos un caso sencillo y luego otro más general.

Ejemplo 1: una carga positiva q moviéndose con velocidad inicial $\vec{v}_0$ en el mismo plano que el campo magnético $\vec{B}_{ext}$. Supongamos primero que la velocidad es perpendicular al



campo magnético en el instante inicial

Como $\vec{F}_m(t=0) = q \vec{v}_0 \times \vec{B}_{ext}$, es decir, la fuerza es perpendicular a la velocidad, la variación de energía cinética es

nula, es decir, $|\vec{v}| = |\vec{v}_0|$ y en consecuencia $\frac{dv}{dt} = 0$.

Por lo que podemos escribir a la aceleración como

$$\vec{a} = a_c \vec{e}_{normal} + a_t \vec{e}_{tangencial} = \frac{v^2}{\rho} \vec{e}_{normal} + \frac{dv}{dt} \vec{e}_{tangencial} = \frac{v^2}{R} \vec{e}_{normal} = \frac{v_0^2}{R} \vec{e}_{normal}. \text{ Consecuentemente,}$$

$$\vec{F}_m = q \vec{v} \times \vec{B}_{ext} = m \vec{a} = m \vec{a}_c = m \frac{v_0^2}{R} \vec{e}_{normal}$$

$$\vec{F}_m = q v_0 \vec{e}_{tangencial} \times B_0 \vec{e}_y = m \frac{v_0^2}{R} \vec{e}_{normal}$$

Es decir, la fuerza es de módulo $qv_0 B = m \frac{v_0^2}{R}$ y la trayectoria es una circunferencia en un

plano perpendicular al campo magnético de radio $R = \frac{mv_0}{qB}$. Como $v = \omega R$ la frecuencia

resulta $\omega = \frac{qB}{m}$, es decir, no depende ni de R ni de v . Es usual denominar a $qBR = mv_0$ como

la **ecuación del ciclotrón** (el primero de los aceleradores modernos de partículas cargadas). De ella queda claro que, dependiendo de la experiencia, pueden determinarse el momentum lineal de una partícula cargada, la velocidad, la relación entre masa y carga, etc.

Ejemplo 2: una carga positiva q moviéndose con una velocidad no perpendicular al campo, es decir, una componente perpendicular y otra paralela. Elijamos

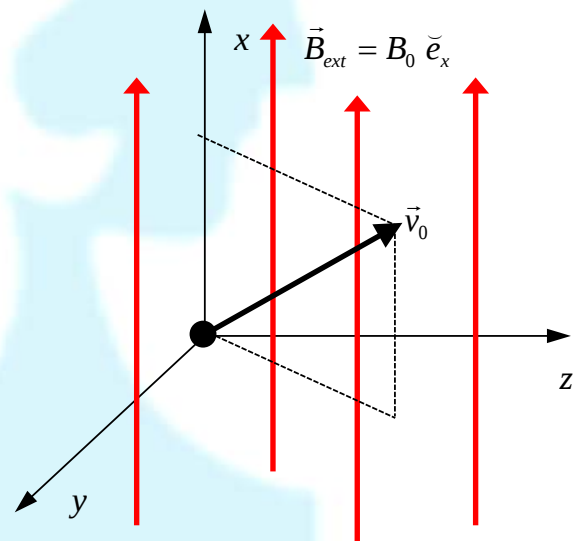
$$\vec{B} = B \vec{e}_x \quad \text{y} \quad \vec{v}_0 = v_{0x} \vec{x} + v_{0y} \vec{y} + v_{0z} \vec{z}$$

En consecuencia, la fuerza solamente tendrá componentes y y z

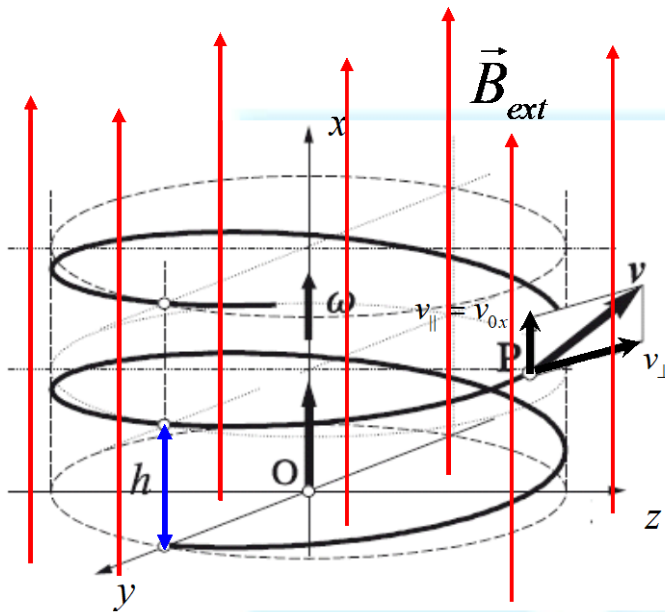
$$\vec{F} = q \{ 0 \vec{x} + B v_{0z} \vec{y} - B v_{0y} \vec{z} \} = m \vec{a}$$

La componente de la velocidad paralela al campo v_x no se verá afectada y permanece constante, es decir, $v_x = v_{0x}$. Cambiarán las componentes y y z con el tiempo, aunque $v_y^2 + v_z^2 = cte = v_{0y}^2 + v_{0z}^2 = v_{\perp}^2$ porque la **energía cinética se conserva**.

La aceleración estará dada por



$$\vec{a} = a_c \vec{e}_{normal} + a_t \vec{e}_{tangencial} = \frac{v^2}{\rho} \vec{e}_{normal} + \frac{dv}{dt} \vec{e}_{tangencial}$$



En consecuencia, el recorrido será un helicoide pues tendrá una velocidad constante en la dirección de $\vec{B}$ (dirección x) y una fuerza perpendicular a la velocidad en el plano perpendicular a $\vec{B}$. El radio del helicoide estará dado por $R = \frac{mv_{\perp}}{qB}$, la

frecuencia por $\omega = \frac{qB}{m}$ y el paso del helicoide (camino recorrido a lo largo del eje x durante un período) por

$$h = v_{0x} T = v_{0x} \frac{1}{f} = \frac{2\pi v_{0x}}{\omega} = \frac{2\pi m v_{0x}}{qB}$$

6.3. Fuerza magnética sobre un conductor que transporta corriente

Si un campo magnético ejerce una fuerza sobre una carga en movimiento, no es de sorprender que también ejerza una fuerza sobre un conductor que transporta corriente, ya que la corriente es un conjunto de cargas en movimiento. Por el principio de superposición, la fuerza sobre un conductor que transporta corriente I será la suma de todas esas fuerzas. Como, en promedio, todos los portadores de carga “avanzan” en una dirección con velocidad $\vec{v}_a$ se tiene que

$$\vec{F}_m = \sum_{\substack{\text{todas las} \\ \text{cargas en} \\ \text{movimiento}}} q_i \vec{v}_a \times \vec{B}_{\text{externo}} = N q \vec{v}_a \times \vec{B}_{\text{externo}}$$

Recordemos que habíamos definido a la corriente como la carga neta que atraviesa un área A en la unidad de tiempo, es decir

$$I = \frac{dQ}{dt} = nq v_a A$$

donde n era el número de portadores por unidad de volumen y A la sección del cable.

Entonces

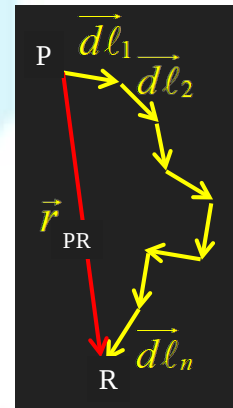
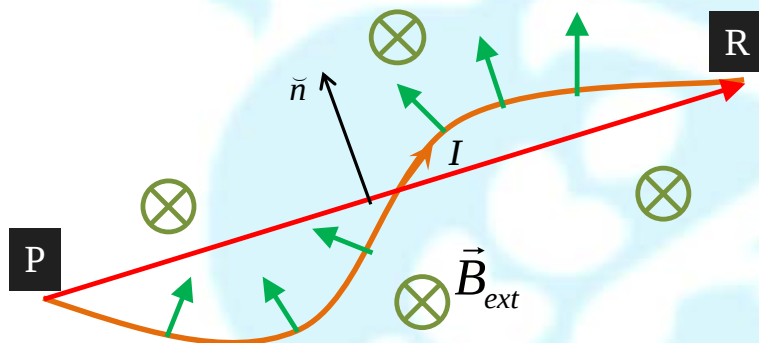
$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{N}{AL} q v_a A = \frac{N}{L} q v_a$$

Reemplazando resulta

$$\vec{F}_m = N q \vec{v}_a \times \vec{B}_{\text{externo}} = N q v_a \frac{\vec{v}_a}{v_a} \times \vec{B}_{\text{externo}} = I L \frac{\vec{v}_a}{v_a} \times \vec{B}_{\text{externo}}$$

Observen que esto es válido para un segmento recto en un campo externo uniforme. Si tuviéramos un conductor de forma arbitraria, cada carga tendría una velocidad en distinta dirección, i.e.

$$\vec{F}_m = \int_A^B dq \vec{v}_a(q) \times \vec{B}_{\text{ext}} = \int_A^B I d\vec{l} \times \vec{B}_{\text{ext}}$$



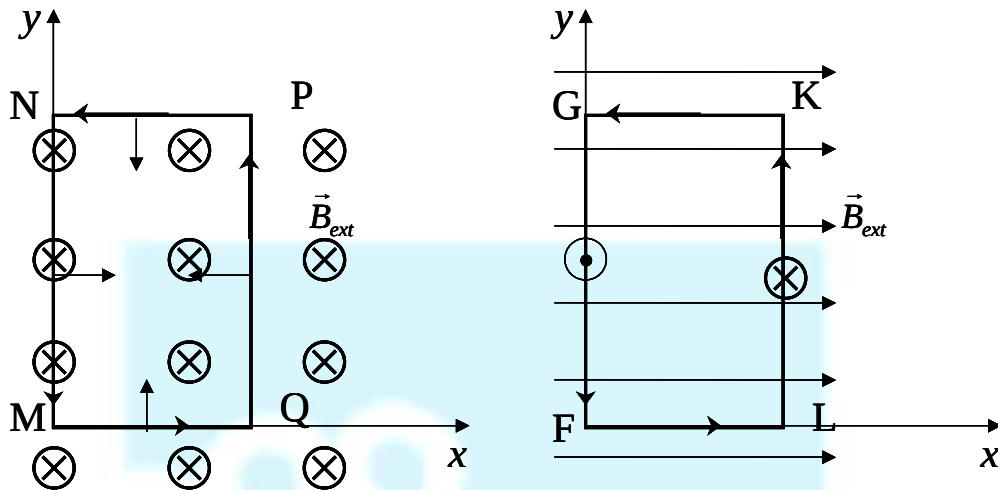
Supongamos un campo magnético uniforme y perpendicular a la trayectoria de los portadores de carga y que la corriente es la misma en todos lados (¿puede ser distinta?). En ese caso

$$\vec{F}_m = \int_P^R I d\vec{l} \times \vec{B}_{\text{ext}} = I \int_P^R d\vec{l} \times \vec{B}_{\text{ext}} = I \overline{PR} B_{\text{ext}} \vec{n}$$

Es decir, la fuerza magnética ejercida sobre el alambre **cuando el campo magnético es uniforme**, es igual a la ejercida sobre un alambre recto con los mismos extremos. Esto lleva a que la fuerza sobre una espira cerrada es **nula cuando el campo magnético es uniforme**.

6.4. Torque sobre una espira rectangular con corriente en un campo magnético uniforme. Momento dipolar magnético.

Supongamos que tenemos una espira rígida de lados a y b y un campo magnético externo uniforme.



En la figura de la izquierda, las fuerzas están sobre el plano de la espira siendo

$$\vec{F}_{NM} = -\vec{F}_{PQ} \quad \text{y} \quad \vec{F}_{NP} = -\vec{F}_{MQ}$$

En consecuencia, si la espira de la izquierda es rígida, no se trasladará por efecto del campo magnético externo.

En la figura de la derecha, en cambio, las fuerzas corresponden a

$$\vec{F}_{FG} = -\vec{F}_{KL} \quad \text{y} \quad \vec{F}_{FL} = \vec{F}_{GK} = 0 \quad \text{siendo} \quad \vec{F}_{FG} = I \vec{FG} \times \vec{B}_{ext} \quad \hat{z}$$

El torque, por lo tanto no depende del punto y

$$\vec{\mathcal{T}} = \vec{r} \times \vec{F} = abI\vec{B}_{ext} \quad \hat{y}$$

Si se logra que gire por el punto medio del lado

$$\vec{\mathcal{T}} = \vec{r} \times \vec{F} = abI\vec{B}_{ext} \sin \vartheta \quad \hat{y}$$

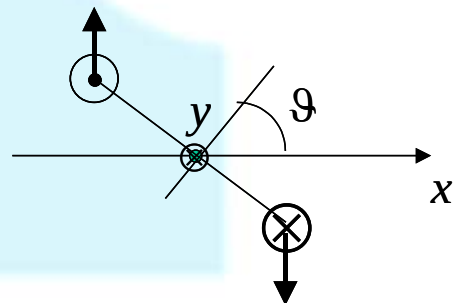
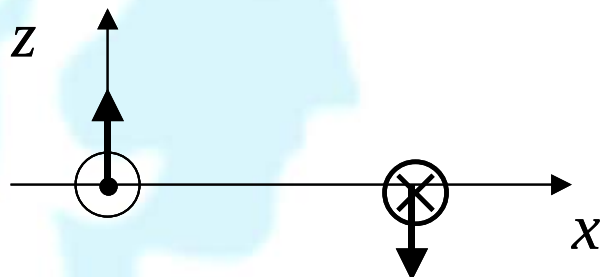
Es decir, se puede escribir como el producto vectorial entre el área de la espira y el campo externo (por I). Así, el torque sobre la espira resulta

$$\vec{\mathcal{T}} = \vec{r} \times \vec{F} = I \vec{A} \times \vec{B}_{ext} \quad \text{donde} \quad \vec{A} \equiv A\hat{n}$$

A la cantidad $I\vec{A} \equiv \vec{m}$ se la denomina momento dipolar magnético. **Recordar** que el momento dipolar eléctrico $\vec{p} = q\vec{d}$ hacía que

$$\vec{\mathcal{T}} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{p} \times \vec{E}_{ext} \quad \text{y el dipolo tendiera a alinearse}$$

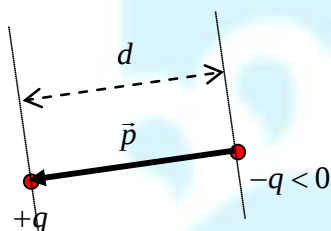
con el campo eléctrico. En este caso, el dipolo magnético tiende a alinearse con el campo magnético. Pero OJO!!! El momento dipolar eléctrico tiene la dirección de la recta que una las



cargas, mientras que el momento dipolar magnético tiene la dirección perpendicular al área determinada por los cables (tiene la del diferencial de área).

El galvanómetro de D'Arsonval, fabricado por un médico/físico francés en 1882, es un instrumento que usa esa propiedad. Es un instrumento formado por un imán permanente y, dentro del imán, se coloca una bobina móvil unida solidariamente a una aguja. Cuando pasa

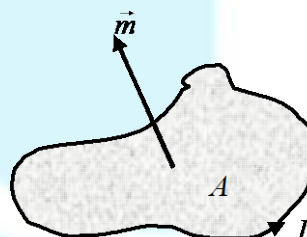
Momento dipolar eléctrico $\vec{p}$



El sentido es desde la carga negativa a la positiva

$$\vec{\mathcal{T}} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{p} \times \vec{E}_{ext}$$

Momento dipolar magnético $\vec{m}$



El sentido está dado por la normal a la superficie (acorde con la corriente)

$$\vec{\mathcal{T}} = \vec{r} \times \vec{F} = I \vec{A} \times \vec{B}_{ext}$$

corriente por la bobina, el campo magnético ejerce fuerza neta nula sobre ella, pero hay un torque que produce la rotación de la bobina con la aguja. El instrumento tiene resortes que cumplen doble función: transportar corriente y ejercer una fuerza restitutiva que permite el equilibrio. Relacionando la posición de la aguja con al corriente que pasa por la bobina, se establece una escala. Este tipo de instrumento “mecánico” ha sido reemplazado por otros electrónicos pero muestra el ingenio de la humanidad para hacer mucho con poco...

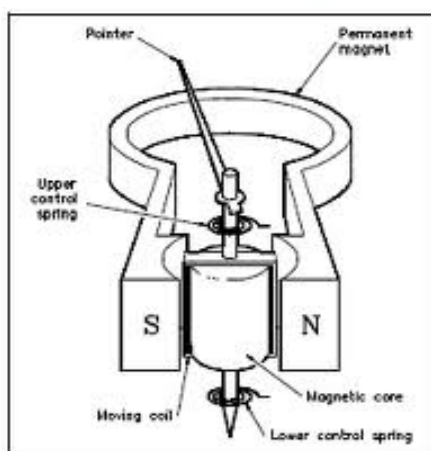
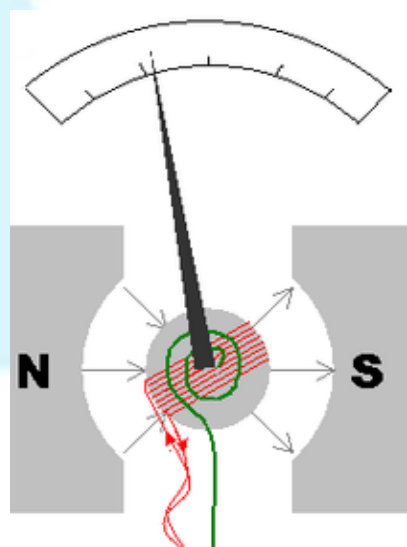


Figure 1 D'Arsonval Meter Movement

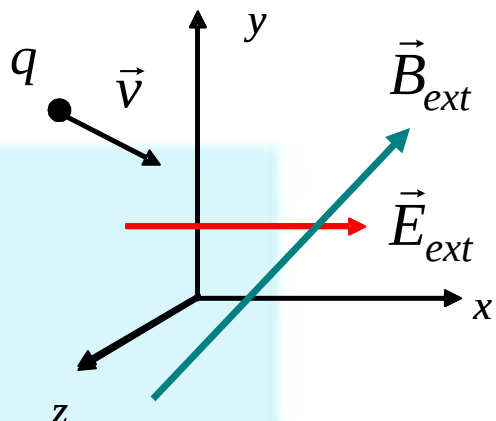


6.5. Fuerza de Lorentz

Cuando una carga en movimiento sufre el efecto de un campo eléctrico y un campo magnético, por el principio de superposición, la fuerza total estará dada por

$$\vec{F} = q\vec{E}_{ext} + q\vec{v} \times \vec{B}_{ext}$$

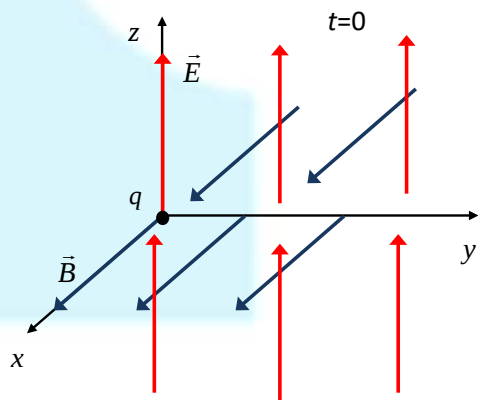
Un campo eléctrico uniforme produce una aceleración constante paralela al campo. En consecuencia, la carga describe un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado. En cambio, un campo magnético uniforme hace describir a una carga puntual un movimiento helicoidal (o como casos particulares, un movimiento circular o un movimiento rectilíneo con velocidad uniforme). El efecto de ambos campos sobre una partícula en movimiento, será la superposición de los efectos particulares. Por supuesto, para que la carga no se desvíe, la fuerza total debe ser nula.



Tema especial 1: Un tipo de movimiento muy particular se produce cuando una carga es sometida simultáneamente a un campo eléctrico y a un campo magnético, uniformes y perpendiculares entre sí. Supongamos que establecemos un sistema de coordenadas tal que el campo eléctrico tiene dirección z y el magnético tiene dirección x. Se coloca una carga puntual positiva q en reposo en el origen de coordenadas. ¿Cómo se moverá?

Si no existiera el campo magnético, la carga seguiría acelerándose y moviéndose en la dirección z. Si no existiera el campo eléctrico, la carga no sufriría ninguna fuerza y permanecería en el origen. Pero existen los dos campos simultáneamente.

En el instante inicial, como la partícula está en reposo, no sufrirá el efecto del campo magnético. Pero sí la del campo eléctrico, el que la acelerará en $t=0$ en la dirección z. Esto provocará una fuerza magnética en la dirección y que indicaría el comienzo de un movimiento circular en el plano yz si la velocidad fuera constante. Pero, como el campo eléctrico la acelera, la velocidad en



la dirección z aumenta mientras que el campo magnético tiende a aumentar la fuerza sobre ella hasta que la fuerza magnética es mayor que la eléctrica. En ese momento, la partícula

comienza a volver hacia el eje y , siendo su velocidad de sentido opuesto a la que le produce el campo eléctrico. Es decir, va disminuyendo su velocidad. En un momento la velocidad se anula (cuando la carga llega al eje y) y todo comienza de nuevo.

¿Cómo resolverlo analíticamente? Como no hay fuerza en la dirección x , la forma más general de la velocidad de la carga será en todo momento

$$\vec{v} = v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z$$

la fuerza magnética sobre q corresponderá a

$$\vec{F}_m = q \vec{v} \times \vec{B} = qB(v_z \vec{e}_y - v_y \vec{e}_z)$$

y la fuerza eléctrica a

$$\vec{F}_e = q \vec{E} = qE \vec{e}_z$$

En consecuencia, la fuerza de Lorentz resulta

$$\vec{F} = qB(v_z \vec{e}_y - v_y \vec{e}_z) + qE \vec{e}_z = qBv_z \vec{e}_y + q(E - Bv_y) \vec{e}_z = m\vec{a} = m \left(\frac{dv_y}{dt} \vec{e}_y + \frac{dv_z}{dt} \vec{e}_z \right)$$

Si bien no es difícil de resolver, vamos a proponer la solución y ustedes verificarán que es LA solución.

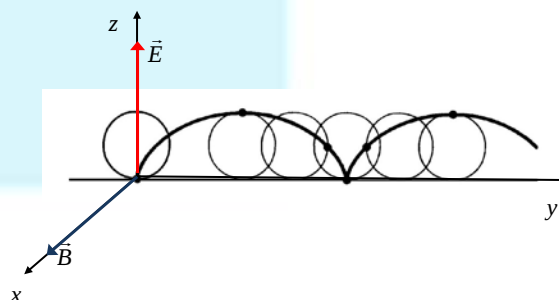
$$y(t) = \frac{E}{\omega B}(\omega t - \sin \omega t) \quad z(t) = \frac{E}{\omega B}(1 - \cos \omega t)$$

donde $\omega \equiv \frac{q}{m} B$ y corresponde a la “frecuencia del ciclotrón”. Además cumple con las

condiciones iniciales, es decir, que la velocidad sea nula en $t=0$. Llamemos $R \equiv \frac{\omega B}{E}$.

Eliminando senos y cosenos resulta que $(y - R\omega t)^2 + (z - R)^2 = R^2$. Esto es la ecuación de una circunferencia bastante especial de radio R : su centro está ubicado en el punto $(0, R\omega t, R)$. Y este centro va cambiando con el tiempo: va viajando en la dirección y con una velocidad ωR . Este tipo de curva se llama **cicloide**^{iv}.

Fin tema especial 1



6.6. Equipos que basan su funcionamiento en la Fuerza de Lorentz

Hay varios equipos de laboratorio que usan una combinación de campos eléctricos y magnéticos. Entre ellos, podemos destacar

- Tubo de rayos catódicos^v: la base de los viejos televisores y monitores (los de vidrio).
- Ciclotrón^{vi}: primer acelerador moderno de partículas ionizadas.
- Selector de velocidades: para filtrar determinadas partículas cargadas; usado en microscopios electrónicos y espectrómetros^{vii}
- Espectrómetro de masas^{viii}: usado en química analítica para determinar la cantidad y tipo de materiales presentes

6.7. Efecto Hall

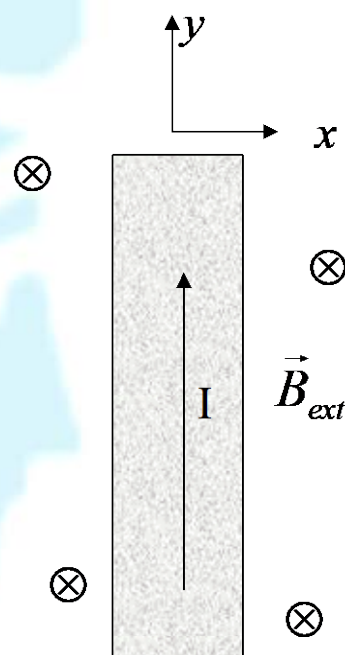
Esta experiencia es históricamente muy importante porque de ella se deduce que los portadores de carga en metales son los electrones.

Se tiene una banda metálica de longitud L a la cual se le aplica una diferencia de potencial, de modo que pasa una corriente por ella. Ésta se coloca en un campo magnético uniforme perpendicular a la banda.

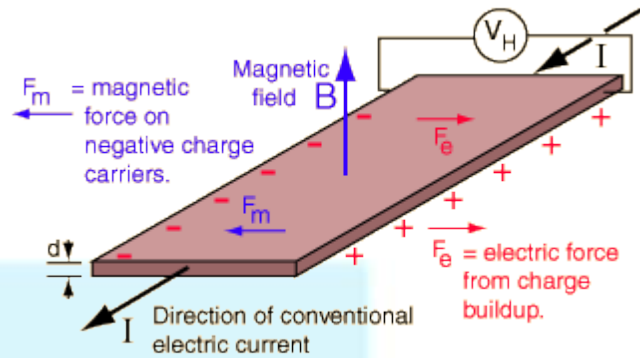
La fuerza total sobre la banda es

$$\vec{F} = IL\vec{y} \times B(-\vec{z}) = -ILB\vec{x}$$

Si aplicáramos la expresión de la fuerza magnética $\vec{F}_m = q \vec{v} \times \vec{B}$, la fuerza sobre la banda nos daría en el sentido $-\vec{x}$, tanto si consideramos portadores positivos o electrones. Es decir, si los portadores son positivos (como es nuestra corriente convencional) sufrirán una fuerza hacia la izquierda. Y si fueran los negativos, como la velocidad tendría sentido opuesto, también se irían hacia la izquierda. Es decir, sean cuales fueren los portadores, se acumularían a la izquierda. Esto no puede seguir indefinidamente. Llega un momento que habrá una fuerza eléctrica de repulsión que hará terminar la migración. Se establece un equilibrio y habrá un campo eléctrico y una diferencia de potencial eléctrico. Las cargas se mueven entonces hacia arriba como si no hubiera campo magnético, pero acumuladas en los laterales. El signo de la diferencia de potencial determina el signo de los portadores de carga. Si los portadores son negativos, éstos se acumularían sobre el lado izquierdo y el extremo izquierdo estaría a menor potencial que el derecho. Y viceversa. En 1879 Hall hizo



las primeras mediciones determinando que los electrones eran los portadores de carga de los conductores^{ix}.



Ejemplo: $B=2$ T, ancho= $D=1$ cm, $V_{\text{Hall}}=7.2 \mu\text{V}$, d =espesor, L =largo

$$Eq = qv_a B, \quad ED = V \frac{V}{D} = v_a B v_a = 3.6 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$$

$$\text{Como } I = \frac{dQ}{dt} = \frac{N}{D \cdot d \cdot L} qv_a Dd = \frac{N}{L} qv_a \Rightarrow v_a = I \frac{L}{nDdL} = I \frac{1}{nqD \cdot d}$$

$$\frac{V}{D} = v_a B \Rightarrow V = D \cdot BI \frac{1}{nqDd} \Rightarrow V = \frac{IB}{ned}$$

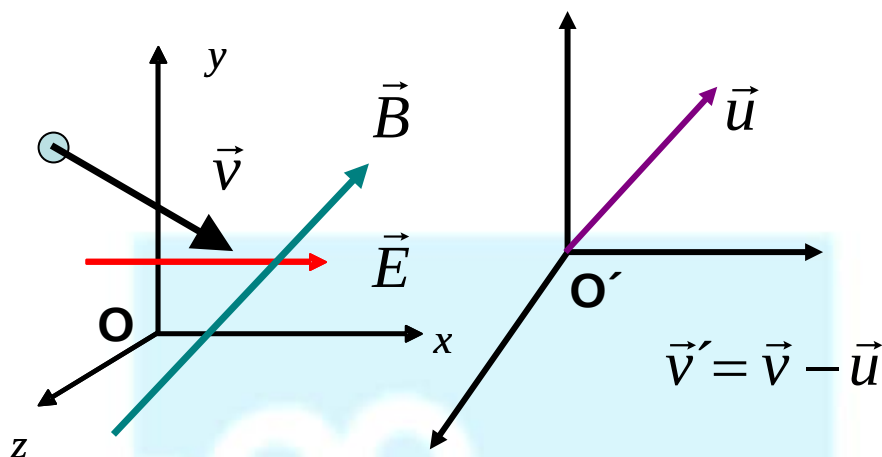
Hay medidores de campo magnético a partir de este efecto. Por ejemplo, si se pone una delgada película de cobre (cuanto más delgada es, más alto será V). El campo terrestre está entre 30 y 60 μT . Un mol de Cu corresponde a 63,5 g/mol y la densidad es de 9g/cm³. En 1 mol hay N_A electrones libres (1 por átomo, aproximadamente). Entonces $n = \rho N_A / M = 8.5 \cdot 10^{28}$ electrones/m³. Y si $D=10 \mu\text{m}$ resulta $V=10^{-8}\text{V}$

6.8. Tema especial 2. Relación entre campos magnéticos y eléctricos desde marcos de referencia en movimiento

Estamos en condiciones de resolver el problema de la consistencia entre las leyes de la electricidad y el magnetismo con el principio galileano de relatividad (o invariancia). Las leyes de movimiento deben ser iguales en todos los marcos inerciales. Así, un observador O y otro O' (que se mueve con velocidad $\vec{u}$ constante respecto de O) debería expresar las leyes de igual manera. Entre ellas, la segunda ley de Newton

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \text{siendo } \vec{p} = m\vec{v} \text{ para el observador O que mide una velocidad } \vec{v} \text{ para la}$$

partícula y también para el sistema O' que ve que la partícula se mueve con velocidad $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}$.



Para el observador O la fuerza de Lorentz está dada por $\vec{F} = q[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}]$

Y para el observador O' $\vec{F} = q[\vec{E}' + \vec{v}' \times \vec{B}'] = q[\vec{E}' + (\vec{v} - \vec{u}) \times \vec{B}']$

Es decir, damos la posibilidad de que los campos vistos por O sean distintos que los vistos por O'. Es decir,

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} \quad \vec{B}' = \vec{B}$$

Estas relaciones resultan correctas cuando las velocidades son chicas comparadas con la de la luz. Es decir, que de un marco inercial de referencia a otro, los campos magnético y eléctrico se mezclan. Volveremos a ver este ejemplo cuando estudiemos la Ley de Faraday.

A partir de esto podemos inferir que debe existir una relación entre campos magnéticos y eléctricos. Esto lo veremos más adelante.

Fin tema especial 2

ⁱ<http://libraries.mit.edu/collections/vail-collection/topics/masterworks/how-it-all-began/>

ⁱⁱhttp://es.wikipedia.org/wiki/Peter_Peregrinus_de_Maricourt

ⁱⁱⁱwww.youtube.com/watch?v=fwiKRis145E

^{iv}http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cycloid_animated.gif

^v<http://www.crtsite.com/page3.html>

www.youtube.com/watch?v=4QAz6fe8rE

^{vi}<http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/magnetic/cyclot.html>

EarlyDevelopmentofParticleAccelerators: <http://dx.doi.org/10.1119/1.1934945>

^{vii}<http://dx.doi.org/10.1590/S0103-97331999000300002>

^{viii}http://en.wikipedia.org/wiki/Mass_spectrometry

www.youtube.com/watch?v=EzvQzImBug8

^{ix}<http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/magnetic/hall.html>

Capítulo 7

Fuentes de Campo Magnetostático

7.1.	<u>Introducción</u>	7-2
7.2	<u>Ley de Biot y Savart</u>	7-4
7.3	<u>Una forma alternativa para llegar a la Ley de Biot y Savart (opcional)</u>	7-6
7.4	<u>Campos magnéticos generados por distribuciones lineales de corrientes</u>	7-9
7.4.1	<u>Ejemplo 1: Cable recto de longitud L por el que circula una corriente I</u>	7-9
7.4.2	<u>Ejemplo 2: Cable curvo (segmento circular) de longitud L por el que circula una corriente I</u>	7-14
7.5	<u>Campos magnéticos generados por distribuciones superficiales y volumétricas de corrientes</u>	7-16
7.5.1	<u>Ejemplo 3: Distribución cilíndrica volumétrica de corriente uniforme</u>	7-18
7.5.2	<u>Ejemplo 4: Distribución cilíndrica superficial de corriente uniforme en la dirección del eje</u>	7-19
7.6	<u>Campos magnéticos generados por distribuciones muy usadas y útiles</u>	7-21
7.6.1	<u>Solenoides</u>	7-21
7.6.2	<u>Toroide</u>	7-24
7.7	<u>Buscando una manera más simple de determinar campos magnetostáticos</u>	7-25
7.8	<u>La Ley de Ampere válida para todos los campos magnetostáticos en el vacío</u>	7-28
7.9	<u>Cálculo de campos magnetostáticos a partir de la Ley de Ampere</u>	7-31
7.9.1	<u>Ejemplo 5: Distribución volumétrica de corriente uniforme de forma cilíndrica infinita</u>	7-32
7.9.2	<u>Ejemplo 6: Toroide de N espiras densamente arrolladas y sección rectangular</u>	7-34
7.10	<u>Forma diferencial de la Ley de Ampere en vacío para corrientes constantes</u>	7-37

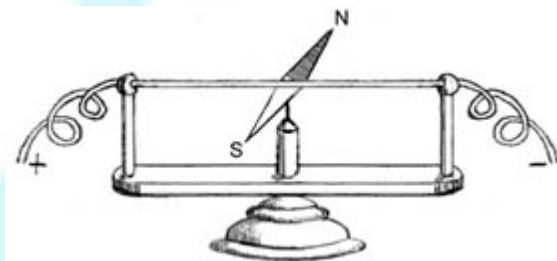
7.1. Introducción

En el Capítulo 6 analizamos la fuerza magnética ejercida sobre una carga que se mueve en un campo magnético externo $\vec{B}_{ext}$. Para completar las descripciones trataremos de dilucidar qué es lo que provoca ese $\vec{B}_{ext}$.

Hagamos una analogía: un campo eléctrico externo $\vec{E}_{ext}$ ejerce una fuerza sobre una carga q_1 (se me ocurre llamarla así) quieta y, por otra parte, otra carga quieta, llamada q , crea un campo eléctrico $\vec{E}$. Sabemos que un campo magnético $\vec{B}_{ext}$ ejerce una fuerza sobre una carga en movimiento. Entonces nos preguntamos si una carga en movimiento crea un campo $\vec{B}$ (todo por buscar simetrías en la Naturaleza... muy griego).

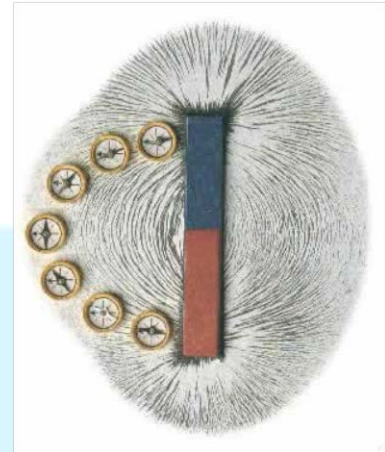
Una Carga estática	→	Crea un Campo electrostático
Un Campo electrostático	→	Ejerce fuerza sobre una carga
Un Campo magnético	→	Ejerce fuerza sobre una carga que se mueve
Una Carga que se mueve	→	¿¿Crea un Campo magnético??

En 1820 Oersted era profesor de Física de la Universidad de Copenhague. Se sospechaba que existía una relación entre la electricidad y el galvanismo (porque ambas producían sacudones). Él tenía también una idea vaga acerca de alguna relación oculta entre el magnetismo y la electricidad. Llevaba a cabo experiencias donde colocaba una brújula cerca de cables por los que circulaba corriente.

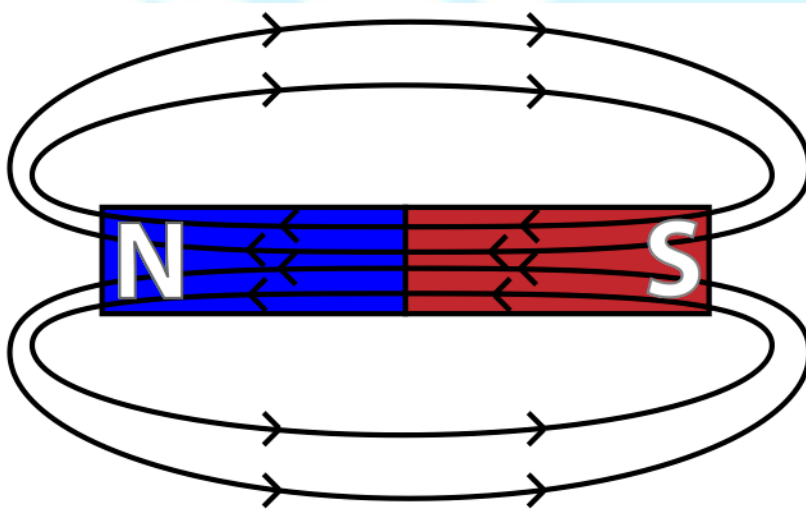


Cuando decidió poner el cable paralelo a la brújula, ésta sorprendentemente giró y se ubicó perpendicular al cable. Y si invertía la corriente galvánica, se invertía el sentido de giro. No entendía qué pasaba (ni se lo dijo a sus alumnos, según cuentan). Es decir, la brújula se movía como en presencia de un poderoso imán.

Enseguida, varios científicos se pusieron a hacer experiencias similares y determinaron que la fuerza magnética sufrida por la brújula (cerca de un cable recto que conducía una corriente constante) era tal que hacía que la aguja se ubicaba siempre perpendicular al cable. Y el cable también atraía limaduras de hierro e imantaba barras de hierro, como los conocidos imanes. Se pudo pensar entonces que la corriente, o sea cargas en movimiento, generaba algún tipo de campo magnético.



Antes de adentrarnos en el tema de cuánto campo magnético genera una dada corriente, queremos comentar algo relativo a una propiedad básica del campo magnético. La figura inmediata anterior muestra un imán cuyos extremos han sido pintados rojo y azul. Para visualizar las líneas de campo se ha espolvoreado polvo de hierro y colocado algunas brújulas para más ayuda. Es fácil visualizar las líneas de campo; podríamos trazarlas desde el lado azul (tomado como punto de arranque) hacia el rojo (tomado como punto de destino). Un experimento más complicado muestra que dentro de la barra del imán las líneas de campo apuntan desde el rojo hacia el azul, formando en total una línea cerrada (ver figura siguiente)



Las líneas de campo de $\vec{B}$ son cerradas sobre sí mismas. No tienen punto de comienzo ni de fin. No hay fuentes ni sumideros. Un campo vectorial que carece de fuentes y sumideros se llama solenoidal (un nombre). Al carecer de fuentes y sumideros el flujo de dicho campo a través de cualquier superficie cerrada debe ser nulo:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

O por el teorema de la divergencia:

$$\text{div}(\vec{B}) = 0$$

Esta es una diferencia con respecto al campo eléctrico que tiene fuentes (las cargas positivas) y sumideros (las cargas negativas).

Por otra parte, si miramos la figura anterior y nos preguntamos por la circulación del campo magnético a lo largo de una curva cerrada, encontramos que podemos obtener un valor positivo si vamos a favor o negativo si vamos en contra, pero no cero:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} \neq 0$$

O por el teorema del rotor:

$$\text{rot}(\vec{B}) \neq 0$$

También diferente del campo eléctrico.

7.2. Ley de Biot y Savart

Jean-Baptiste Biot y Félix Savart y muchos más hicieron experiencias cuantitativas para determinar la fuerza que una corriente (generada gracias a las pilas de Volta) ejercía sobre un imán cercano. Alrededor de 1820, de los resultados experimentales, Biot y Savart llegaron a una expresión matemática que da el valor de la intensidad del campo magnético $\vec{B}$ en un punto $\vec{r}$ del espacio cuando una corriente constante fluye por un alambre conductor. Es decir, una corriente eléctrica, fluyendo por un alambre conductor, o cargas en movimiento, produce un campo magnético que decrece inversamente con la distancia al conductor. También podemos pensarlo como la creación de una zona del espacio (alrededor del conductor) donde se pueden detectar fuerzas magnéticas.

Que la corriente no varíe en el tiempo (decimos que es constante) significa que hay un flujo continuo desde siempre y para siempre. En realidad, tal corriente no existe en realidad (como tampoco existe una carga quieta de verdad).

Cuando considerábamos que teníamos cargas en reposo, hablábamos de **Electrostática**. Ahora, que consideramos corrientes que no fluctúan ni interrumpen su devenir, hablaremos de **Magnetostática**. Por supuesto que no existen tales cosas. “En ese sentido tanto la Electrostática como la Magnetostática describen mundos artificiales que solo existen en los libros de texto. Sin embargo, ellas representan *aproximaciones* adecuadas mientras se cumpla que las fluctuaciones reales sean razonablemente lentas; de hecho, para la

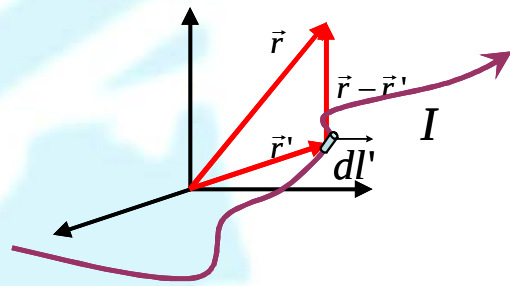
mayoría de los propósitos la Magnetostática se aplica muy bien a las corrientes hogareñas, que varían 50 veces por segundo”¹

Cuando una corriente constante fluye por un alambre conductor, su valor I debe ser el mismo a lo largo de él. Si no fuera así, la carga se estaría “apilando” en algún lugar, y no sería entonces una corriente constante. Es decir, si tomáramos un volumen y calculáramos la $\vec{\nabla} \cdot \vec{J}$, no nos daría cero. En ese caso, la carga en un punto estaría variando con el tiempo. I.e. $\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$.

Resumiendo, cuando estamos en Magnetostática, debe ser necesariamente $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$. El campo magnético $\vec{B}(\vec{r})$ generado por un alambre conductor por el que circula una corriente uniforme I se podrá calcular por la Ley de Biot-Savart

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (7.1)$$

donde $d\vec{l}'$ es el vector tangente a la línea de flujo de cargas, $\vec{r}$ determina el lugar donde se quiere calcular el campo magnético y $\vec{r}'$ indica la posición de las cargas que se mueven. También podríamos pensar que $d\vec{l}'$ es un elemento diferencial de longitud a lo largo del alambre, $\vec{r}$ la posición de los puntos “campo” y $\vec{r}'$ la de los puntos “fuente”. La constante μ_0 se denomina **permeabilidad** del vacío y su valor **en el Sistema Internacional de Unidades** es $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2}$. Que las unidades sean N/A^2 provienen de cuáles son las unidades de campo magnético.²



La Ley de Biot-Savart cumple en Magnetostática mismo papel que la Ley de Coulomb cumple en Electroestática. Observemos que la dependencia $1/r^2$ es común a ambas.

¹ En otros países varía 60 veces por segundo.

² Como $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$, las unidades de campo magnético corresponden a $[B] = T = [\mu_0] C \frac{m/s}{m^2}$. En consecuencia

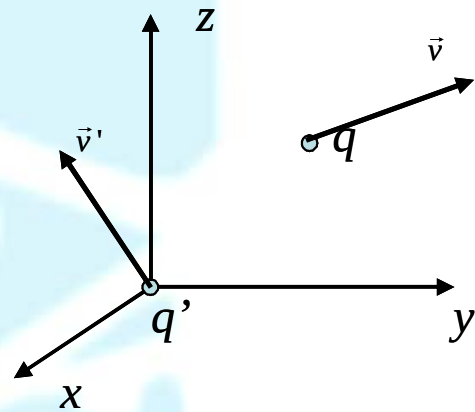
$$[\mu_0] = \frac{Tms}{C} = \frac{Ns}{Cm} \frac{ms}{C} = \frac{Ns^2}{C^2} = \frac{N}{A^2}.$$

7.3. Tema especial 1. Una forma alternativa para llegar a la Ley de Biot y Savart

Las experiencias realizadas a través de muchos años manifestaron que solamente una carga generaba un $\vec{B}$ cuando ella estaba en movimiento.

¿Cómo averiguar el $\vec{B}$ que produce una partícula con carga q que se mueve con velocidad $\vec{v}$?

Para eso podemos hacer la siguiente experiencia pensada: ponemos una carga q' en el origen de coordenadas que tenga una velocidad $\vec{v}'$ en el instante t_0 . En ese mismo momento medimos la fuerza que aparece en otra carga q que se mueve con $\vec{v}$ y que está en la posición $\vec{r}$. Es decir, el campo magnético externo sería el producido por q' en movimiento. Para seguir este razonamiento debemos suponer que las cargas se mueven con **velocidades muy bajas respecto de la velocidad de la luz**. Considerando que la fuerza ejercida sobre la carga q en movimiento y



ubicada en la posición $\vec{r}$ está dada por la fuerza de Lorentz $\vec{F}_m(\vec{r}) = q\vec{v} \times \vec{B}(\vec{r})$ los resultados obtenidos muestran que el campo magnético generado por la carga q' en ese instante debe valer

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q' \vec{v}' \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad (7.29)$$

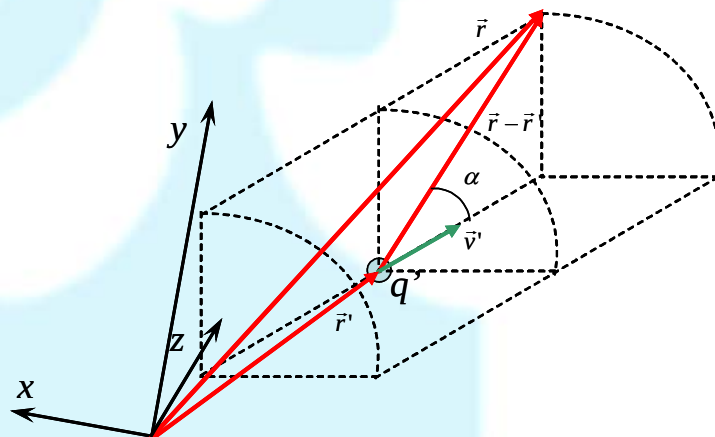
Si la carga q' estuviera en la posición $\vec{r}'$, el resultado sería

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q' \vec{v}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (7.3)$$

Es decir, los resultados experimentales llevan a que

$$\vec{F}_m(\vec{r}) = q\vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} q\vec{v} \times \left(\frac{q' \vec{v}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) \quad (7.4)$$

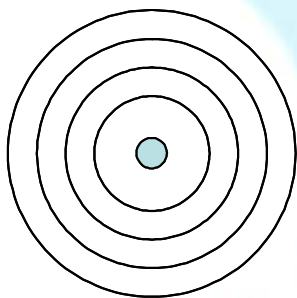
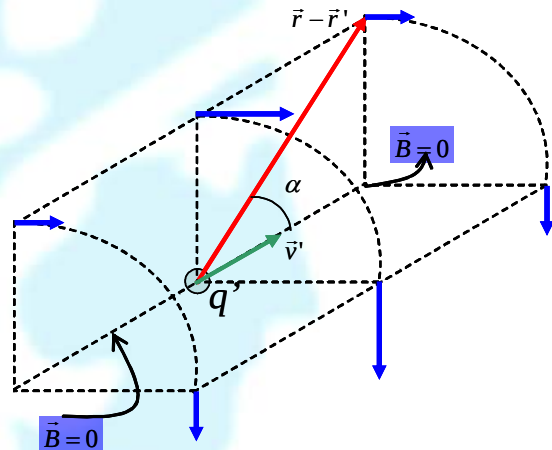
Analicemos cómo se llega a este resultado.



- 1) Si $(\vec{r} - \vec{r}') // \vec{v}'$, es decir, si en el instante t las cargas q y q' determinan una recta paralela a la velocidad $\vec{v}'$, la fuerza $\vec{F}_m(\vec{r})$ sobre la carga q es nula, independientemente de su velocidad.
- 2) Si las velocidades de las cargas son paralelas entre sí y perpendiculares a la recta que une a ambas cargas, la fuerza $\vec{F}_m(\vec{r})$ sobre la carga q es máxima.
- 3) La $\vec{F}_m(\vec{r})$ depende de $|\vec{r} - \vec{r}'|$ y es inversamente proporcional al cuadrado del mismo
- 4) La $\vec{F}_m(\vec{r})$ depende del ángulo que forman $(\vec{r} - \vec{r}')$ y $\vec{v}'$, y también del ángulo entre el plano generado por $(\vec{r} - \vec{r}')$ y $\vec{v}'$ y la velocidad $\vec{v}$.

De esta manera las características del campo magnético generado por la carga q' que se mueve con velocidad $\vec{v}'$ resultan

- 1) Si $\vec{r} - \vec{r}' // \vec{v}' \Rightarrow \vec{B} = 0$
- 2) $|\vec{B}|$ depende de $|\vec{r} - \vec{r}'|^{-2}$
- 3) $\vec{B} \perp \vec{v}'$ y $\vec{B} \perp (\vec{r} - \vec{r}')$
- 4) $|\vec{B}| = f(\alpha) = g(\sin \alpha)$

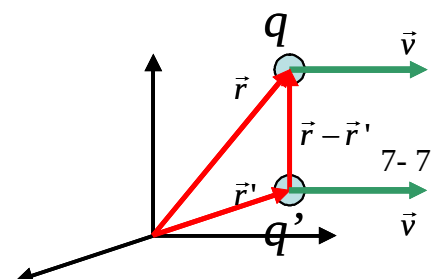


Así, en un instante t las líneas de campo son circunferencias centradas en la carga q' .

Vamos a comparar las fuerzas eléctrica y magnética entre dos cargas. Si tenemos una carga q' en el vacío ubicada en $\vec{r}'$ y que se mueve con velocidad $\vec{v}'$ generará un campo eléctrico y otro magnético en el punto $\vec{r}$, siendo

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q' \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q' \vec{v}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (7.5)$$

y las fuerzas que sufrirá una carga q que se mueve con $\vec{v}$ (medida en el mismo sistema de referencia) en el punto $\vec{r}$ serán



$$\vec{F}_e(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} qq' \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (7.6)$$

$$\vec{F}_m(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} qq' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \vec{v} \times (\vec{v}' \times (\vec{r} - \vec{r}')) \quad (7.7)$$

Para tener una idea de órdenes de magnitud, consideremos dos cargas que se mueven con la misma velocidad. La fuerza magnética sobre la carga q (si ambas son positivas) será de atracción y su módulo estará dado por

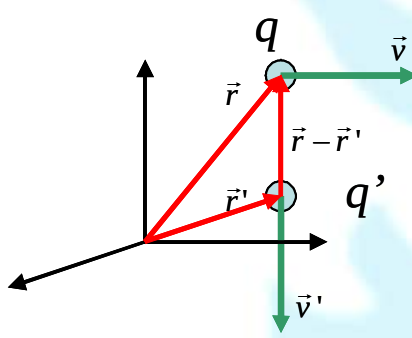
$$\vec{F}_m(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} qq' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \vec{v} \times (\vec{v} \times (\vec{r} - \vec{r}')) \Rightarrow |\vec{F}_m(\vec{r})| = \frac{\mu_0}{4\pi} q'q \frac{v^2}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \quad (7.8)$$

mientras que la fuerza eléctrica (de repulsión) tendrá módulo $|\vec{F}_e(\vec{r})| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} qq' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}$

En consecuencia, la relación entre sus valores resulta

$$\frac{|\vec{F}_e|}{|\vec{F}_m|} = \frac{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} qq' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}}{\frac{\mu_0}{4\pi} q'q \frac{v^2}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0 v^2} \approx \frac{9 \times 10^{16} \text{ m}^2/\text{s}^2}{v^2} \gg 1 \quad (7.9)$$

Observación inquietante: Si tenemos dos cargas en movimiento como se indica en la figura y analizamos las fuerzas magnéticas de una sobre otra, tendremos



$$\begin{aligned} \vec{F}_{q' \rightarrow q} &= \frac{\mu_0}{4\pi} q\vec{v} \times \left(q' \vec{v}' \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) \\ \vec{F}_{q \rightarrow q'} &= \frac{\mu_0}{4\pi} q' \vec{v}' \times \left(q\vec{v} \times \frac{(\vec{r}' - \vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) \end{aligned}$$

Pero resulta que $\vec{v}' \parallel (\vec{r} - \vec{r}')$ con lo que $\vec{F}_{q' \rightarrow q} = 0$ y $\vec{F}_{q \rightarrow q'} \neq 0$.

Es decir, no se cumple el **principio de acción y reacción**. ¿Está esto en contradicción con la tercera Ley de Newton? La tercera Ley de Newton equivale a un principio más general que es la conservación de la cantidad de movimiento. Cuando hay campos magnéticos y eléctricos, estos transportan cantidad de movimiento (lo verán en Electromagnetismo). Y así se salva este aparente fracaso de la tercera Ley de Newton.

Fin tema especial 1

7.4. Campos magnéticos generados por distribuciones lineales de corrientes

Retomamos la 7.1

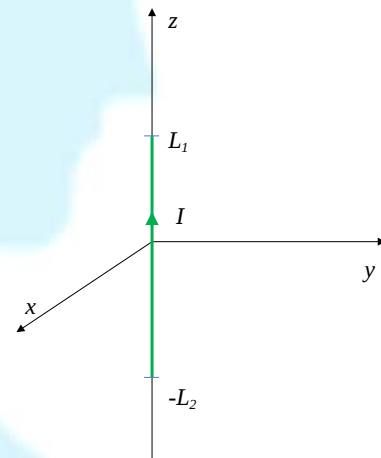
$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Resulta ahora un desafío calcular el campo magnético generado por una distribución lineal de corriente ya que debemos describir con mucho detalle qué representan los vectores $d\vec{l}'$ (cómo fluye la corriente), $\vec{r}'$ (dónde están los portadores de carga) y $\vec{r}$ (dónde se quiere calcular el campo magnético).

7.4.1 Ejemplo 1: Cable recto de longitud L por el que circula una corriente I

Vamos ahora a calcular el campo magnético generado por una porción recta de largo L de un circuito más complejo que puede tener una forma totalmente arbitraria.

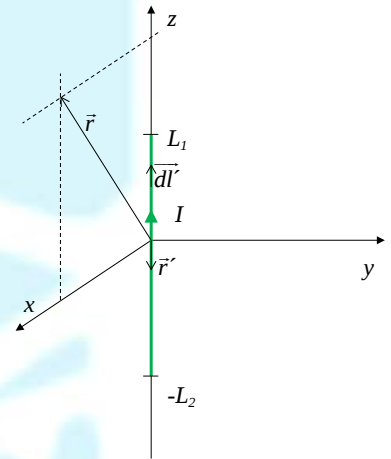
Lo primero que debemos hacer es dibujar nuestro objeto de estudio y un sistema de coordenadas adecuado con el fin que perseguimos. “Copiándonos” lo que hicimos en Electrostática para una distribución lineal de cargas, podemos ubicar a este trozo de conductor en el eje z de coordenadas (ya aprendimos que esta ubicación va a tener la propiedad de hacer que el sistema en estudio tenga simetría de revolución alrededor del eje z “de cilíndricas” y simplifica la generalización porque se puede calcular en el plano yz o xz y luego generalizar para cualquier punto $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z$). Pero hay que tener mucho cuidado: usar una terna derecha (lo que siempre elegimos para usar lo que sabemos de Álgebra). Podríamos haber usado siempre terna izquierda y operar de esa manera, pero la costumbre es usar la terna derecha). Para hacerlo en forma muy general, consideraremos que el conductor está ubicado entre L_1 y $-L_2$ de forma tal que $L_1 + L_2 = L$ y que la corriente tiene el sentido indicado en la figura. Vale la pena señalar que este ejemplo tiene un problema importante: en



$-L_2$ aparece de la nada una corriente que desaparece en L_1 . Es una contradicción respecto del principio de conservación de la carga; la carga no puede aparecer o desaparecer. Salvamos el problema pensando que hay algo antes de $-L_2$ y algo después de L_1 , pero que sólo estamos calculando el campo magnético generado por el tramo recto.

En la expresión $d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$ debemos identificar cada variable.

- 1) $d\vec{l}'$ indica la dirección en que se mueven de los portadores de carga, i.e. $d\vec{l}' = dz' \vec{e}_z$ ³. El sentido de la corriente (que coincide con la velocidad de arrastre) va a estar especificado cuando establezcamos los límites de la integral.
- 2) $\vec{r}'$ indica dónde están los portadores de carga que generan el campo magnético. En este caso están ubicados sobre el eje z por lo que escribiremos $\vec{r}' = z' \vec{e}_z$. Por supuesto no son todos los puntos sobre el eje z sino solamente los que están entre $-L_2$ y L_1 .
- 3) $\vec{r}$ es el punto campo, es decir, el punto donde queremos determinar el campo. No es una variable de integración y podemos elegir, por ejemplo, que esté sobre el plano xz o sea, $\vec{r} = x \vec{e}_x + z \vec{e}_z$.



Entonces:

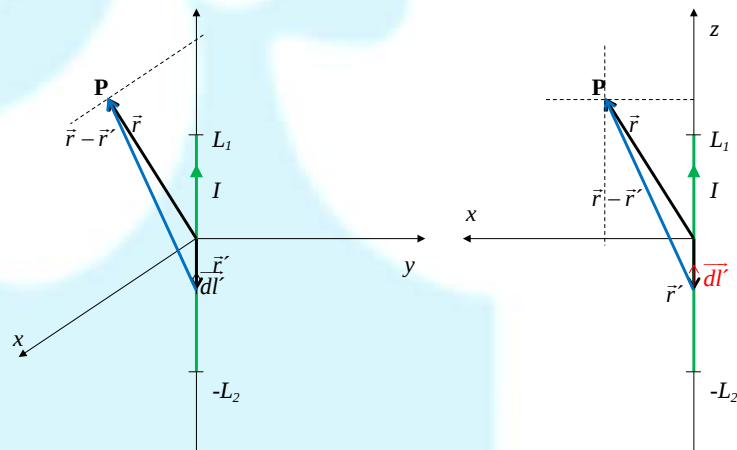
$$\vec{r} - \vec{r}' = x \vec{e}_x + (z - z') \vec{e}_z;$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{x^2 + (z - z')^2};$$

$$d\vec{l}' = dz' \vec{e}_z.$$

Primero vamos a tratar de deducir algunas características del campo magnético generado

sobre el plano xz . Como el dibujo tridimensional puede confundir por el tipo de “perspectiva” utilizada, también lo haremos bidimensional para que quede claro en qué plano están los



³ Recordar que los versores cartesianos están fijos en el espacio una vez que se estableció el sistema de coordenadas.

vectores involucrados. Cuando realicemos el producto vectorial $\overline{d\vec{l}}' \times (\vec{r} - \vec{r}')$, el vector resultante será saliente del papel. Es decir, el “diferencial de campo magnético” tendrá la dirección $\vec{y}$. Y así para cada uno de los $\overline{d\vec{l}}'$. El campo total será (por el principio de superposición) la suma de todos los “diferenciales de campo”, por lo que el campo resultante en el punto $\mathbf{P}$ ubicado en el plano xz , $\vec{B}(\mathbf{P})$, tendrá dirección $\vec{e}_y$.

Para calcular el producto vectorial analíticamente podemos hacerlo por el “método del determinante” o “a pedal” (propiedad distributiva). Usemos el método “a pedal” en este ejemplo:

$$\overline{d\vec{l}}' \times (\vec{r} - \vec{r}') = dz' \vec{e}_z \times [x \vec{e}_x + (z - z') \vec{e}_z] = x dz' \vec{e}_z \times \vec{e}_x + dz' (z - z') \vec{e}_z \times \vec{e}_z = x dz' \vec{e}_z \times \vec{e}_x = x dz' \vec{e}_y$$

Entonces,
$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \overline{d\vec{l}}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{x dz' \vec{e}_y}{[x^2 + (z - z')^2]^{3/2}}$$
 (¡dirección que era de

esperar!). La única variable de integración es z' (de ahí la importancia de distinguir entre puntos campo y fuente). La variable z' es la que varía entre $-L_2$ y L_1 si la corriente tiene el sentido de la figura y entre L_1 y $-L_2$ si va en sentido contrario. Por lo tanto, como ***I es la misma en todos los puntos*** y x y z corresponden a un punto cualquiera del plano xz , obtenemos

$$\vec{B}(x, 0, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} I x \int_{-L_2}^{L_1} \frac{dz' \vec{e}_y}{[x^2 + (z - z')^2]^{3/2}}$$

Tampoco el versor cartesiano depende del punto de integración, por lo que el campo magnético en el plano xz solamente tendrá componente y :

$$B_y(x, 0, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} I x \int_{-L_2}^{L_1} \frac{dz'}{[x^2 + (z - z')^2]^{3/2}}$$

Esta integral (de tabla) es del tipo $\int \frac{d\zeta}{[a^2 + \zeta^2]^{3/2}} = \frac{\zeta}{a^2 [a^2 + \zeta^2]^{1/2}}$ donde

$$\zeta \equiv z - z', \quad d\zeta \equiv -dz' \quad \text{y} \quad a^2 \equiv x^2$$

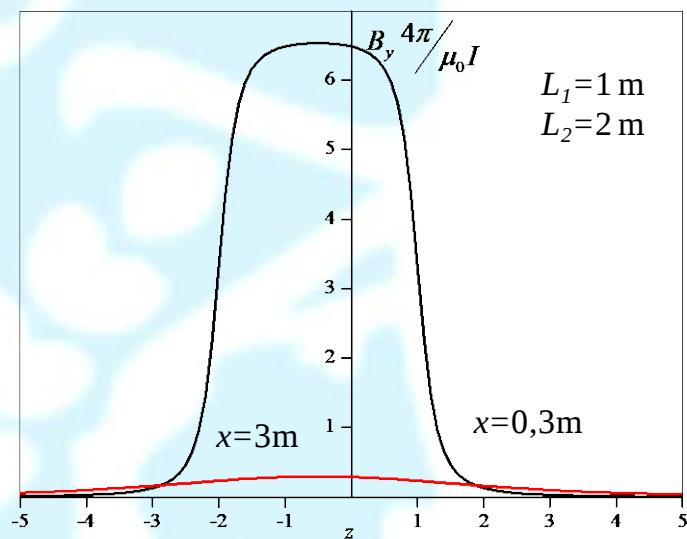
$$\int \frac{dz'}{[x^2 + (z - z')^2]^{3/2}} = \int \frac{-d\zeta}{[a^2 + \zeta^2]^{3/2}} = -\frac{\zeta}{a^2 [a^2 + \zeta^2]^{1/2}} = -\frac{(z - z')}{x^2 [x^2 + (z - z')^2]^{1/2}}$$

$$B_y(x, 0, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} I x \int_{-L_2}^{L_1} \frac{dz'}{[x^2 + (z - z')^2]^{3/2}} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I x \frac{(z - z')}{x^2 [x^2 + (z - z')^2]^{1/2}} \Bigg|_{-L_2}^{L_1} =$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{(z - z')}{x [x^2 + (z - z')^2]^{1/2}} \Bigg|_{-L_2}^{L_1} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{1}{x} \left[\frac{(z + L_2)}{[x^2 + (z + L_2)^2]^{1/2}} - \frac{(z - L_1)}{[x^2 + (z - L_1)^2]^{1/2}} \right]$$

Este resultado diverge en $x=0$ **pero** si observamos la expresión original de $B_y(x, 0, z)$, ésta se anula en $x=0$, es decir, es nula sobre el eje z (como era de esperar porque la velocidad de los portadores tiene dirección z).

Si graficamos la componente y del campo en función de z para dos valores de x , obtenemos el resultado de la figura. Por supuesto que no es simétrica respecto de z debido a cómo ubicamos el “hilo” con corriente. ¿Cómo lo deberíamos haber ubicado para que fuera simétrica la gráfica? O ¿en qué valor de z es máximo el valor del campo?



¿Cómo se puede justificar conceptualmente? ¿Cómo hubiera sido el gráfico si se hubiera tomado x con valores negativos?

Ahora falta generalizar el resultado a todo el espacio. Debido a la simetría de revolución, la componente y en el plano xz corresponde a la componente φ de coordenadas cilíndricas. Y la variable x a la coordenada ρ de coordenadas cilíndricas. En consecuencia, podemos escribir que el campo magnético generado por esta distribución en todo el espacio está dado por

$$\vec{B}(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left[\frac{(z + L_2)}{[x^2 + y^2 + (z + L_2)^2]^{1/2}} - \frac{(z - L_1)}{[x^2 + y^2 + (z - L_1)^2]^{1/2}} \right] \vec{e}_\varphi$$

Donde hemos usado componentes cilíndricas y variables cartesianas (¡un híbrido!). También podríamos escribirlo tanto en componentes como variables cartesianas

$$\begin{aligned}\vec{B}(x, y, z) &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left[\frac{(z + L_2)}{[x^2 + y^2 + (z + L_2)^2]^{3/2}} - \frac{(z - L_1)}{[x^2 + y^2 + (z - L_1)^2]^{3/2}} \right] (-\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y) = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \left[\frac{(z + L_2)}{[x^2 + y^2 + (z + L_2)^2]^{3/2}} - \frac{(z - L_1)}{[x^2 + y^2 + (z - L_1)^2]^{3/2}} \right] \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \vec{e}_x + \frac{x}{x^2 + y^2} \vec{e}_y \right)\end{aligned}$$

O todo en cilíndricas

$$\vec{B}(\rho, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{1}{\rho} \left[\frac{(z + L_2)}{[\rho^2 + (z + L_2)^2]^{3/2}} - \frac{(z - L_1)}{[\rho^2 + (z - L_1)^2]^{3/2}} \right] \vec{e}_\varphi$$

Ahora vamos a deducir cómo es el campo generado en dos casos especiales: la longitud del alambre recto es tal que, dentro de las condiciones e incertezas experimentales, puede considerarse como “semi-infinito”. Supongamos, entonces, que $L_2 = 0$ y $L_1 \rightarrow \infty$. Debemos hacer

$$\begin{aligned}\vec{B}(x, y, z) &= \lim_{\substack{L_1 \rightarrow \infty \\ L_2 = 0}} \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left[\frac{(z + L_2)}{[x^2 + y^2 + (z + L_2)^2]^{3/2}} - \frac{(z - L_1)}{[x^2 + y^2 + (z - L_1)^2]^{3/2}} \right] \vec{e}_\varphi = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left[\frac{z}{[x^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} - \lim_{L_1 \rightarrow \infty} \frac{(z - L_1)}{[x^2 + y^2 + (z - L_1)^2]^{3/2}} \right] \vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

Calculemos el $\lim_{L_1 \rightarrow \infty} \frac{(z - L_1)}{[x^2 + y^2 + (z - L_1)^2]^{3/2}}$. Si $L_1 \rightarrow +\infty$, el valor del numerador será

negativo para todo z (excepto en el infinito). Entonces

$$\begin{aligned}\lim_{L_1 \rightarrow +\infty} \frac{(z - L_1)}{[x^2 + y^2 + (z - L_1)^2]^{3/2}} &= - \lim_{L_1 \rightarrow +\infty} \frac{(L_1 - z)}{[x^2 + y^2 + (z - L_1)^2]^{3/2}} = - \lim_{L_1 \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{(L_1 - z)^2}}{[x^2 + y^2 + (z - L_1)^2]^{3/2}} = \\ &= - \lim_{L_1 \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left[\frac{x^2 + y^2 + (z - L_1)^2}{(L_1 - z)^2} \right]^{3/2}} = - \lim_{L_1 \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left[\frac{x^2 + y^2}{(L_1 - z)^2} + 1 \right]^{3/2}} = -1\end{aligned}$$

Entonces para un conductor semi-infinito ubicado sobre el eje z desde el origen de coordenadas hasta $z \rightarrow +\infty$ y por el que circula una corriente I en el sentido de los z positivos el campo magnético generado resulta

$$\vec{B}_{\text{semi-infinito}}(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left[\frac{z}{[x^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} + 1 \right] \vec{e}_\varphi$$

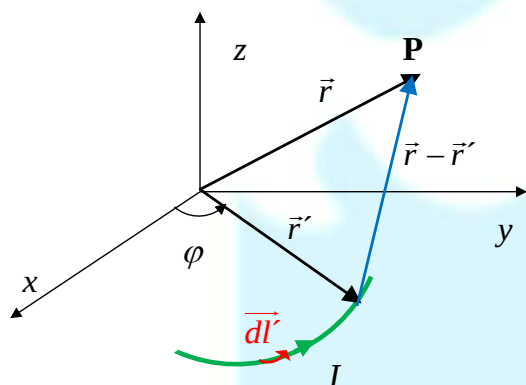
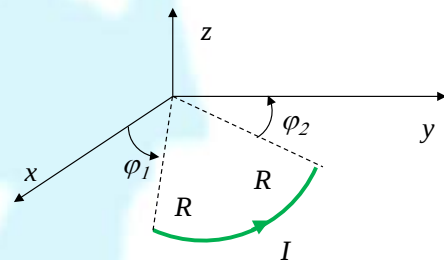
¿Cómo es la expresión del campo magnético en el caso en que el conductor pudiera ser considerado infinito (desde $-\infty$ a $+\infty$)? Deducir que en ese caso

$$\vec{B}_{\text{infinito}}(x, y, z) = \frac{\mu_0}{2\pi} I \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{e}_\varphi = \frac{\mu_0}{2\pi} I \frac{1}{\rho} \vec{e}_\varphi$$

Observen que, en esta última condición, el campo no depende de z (lo que es de esperar porque todos los orígenes de coordenadas son equivalentes). Además, podemos ver cómo son las líneas de campo magnético en el plano xy : su valor solamente depende de la distancia al eje z por lo que son circunferencias centradas en el eje z . Comparen la dependencia de su valor con la distancia con la del campo eléctrico generado por una distribución lineal, recta y uniforme de carga.

7.4.2 Ejemplo 2: Cable curvo (segmento circular) de longitud L por el que circula una corriente I

No vamos a calcular con detalle el campo magnético generado por este tipo de distribución. Pero, para fijar la metodología de resolución, vamos a escribir la expresión de los vectores involucrados en la expresión



del campo magnético y hacer algunas observaciones. Primero **debemos** hacer un gráfico (casi imprescindible porque tanta abstracción casi nunca es posible de hacer). Lo intuitivo es hacer coincidir el origen de coordenadas con el “centro” del segmento circular y ubicar la distribución en un plano. ¿Por qué habré elegido el plano xy ? Para generalizar, el “alambre” comienza en una posición

caracterizada por R y φ_1 y termina en otra posición caracterizada por R y φ_2 . ¿Podemos inferir algo acerca de las características del campo generado en todo el espacio? ¿Sobre el eje

z ? Parece complicado, ¿no?. Vamos entonces a tratar de determinarlo analíticamente. En la figura observamos que

- 1) $\overrightarrow{dl'}$ indica la dirección en que se mueven de los portadores de carga, i.e. $\overrightarrow{dl'} = R d\phi' \tilde{e}_{\phi'}$ (Observar que el versor tiene un ϕ primado porque se refiere a la fuente de campo. Este versor va a ir cambiando a medida que cambie el punto fuente). La expresión del diferencial de arco se debe a que el segmento circular está a una distancia **fija** del origen de coordenadas (R) y su sentido está dado por el versor acimutal. Como en el ejemplo anterior, el sentido de la corriente (que coincide con la velocidad de arrastre) va a estar especificado cuando establezcamos los límites de la integral.
- 2) $\vec{r'}$ indica dónde están los portadores de carga que generan el campo magnético. En este caso están ubicados sobre el arco por lo que escribiremos $\vec{r'} = R \tilde{e}_{\rho'}$ (que también es un versor radial primado ya que variará con el punto fuente). Por supuesto no son todos los puntos sino solamente los que están entre ϕ_1 y ϕ_2 .
- 3) $\vec{r}$ es el punto campo, es decir, el punto donde queremos determinar el campo. No es una variable de integración y podemos elegir cómo escribirlo en forma genérica, es decir, en coordenadas cartesianas, cilíndricas o esféricas:

$$\vec{r} = x \tilde{e}_x + y \tilde{e}_y + z \tilde{e}_z = \rho \tilde{e}_{\rho} + z \tilde{e}_z = r \tilde{e}_r$$

Ya identificados cada uno de los vectores, debemos operar con

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{alambre}} \frac{I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{\text{alambre}} \frac{\overrightarrow{dl'} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (\text{la corriente es la misma a lo$$

largo de todo el alambre). Entonces, reemplazamos (pero vamos operando de a poco)

$$\overrightarrow{dl'} = R d\phi' \tilde{e}_{\phi'} \quad ; \quad \vec{r'} = R \tilde{e}_{\rho'} ;$$

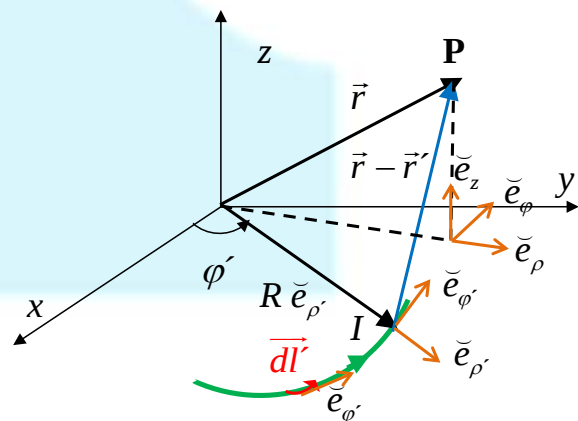
$$\vec{r} = x \tilde{e}_x + y \tilde{e}_y + z \tilde{e}_z = \rho \tilde{e}_{\rho} + z \tilde{e}_z = r \tilde{e}_r$$

¿Cuál de estas 3 expresiones del vector posición utilizamos? Probemos con la que parece más sencilla para este problema:

$$\vec{r} = \rho \tilde{e}_{\rho} + z \tilde{e}_z. \quad \text{Escribamos } \vec{r} - \vec{r'}. \quad \text{Acá}$$

debemos tener mucho cuidado ya que

$$\vec{r} - \vec{r'} = \rho \tilde{e}_{\rho} - R \tilde{e}_{\rho'} + z \tilde{e}_z \quad \text{y no podemos}$$



agrupar los versores radiales $\vec{e}_\rho$ y $\vec{e}_{\rho'}$ porque NO APUNTAN EN LA MISMA DIRECCIÓN (ver figura).

Solamente para practicar un poco, vamos a escribir la expresión del campo generado en todo el espacio.

¿Cómo escribimos $|\vec{r} - \vec{r}'| = |\rho \vec{e}_\rho - R \vec{e}_{\rho'} + z \vec{e}_z|$? No parece sencillo porque los versores no son ortonormales. ¿Y el producto vectorial?

$$\vec{dl}' \times (\vec{r} - \vec{r}') = R \vec{e}_{\phi'} \times (\rho \vec{e}_\rho - R \vec{e}_{\rho'} + z \vec{e}_z) = R \rho \vec{e}_{\phi'} \times \vec{e}_\rho - R^2 \vec{e}_{\phi'} \times \vec{e}_{\rho'} + z R \vec{e}_{\phi'} \times \vec{e}_z$$

Veamos

$\vec{e}_{\phi'} \times \vec{e}_z = \vec{e}_{\rho'}$; $\vec{e}_{\phi'} \times \vec{e}_{\rho'} = -\vec{e}_z$. Pero no podemos calcular así de fácil $\vec{e}_{\phi'} \times \vec{e}_\rho$ porque son versores no relacionados. En consecuencia, lo que podemos escribir es

$$\vec{dl}' \times (\vec{r} - \vec{r}') = R \rho \vec{e}_{\phi'} \times \vec{e}_\rho + R^2 \vec{e}_z + z R \vec{e}_{\rho'}$$

Es más: los versores primados van cambiando a medida de que cambia el punto de integración y no los podríamos “sacar fuera de la integral”. Para poder sacar los versores fuera de la integral deben corresponder a los cartesianos o a los no primados (los relacionados con los puntos campo). Desafortunadamente no queda otra posibilidad que escribir a los versores en función de los versores cartesianos y operar.

No pretendemos que resuelvan el problema así planteado para todo el espacio (no son integrales “de las comunes”). Pero sí que puedan determinar el campo magnético en cualquier punto **P** sobre el eje z de un segmento circular cuyos extremos forman ángulos φ_1 y φ_2 respecto del origen de coordenadas. Vean cómo se simplifica. Acá solo daremos el resultado final y ustedes deberán poder llegar a ese resultado.

$$B_x = -\frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{Rz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1) \quad B_y = +\frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{Rz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} (\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1)$$

$$B_z = -\frac{\mu_0}{2} I \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

7.5. Campos magnéticos generados por distribuciones superficiales y volumétricas de corrientes

Vamos a ver cómo extender la Ley de Biot-Savart a distribuciones de corriente superficiales y volumétricas. Primer vamos a establecer claramente a qué llamamos “lineales”, “superficiales” y “volumétricas”. Una distribución de corriente es

- 1) LINEAL si los portadores de carga se “mueven” sobre una curva (1D)
- 2) SUPERFICIAL si los portadores de carga se “mueven” sobre una superficie (2D).
- 3) VOLUMÉTRICA si los portadores de carga se “mueven” dentro de un volumen (3D)

Para poder extender a distribuciones no lineales la Ley de Biot-Savart

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Partimos de la definición de corriente eléctrica. Habíamos definido a la corriente como la cantidad de portadores de carga que pasan en la unidad de tiempo por un área transversal S_0 , i.e. $I = \frac{dQ}{dt}$. La densidad de

corriente volumétrica $\vec{J}$ se define pensando en la cantidad de electrones que pasan por unidad de tiempo y por unidad de área transversal S_0 .

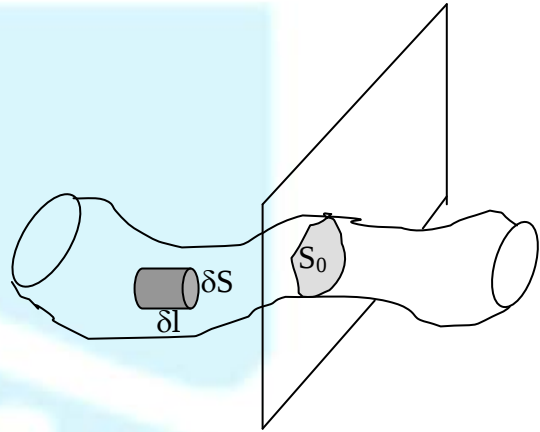
$$J = \frac{Q_{\text{que atraviesa } S_0}}{\text{unidad de } t * S_0}$$

$$|\vec{J}| = \lim_{\delta S \rightarrow 0} \frac{\delta I}{\delta S} \text{ siendo sus unidades } [J] = \text{A/m}^2$$

Generalizando teníamos que la corriente y la densidad volumétrica están relacionadas por

$$I = \iint_{S_0} \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

I.e. podríamos escribir $\delta I = J \delta S$ (aunque no existen los diferenciales de corriente: nos referimos a la cantidad de portadores por unidad de tiempo que pasan por un área diferencial transversal). Lo que sigue no tiene rigurosidad matemática pero nos puede explicar cómo es la Naturaleza. Y como la Física no es una ciencia exacta sino que es una ciencia natural... nos va a servir. Multiplicando ambos miembros por un diferencial perpendicular al diferencial de superficie, tendremos que $\delta I \delta l = J \delta S \delta l$. Como $\delta S \delta l = \delta \mathcal{V}$, podremos escribir $\delta I \delta l = J \delta \mathcal{V}$ donde $\mathcal{V}$ indica volumen (ver dibujo). Y el sentido de $\vec{J}$ es el de la velocidad de los portadores, i.e., el de $d\vec{l}'$.



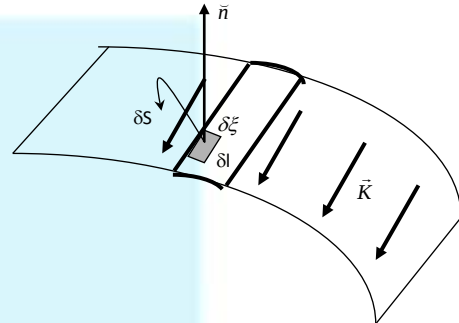
De esta manera, la Ley de Biot-Savart $d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$ se transforma en

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J}(\vec{r}') d\mathcal{V}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Si, en cambio, la densidad de corriente fuera superficial (la corriente “va” por una superficie), por un razonamiento análogo podemos llegar a que

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{K}(\vec{r}') dS' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \text{ pues}^4$$

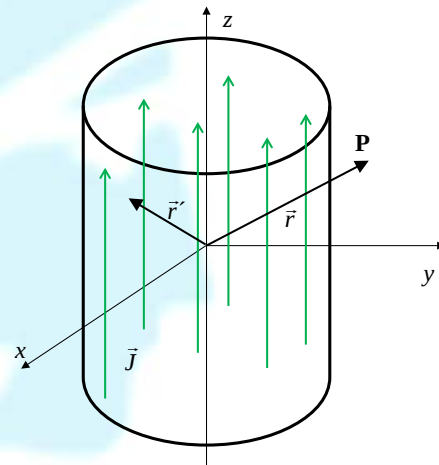
$$K = \frac{\delta I}{\delta \xi} \quad \text{y} \quad K \delta \xi \delta l = \delta I \delta l \text{ siendo } \delta \xi \delta l = \delta S.$$



7.5.1 Ejemplo 3: Distribución cilíndrica volumétrica de corriente uniforme

Como siempre elegimos un sistema de coordenadas que nos parezca adecuado para que el planteo del problema sea lo más simple posible. Dibujado, vemos que

$\vec{J} = J \vec{e}_z$ y el punto campo es, en principio cualquiera $\vec{r} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z = r \vec{e}_r$, mientras que $\vec{r}'$ debe indicar todos los puntos por donde pasan los portadores, es decir, $\vec{r}' = x' \vec{e}_x + y' \vec{e}_y + z' \vec{e}_z$ donde x' , y' y z' son puntos de dentro de la distribución cilíndrica. O sea, $\rho'^2 = x'^2 + y'^2 \leq R^2$ y z' dependerá de la “altura” de la distribución.



$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{portadores}} \frac{\vec{J} d\mathcal{V}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{portadores}} \frac{J \vec{e}_z d\mathcal{V}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}.$$

El diferencial de volumen resulta sencillo de expresar en cilíndricas, es decir, $d\mathcal{V}' = \rho' d\rho' d\phi' dz'$. Si J es uniforme, algo se simplifica porque se puede sacar de la integral. De todas maneras, el integrando resulta bastante complicado porque

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$

⁴ En forma general $I = \int (\vec{K} \times \vec{n}) \cdot d\vec{\xi}$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} J \int_{\text{portadores}} \rho' d\rho' d\phi' dz' \frac{\vec{e}_z \times ((x-x')\vec{e}_x + (y-y')\vec{e}_y + (z-z')\vec{e}_z)}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}}$$

¡Acá lo único fácil es hacer los productos vectoriales!

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} J \int_{\text{portadores}} \rho' d\rho' d\phi' dz' \frac{(x-x')\vec{e}_y + (y-y')(-\vec{e}_x)}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}}$$

Y acá la integral en z' !

¿Cómo varían las variables de integración?

- 1) ρ' varía entre 0 y el radio R de la distribución
- 2) ϕ' varía entre 0 y 2π
- 3) z' depende de cómo es la distribución de “larga”. Como forma general, podemos decir que varía entre $-L_2$ y L_1 .

Entonces, el campo va a tener dos componentes (como máximo)

$$B_y(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} J \int_0^R \rho' d\rho' \int_0^{2\pi} d\phi' \int_{-L_2}^{L_1} dz' \frac{(x-x')}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}}$$

$$B_x(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} J \int_0^R \rho' d\rho' \int_0^{2\pi} d\phi' \int_{-L_2}^{L_1} dz' \frac{(y-y')}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}}$$

Pero, si bien no es irresoluble, es muy complicada y no va a aportar mucho aunque consideremos que tiene “altura” infinita. Como para agregar algo, los resultados de estas integrales dependen fuertemente de que el punto $\mathbf{P}$ esté dentro o fuera de la distribución. Es semejante al problema de Electrostatica de una distribución de carga cilíndrica y uniforme.

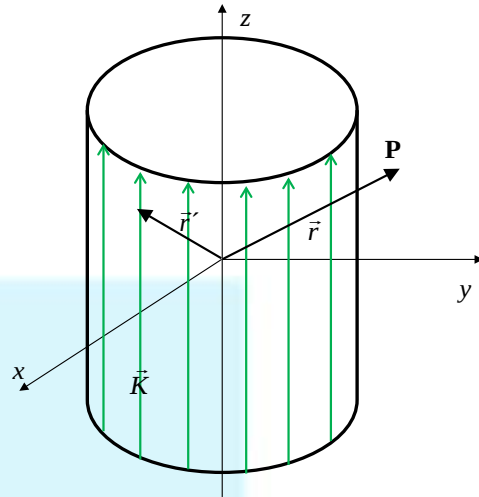
Más adelante vamos a ver cómo podemos determinar el campo que genera cuando es “infinita” y la distribución de corriente es uniforme o cumple con ciertas condiciones.

7.5.2 Ejemplo 4: Distribución cilíndrica superficial de corriente uniforme en la dirección del eje

Haremos el mismo proceso que en el ejemplo anterior:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{distribución}} \vec{K} dS' \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

La densidad superficial de corriente tiene la dirección de z , i.e. $\vec{K} = K \vec{e}_z$; $dS' = R d\phi' dz'$; los puntos fuente $\vec{r}' = x' \vec{e}_x + y' \vec{e}_y + z' \vec{e}_z$ o $\vec{r}' = R \cos \phi' \vec{e}_x + R \sin \phi' \vec{e}_y + z' \vec{e}_z$ (aunque en este caso podría parecer más sencillo escribir todo en cilíndricas $\vec{r}' = R \vec{e}_\rho + z' \vec{e}_z$) y, como siempre, $\vec{r} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z$



$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{distribución}} \frac{\vec{K} dS' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} K \int_{\text{distribución}} R d\phi' dz' \frac{\vec{e}_z \times ((x-x')\vec{e}_x + (y-y')\vec{e}_y + (z-z')\vec{e}_z)}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} K \int_{\text{distribución}} R d\phi' dz' \frac{(x-x')\vec{e}_y - (y-y')\vec{e}_x}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}}$$

Observen que es el mismo integrando que en el ejemplo anterior, excepto que en ésta se integra sobre solo dos variables. Haciendo todo lo que podamos

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} KR \int_0^{2\pi} d\phi' \int_{-L_2}^{L_1} dz' \frac{(x-x')\vec{e}_y - (y-y')\vec{e}_x}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}} =$$

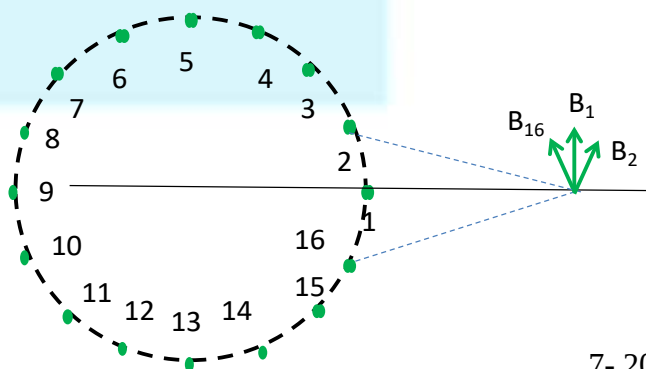
$$= \frac{\mu_0}{4\pi} KR \int_0^{2\pi} d\phi' [(x-x')\vec{e}_y - (y-y')\vec{e}_x] \int_{-L_2}^{L_1} dz' \frac{1}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}}$$

Una de estas integrales ya la resolvimos (ver la distribución recta lineal). Pero la integral en ϕ' sigue siendo complicada. Veamos cuánto vale el campo magnético sobre el eje z cuando la distribución es “infinita” (i.e. altura infinita).

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} KR \int_0^{2\pi} d\phi' [-x' \vec{e}_y + y' \vec{e}_x] \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{1}{[x'^2 + y'^2 + (z-z')^2]^{3/2}} =$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi} KR \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{[-R \cos \phi' \vec{e}_y + R \sin \phi' \vec{e}_x]}{R} = 0$$

¿Es de esperar este resultado? Demostrar que éste es el resultado esperado usando el principio de superposición (considerar que es una distribución de “alambres”

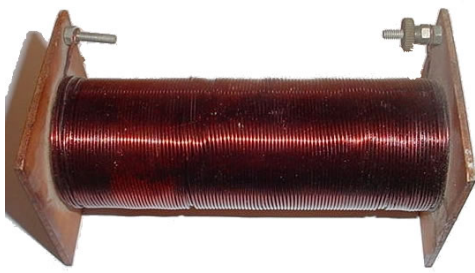


rectos sobre la superficie lateral de un cilindro).

¿Cómo es el campo magnético “fuera” de la distribución cuando es “infinita”? Podemos encontrar la dirección por consideraciones de simetría. La densidad superficial la esquematizamos como los hilos verdes (todos iguales). En un punto cualquiera sumamos los campos individuales (como en la figura). Y deducimos que el campo generado tendrá dirección acimutal.

7.6. Campos magnéticos generados por distribuciones muy usadas y útiles

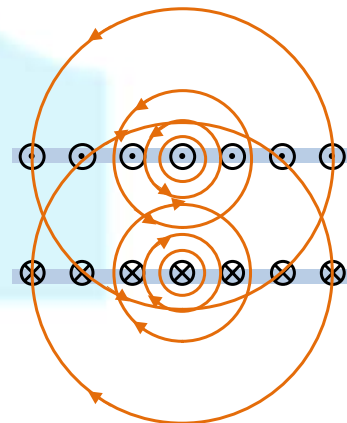
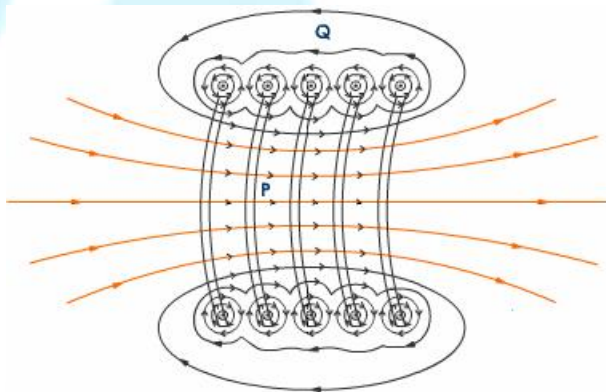
El solenoide y el toroide son dos arreglos de cables usados para generar campos magnéticos



7.6.1 Solenoide

El solenoide es una bobina de alambre devanada uniformemente sobre un cilindro y tiene n vueltas/unidad de longitud. Si los alambres están uniformemente espaciados, podemos considerar que forman una espiral o helicoides. Pero, como modelo más sencillo, también podemos considerar que es un conjunto de N espiras circulares. Veamos cómo es el campo cualitativamente. Lo pensamos como producido por cada uno de los elementos por donde circula corriente:

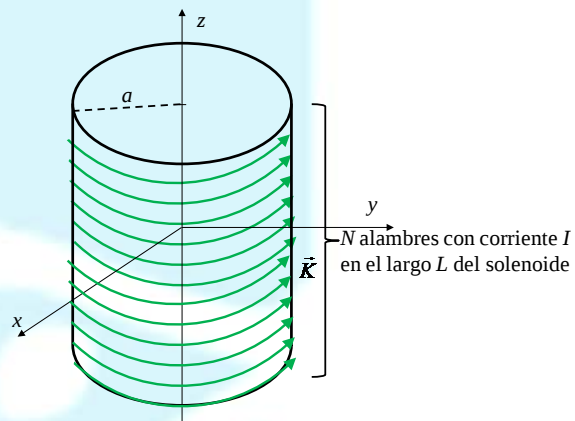
- 1) Cerca de los alambres, los campos forman circunferencias (como conductores rectos). Entonces los campos tienden a anularse entre las espiras y adentro tienden a sumarse dando un campo resultante en la dirección del eje del solenoide.



2) Fuera del solenoide, las espiras de un lado y del otro contribuyen con campos con sentidos diferentes

En consecuencia, los campos debidos a cada espira se refuerzan dentro del cilindro y fuera se dirigen en dirección contraria y se hace más débil. Para determinar estas características hemos hecho uso del Principio de Superposición.

Para hallar la expresión del campo magnético generado se puede proceder de varias maneras. Nosotros haremos un modelo de una corriente superficial $\vec{K}$ con dirección acimutal sobre la superficie lateral de un cilindro de radio a . También podríamos considerar un modelo de un apilamiento de espiras circulares y usar el principio de superposición. No pretenderemos



resolverlo en forma analítica para todo punto del espacio, aunque ustedes lo podrían hacer siguiendo los pasos para determinar el campo eléctrico generado por la distribución superficial cilíndrica de cargaⁱⁱ. Veamos

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{K} dS' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\vec{K} = K \vec{e}_\varphi = -K \sin \varphi' \vec{e}_x + K \cos \varphi' \vec{e}_y$$

$$dS' = a \, d\varphi' \, dz'$$

$$\vec{r} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$$

$$\vec{r}' = a \vec{e}_\rho + z' \vec{e}_z \text{ con } y \quad -L_2 < z' < L_1$$

que en componentes cartesianas resulta

$$\vec{r}' = a (\cos \varphi' \vec{e}_x + \sin \varphi' \vec{e}_y) + z' \vec{e}_z$$

Por la simetría de revolución del problema podemos calcular el campo en el plano xz, por ejemplo. I.e. en $y=0$. Efectuando el producto vectorial

$$\begin{aligned} \frac{\vec{K} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} &= \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -K \sin \varphi' & K \cos \varphi' & 0 \\ (x - a \cos \varphi') & (0 - a \sin \varphi') & (z - z') \end{vmatrix} = \\ &= K \left\{ \vec{e}_x \cos \varphi' (z - z') + \vec{e}_y \sin \varphi' (z - z') + \vec{e}_z (a \cos \varphi' - x) \right\} \end{aligned}$$

siendo

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^3 = \left\{ (x - a \cos \varphi')^2 + a^2 \sin^2 \varphi' + (z - z')^2 \right\}^{3/2}$$

Entonces

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 K}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-L_2}^{L_1} dz' \frac{\left\{ \vec{e}_x \cos \varphi' (z - z') + \vec{e}_y \sin \varphi' (z - z') + \vec{e}_z (a \cos \varphi' - x) \right\}}{\left\{ (a \cos \varphi' - x)^2 + a^2 \sin^2 \varphi' + (z - z')^2 \right\}^{3/2}}$$

Esta integral (aunque parezca mentira) se puede resolver analíticamente. Sin embargo, no lo haremos. Saquemos algunas conclusiones: las componentes x e y deben ser iguales porque son indistinguibles por la simetría de revolución del problema. Pero no tienen por qué anularse.

Ahora haremos el cálculo del campo en el eje z cuando el solenoide es finito

$$B_x(0,0,z) = \frac{\mu_0 K}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-L_2}^{L_1} dz' \frac{\cos \varphi' (z - z')}{\left\{ (a \cos \varphi')^2 + a^2 \sin^2 \varphi' + (z - z')^2 \right\}^{3/2}} =$$

$$= \frac{\mu_0 K}{4\pi} \int_0^{2\pi} \cos \varphi' d\varphi' \int_{-L_2}^{L_1} dz' \frac{(z - z')}{\left\{ a^2 + (z - z')^2 \right\}^{3/2}} = 0$$

$$B_y(\vec{r}) = \frac{\mu_0 K}{4\pi} \int_0^{2\pi} \sin \varphi' d\varphi' \int_{-L_2}^{L_1} dz' \frac{(z - z')}{\left\{ a^2 + (z - z')^2 \right\}^{3/2}} = 0$$

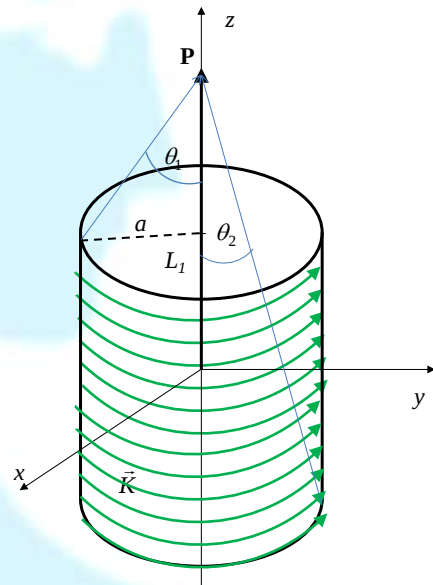
$$B_z(0,0,z) = \frac{\mu_0 K}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-L_2}^{L_1} dz' \frac{a}{\left\{ a^2 + (z - z')^2 \right\}^{3/2}} =$$

$$= \frac{\mu_0 K}{4\pi} 2\pi \int_{-L_2}^{L_1} dz' \frac{a}{\left\{ a^2 + (z - z')^2 \right\}^{3/2}} =$$

$$= \frac{\mu_0 K}{4\pi} 2\pi \int -d\psi \frac{a}{\left\{ a^2 + \psi^2 \right\}^{3/2}} = -\frac{\mu_0 K}{2} \frac{(z - z')}{\left\{ a^2 + (z - z')^2 \right\}^{1/2}} \Bigg|_{-L_2}^{L_1} =$$

$$= \frac{\mu_0 K}{2} \left\{ \frac{(z + L_2)}{\left\{ a^2 + (z + L_2)^2 \right\}^{1/2}} - \frac{(z - L_1)}{\left\{ a^2 + (z - L_1)^2 \right\}^{1/2}} \right\}$$

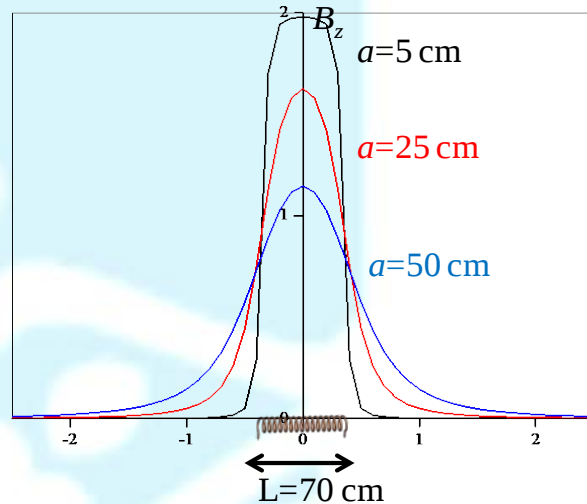
Veamos cómo podemos describir los términos de esta expresión. Como



$$\frac{(z - L_1)}{\{a^2 + (z - L_1)^2\}^{1/2}} = \cos \theta_1 \text{ y } \frac{(z + L_2)}{\{a^2 + (z + L_2)^2\}^{1/2}} = \cos \theta_2$$

$$\vec{B}(0,0,z) = \frac{\mu_0 K}{2} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) = \frac{\mu_0 N I}{2L} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1)$$

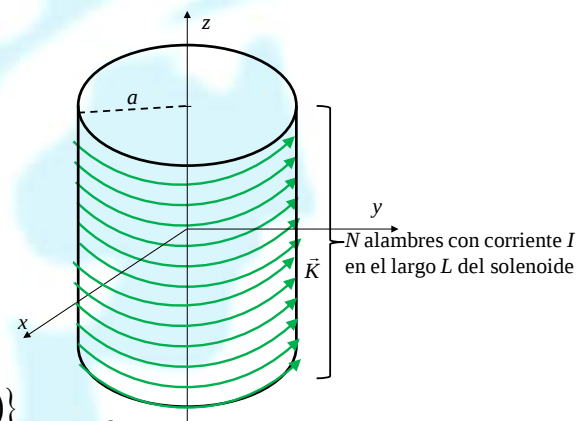
La expresión del campo magnético es válida tanto dentro como fuera del solenoide. En la figura mostramos la variación del campo con la posición para tres solenoides de 70 cm de largo y con radios de 5, 25 y 50 cm. El campo fuera del solenoide es menos considerable a medida que el radio del mismo disminuye.



Como en otras oportunidades podemos considerar que un modelo de solenoide “infinito” puede ser útil bajo determinadas condiciones experimentales. Calculamos el campo que genera. Cuando L_1 y $L_2 \rightarrow +\infty$,

$$B_z(0,0,z) = \frac{\mu_0 K}{2} 2 = \mu_0 K = \mu_0 \frac{N I}{L} = \mu_0 n I$$

$$B_x(0,0,z) = \frac{\mu_0 K}{4\pi} \int_0^{2\pi} \cos \varphi' d\varphi' \int_{-L_2}^{L_1} dz' \frac{\{(z - z')\}}{\{a^2 + (z - z')^2\}^{3/2}} = 0$$

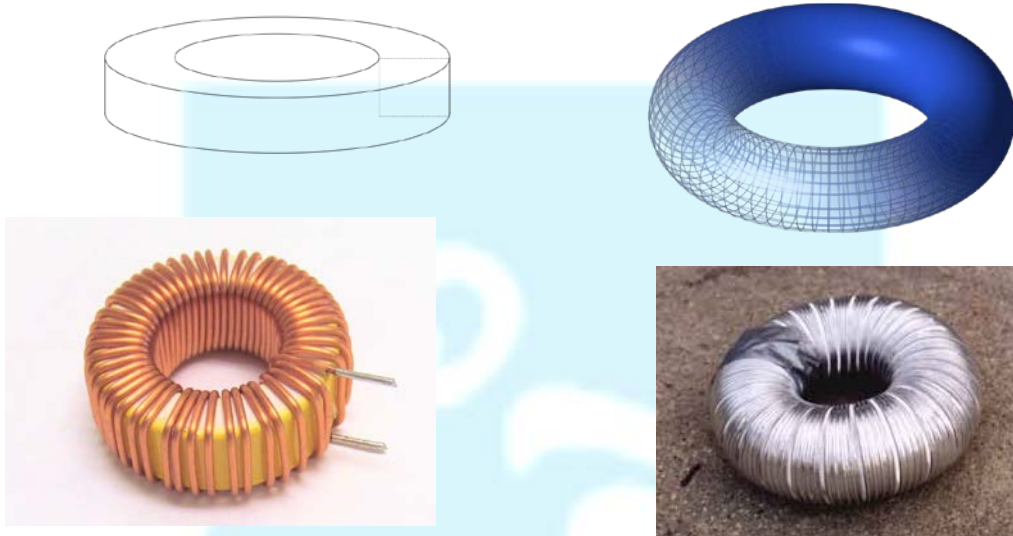


pues se anula la integral en φ' . Es decir, lejos de los bordes (o sea, despreciando efectos de borde) el campo magnético dentro del solenoide es uniforme, tiene la dirección del eje del cilindro que lo contiene y vale $\mu_0 n I$. El sentido del campo va a depender de cómo circula la corriente.

7.6.1 Toroide

Si bien determinar por la Ley de Biot y Savart el campo generado por un solenoide no es nada fácil, mucho más complicado es tratar de determinar el campo generado por un toroide,

independientemente de que su sección sea circular, cuadrada o rectangular. Los que estén interesados en el desarrollo matemático, lo encontrarán en la Ref[i].



Sin embargo, a partir del campo obtenido para un solenoide, podemos pensar en que si doblamos al mismo y hacemos coincidir los extremos, tendremos un toroide. El haber encorvado el solenoide hasta obtener una forma circular nos permite pensar que el campo magnético no va a ser muy distinto del obtenido para el solenoide dentro del mismo y que será nulo fuera del toroide. Pero debemos reinterpretar a L : ahora no será el largo del solenoide sino la circunferencia media del toroide. Y la dirección del campo será tal que copia la forma del toroide. Es decir, formando circunferencias con centro en el centro geométrico del toroide. Más adelante vamos a ver cómo mejorar este modelo.

Antes de continuar queremos hacer notar que el contenido físico de la ley de Biot-Savart es el siguiente:

- a) Las corrientes generan campo magnético en valor proporcional a la corriente.
- b) El campo generado por una corriente disminuye cuando nos alejamos.

El resto es un gran sufrimiento de matemática.

7.7. Tema especial 2. Buscando una manera más simple de determinar campos magnetostáticos

La Ley de Biot y Savart es útil para encontrar un campo magnético creado por cualquier configuración de corriente constante. Esta forma no siempre resulta óptima ya que es difícil o imposible resolver la integral analíticamente en la mayoría de los casos (incluso, como hemos

visto, en aquellos que consideramos idealmente “fáciles”). Lo mismo pasaba en Electroestática. Y en ese caso, pudimos escribir dos ecuaciones integrales y dos diferenciales:

$$1) \text{ Flujo del vector desplazamiento } \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_L \quad \nabla \cdot \vec{D} = \rho_L$$

$$2) \text{ Circulación del campo eléctrico } \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \nabla \times \vec{E} = 0$$

El primer par de ecuaciones (Ley de Gauss para Electroestática) indica que las líneas de campo electrostático nacen en las cargas positivas y mueren en las negativas. Las “fuentes” de campo electrostático son las cargas. La forma integral del primer par nos permitió (algunas pocas veces) reducir el problema ya que no era necesario resolver la integral que corresponde a la Ley de Coulomb. La ecuación diferencial no fue utilizada (aunque se podría haber usado en algunos ejemplos) y será la base de las soluciones que emplearán los que cursen o estudien Electromagnetismo.

El segundo par de ecuaciones indicaba que en Electroestática el campo provenía de un potencial (como función) escalar relacionado con la independencia del camino entre dos puntos al calcular el trabajo ejercido por o sobre una carga (en forma cuasiestática). Y podríamos obtener a partir de esa función potencial el campo electrostático (a través del gradiente).

Tratemos de hacer algo parecido con el campo magnetostático. Calculemos la $\nabla \cdot \vec{B}$. Es de esperar, por analogía con el campo electrostático, que $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ ya que como dijimos más de una vez: nunca se encontraron monopolos magnéticos. Para probar que la expresión para el campo magnetostático dada por la Ley de Biot y Savart cumple con este resultado experimental, debemos hacer unos cálculos. Escribamos la Ley de Biot-Savart para una distribución de corriente genérica

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{fuentes de corriente}} \frac{\vec{J}(\vec{r}') d\mathcal{V}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Cuando calculemos la $\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r})$, la divergencia se realiza con las variables no primadas (las que son de los puntos campo). Como la integral se hace sobre los puntos fuentes:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{fuentes de corriente}} \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{J}(\vec{r}') d\mathcal{V}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{fuentes de corriente}} d\mathcal{V}' \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \vec{\nabla} \cdot \left[\vec{J}(\vec{r}') \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] =$$

$$\text{Buscando la relación adecuada } \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{Q}) = \vec{Q} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{Q})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left[\vec{J}(\vec{r}') \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] = \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{J}(\vec{r}')) - \vec{J}(\vec{r}') \cdot \left(\vec{\nabla} \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) = 0 - \vec{J}(\vec{r}') \cdot \left(\vec{\nabla} \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right)$$

Porque la densidad de corriente es función de las variables primadas ($\vec{J}(\vec{r}')$).

$$\left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x - x'}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} & \frac{y - y'}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} & \frac{z - z'}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \end{array} \right|$$

$$= \frac{\partial}{\partial y} \frac{(z - z')}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{(y - y')}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} + \dots$$

Cuando se hacen las derivadas respecto a x, y, z se van cancelando y se llega que para todo punto que no sea $\vec{r}'$, la divergencia es nula (hacerlo). Es decir

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Esto se traduce en la ecuación integral

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Podemos quedarnos tranquilos respecto a la consistencia entre teoría y experiencia (con respecto a no haber encontrado monopolos magnéticos). A esta Ley la llamamos “Ley de Gauss para el campo magnético”. Pero, desafortunadamente, no podemos simplificar nuestra búsqueda de campos magnéticos a través de ella. Aunque, nos da la seguridad de que sea como sea el campo generado por una distribución de corriente, las líneas de campo magnético **deben** ser cerradas.

Pero... no hay que desesperar. Encontraremos una Ley válida para casos magnetostáticos (es decir, no dependientes del tiempo) en que puede resultar más sencillo calcular el campo magnético. Pero hay que pagar un precio (como cuando aplicábamos la Ley de Gauss para Electroestática): vamos a tener que saber muchas características del campo generado por la distribución. Y recién ahí, calcular su valor en función de las variables del sistema.

Fin tema especial 2

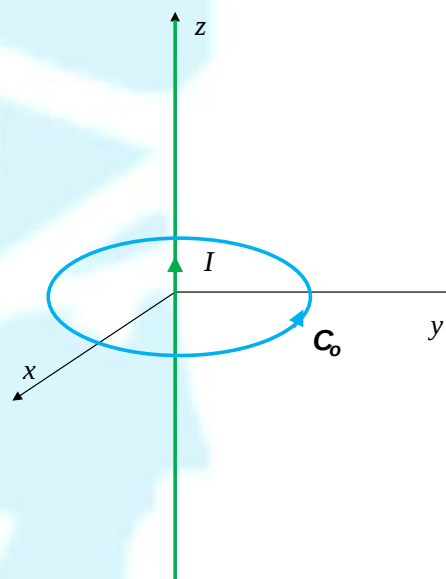
7.8. La Ley de Ampere válida para los campos magnetostáticos en el vacío

Es posible deducirla a partir de la Ley de Biot y Savart. Solamente hay que aplicar el rotor a la expresión del campo magnético dada por la Ley de Biot y Savartⁱⁱⁱ. Sin embargo lo haremos a partir de un caso particular: a partir del campo magnético creado por un conductor (hilo) infinito por el que circula una corriente I .

En el **Ejemplo 1** vimos que el campo generado por esta configuración formaba circunferencias centradas en el conductor. Es decir, las líneas de campo magnético son tangentes en cada punto a la circunferencia y para cada radio el módulo del campo magnético era constante ya que

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{2\pi} I \frac{1}{\rho} \vec{e}_\phi$$

cuando el sistema de coordenadas elegido es el de la figura. Tomemos ahora una curva C_0 en forma de circunferencia de radio R y calculemos la circulación del $\vec{B}(\vec{r})$ que tenemos a lo largo de dicha curva: Esto obliga a usar como valor del campo el que tiene **sobre** la curva C_0



$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} I \oint_{C_0} \frac{1}{R} \vec{e}_\phi \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} I \oint_{C_0} \frac{1}{R} \vec{e}_\phi \cdot R d\phi \vec{e}_\phi = \mu_0 I$$

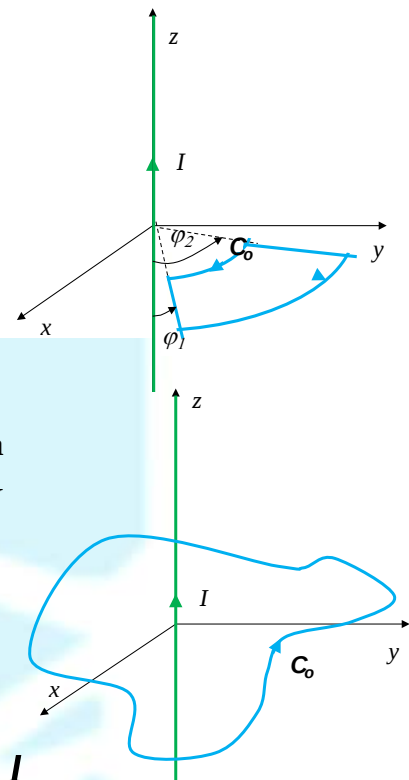
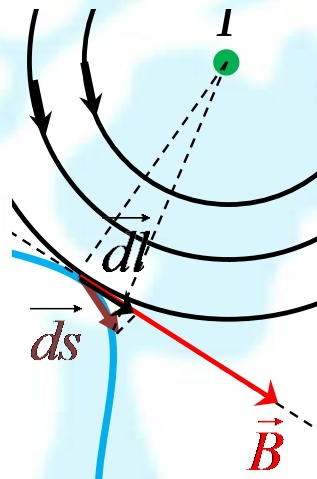
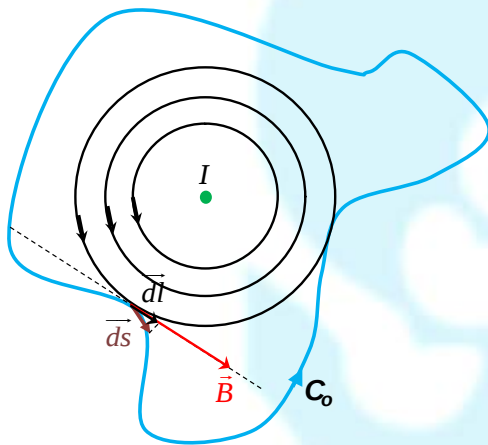
Lo notable es que resulta independiente del radio de la curva elegida. Es más, lo que resulta independiente es el integrando: el radio R de la curva se simplifica con el R del campo. Observen que se ha tenido especial cuidado en ser estrictos en el cálculo de la circulación. Si hubiéramos tomado el sentido contrario de circulación, el resultado hubiera sido negativo. Observen también que el sentido en que se toma la circulación nos “da” un sentido determinado a la normal a la superficie determinada por la curva. Cuando tomamos la circulación antihoraria, la normal a la superficie relacionada es en sentido de los z positivos (que coincide con el de la corriente). Hemos encontrado un resultado interesante: **La circulación del campo magnético a través de la curva C_0 es igual a la corriente que atraviesa la superficie determinada por esa curva multiplicada por μ_0 .**

Vamos a ver cuánto vale la circulación a través de otra curva (muy especial, por supuesto) como la de la figura

$$\oint_{C_0} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = 0 + (\varphi_1 - \varphi_2) \frac{\mu_0}{2\pi} I + 0 + (\varphi_2 - \varphi_1) \frac{\mu_0}{2\pi} I = 0$$

Es decir, esta curva no “encierra” a la corriente y la circulación del campo generado por el “hilo” es nula.

Ahora tomemos una curva cualquiera. Pero vamos a dibujarla en el plano para simplificar el dibujo (vista desde “arriba”). Y hacemos zoom.



Cuando hagamos el cálculo de la circulación $\oint_C \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{s}$. El integrando se obtiene proyectando el $d\vec{s}$ sobre el campo (que es acimutal), es decir, sobre la línea de campo. Entonces, hubiera sido lo mismo que el diferencial $d\vec{s}$ hubiera sido el $d\vec{l}$ de la circunferencia, por lo que la contribución a la integral sería la misma. Cuando tomemos otro $d\vec{s}$, el valor del campo sería otro (le correspondería otra línea de campo). Pero, al proyectarlo sobre el campo, es decir, al considerar el $d\vec{l}$, la contribución a la integral sería la misma que en el caso anterior (por ser el producto $\vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{s}$ independiente de R).

De esta manera, independientemente de la forma de la curva C_o , $\oint_C \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{s}$ resulta siempre igual a $\mu_0 I$ si la corriente está **concatenada** (“encerrada”) por la curva. Si la curva C_o no concatenara a la corriente, su resultado sería nulo.

Es decir, para un conductor recto infinito,

$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = \begin{cases} \mu_0 I & \text{si la curva concatena a la corriente} \\ 0 & \text{si la curva no concatena a la corriente} \end{cases}$$

O podemos escribirlo como

$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{concatenada}}$$

¿Cómo extendemos este resultado a otras distribuciones de corriente? Por ejemplo, dos hilos conductores que transportan corrientes I_1 e I_2 como en la figura. Tenemos

$$\oint_{C_o} \vec{B}_1(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_1 \quad \oint_{C_o} \vec{B}_2(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_2$$

Como $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}_1(\vec{r}) + \vec{B}_2(\vec{r})$, será

$$\oint_{C_o} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \oint_{C_o} [\vec{B}_1(\vec{r}) + \vec{B}_2(\vec{r})] \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I_1 + I_2)$$

Si, en cambio, la curva elegida es la C_1 , la corriente concatenada es I_2 **pero** como la normal a la superficie determinada por la curva es de sentido opuesto al de la corriente, será

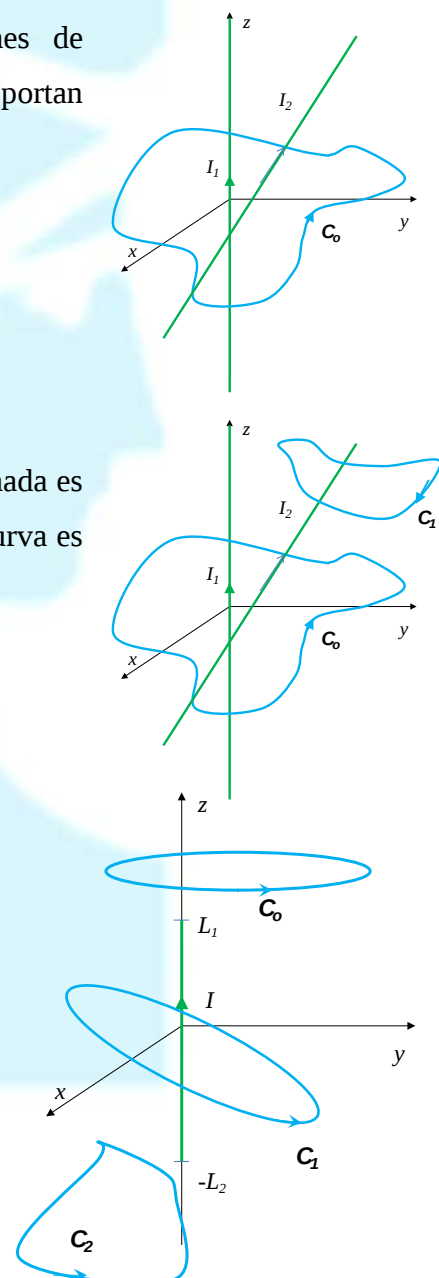
$$\oint_{C_1} \vec{B}_2(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = -\mu_0 I_2$$

Si tenemos un alambre de longitud L como el de la figura, podemos asegurar que

$$\oint_{C_1} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

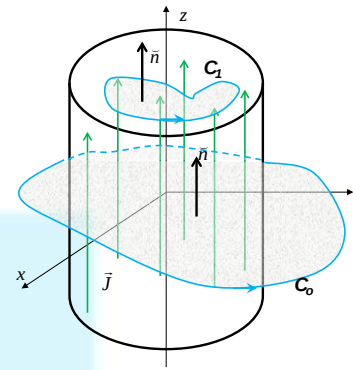
$$\oint_{C_o} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \oint_{C_2} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = 0$$

Para las distribuciones de los Ejemplos 3 y 4 podemos pensar que es una superposición de muchos conductores



lineales. El campo magnetostático es la suma de los campos individuales y para cada “hilo” vale $\oint_C \vec{B}(\vec{r}).d\vec{l} = \mu_0 I_{concatenada}$. En consecuencia, si la densidad volumétrica no depende de la posición

$$\oint_{C_0} \vec{B}(\vec{r}).d\vec{l} = \mu_0 I_{concatenada} = \mu_0 \iint_{A(C_0)} \vec{J}.d\vec{A} = \\ = \mu_0 \iint_{A=\pi R^2} \vec{J}.\vec{n} dA + 0 = \mu_0 J \pi R^2$$



Si se elige la curva C_1 , la corriente concatenada será solamente una parte de la total. Es decir,

$$\oint_{C_1} \vec{B}(\vec{r}).d\vec{l} = \mu_0 I_{concatenada} = \mu_0 \iint_{A(C_1)} \vec{J}.d\vec{A}$$

Si la corriente fuera superficial, escribiremos la Ley de Ampere en función de la densidad superficial de corriente. De esta manera

$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}).d\vec{l} = \mu_0 I_{concatenada} = \mu_0 \iint_{A(C)} \vec{J}.d\vec{A} = \mu_0 \int_{L(C)} (\vec{K} \times \vec{n}).d\vec{l}$$

7.9. Cálculo de campos magnetostáticos a partir de la Ley de Ampere

Observemos la expresión de la Ley de Ampere

$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}).d\vec{l} = \mu_0 I_{concatenada}$$

Si podemos encontrar una curva donde $|\vec{B}(\vec{r})|$ no dependa del punto sobre la curva y podemos, por otros medios, conocer la dirección de $\vec{B}(\vec{r})$ respecto del $d\vec{l}$ de la curva, podríamos “sacar” de la integral $|\vec{B}(\vec{r})|$, multiplicarlo por el perímetro de la curva e igualarlo a la corriente concatenada (a menos de la permeabilidad del vacío). Si conocemos la corriente concatenada... podremos determinar $|\vec{B}(\vec{r})|$ y le agregamos la dirección que ya sabíamos de antemano. De esta manera, podríamos aprovechar la Ley de Ampere (que vale siempre en Magnetostática) para determinar el campo magnetostático de algunas distribuciones de corriente de la que ya conocemos bastante (la dirección y su dependencia posible con las coordenadas). Si no hubiéramos sabido todo eso no podríamos haber elegido la curva!!!

Desafortunadamente son muy pocas las distribuciones de corriente que permiten usar la Ley de Ampere con el fin de determinar el campo magnético que generan.

Vamos a ver algunos ejemplos:

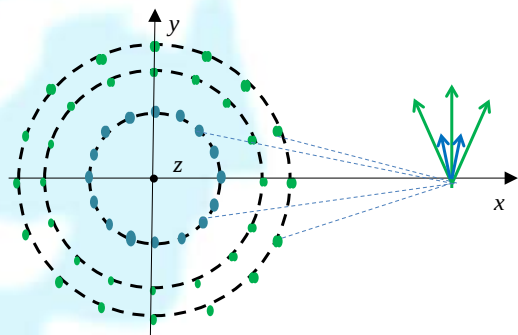
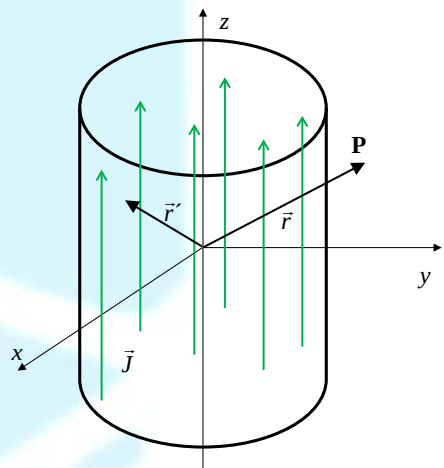
7.9.1 Ejemplo 5: Distribución volumétrica de corriente uniforme de forma cilíndrica infinita

Tomemos la distribución del **Ejemplo 3**. Si bien, como vimos, la Ley de Ampere sirve para cualquier curva cerrada, es **imprescindible** saber las características que tendrá el campo para poder usar la Ley de Ampere con el objetivo de determinar el campo magnético generado por la distribución.

Vamos a ver qué características podemos “descubrir” del campo a partir del campo generado por un alambre recto por el que circula una corriente I . Con esto (ya casi todo sabido) nos fijaremos si existe una curva sobre la cual podamos integrar y “sacar” de la integral el valor de $\vec{B}$.

El **Primer Paso** es **inferir** la dirección que tendrá el campo. Hacemos un esquema: la densidad volumétrica uniforme “en sentido de las z s positivas” la representamos como superposición de infinitos alambres (no infinitos necesariamente), cada uno con una I_j (igual para todos los alambres) de forma tal que

$$I = \sum I_j \rightarrow I = \int_{\text{sección circular}} \vec{J} \cdot d\vec{S}. \text{ El esquema del campo producido por 5 de los alambres muestra}$$



que, haciendo la superposición, el campo sobre el eje x tendrá dirección y ; sobre el eje y tendrá dirección $-\vec{e}_x$, y así para cada plano alrededor del eje z . En el sistema de coordenadas elegido (¡imprescindible dibujarlo!) el campo tendrá dirección $\vec{e}_\phi$. Podemos afirmar entonces que $\vec{B}(\vec{r}) = B(\vec{r})\vec{e}_\phi$. Entonces tenemos que

$$\oint_C B(\vec{r})\vec{e}_\phi \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{concatenada por } C}$$

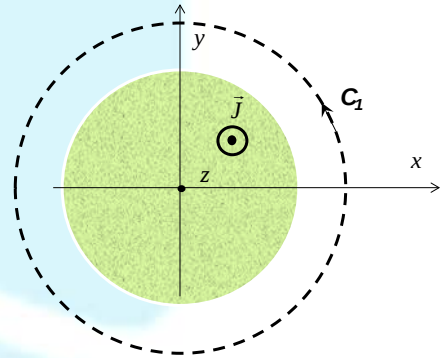
Ya vemos que, si como curva elegimos una circunferencia de radio R centrada en el origen de coordenadas, $d\vec{l} = R d\phi \vec{e}_\phi$, tendremos

$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}) \vec{e}_\varphi \cdot d\vec{l} = \oint_C \vec{B}(\vec{r} = R \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z) \vec{e}_\varphi \cdot R d\varphi \vec{e}_\varphi = \oint_C B(\vec{r} = R \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z) R d\varphi = \mu_0 I_{\text{concatenada por } C}$$

donde $\vec{e}_\rho = \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y$ depende del ángulo φ . Entonces, con esto no alcanza: debemos probar que el campo no va a depender de φ . O sea, debemos probar que es $B(r, z)$ para poder poner su valor sobre la curva, es decir, poner $B(R, z)$.

De la figura que usamos para la superposición, podemos deducir que el valor del campo no va a depender de φ si **J no depende de φ** : una rotación del sistema de coordenadas no cambiará tampoco el valor del campo. Entonces

$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \oint_C B(R, z) R d\varphi = R B(R, z) \oint_C d\varphi = \mu_0 I_{\text{concatenada por } C}$$



donde $B(R, z)$ indica que el campo solo podría depender de R y de z . Pero acá aparece otro problema: la posible dependencia en z . Está claro que si la distribución fuera “infinita” en z , el campo solo podría depender de R (subir o bajar el origen de coordenadas o el alambre, no cambiaría nada).

Pero si fuera finita, tendríamos dos problemas: 1) el campo va a depender de z y 2) Si subimos o bajamos la curva C , la corriente concatenada sería distinta en distintos valores de z . Y existen dos valores de z donde su valor es discontinuo (donde empieza y donde termina la distribución). Esta discontinuidad inhabilita el uso en caso de que la distribución sea finita (pensarlo para un solo alambre). En consecuencia, debemos exigir que la distribución sea infinita **para poder usar la Ley de Ampere para determinar el campo**. Bajo esas condiciones

$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \oint_C B(R) R d\varphi = R B(R) \oint_C d\varphi = \mu_0 I_{\text{concatenada por } C}$$

Ahora cambiemos R por un valor genérico ρ

$$\rho B(\rho) 2\pi = \mu_0 I_{\text{concatenada por } C} = \mu_0 \iint_{S(C)} \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Observemos que si el radio de la curva es mayor o igual que el radio a de la distribución, la integral sobre la superficie es nula fuera de la distribución. Es decir, $\iint_{S(C)} \vec{J} \cdot d\vec{S} = J \pi a^2$ y

$$\rho B(\rho) 2\pi = \mu_0 J \pi a^2 \rightarrow B(\rho) = \frac{\mu_0 J}{2} \frac{a^2}{\rho} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{\rho}$$

Por otra parte, si la curva tuviera un radio menor que a , lo que será diferente es la corriente concatenada

$$\rho B(\rho) 2\pi = \mu_0 I_{\text{concatenada por } C} = \mu_0 \iint_{S(C)} \vec{J} \cdot d\vec{S} = \mu_0 J \pi \rho^2, \text{ por lo que}$$

$$B(\rho) = \frac{\mu_0 J}{2} \rho = \frac{\mu_0}{2} \frac{I}{\pi a^2} \frac{1}{\rho}$$

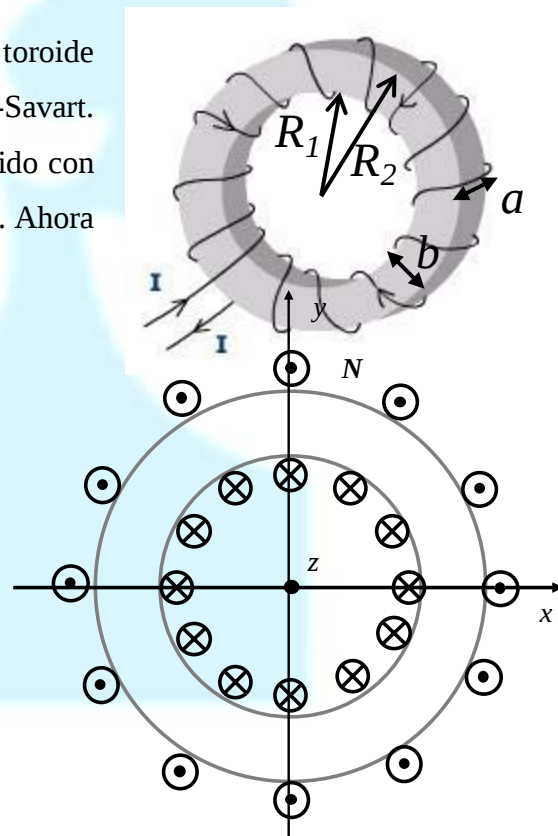
Si la curva hubiera sido elegida en sentido horario, el área hubiera tenido su normal en sentido contrario, por lo que el resultado hubiera sido el mismo.

En consecuencia, ahora podemos escribir que

$$\vec{B}(\rho) = \begin{cases} \frac{\mu_0 J}{2} \frac{a^2}{\rho} \vec{e}_\phi \\ \frac{\mu_0 J}{2} \rho \vec{e}_\phi \end{cases}$$

7.9.2 Ejemplo 6: Toroide de N espiras densamente arrolladas y sección rectangular

Como hemos visto, el campo generado por un toroide puede ser deducido a partir de la Ley de Biot-Savart. Pero nosotros hicimos una extensión de lo obtenido con el solenoide (aunque no escribimos su expresión). Ahora vamos a poder deducir su expresión a partir de la Ley de Ampere bajo determinadas condiciones. Si las espiras están densamente arrolladas, podemos inferir que el campo magnético estará confinado al interior y sus líneas copiarán el contorno (no nos metemos a indagar qué pasa en los bordes filosos porque estaríamos en problemas). Vamos a dibujar al toroide en el plano xy . Supongamos que la dimensión de la sección del toroide está dada por a y b ($b = R_2 - R_1$). Los círculos con cruz



indican que la corriente es entrante y las que tienen puntitos que es corriente saliente.

Con este sistema de coordenadas, y justificando con el campo en un solenoide (o superposición de espiras), podemos decir que $\vec{B}(\vec{r}) = B(\vec{r}) \vec{e}_\varphi$. Ya tenemos la dirección del campo. Ahora debemos establecer cuál es la probable dependencia con las coordenadas. Está claro que no puede depender de φ porque rotar el sistema de coordenadas (o el toroide) no va a cambiar el campo en un punto determinado y fijo del espacio. Si, además, consideramos que despreciamos los efectos de borde (en la dirección z), podemos considerar que el campo no depende de z . Es decir, a lo sumo, dependerá de la distancia ρ al origen. Resumiendo, tendremos que $\vec{B}(\vec{r}) = B(\rho) \vec{e}_\varphi$. Y ahora así estamos en condiciones de elegir una curva donde podamos asegurar que el campo tiene el mismo valor sobre la misma (no la misma dirección). La curva será una circunferencia centrada en el origen de coordenadas. Dibujemos varias (con distintos radios) donde

$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \oint_C \vec{B}(\rho) \cdot d\vec{l} = \oint_C B(\rho) \vec{e}_\varphi \cdot R d\varphi \vec{e}_\varphi = B(\rho) R \oint_C d\varphi = \mu_0 I_{\text{concatenada}} = \mu_0 \iint_{S(C)} \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Acá escribimos la corriente en su forma más general (como una **densidad volumétrica** $\vec{J}$) aunque en este caso tenemos algo parecido a una **densidad superficial** de corriente $\vec{K}$.

Por la elección del sentido de las curvas C_1 - C_4 , los $d\vec{S}$ tiene sentido de los z positivos. Es decir, $\iint_{S(C)} \vec{J} \cdot d\vec{S} = \iint_{S(C)} \vec{J} \cdot dS \vec{e}_z = \iint_{S(C)} \vec{J} \cdot \vec{e}_z dS$

1) Curva C_1

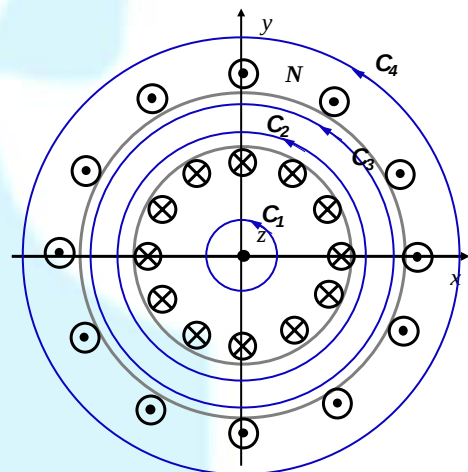
$$\oint_{C_1} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = B(\rho) R \oint_{C_1} d\varphi = \mu_0 I_{\text{concatenada}}. \text{ Pero la}$$

curva no concatena corriente por lo que $B(\rho) R \oint_{C_1} d\varphi = B(\rho) R 2\pi = 0$. La única

posibilidad es que el campo sea nulo. Y esto se va a cumplir para cualquier curva tal que su radio sea menor que el R_1 .

2) Curva C_2

$$\oint_{C_2} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = B(R_{C_2}) R_{C_2} \oint_{C_2} d\varphi = B(R_{C_2}) R_{C_2} 2\pi.$$



¿Qué corriente concatena la curva? Como el arrollamiento del toroide tiene N espiras y por cada una circula una corriente I , uno estaría tentado a decir que $I_{\text{concatenada}} = NI$. Pero debemos tener cuidado. La “densidad de corriente $\vec{J}$ ” es entrante, i.e., tiene sentido $-\vec{e}_z$.

Entonces $\iint_{S(C_2)} \vec{J} \cdot \vec{e}_z dS = \iint_{S(C_2)} J(-\vec{e}_z) \cdot \vec{e}_z dS = -NI$. Entonces

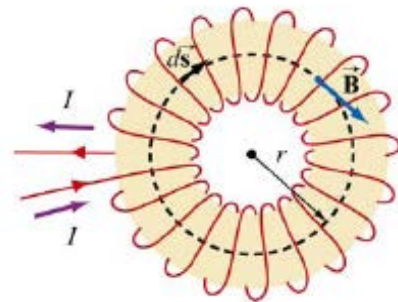
$B(R_{C_2}) R_{C_2} 2\pi = -\mu_0 NI \rightarrow B(R_{C_2}) = -\mu_0 \frac{NI}{2\pi R_{C_2}}$. Y como habíamos supuesto que

$\vec{B}(\vec{r}) = B(\rho) \vec{e}_\phi$, tendremos $\vec{B}(R_{C_2}) = -\mu_0 \frac{NI}{2\pi R_{C_2}} \vec{e}_\phi$. Observen que esto significa que el

campo magnético tiene sentido contrario al tomado como positivo de la curva (que también tomamos como el del campo).

3) Curva C_3 : el procedimiento es análogo al de la curva anterior. Podemos decir, entonces que dentro del toroide

$$\vec{B}(\rho) = -\mu_0 \frac{NI}{2\pi \rho} \vec{e}_\phi$$



4) Curva C_4 : En este caso debemos prestar atención a la corriente concatenada por la curva: hay N alambres en sentido de las z positivas, i.e., NI y N alambres en sentido de las z negativas, i.e., $-NI$. Consecuentemente, la corriente concatenada es nula. Y, haciendo el mismo razonamiento que en 1), concluimos que el campo es nulo fuera del toroide.

Podemos escribir, entonces que

$$\vec{B}(\rho) = \begin{cases} -\mu_0 \frac{NI}{2\pi \rho} \vec{e}_\phi & R_1 < \rho < R_2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

En algunas circunstancias, podría ser adecuado despreciar la variación del valor del campo dentro del toroide. En ese caso podríamos escribir

$$\vec{B}(\rho) = \begin{cases} -\mu_0 \frac{NI}{L} \vec{e}_\phi & R_1 < \rho < R_2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde L es la longitud de la circunferencia media (o la más chica o la más grande... justamente estamos despreciando su variación). Observar que esta “fórmula” coincide con la de un solenoide infinito (cambiando el largo del solenoide por la circunferencia media del toroide).

Nota final sobre Ley de Ampere integral: La discusión sobre el sentido de la densidad de corriente y el de la superficie puede parecer innecesario. Sin embargo, tenerlo en cuenta simplificará muchísimo la resolución de algunas situaciones o “problemas” en los que no es fácil determinar el sentido del campo “a ojo”.

7.10. Forma diferencial de la Ley de Ampere en vacío para corrientes constantes

A partir de la Ley de Ampere en forma integral, es muy sencillo obtener la misma Ley pero en forma diferencial. A partir de la forma más general para campos magnetostáticos en vacío

$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_{A(C)} \vec{J} \cdot d\vec{A}, \text{ podemos aplicar el Teorema de Stokes y obtenemos}$$

$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_{A(C)} \vec{J} \cdot d\vec{A} = \iint_{A(C)} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{A}$$

Recordando las condiciones del Teorema de Stokes de Análisis II, podemos escribir la Ley de Ampere en forma diferencial:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

ⁱ Griffiths Capítulo 5 pag 215

ⁱⁱ *El solenoide... ¿es infinito?* María Luz Franqueiro, Gastón Manestar, Eduardo Poggio, Gabriel Raffa, Mariana Mesaros, Liliana I. Perez, Guillermo Santiago
Anales AFA, 21 1-9 Rosario 2009 (2010) ISSN en línea 1850-1158. Asociación Física Argentina

ⁱⁱⁱ Griffiths Capítulo 5

Capítulo 8

Materiales Magnéticos

8.1.	<u>Introducción</u>	8-2
8.2.	<u>Descripción microscópica de los materiales magnéticos</u>	8-2
8.2.1.	<u>Momento magnético y momento angular</u>	8-3
8.2.2.	<u>Momento angular y momento de espín</u>	8-4
8.3.	<u>Ecuaciones magnetostáticas en presencia de materiales magnéticos</u>	8-5
8.3.1.	<u>Corrientes de magnetización, corrientes reales y magnetización</u>	8-5
8.3.2.	<u>Teorema de Ampere generalizado</u>	8-7
8.3.3.	<u>Relación entre $\vec{B}$, $\vec{H}$ y $\vec{M}$ en materiales lineales</u>	8-8
8.3.4.	<u>Ecuaciones fundamentales de la Magnetostática en presencia de Materiales Magnéticos</u>	8-9
8.3.5.	<u>Clasificación de Materiales Magnéticos</u>	8-9
8.4.	<u>Ferromagnetismo - Ciclo de Histéresis</u>	8-10
8.4.1.	<u>Curva de Magnetización-Ciclo de Histéresis</u>	8-12
8.5.	<u>Condiciones de frontera o de borde</u>	8-14
8.6.	<u>Circuitos Magnéticos. Aproximación de flujo constante</u>	8-17
8.6.1.	<u>Ecuaciones fundamentales de los circuitos magnéticos</u>	8-17
8.6.2.	<u>Aproximación de flujo de $\vec{B}$ constante</u>	8-18
8.6.3.	<u>Validez de la aproximación de flujo de $\vec{B}$ constante</u>	8-19
8.7.	<u>Materiales lineales: Fuerza magnetomotriz y Reluctancia. Regla de Hopkinson</u>	8-21
8.8.	<u>Aplicaciones</u>	8-23
8.8.1.	<u>Toroide grueso</u>	8-23
8.8.2.	<u>Toroide delgado con entrehierro estrecho</u>	8-25
8.8.3.	<u>Circuito magnético delgado con entrehierro</u>	8-26
8.8.4.	<u>Toroide delgado con entrehierro estrecho y material magnético con ciclo de histéresis</u>	8-29
	<u>Bibliografía</u>	8-33

8.1. *Introducción*

La inclusión de los medios materiales en el estudio del magnetismo muestra resultados muy diferentes cuando se lo compara con los medios materiales en el estudio de la electrostática. Anteriormente se estudió cuál era el efecto que los campos eléctricos producían sobre los materiales (materiales eléctricos). Tratamos únicamente a los materiales dieléctricos y se observó que su efecto era siempre reducir el campo neto (generado por una determinada cantidad de carga eléctrica "libre"). En cambio, cuando nos ocupamos de los efectos de los campos magnéticos sobre los materiales, hablaremos de materiales magnéticos ya que su efecto puede ser alguno de los siguientes:

- 1) El campo $\vec{B}$ se reduce un poco (materiales diamagnéticos).
- 2) El campo $\vec{B}$ es un poco superior al correspondiente al vacío (materiales paramagnéticos).

En estos dos primeros casos el material presenta un comportamiento lineal. Además, en estos materiales, los efectos magnéticos son prácticamente despreciables por lo que para este curso, vamos a considerarlos, en general, como nulos. En otras palabras, los materiales diamagnéticos y los paramagnéticos serán considerados con las mismas propiedades que el vacío o el aire.

3) El campo $\vec{B}$ aumenta mucho respecto del campo en vacío (materiales ferromagnéticos). En este caso el comportamiento del material es no lineal y sus propiedades dependen de la historia previa a la que fue sometida el material en estudio. Este tipo de comportamiento genera complicaciones. Como veremos en este capítulo, a pesar que el material ferromagnético es no lineal, en algunas situaciones vamos a poder aproximarlos como lineal. Por otro lado, es importante destacar que este tipo de materiales son los que tienen los efectos magnéticos más importantes y, por lo tanto, son nuestro objeto de estudio.

8.2 *Descripción microscópica de los materiales magnéticos*

¿Cuál es el origen microscópico de los efectos magnéticos de los materiales? Responder esta pregunta no es sencillo, una explicación completa de las diferentes tipos de comportamientos (diamagnetismo, paramagnetismo, ferromagnetismo, etc.) de los materiales magnéticos escapa a los conocimientos que se pueden adquirir en este curso. Para realizarla es necesario conocer la rama de la Física denominada Mecánica Cuántica. De todos modos, se

pretende a continuación explicar un modelo muy simplificado que nos dará una idea de los efectos magnéticos de los materiales.

8.2.1 Momento magnético y momento angular

Comencemos nuestro análisis con un modelo clásico del átomo en el que los electrones se mueven en órbitas circulares alrededor del núcleo, que tiene mucha más masa que un electrón (figura 8.1). En este modelo, un electrón orbitando constituye una pequeña espira de corriente (porque es una carga en movimiento) como muestra la figura 8.2. Pero como se mencionó previamente, toda espira cerrada con corriente tiene asociado un momento magnético (que lo podemos pensar como un imán) normal al plano de la misma. En otras palabras, una espira de corriente se comporta como un imán con sus polos Norte-Sur orientados en dirección normal al plano de movimiento. En este caso, el momento magnético $\vec{m}$ (dipolo magnético) del electrón está asociado con este movimiento orbital de momento angular $\vec{L}$.

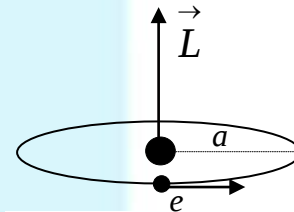


Figura 8.1 Modelo planetario de un átomo con un electrón en una órbita.

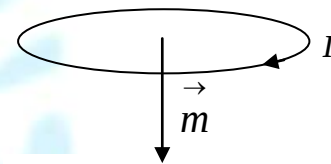


Figura 8.2 Movimiento orbital de un electrón visto como una espira de corriente.

En nuestro modelo clásico, suponemos que el electrón se mueve con velocidad $\vec{v}$ (de módulo constante) en una órbita circular de radio a alrededor del núcleo, como en la figura 8.1. Debido a que el electrón viaja una distancia de $2\pi a$ en un intervalo de tiempo igual al período T , su velocidad orbital es $v = 2\pi a / T$. La corriente I asociada a este electrón orbitando es su carga e dividido por T , esto es:

$$I = \frac{e}{T} = \frac{ev}{2\pi a} \quad (8.1)$$

Como se ha visto previamente (Sec 6.4), la magnitud del momento magnético asociado con esta espira de corriente es:

$$\vec{m} = I\pi a^2 \hat{n} = \frac{ev}{2} a \hat{n} \quad (8.2)$$

(con $\hat{n}$ la normal al plano en el cual se realiza el movimiento del electrón)

Consecuentemente, si relacionamos (8.2) con el momento angular $\vec{L} = m_e v a \hat{n}$ podemos encontrar:

$$\vec{m} = \left(\frac{e}{2m_e} \right) \vec{L} \quad (8.3)$$

Este simple modelo nos permite decir que el movimiento orbital del electrón, que lo pensamos como una espira de corriente, es lo que genera en primera aproximación el momento magnético del átomo (aunque existen otras contribuciones como veremos más adelante). Este $\vec{m}$ del electrón, que lo relacionamos con el momento angular por medio de (8.3), es lo que da indicios del origen microscópico de los efectos magnéticos. En otras palabras, este modelo simplificado permite decir que la existencia de una partícula cargada (electrón) que orbita alrededor del núcleo y por lo tanto tiene un momento angular es el causante del comportamiento magnético del átomo.

En este modelo, el momento magnético del electrón interactúa con el campo magnético externo en el que se encuentra, actuando una cupla neta $\vec{T}_F = \vec{m} \times \vec{B}$ que tiende a alinearlos con el mismo.

8.2.2 Momento angular y momento de espín

En mecánica cuántica además del momento angular, existe también el denominado momento de espín, que si bien estrictamente no tiene una analogía en mecánica clásica, es común asociarlo con el giro del electrón sobre si mismo. En general, los campos creados por los materiales magnéticos surgen de dos fuentes atómicas: los momentos angulares orbitales y de espín de los electrones, que al estar en movimiento continuo en el material, experimentan fuerzas ante un campo magnético aplicado. Ambos momentos tienen asociados momentos magnéticos por relaciones similares a (8.3). Por lo tanto, las características magnéticas de un material pueden cambiar por aleación con otros elementos, donde se modifican por las interacciones atómicas. Por ejemplo, un material no magnético como el aluminio puede comportarse como un material magnético en materiales como AlNiCo (aluminio-níquel-cobalto) o manganeso-aluminio-carbono.

- Todo material está compuesto por átomos que contienen electrones móviles. Un campo magnético externo aplicado actúa siempre sobre los electrones considerados individualmente, como el modelo simple de la figura 8.1. Esto da origen al efecto universal llamado diamagnetismo. Este es un efecto clásico y depende solamente del movimiento de los electrones.

• A nivel atómico, la superposición de los momentos magnéticos (orbital, debido al movimiento del electrón alrededor del núcleo, e intrínseco o de espín) aportados por los electrones al átomo o molécula del cual forman parte da un momento magnético resultante o neto del átomo o molécula. Cuando hay un momento neto atómico o molecular los momentos magnéticos tienden a alinearse con el campo aplicado (o con los campos creados por momentos magnéticos vecinos), dado lugar al efecto del paramagnetismo. Simultáneamente, la energía térmica omnipresente tiende a orientar al azar a los momentos magnéticos, de manera que la intensidad relativa de todos estos efectos determinará en definitiva el comportamiento del material. En la figura 8.3 se esquematiza un material no magnetizado: los momentos magnéticos están orientados al azar.



Figura 8.3 Momentos magnéticos orientados al azar

8.3 Ecuaciones magnetostáticas en presencia de materiales magnéticos

8.3.1 Corrientes de magnetización y corrientes reales

Los materiales magnéticos están formados por muchísimos dipolos magnéticos permanentes o inducidos que se alinearán con el campo magnético exterior. Cada átomo del material tiene momento magnético que no es otra cosa que un imán elemental, pero que también se puede pensar como una pequeña espira por la que circula una corriente i tal como se explicó en las figuras 8.1 y 8.2. En este modelo simplificado, las corrientes asociadas a los momentos magnéticos elementales reciben el nombre de “corrientes de magnetización” y se las simboliza como i_m . Vamos a diferenciar a estas corrientes de magnetización, de las corrientes verdaderas que circulan por los conductores, a estas últimas las llamaremos corrientes reales y se las simboliza como i_r .

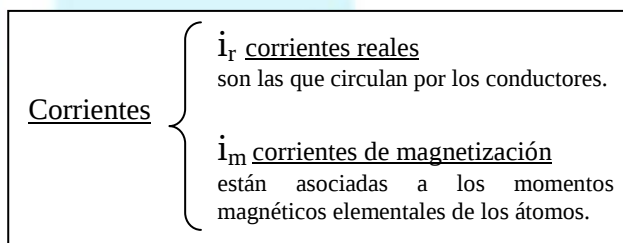


Figura 8.4 Clasificación de las corrientes

Definimos magnetización $\vec{M}$ como un vector que da cuenta de la cantidad de momentos magnéticos elementales por unidad de volumen, esto es:

$$\vec{M} = \frac{\delta \vec{m}}{\delta V} \quad (8.4)$$

Este vector es el análogo magnético al vector polarización de electrostática ($\vec{P}$); es distinto de cero únicamente en el interior de los materiales magnéticos y su unidad de medida en el SI es A/m.

A continuación analizaremos la relación entre la magnetización y las corrientes de magnetización. En realidad, lo que haremos es ver un caso muy sencillo y luego “aceptaremos” su generalización. Para ello tomemos un toroide de un material magnético, que se encuentra magnetizado con una magnetización uniforme, en la dirección azimutal, como muestra la figura 8.5.

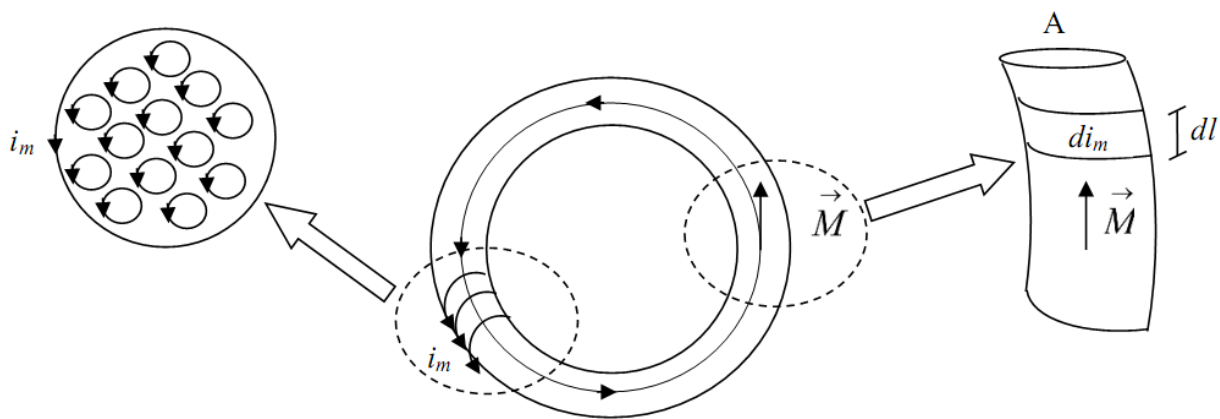


Figura 8.5 Toroide magnetizado de área A con magnetización uniforme $\vec{M}$. En el detalle de la izquierda se observa un corte del mismo, donde se indica el momento magnético elemental de cada átomo, como una pequeña espira. La superposición de los momentos magnéticos da una corriente de magnetización total i_m circulando por la superficie externa. A la derecha se observa una ampliación de una fracción del toroide, donde se indica, para un diferencial de longitud dl , la cantidad diferencial de corriente di_m que está circulando por el borde del toroide.

Sobre este toroide, debido a que se encuentra magnetizado, cada átomo se comporta como un momento magnético elemental o una pequeña espira (ver detalle izquierdo en figura 8.5). La superposición de los momentos magnéticos sobre el corte del toroide da una corriente de magnetización total neta i_m circulando exclusivamente por la superficie externa¹. Esta corriente está distribuida uniformemente a lo largo de toda la longitud del perímetro del

¹ Se puede demostrar que las densidades de corrientes de magnetización asociadas con una región con magnetización $\vec{M}$ son:

- en el interior del material $\vec{J}_M = \text{rot}(\vec{M})$ y

- en el borde del material $\vec{K}_M = \hat{n} \times \vec{M}$ con $\hat{n}$ la normal a la superficie.

En este caso particular, como $\vec{M}$ es uniforme $\vec{J}_M = 0$ y $|\vec{K}_M| = \frac{di_m}{dl}$ es constante y tiene la dirección mostrada en la figura 8.5.

toroide, de tal manera que si tomamos un diferencial de longitud dl (en la dirección azimutal) está circulando una cantidad diferencial de corriente di_m a lo largo de la sección del toroide. Además, i_m es la corriente total que circula por el largo $2\pi r$ del toroide. De esta manera, usando (8.2) en (8.4):

$$\vec{M} = \frac{\delta \vec{m}}{\delta V} = \frac{A di_m}{A dl} \hat{n} = \frac{di_m}{dl} \hat{n} \quad (8.5)$$

Pero

$$i_m = \int di_m \quad \begin{matrix} dl \rightarrow di_m \\ 2\pi r \rightarrow i_m \end{matrix} \quad di_m = \frac{i_m dl}{2\pi r}$$

Entonces:

$$\vec{M} = \frac{di_m}{dl} \hat{n} = \frac{i_m}{2\pi r} \hat{n} \quad (8.6)$$

$$i_m = M 2\pi r = \oint \vec{M} \cdot d\vec{l} \quad (8.7)$$

La ecuación (8.7) nos muestra que **el vector magnetización es generado exclusivamente por la corriente de magnetización.**

8.3.2 Teorema de Ampere generalizado

En general, cuando se quiere determinar el campo magnético $\vec{B}$ se deberían conocer tanto las corrientes reales como las de magnetización y, en ese caso, este campo se podrá determinar usando el teorema de Ampere, esto es:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (i_r + i_m) \quad (8.8)$$

Pero habitualmente las corrientes de magnetización son desconocidas. Esto nos lleva a hacer un tratamiento similar al hecho con materiales dieléctricos (capítulo 3, sección 3.3), determinando un campo vectorial de origen magnético, que sea exclusivamente generado por las corrientes reales. Esto es, usando (8.7) en (8.8):

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(i_r + \oint_C \vec{M} \cdot d\vec{l} \right) \quad (8.9)$$

Así:

$$\oint_C \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) \cdot d\vec{l} = i_r \quad (8.10)$$

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = i_r \quad (8.11)$$

con

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad (8.12)$$

El **campo magnético** $\vec{B}$ se denomina vector inducción magnética o densidad de flujo magnético y se mide en T. El campo $\vec{H}$ se denomina **intensidad de campo magnético** y se mide en A/m.

La ecuación (8.11) se denomina teorema de Ampere generalizado, que en situaciones de determinadas simetrías, permite obtener este nuevo campo $\vec{H}$ que es generado exclusivamente por las corrientes reales.

8.3.3 Relación entre $\vec{B}$, $\vec{H}$ y $\vec{M}$ en materiales lineales

A partir de la ley de Ampere generalizada (ec 8.11) se observa que el campo $\vec{H}$ es generado por las corrientes reales. Cuanto mayor sean éstas, es de esperar que mayor sea la magnetización del material. En otras palabras, cuanto mayor sea el campo externo al material, mayor será el grado de magnetización. Por lo tanto, se propone una relación lineal entre $\vec{M}$ y $\vec{H}$ para los denominados materiales lineales isótropos y homogéneos (L.I.H.), esto es:

$$\vec{M} = \chi \vec{H} \quad (8.13)$$

donde χ es la denominada la susceptibilidad magnética y es una propiedad intrínseca adimensional del material.

De (8.12) obtenemos $\vec{B}$ (vector inducción magnética):

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 \cdot (\vec{H} + \chi \vec{H}) = \mu_0 \cdot (1 + \chi) \vec{H} = \mu_0 \cdot \mu_r \vec{H} \quad (8.14)$$

En (8.14) $\mu_r = 1 + \chi$ es la permeabilidad relativa del material.

Escribimos el último miembro de (8.14) como:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (8.15)$$

En (8.15) $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$ es la permeabilidad absoluta del material magnético, cuyas unidades en el SI son Tm/A.

Las relaciones $\vec{M} = \chi \vec{H}$ y $\vec{B} = \mu \vec{H}$ son equivalentes y se denominan relación constitutiva del material L.I.H..

La aplicación conjunta de las ecuaciones (8.11) y (8.15), esto es la ecuación generalizada de Ampere y la relación constitutiva, es la base que nos ayuda a obtener el vector inducción magnética $\vec{B}$ en el caso de los materiales magnéticos L.I.H.

8.3.4 Ecuaciones fundamentales de la Magnetostática en presencia de Materiales Magnéticos

Las ecuaciones fundamentales de la magnetostática en presencia de materiales magnéticos son las relaciones asociadas con la divergencia y el rotor de los campos magnéticos, que en sus versiones integrales son el teorema de Ampere generalizado (Ec (8.11)) y la ecuación de inexistencia de monopolos magnéticos (ya vista previamente), éstas son:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = i_r \quad (8.16)$$

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (8.17)$$

La ecuación (8.17) es la ecuación que indica que experimentalmente nunca se encontraron monopolos magnéticos aislados, los polos magnéticos siempre son encontrados de a pares en una configuración dipolar.

Las versiones en derivadas parciales de estas expresiones son:

$$\text{rot}(\vec{H}) = \vec{J}_r \quad (8.18)$$

donde $\vec{J}_r$ es la densidad de corriente real.

$$\text{div}(\vec{B}) = 0 \quad (8.19)$$

8.3.5 Clasificación de Materiales Magnéticos

Como se mencionó en la introducción los materiales magnéticos se dividen en tres grandes grupos: diamagnéticos, paramagnéticos y ferromagnéticos. En los primeros dos grupos se verifican las relaciones lineales dadas por las ecuaciones (8.13) y (8.15), aunque los efectos magnéticos son prácticamente despreciables:

Diamagnéticos: la susceptibilidad magnética χ es negativa y en módulo es mucho menor que 1; los valores típicos van desde -10^{-5} hasta unas decenas de -10^{-5} . La magnetización es del orden 100.000 veces más chica que el campo $\vec{H}$ y en dirección contraria al mismo. Son materiales diamagnéticos: plata, plomo, cobre, mercurio, bismuto,

etc. La permeabilidad μ es prácticamente la del vacío, aunque levemente menor. Los campos $\vec{B}$ y $\vec{H}$ presentan la misma dirección y sentido.

Paramagnéticos: la susceptibilidad magnética χ es positiva pero mucho menor que 1; los valores típicos van desde 10^{-5} hasta unas decenas de 10^{-5} . La magnetización es del orden 100.000 veces más chica que el campo $\vec{H}$ y en la misma dirección. Son materiales paramagnéticos: aluminio, sodio, platino, uranio, etc. La permeabilidad μ es prácticamente la del vacío, aunque levemente mayor. Los campos $\vec{B}$ y $\vec{H}$ presentan la misma dirección y sentido.

El tercer grupo, los materiales ferromagnéticos, tienen efectos magnéticos muy apreciables, pero con una complicación, las relaciones lineales (8.13) y (8.15) dejan de valer:

Ferromagnéticos: Debido a que las relaciones lineales en Física simplifican los cálculos, y a pesar que estos materiales son no lineales, vamos a seguir utilizando las ecuaciones (8.13) y (8.15) imponiendo que las constantes de proporcionalidad χ y μ , respectivamente, son funciones del vector intensidad campo magnético $\vec{H}$ y de la historia previa del material, y vamos a hablar de valores equivalentes de la susceptibilidad magnética χ y de la permeabilidad μ . En esta situación, la susceptibilidad magnética “equivalente” χ_{eq} es positiva y puede tomar valores muy altos del orden de decenas de mil. En estos casos la magnetización es muy alta, decenas de miles de veces mayor al campo $\vec{H}$. Este efecto se observa en unos pocos elementos y estos materiales son el verdadero interés de estudio de este curso. Son los llamados materiales ferromagnéticos. Son ejemplos de ellos: hierro, níquel, cobalto, etc.

8.4 Ferromagnetismo - Ciclo de Histéresis

Otra de las propiedades características de los materiales ferromagnéticos, además de su muy elevada susceptibilidad magnética “equivalente” ($\chi_{eq} \gg 1$), es la posibilidad de tener una magnetización residual, esto es una magnetización no nula para un campo magnético externo igual a cero ($\vec{M} \neq 0$ con $\vec{H} = 0$), característica ésta que no presentan los materiales lineales (diamagnéticos y paramagnéticos).

Si bien no existe una teoría clásica que pueda explicar este fenómeno en su totalidad, muchas de las propiedades observadas pueden ser entendidas a partir del **Modelo de Weiss** (1907). Este modelo propone, entre otras cosas, la existencia de dominios, definidos como

grupos de átomos o moléculas dentro de los cuales los momentos magnéticos se mantienen alineados entre sí debido a un fuerte acoplamiento, aún en ausencia de campo exterior. El origen de la formación dominios es minimizar la energía magnética (ver representación esquemática en Figura 8.6). Al igual que los momentos individuales, en ausencia de campo aplicado, los dominios tienen sus momentos magnéticos netos (esto es el momento magnético del dominio) distribuidos al azar, es decir, la dirección de la magnetización varía entre un dominio y otro (algo análogo a lo mostrado en la Figura 8.3. para momentos individuales).

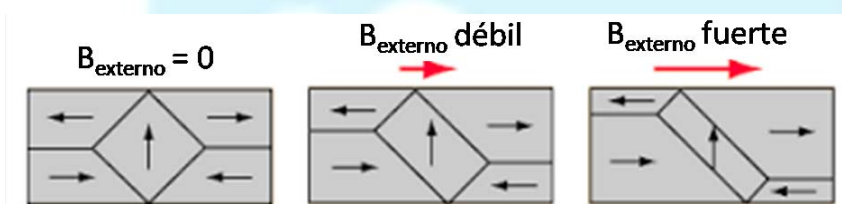


Figura 8.6 Esquema de dominios magnéticos para distintas situaciones de campos externos aplicados.

Cuando se aplica un campo exterior, los dominios tienden a alinearse con el campo. En algunos casos el acoplamiento es tan fuerte que el alineamiento perdura aún al retirar el campo, lo que explica la existencia de magnetización residual.

La agitación térmica tiende a desalinear los dominios. Por encima de una cierta temperatura, llamada temperatura de Curie (T_C), el material ferromagnético sufre una transición y se vuelve paramagnético, debido a que los efectos térmicos de desorden son mayores que los efectos de alineamiento de la interacción magnética entre dominios. Una forma de desmagnetizar un material ferromagnético es entonces calentarlo por encima de esta temperatura. La temperatura de Curie caracteriza a cada material y en la Tabla 1 se presentan los valores de T_C de algunos materiales ferromagnéticos. Se puede observar que estas temperaturas son en algunos casos muy altas y cercanas a las temperaturas de fusión del elemento, por lo que en la práctica la desmagnetización por temperatura es, en general, un proceso parcial.

Tabla 1. Temperatura de Curie de algunos elementos

Material	T_C (K)
Co (cobalto)	1388
Fe (hierro)	1043
Ni (níquel)	627
Gd (gadolinio)	293
Dy (disprosio)	85

La habilidad de un material magnético para soportar, sin cambios en sus propiedades, diversos tipos de ambientes y condiciones de trabajo define los tipos de aplicaciones en que se lo puede usar. Según este criterio se suele clasificar a los materiales magnéticos según:

✓ Los materiales que pierden su magnetización cuando se retira el campo exterior que la produjo se llaman materiales magnéticos **blandos**. Estos materiales son útiles para concentrar o conformar campos magnéticos. Se utilizan para fabricar transformadores.

✓ Aquellos materiales que mantienen la magnetización al quitar el campo aplicado se denominan **duros**. Se utilizan para la fabricación de imanes permanentes.

Suele llamarse imán a cualquier objeto que produce un campo magnético. Un imán permanente es un material que, cuando se lo coloca en un campo magnético suficientemente intenso, se magnetiza, quedando con magnetización remanente aún después de ser retirado el campo aplicado. Esta propiedad no se altera ni se debilita mayormente con el tiempo salvo cuando el imán se somete a cambios de temperatura, campos desmagnetizantes, tensiones mecánicas, etc.

8.4.1 Curva de Magnetización-Ciclo de Histéresis

En los materiales ferromagnéticos la relación entre la magnetización y el campo externo aplicado no es única sino que depende de la historia previa del material, este fenómeno se denomina histéresis. La representación gráfica de la magnetización en función del campo aplicado se denomina ciclo o curva de histéresis. Una curva típica se muestra en la figura 8.7.

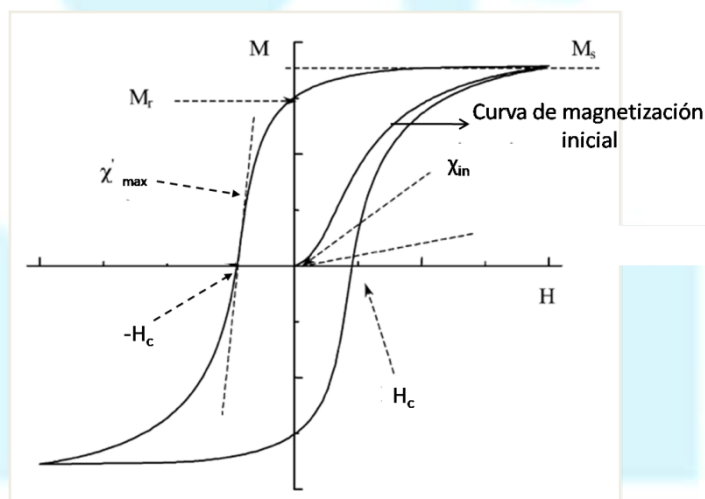


Figura 8.7 Curva de histéresis típica en la que se señalan algunos valores de interés.

Si se parte de un estado desmagnetizado (origen de coordenadas en el gráfico), a medida que el campo externo $\vec{H}$ aumenta el material aumenta su magnetización siguiendo lo que se conoce como curva de magnetización inicial. Este incremento se da mediante la rotación y coalescencia (unión) de los dominios magnéticos. Este proceso tiene lugar hasta que todos los dominios del material se encuentran alineados con el campo externo aplicado, momento en el cual la magnetización alcanza su valor de saturación (M_s : magnetización de saturación). Si, desde este punto de saturación, se disminuye la intensidad de $\vec{H}$ se observa que la curva no vuelve por la trayectoria anterior sino que sigue un camino distinto. Esto sucede porque los mecanismos que gobiernan el proceso de magnetización del material son fuertemente no lineales. Una vez que el campo externo llega a cero el material queda magnetizado con un valor llamado magnetización remanente o de remanencia (M_r). El material quedará desmagnetizado al llegar al valor $-H_c$ (campo coercitivo). Si se continúa aumentando en valores negativos el valor del campo externo se llega a una nueva saturación, esta vez con el sentido opuesto a la anterior. A partir de allí el ciclo de completa de manera simétrica.

Por otra parte, como la relación entre $\vec{M}$ y $\vec{H}$ no es lineal en estos materiales, la susceptibilidad (χ) no es una constante sino que depende del valor de $\vec{H}$. En la figura 8.7 se muestran los valores de χ_{in} (susceptibilidad inicial) y χ_{max} (susceptibilidad máxima) considerados como la pendiente de la recta tangente en los puntos correspondientes.

Una representación análoga a la mostrada en la figura 8.7 puede hacer para $\vec{B}$ vs $\vec{H}$. En ese caso $\vec{B}$ no satura sino que continúa aumentando ligeramente a medida que aumenta $\vec{H}$, es decir, para campos externos grandes $\vec{B}$ se vuelve lineal con $\vec{H}$ ya que $\vec{M}$ deja de aumentar (satura).

Entonces, para los materiales ferromagnéticos **no podemos escribir una relación funcional** entre $\vec{M}$ y $\vec{H}$ (o entre $\vec{B}$ y $\vec{H}$) ya que los valores dependen fuertemente de la historia (magnética) previa del material. Además, las curvas de histéresis son distintas para diferentes materiales. Dependen de la composición química del material pero también de las características de su preparación.

Sin embargo, a pesar que estos materiales son no lineales, resulta de gran simplicidad poder seguir utilizando las ecuaciones (8.13) y (8.15). La utilización de estas ecuaciones sirve para resolver los problemas de materiales magnéticos en forma más simple. Esto se logra,

imponiendo que las constantes de proporcionalidad χ y μ son ahora funciones del vector intensidad campo magnético $\vec{H}$ y de la historia previa del material, y vamos a hablar de valores equivalentes de la susceptibilidad magnética χ y de la permeabilidad μ . En otras palabras, reescribimos las ecuaciones (8.13) y (8.15) de la siguiente manera:

$$\vec{M} = \chi_{(H, \text{historia})} \vec{H} \quad (8.13 \text{ bis})$$

$$\vec{B} = \mu_{(H, \text{historia})} \vec{H} \quad (8.15 \text{ bis})$$

O sea, para una determinada situación física, donde se conoce el rango de valores de $\vec{H}$ y la historia previa del material, se podrá conocer el valor equivalente de la susceptibilidad y de la permeabilidad (para ese rango de valores de $\vec{H}$) y en este caso se usarán las ecuaciones constitutivas (8.13) y (8.15). Resulta claro que si se cambia el valor de la intensidad de campo magnético $\vec{H}$, la susceptibilidad y la permeabilidad cambiarán. De la misma manera, hablaremos de valores equivalentes para la permeabilidad relativa.

8.5 Condiciones de frontera o de borde

En este apartado vamos a establecer las condiciones que satisfacen $\vec{H}$ y $\vec{B}$ en la superficie de separación de dos medios con propiedades magnéticas diferentes. El desarrollo será análogo al que se hizo para encontrar las condiciones de borde de $\vec{E}$ y $\vec{D}$ (Capítulo 3, sección 3.4).

Supongamos que tenemos dos medios magnéticos de permeabilidades μ_1 y μ_2 , tal que en la interfaz hay una corriente superficial dada por $\vec{K}_r$.

Partimos de la ec. (8.17), como superficie cerrada de integración tomamos un cilindro de altura h mucho menor que su radio R , es decir, $h \rightarrow 0$ más rápidamente que su radio (ver figura 8.8). Entonces,

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 = \iint_{A_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \iint_{A_2} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \iint_{\text{Sup lateral}} \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (8.20)$$

Como estamos considerando un cilindro cuya altura h tiende a cero, es decir, un “volumen” infinitesimal alrededor de la interfaz, podremos considerar que el campo a cada lado de la interfaz es uniforme. Supongamos que vale $\vec{B}_1$ (con cualquier dirección y sentido) por encima de la interfaz, $\vec{B}_2$ (con cualquier dirección y sentido) debajo de la interfaz y en la superficie

lateral tendrá otro valor $\vec{B}_{lat}$ (con cualquier dirección y sentido). Consecuentemente, la ecuación (8.20) puede escribirse según,

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{A_1} \vec{B}_1 \cdot \vec{n}_1 dS + \iint_{A_2} \vec{B}_2 \cdot \vec{n}_2 dS + \int_{-h/2}^{h/2} \vec{B}_{lat} \cdot \vec{e}_\rho 2\pi R dh = \vec{B}_1 \cdot \vec{n}_1 \pi R^2 + \vec{B}_2 \cdot \vec{n}_2 \pi R^2 + \vec{B}_{lat} \cdot \vec{e}_\rho 2\pi R h \quad (8.21)$$

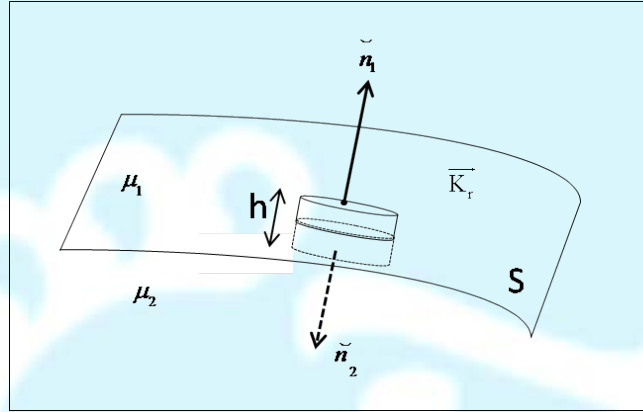


Figura 8.8 Superficie de separación de dos medios con permeabilidades distintas. Esquema utilizado para la obtención de la condición de borde de la componente normal.

En las condiciones que estamos considerando, i.e. $h \rightarrow 0$, el término asociado con la superficie lateral tenderá a cero. Resulta, entonces,

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \vec{B}_1 \cdot \vec{n}_1 \pi R^2 + \vec{B}_2 \cdot \vec{n}_2 \pi R^2 = (\vec{B}_1 \cdot \vec{n}_1 + \vec{B}_2 \cdot \vec{n}_2) \pi R^2 \quad (8.22)$$

En consecuencia,
$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = (\vec{B}_1 \cdot \vec{n}_1 + \vec{B}_2 \cdot \vec{n}_2) \pi R^2 = 0 \quad (8.23)$$

Como $-\vec{n}_1 = \vec{n}_2 \equiv \vec{n}$, resulta

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n} = 0 \quad (8.24)$$

$$B_{2normal} = B_{1normal}$$

Esta última ecuación nos dice que la componente normal del campo de inducción magnética $\vec{B}$ se conserva.

En particular, para el caso que estemos considerando medio isótropos, lineales y homogéneos $\vec{B} = \mu \vec{H}$, de donde resulta:

$$\mu_1 H_{1normal} = \mu_2 H_{2normal}.$$

Una observación interesante que podemos hacer llegado este punto es que, si $\vec{B}$ sólo tiene componente normal, entonces valdrá lo mismo a un lado y a otro de la interfaz, esto es $B_1 = B_2$. Sin embargo, $\vec{H}$ (que también tendrá sólo componente normal para el caso de

medios L.I.H.) no tendrá el mismo valor a ambos lados por tratarse de dos medios con permeabilidades distintas, sino que $\mu_1 H_1 = \mu_2 H_2$.

Ahora veamos si podemos determinar alguna otra propiedad, pero esta vez a partir de la ecuación para el rotor del campo $\vec{H}$ (ec. 8.18). Tomemos una curva cerrada como la de la figura 8.9, donde “la altura” h tiende a cero más rápidamente que las longitudes de la curva “paralelas” a la interfaz.

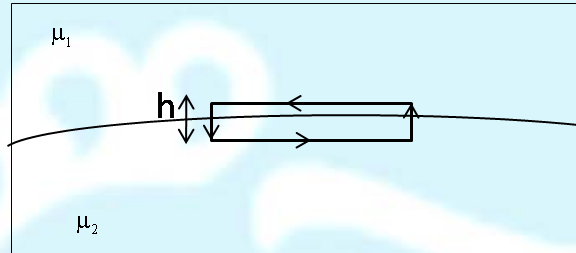


Figura 8.9 Superficie de separación de dos medios con permeabilidades distintas. Esquema utilizado para la obtención de la condición de borde de la componente tangencial.

Calculemos la circulación del campo magnético

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{l_1} \vec{H}_1 \cdot d\vec{l}_1 + \int_{l_2} \vec{H}_2 \cdot d\vec{l}_2 + \int_{l_3} \vec{H}_3 \cdot d\vec{l}_3 + \int_{l_4} \vec{H}_4 \cdot d\vec{l}_4 \quad (8.25)$$

Como los lados de longitud h tienden a cero, las dos integrales sobre esos lados son despreciables frente a las otras dos restantes, es decir:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{l_1} \vec{H}_1 \cdot d\vec{l}_1 + \int_{l_2} \vec{H}_2 \cdot d\vec{l}_2 + \int_{l_3} \vec{H}_3 \cdot d\vec{l}_3 + \int_{l_4} \vec{H}_4 \cdot d\vec{l}_4 \cong \int_{l_1} \vec{H}_1 \cdot d\vec{l}_1 + \int_{l_2} \vec{H}_2 \cdot d\vec{l}_2 \quad (8.26)$$

Como solamente nos quedan las componentes tangenciales a la superficie evaluadas “en la superficie” tendremos

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} \cong \int_{l_1} \vec{H}_1 \cdot d\vec{l}_1 + \int_{l_2} \vec{H}_2 \cdot d\vec{l}_2 = H_{1\text{tangencial}} l_1 - H_{2\text{tangencial}} l_1 = K_r l_1 \quad (8.27)$$

Por lo tanto,

$$\vec{H}_{2\text{tangencial}} - \vec{H}_{1\text{tangencial}} = K_r \quad (8.28)$$

lo que significa que la componente tangencial del campo magnético en condiciones magnetostáticas cambia en una interfaz si hay corrientes superficiales reales ($\vec{K}_r \neq 0$).

Las condiciones de borde o frontera que se enuncian en las ecs. (8.24) y (8.28) son válidas para cualquier material magnético.

8.6 Circuitos Magnéticos. Aproximación de flujo constante

Un circuito magnético es una región cerrada del espacio donde hay concentración de líneas de campo magnético. Habitualmente, las regiones de materiales ferromagnéticos concentran las líneas de campo magnético, por lo tanto, los circuitos magnéticos están formados por una sucesión de materiales ferromagnéticos que forman un camino cerrado, aunque también se puede agregar una región con vacío (o aire) de pequeña extensión, denominada habitualmente entrehierro. El circuito magnético más sencillo es el anillo de Rowland, que se muestra en la figura 8.10. Como se ve en la figura, existe un devanado primario de N vueltas, supuestamente distribuidas en forma uniforme cubriendo todo el anillo, por las que circula una corriente I .

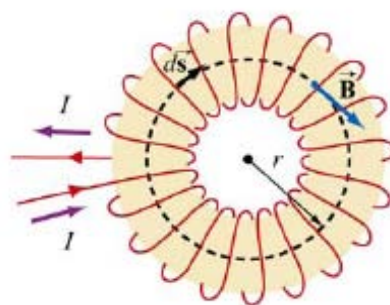


Figura 8.10 Anillo de Rowland

En la figura 8.11 vemos otro circuito magnético construido con un material ferromagnético de permeabilidad “equivalente” μ , de sección rectangular S alimentado por N espiras por la que circula una corriente I .

8.6.1 Ecuaciones fundamentales de los circuitos magnéticos

Las relaciones que rigen el comportamiento de los campos en los circuitos magnéticos son el juego de ecuaciones (8.16) y (8.17) o sea, la ley de Ampere generalizada y la ley de inexistencia de monopolos magnéticos, esto es:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = i_r \quad (8.29)$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (8.30)$$

La segunda de estas ecuaciones también nos indica que las líneas de $\vec{B}$ son cerradas y vamos a demostrar a continuación que, debido a la presencia de materiales ferromagnéticos, en el

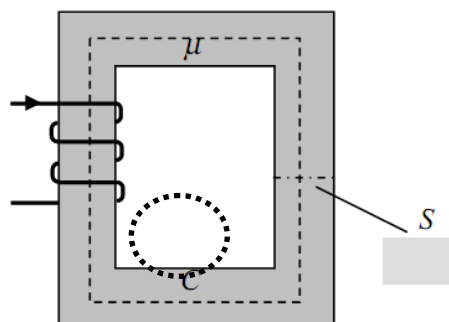


Figura 8.11 Circuito magnético simple de sección rectangular. En el círculo punteado se muestra la región donde se aplicarán las condiciones de frontera.

interior del circuito magnético se concentra la mayor cantidad de líneas. Se verá que la ecuación (8.30) se puede escribir diciendo que el flujo del vector inducción magnética es constante en el interior del circuito.

8.6.2 Aproximación de flujo de $\vec{B}$ constante.

Consideramos la región circular de la figura 8.11 para aplicar las condiciones de borde, el detalle puede verse en la figura 8.12. Se observa que los campos son tangentes a la superficie de separación material ferromagnético – aire y se desea comparar los campos en cada región material. Para ello usamos la ecuación (8.28):

$$H_{tM} - H_{t0} = K_r \quad (8.31)$$

Pero no tenemos corriente reales en la superficie de separación material ferromagnético – aire, por lo tanto:

$$H_{tM} = H_{t0} \quad (8.32)$$

Asumiendo que el material ferromagnético puede aproximarse por un material magnético de permeabilidad μ_M conocida y usando la relación constitutiva tenemos:

$$\frac{B_M}{\mu_M} = \frac{B_0}{\mu_0} \quad (8.33)$$

Pero, en general en los materiales ferromagnéticos: $\mu_M \gg \mu_0$ y esto significa $B_0 \ll B_M$, o en otras palabras $B_0 \approx 0$.

Por lo tanto, si consideramos que en el exterior al circuito magnético el campo es aproximadamente nulo, esto significa que las líneas de $\vec{B}$ quedan confinadas al interior del circuito magnético y siguen la forma geométrica del circuito.

Esta condición se puede escribir en función del flujo a partir de la ecuación (8.30). Consideremos una

porción de circuito magnético como el mostrado en la figura 8.13, donde todas las líneas de $\vec{B}$ están confinadas al interior del circuito. Consideremos la ecuación (8.30) con una superficie cerrada S formada por las “tapas” S_1 y S_2 y la superficie lateral del circuito.

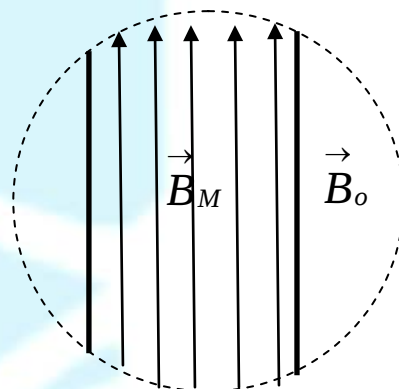


Figura 8.12 Condición de borde en un circuito magnético. Ampliación de la zona punteada en fig 8.11.

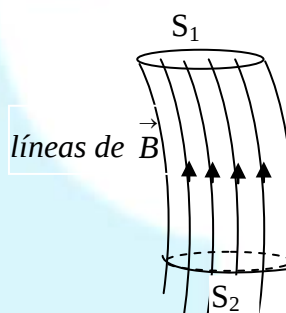


Figura 8.13 Fracción de un circuito magnético. Las líneas de B quedan confinadas en el interior.

Teniendo en cuenta que el flujo de $\vec{B}$ sobre la superficie lateral es nulo, ya que en primera aproximación ninguna línea de $\vec{B}$ la atraviesa, se puede obtener que el flujo sobre las superficies abiertas S_1 y S_2 es el mismo para que sea válida la ecuación (8.30). Esto lo podemos escribir como:

$$\int_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \text{constante} \quad (8.34)$$

Resumiendo, las ecuaciones fundamentales de los circuitos magnéticos son (8.29) y (8.34).

8.6.3 Validez de la aproximación de flujo de $\vec{B}$ constante.

La expresión (8.34) es válida siempre y cuando se pueda decir que la líneas de campo quedan confinadas al interior del circuito, o lo que es lo mismo que el campo es nulo en el exterior. Esta aproximación se verifica bastante bien para ciertas condiciones que son: a) geometrías simples para los circuitos, sin vértices ni bordes cortados y b) permeabilidad del material mucho más grande que la permeabilidad el vacío (cuando más grande sea la diferencia mejor será la aproximación). Si uno quiere saber qué tan buena es esta aproximación, o sea si se desea apreciar los efectos de “pérdida” de flujo por la superficie lateral, se pueden realizar simulaciones numéricas usando diferentes programas.

En las siguientes figuras 8.14a y 8.14b se muestran los resultados de las simulaciones para el circuito magnético de la figura 8.11. Este es un circuito magnético construido con un material ferromagnético considerado en una zona de trabajo tal que la permeabilidad relativa “equivalente” μ_{req} es 1000, de sección rectangular S, alimentado por N espiras por las que circula una corriente I. Es interesante notar que:

1) El vector inducción magnética o densidad de flujo magnético $\vec{B}$ queda mayormente confinado en el interior del circuito.

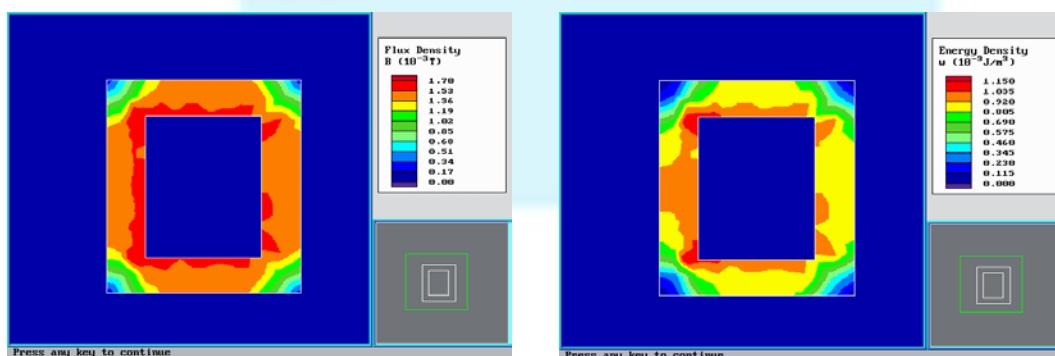


Figura 8.14a Simulación numérica del circuito de la figura 8.11. A la izquierda valores de $\vec{B}$, a la derecha la densidad de energía.

2) Tanto el campo $\vec{B}$ como la densidad de energía son un poco mayores en la zona donde se encuentra la corriente (lado izquierdo del circuito) que en la zona derecha del mismo. Esto nos muestra que la ecuación de flujo constante es una aproximación.

En la figura 8.14b se muestran los resultados para el campo $\vec{H}$. Se observan grandes valores de H en el exterior del circuito, cerca de las corrientes reales.

En la figura 8.15, se muestra una variante del circuito magnético mostrado en figura 8.11. En este circuito se agrega un entrehierro estrecho de largo “e” (que es mucho menor que el lado de la sección del toroide). En esta figura se observan valores muy intensos del campo $\vec{H}$ en la región del entrehierro y una dispersión de líneas de campo magnético $\vec{H}$ fuera de esta región.

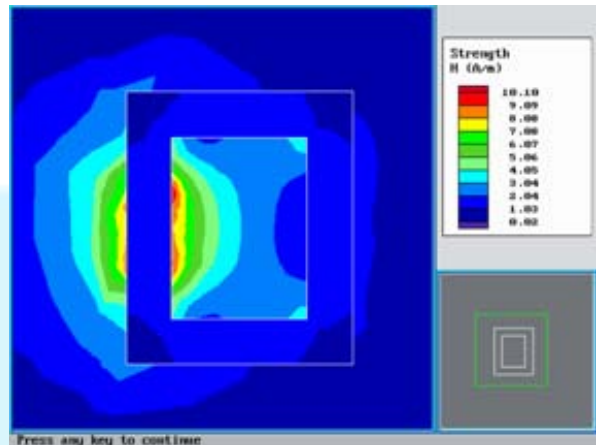


Figura 8.14 b Simulación numérica del circuito de la figura 8.11. Valores del campo H

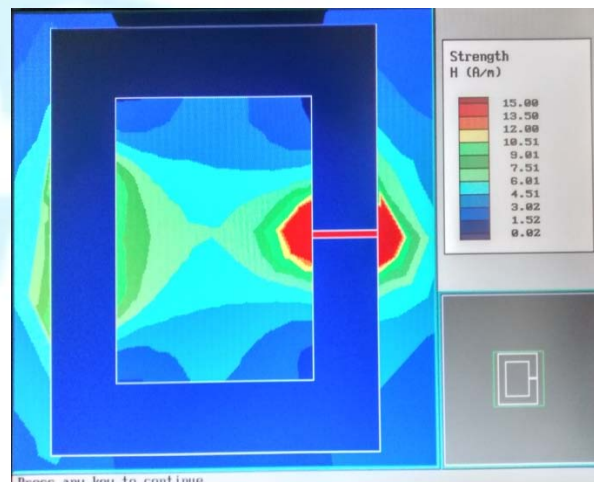


Figura 8.15 Circuito de la figura 8.11 con el agregado de un entrehierro. Valores del campo H.

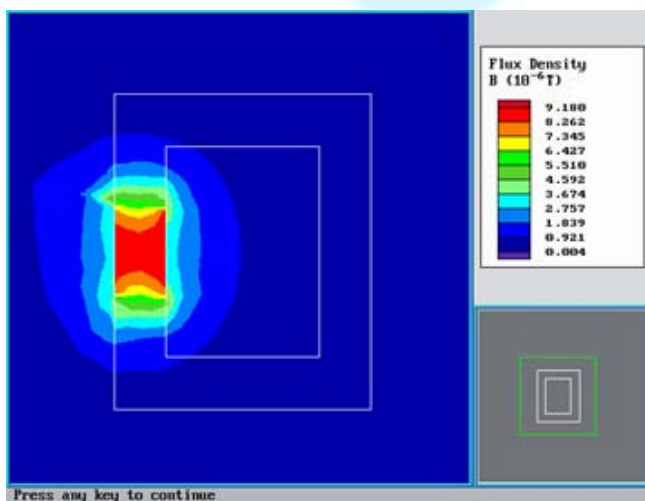


Figura 8.16 Simulación numérica del circuito de la figura 8.11 en el caso extremo donde la permeabilidad del material es la del vacío.

Por último, en la figura 8.16, se muestra la simulación numérica en el caso extremo en el que no hay circuito magnético (o sea que el arrollamiento de espiras está hecho sobre vacío). Vemos valores muy intensos de $\vec{B}$ en la región donde se encuentran las corrientes reales, como si fuera un solenoide corto. Esta última simulación nos muestra que para

que las líneas de $\vec{B}$ sigan la forma de los circuitos deben estar formados por materiales ferromagnéticos.

8.7 Materiales lineales: Fuerza magnetomotriz y Reluctancia. Regla de Hopkinson

Aquí desarrollaremos una analogía con circuitos eléctricos que se basa en dos suposiciones principales:

- a) El material ferromagnético puede caracterizarse por su permeabilidad magnética “equivalente” $\mu_{(H, historia)}$ que llamaremos aquí μ sencillamente. O sea que es válida la relación constitutiva lineal dada por la ecuación (8.15).
- b) El campo $\vec{B}$ es uniforme en cada región de material magnético. Esta hipótesis es válida cuando la sección del circuito es pequeña (ver ejemplo 8.8.1 para entender la validez de la misma). Permite determinar el flujo del campo como el producto del módulo del campo $\vec{B}$ por el área.

Vimos que las líneas de $\vec{B}$ son cerradas. Aunque no haya nada que fluya a través de estas líneas se puede establecer una analogía entre las líneas de $\vec{B}$ y las líneas de corriente en un circuito conductor. En un circuito eléctrico en serie, la corriente que pasa por todas las secciones es la misma. En el caso de un circuito magnético la cantidad de flujo transversal que pasa es la misma. Se define “fuerza magnetomotriz” (fmm) a la circulación del campo intensidad de campo magnético $\vec{H}$, es decir

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = fmm = NI ; \quad [fmm] = \text{Ampere} \times \text{vuelta} \quad (8.35)$$

Supongamos que tenemos una sucesión de materiales magnéticos de manera tal que “se cierre” formando un “circuito cerrado”, por ejemplo el mostrado en la figura 8.17. Este circuito está formado por dos materiales ferromagnéticos diferentes uno denominado “núcleo” (N) y otro llamado “barra” (B) que cierran el circuito con dos entrehierros “estrechos” (e_1 y e_2 , cuyos largos son mucho menores que el lado de la sección del circuito). Además está alimentado por un arrollamiento de N espiras por el que circula una corriente I.

Consideremos las siguientes aproximaciones:

- 1) Se desprecian todos los efectos de borde
- 2) Se considera que $\vec{H}$ y $\vec{B} // d\vec{l}$. La curva cerrada empleada en (8.35) sigue a las líneas de $\vec{H}$ y $\vec{B}$.

$$3) \quad \Phi_m = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \cong BS$$

- 4) Entrehierro “estrecho” significa que el largo es mucho menor que el lado de la sección del circuito. En este caso no hay dispersión de las líneas de $\vec{B}$.

Las consideraciones 2) y 3) son razonables cuando la sección es pequeña (ver ejemplo 8.8.1).

Entonces el teorema de Ampere se escribe:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = fmm = NI = \int_{l_N} \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_{e1} \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_{e2} \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_{l_B} \vec{H} \cdot d\vec{l} \quad (8.36)$$

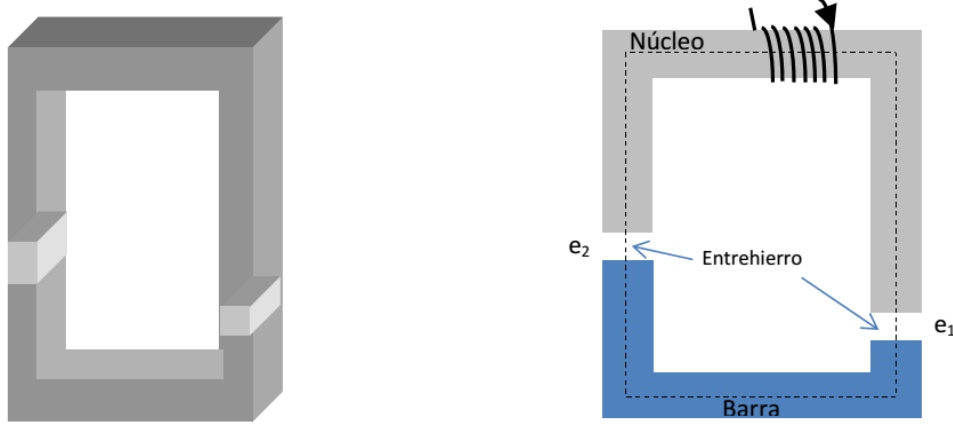


Figura 8.17 Ejemplo de circuito magnético

Usando las relaciones constitutivas:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = fmm = NI = \int_{l_N} \frac{\vec{B}_N}{\mu_N} \cdot d\vec{l} + \int_{e1} \frac{\vec{B}_{aire}}{\mu_0} \cdot d\vec{l} + \int_{e2} \frac{\vec{B}_{aire}}{\mu_0} \cdot d\vec{l} + \int_{l_B} \frac{\vec{B}_B}{\mu_B} \cdot d\vec{l} \quad (8.37)$$

Como el flujo magnético es constante, podemos escribir

$$\Phi_m = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = cte. \cong B_N S_N = B_{e1} S_{e1} = B_{e2} S_{e2} = B_B S_B \quad (8.38)$$

Luego:

$$fmm = NI = \Phi_m \left\{ \int_{l_N} \frac{1}{\mu_N S_N} dl + \int_{e1} \frac{1}{\mu_0 S_{e1}} dl + \int_{e2} \frac{1}{\mu_0 S_{e2}} dl + \int_{l_B} \frac{1}{\mu_B S_B} dl \right\} \quad (8.39.a)$$

Haciendo las integrales:

$$fmm = NI = \Phi_m \left\{ \frac{l_N}{\mu_N S_N} + \frac{e1}{\mu_0 S_{e1}} + \frac{e2}{\mu_0 S_{e2}} + \frac{l_B}{\mu_B S_B} \right\} \quad (8.39.b)$$

Las ecuaciones (8.39.a) y (8.39.b) permiten obtener el flujo magnético y luego se pueden obtener los campos usando (8.38) y las relaciones constitutivas. La ecuación (8.39.a) se puede escribir como:

$$fmm = NI = \Phi_m \mathfrak{R} \quad (8.40)$$

$$\text{con } \mathfrak{R} = \int \frac{1}{\mu S} dl = \frac{l}{\mu S} \quad (8.41)$$

$\mathfrak{R}$ es la denominada reluctancia que depende de las características geométricas (largo del tramo y su sección) y de la permeabilidad μ del material.

La ecuación (8.40) es equivalente a la ley de Ohm de Corriente Continua, esto es:

$$fem = i.R$$

donde tenemos las siguientes analogías: la fem es análoga a la fmm , la corriente i al flujo Φ_m y la resistencia a la reluctancia.

8.8. Aplicaciones

8.8.1. Toroide grueso

¿Bajo qué condiciones un toroide se puede considerar como de sección delgada? En general se responde esta pregunta diciendo que el lado de la sección debe ser mucho menor que el radio medio del mismo. En esta sección vamos a responder esta pregunta con mayor precisión.

¿Por qué es importante saber si un toroide tiene sección delgada o no? Básicamente, en los casos en los que el toroide puede tomarse como delgado vamos a decir que el campo inducción magnética $\vec{B}$ es uniforme en la sección. En otras palabras, vamos a aproximar el flujo del vector inducción $\vec{B}$ como el valor del módulo de dicho vector por el área de la sección, esto es:

$$\Phi_m = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \cong BS \quad (8.42)$$

A continuación vamos a plantear un caso particular, para analizar en qué circunstancias el toroide puede ser tomado como de sección delgada. Sea un toroide tipo anillo de Rowland como el mostrado en la figura 8.10 de radio medio R_m , sección cuadrada de lado a , hecho con un material ferromagnético de permeabilidad “equivalente” μ y con N espiras arrolladas y distribuidas uniformemente por las que circula una corriente i .

El vector intensidad del campo magnético H lo obtenemos usando la ley de Ampere (8.16) generalizada en una curva de radio r con $R_m - a/2 < r < R_m + a/2$

$$H \cdot 2\pi \cdot r = \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = N \cdot i \quad (8.43)$$

Y empleando la relación constitutiva, obtenemos el módulo del vector inducción magnética:

$$B(r) = \mu \frac{Ni}{2\pi r} \quad (8.44)$$

El flujo del vector inducción magnética lo obtenemos empleando:

$$\Phi_g = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_0^a \int_{R_m-a/2}^{R_m+a/2} \mu \frac{Ni}{2\pi r} \cdot dr dz = \mu a \frac{Ni}{2\pi} \ln\left(\frac{R_m + a/2}{R_m - a/2}\right) \quad (8.45)$$

Queremos saber bajo qué circunstancias la expresión (8.45) puede aproximarse por (8.42), para ello vemos cuanto es la diferencia relativa porcentual entre los flujos calculados por ambas expresiones. Llamamos “diferencia relativa porcentual” de flujos $\Delta\Phi_R$ a

$$\Delta\Phi_R = 100 \cdot \frac{\Phi_g - \Phi_m}{\Phi_m} \quad (8.46)$$

La figura 8.18 muestra cuál es error cometido por considerar al toroide grueso como si fuera delgado. Un posible criterio para decidir en qué situación un toroide puede ser tomado como delgado es decir que para una relación $R_m/a \geq 3$ el error cometido es menor al 1 % (este es un error más que aceptable sobre todo teniendo en cuenta las aproximaciones realizadas). En otras palabras, según este criterio, se puede considerar un toroide como delgado si su radio medio es al menos tres veces el lado de la sección a .

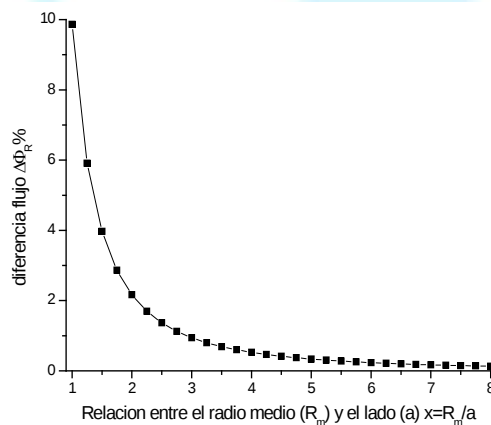


Figura 8.18 Diferencia de flujos en función de la relación radio medio del toroide sobre lado de la sección.

8.8.2. Toroide delgado con entrehierro estrecho

Usaremos las ecuaciones fundamentales (8.29) y (8.34) desarrolladas en el inciso 8.6 para resolver un problema simple donde se supone conocida la permeabilidad magnética “equivalente” del material.

Un toroide de radio medio R_m y de sección delgada cuadrada de lado a como el mostrado en la figura 8.19 con entrehierro estrecho de largo e ($e \ll a$), es alimentado por medio de un arrollamiento de N vueltas de cable por el que circula una corriente I_o . El toroide se encuentra construido con un material ferromagnético con permeabilidad magnética “equivalente” μ . Se desea determinar los campos $\vec{B}$ y $\vec{H}$ en el interior del toroide y en el entrehierro.

Las hipótesis de este problema son:

- El material magnético tiene una permeabilidad magnética “equivalente” μ , de valor conocido, o sea se asume como relación constitutiva la ecuación lineal (8.15).
- El toroide tiene sección delgada. En otras palabras, vamos a poder decir que en el interior del mismo los campos B_m y H_m serán uniformes a lo largo de la sección cuadrada (como se mostró en las secciones 8.7 y 8.8.1).
- El entrehierro es “estrecho”, esto significa que el largo e del mismo es mucho menor que el lado de la sección del toroide ($e \ll a$). De forma tal que las líneas de campo magnético $\vec{B}$ no sufren una dispersión significativa al pasar por la región del entrehierro, y vamos a considerar que la sección donde el campo es no nulo, es aproximadamente la sección del toroide.

Como el toroide es de sección delgada y considerando que el flujo del campo $\vec{B}$ debe ser constante (ecuación fundamental (8.34)) concluimos que los campos B_m y H_m son uniformes en todo en el interior del toroide en la zona donde se encuentra el material magnético. Llamamos B_o y H_o a los campos en el interior del entrehierro.

A continuación escribimos las ecuaciones fundamentales:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_m \cdot 2\pi \cdot R_m + H_o \cdot e = N \cdot I_o \quad (8.47)$$

$$\Phi = \int_{S_m} \vec{B} \cdot d\vec{S} = B_m \cdot a^2 = B_o \cdot a^2 = \int_{S_o} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \text{constante} \quad (8.48)$$

En la ecuación (8.47) se usó para hacer la integral una curva C, circular de radio R_m . En la ecuación (8.48) se empleó que como el entrehierro es estrecho, se puede decir que las líneas no se dispersan y el área de integración es la misma que en el caso del material.

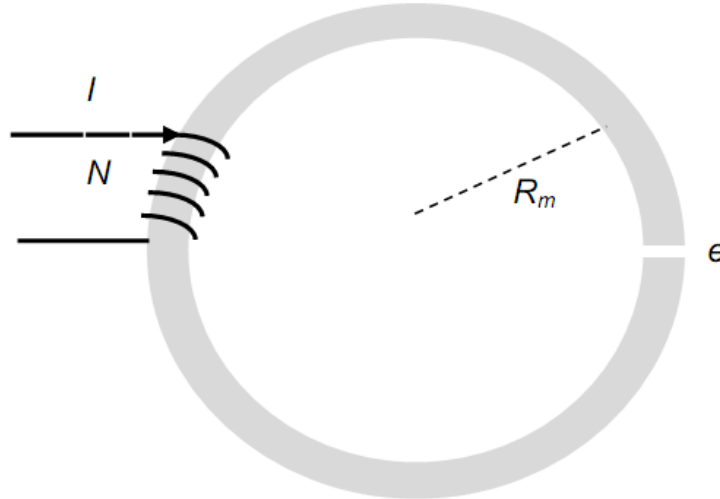


Figura 8. 19 Toroide de sección delgada con entrehierro estrecho.

Reemplazando las relaciones constitutivas del material magnético y del entrehierro

$$\vec{B}_m = \mu \vec{H}_m \quad (8.49.a)$$

$$\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}_0 \quad (8.49.b)$$

en la ecuación (8.47):

$$\frac{B_m}{\mu} 2\pi R_m + \frac{B_0}{\mu} e = N I_o \quad (8.50)$$

Y podemos escribir (8.50) en función del flujo usando (8.48):

$$\Phi \left[\frac{2\pi R_m}{\mu a^2} + \frac{e}{\mu_0 a^2} \right] = N I_o \quad (8.51)$$

La ecuación (8.51) permite obtener el flujo y luego, empleando (8.48) y las relaciones constitutivas (8.49), podemos obtener los campos $\vec{B}$ y $\vec{H}$ en el interior del toroide y en el entrehierro.

8.8.3. Circuito magnético delgado con entrehierro

Generalizaremos el ejemplo del ejercicio anterior para un circuito magnético de diferentes secciones delgadas formado por distintos materiales ferromagnéticos y con

entrehierro estrecho. Seguiremos usando la hipótesis de la relación constitutiva lineal para los materiales ferromagnéticos (ecuación 8.15).

Sea el circuito magnético de sección delgada mostrado en la figura 8.20 con entrehierro estrecho formado por dos materiales de permeabilidades magnéticas equivalentes relativas μ_{r1} , μ_{r2} , secciones diferentes (a^2 y $a.b$) y alimentado por dos arrollamientos distintos de N_1 y N_2 vueltas por los que circulan corrientes I_1 e I_2 . Las hipótesis geométricas son las siguientes:

a) Sección delgada: esto es las dimensiones a y b son mucho menores que d_1 y d_2 .

b) Entrehierro estrecho: esto es el largo e es mucho menor que b y a .

Como fue expresado en la sección 8.6, las expresiones generales que permiten plantear este tipo de ejercicios son las ecuaciones (8.29) y (8.34), esto es:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = i_r \quad (\text{Ley de Ampere generalizada}) \quad (8.52)$$

$$\Phi_m = \text{constante} = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \cong BS \quad (8.53)$$

La última igualdad en la ec. (8.53), tal como expresamos en la sección 8.8.1, la podemos hacer porque el circuito es considerado de sección delgada.

Analizando la ecuación (8.53), observamos que si el material y/o la sección del circuito no cambian, los campos $\vec{B}$ y $\vec{H}$ no cambian. En otras palabras, esto es, los campos $\vec{B}$ y $\vec{H}$ cambian, si cambian el material o la sección. Entonces el procedimiento que se utiliza para este tipo de ejercicios es nombrar los campos $\vec{B}$ y $\vec{H}$ de la misma manera en todo el tramo donde el material y la sección son iguales.

Así en el circuito de la figura, tendremos los campos $\vec{B}_1$ y $\vec{H}_1$ en el tramo horizontal de abajo del circuito magnético, los campos $\vec{B}_2$ y $\vec{H}_2$ en los tramos izquierdo y horizontal de arriba, los campos $\vec{B}_3$ y $\vec{H}_3$ en el tramo derecho y los campos $\vec{B}_0$ y $\vec{H}_0$ en el entrehierro. Todos estos campos suelen ser las incógnitas del problema y están vinculados por relaciones constitutivas lineales del tipo (8.15), esto es:

$$\vec{B}_1 = \mu_0 \mu_{r1} \vec{H}_1 \quad (8.54.a)$$

$$\vec{B}_2 = \mu_0 \mu_{r2} \vec{H}_2 \quad (8.54.b)$$

$$\vec{B}_3 = \mu_0 \mu_{r2} \vec{H}_3 \quad (8.54.c)$$

$$\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}_0 \quad (8.54.d)$$

Generalizando lo realizado en la sección anterior, se utiliza la ley de Ampere generalizada sobre el circuito cerrado dado por la línea de puntos, como se muestra en la figura, eligiendo arbitrariamente el sentido de las agujas del reloj. En este caso, con este sentido de circulación, la corriente I_2 , que es entrante al plano del papel, tiene signo positivo, mientras I_1 que es negativa. Esto es:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_1 \cdot d_2 + H_2 \cdot (d_1 + d_2) + H_3 \cdot (d_1 - e) + H_0 \cdot e = N_2 \cdot I_2 - N_1 \cdot I_1 \quad (8.55)$$

La ecuación (8.53) la evaluamos en este ejercicio de la siguiente manera:

$$\Phi_m = \text{constante} = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \cong B_1 \cdot a^2 = B_2 \cdot a^2 = B_3 \cdot a \cdot b = B_0 \cdot a \cdot b \quad (8.56)$$

La última igualdad es válida si el entrehierro es estrecho.

Las expresiones (8.54), (8.55) y (8.56) forman un sistema de ecuaciones donde los campos $\vec{B}$ y $\vec{H}$ son las incógnitas. Para resolverlo, escribimos en (8.55), usando (8.54), los campos H en función de B :

$$\frac{B_1 \cdot d_2}{\mu_0 \mu_{r1}} + \frac{B_2 \cdot (d_1 + d_2)}{\mu_0 \mu_{r2}} + \frac{B_3 \cdot (d_1 - e)}{\mu_0 \mu_{r2}} + \frac{B_0 \cdot e}{\mu_0} = N_2 \cdot I_2 - N_1 \cdot I_1 \quad (8.57)$$

Y ahora usando (8.56), escribimos (8.57) en función del flujo, que es el mismo en todo el circuito magnético:

$$\Phi_m \left[\frac{d_2}{\mu_0 \mu_{r1} \cdot a^2} + \frac{(d_1 + d_2)}{\mu_0 \mu_{r2} \cdot a^2} + \frac{(d_1 - e)}{\mu_0 \mu_{r2} \cdot a \cdot b} + \frac{e}{\mu_0 \cdot a \cdot b} \right] = N_2 \cdot I_2 - N_1 \cdot I_1 \quad (8.58)$$

La ecuación (8.58) permite obtener el flujo magnético, y luego usando las expresiones (8.56) y (8.54) se obtienen los campos $\vec{B}$ y $\vec{H}$ para los distintos tramos del circuito magnético.

Es importante destacar que (8.58) es el mismo tipo de expresión que (8.40) donde:

a) La “fuerza magnetomotriz” fmm es

$$fmm = N_2 \cdot I_2 - N_1 \cdot I_1 \quad (8.59)$$

b) La reluctancia total es la suma de la reluctancia de los cuatro elementos “conectados en serie”:

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_3 + \mathfrak{R}_0 = \left[\frac{d_2}{\mu_0 \mu_{r1} \cdot a^2} + \frac{(d_1 + d_2)}{\mu_0 \mu_{r2} \cdot a^2} + \frac{(d_1 - e)}{\mu_0 \mu_{r2} \cdot a \cdot b} + \frac{e}{\mu_0 \cdot a \cdot b} \right] \quad (8.60)$$

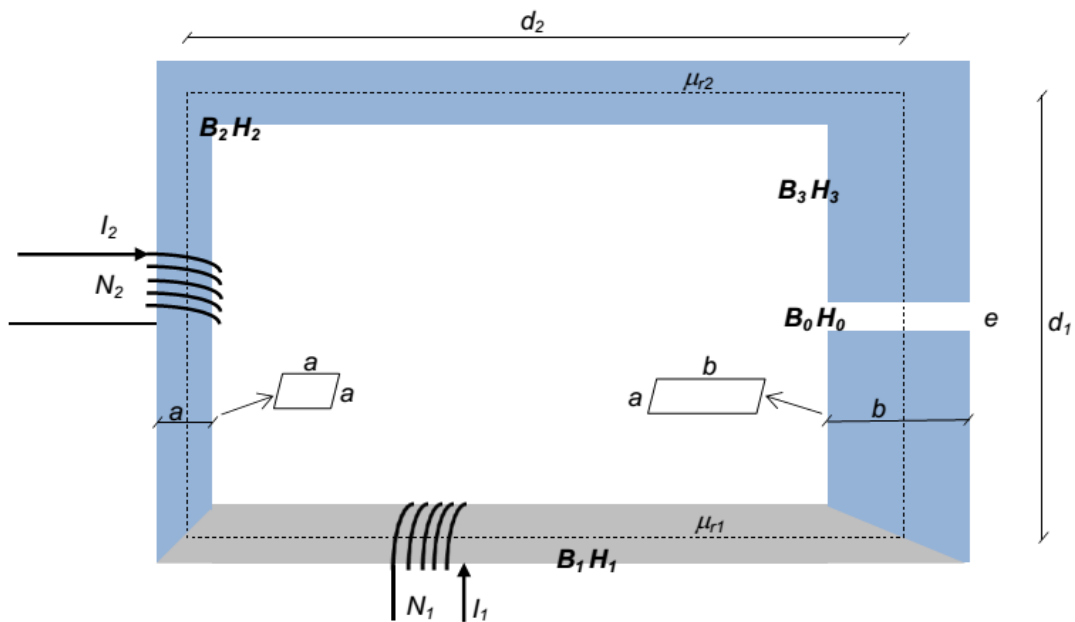


Figura 8.20 Circuito magnético de sección delgada (las dimensiones a y b son mucho menores que d_1 y d_2) con entrehierro estrecho (el largo e es mucho menor que b y a) formado por dos materiales de permeabilidades magnéticas relativas μ_{r1} y μ_{r2} , secciones diferentes (a^2 y $a \cdot b$) alimentado por dos arrollamientos diferentes. Se utiliza la ley de Ampere generalizada sobre el circuito cerrado dado por la línea de puntos.

8.8.4. Toroide delgado con entrehierro estrecho y material magnético con ciclo de histéresis.

¿Cómo se resuelvan los circuitos magnéticos cuando la relación constitutiva lineal (8.15) no se puede emplear y tenemos como información del material el ciclo de histéresis típico como el mostrado en la figura 8.21. En este caso, como veremos, se puede emplear un método gráfico para resolverlo.

La figura 8.21 nos muestra un ciclo de histéresis con sus características típicas, esto es: la curva de primera imanación los campos de saturación B_S y H_S , $\vec{B}_S = \mu_0 \cdot (\vec{H}_S + \vec{M}_S)$, el campo coercitivo H_C y el campo de remanencia B_R .

Consideremos un problema simple como el desarrollado en la sección 8.8.2, esto es, sea un toroide de radio medio R_m y de sección delgada cuadrada de lado a como el mostrado en la figura 8.20 con entrehierro estrecho de largo e ($e \ll a$), que es alimentado por medio de un arrollamiento de N vueltas de cable por el que circula una corriente I_0 . El toroide se encuentra construido con un material ferromagnético del que no se conoce en qué zona se está trabajando y, por lo tanto, no se le puede asignar una permeabilidad equivalente μ (y esta es la diferencia con lo planteado en la sección 8.8.2), pero si es conocido el ciclo de histéresis de la

figura 8.21 .Se desea determinar los campos $\vec{B}$ y $\vec{H}$ en el interior del toroide y en el entrehierro.

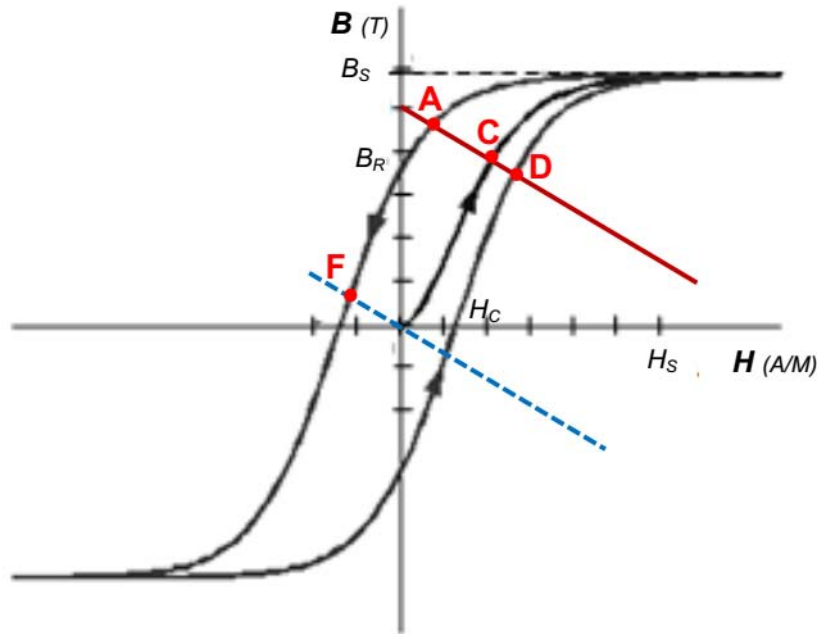


Figura 8.21 Curva de histéresis B vs H de un material ferromagnético. En rojo se representa la recta $B_m = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I_o}{e} - \frac{\mu_0 \cdot 2\pi \cdot R_m}{e} H_m$ con sus posibles soluciones comprendidas entre los puntos A y D, mientras que en azul se representa la recta $B_m = -\frac{\mu_0 \cdot 2\pi \cdot R_m}{e} H_m$ correspondiente al caso $I_o=0$.

Es claro que el desarrollo es similar a lo planteado en la sección 8.8.2, esto es: llamamos B_m y H_m a los campos en el interior del material que serán uniformes en todo en el interior del toroide (como se mostró en las secciones 8.7 y 8.8.2) y además llamamos B_0 y H_0 a los campos en el interior del entrehierro.

Las ecuaciones fundamentales son:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_m \cdot 2\pi \cdot R_m + H_0 \cdot e = N \cdot I_o \quad (8.61)$$

$$\Phi = \int_{S_m} \vec{B} \cdot d\vec{S} = B_m \cdot a^2 = B_0 \cdot a^2 = \int_{S_o} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \text{constante} \quad (8.62)$$

En la ecuación (8.61) se usó para hacer la integral una curva C, circular de radio R_m y en la ecuación (8.62) se empleó que el entrehierro es estrecho. Además la relación constitutiva del entrehierro es:

$$\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}_0 \quad (8.63)$$

Para resolver este problema usaremos las expresiones (8.61), (8.62) y (8.63) para obtener una única ecuación donde tengamos B_m y H_m como incógnitas. Esto es, usando (8.62) obtenemos $B_m = B_0$ y reemplazando H_0 en (8.61) por la expresión (8.63):

$$H_m \cdot 2\pi \cdot R_m + \frac{B_m \cdot e}{\mu_0} = N \cdot I_o \quad (8.64)$$

Despejando B_m :

$$B_m = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I_o}{e} - \frac{\mu_0 \cdot 2\pi \cdot R_m}{e} H_m \quad (8.65)$$

La ecuación (8.65) y el ciclo de histéresis de la figura 8.21 forman un sistema “particular” de dos relaciones con dos incógnitas, una de ellas es un gráfico, por ello tendremos una resolución gráfica de este problema. La ecuación (8.65) representa una recta en un gráfico B_m vs. H_m donde $\frac{\mu_0 \cdot N \cdot I_o}{e}$ es la ordenada al origen y la pendiente de la recta es $-\frac{\mu_0 \cdot 2\pi \cdot R_m}{e}$. En la figura 8.21 vemos en rojo la recta que representa la ecuación (8.65). La recta corta al ciclo de histéresis en tres puntos, la solución para los campos dependerá de la historia previa del material. Por ejemplo el punto C representa la solución para un material que no está previamente magnetizado mientras que el punto A representa la solución para el caso en el que el material haya alcanzado previamente la saturación. Es importante destacar que todos los puntos comprendidos entre los puntos A y D son posibles soluciones del problema, que dependerán de la historia previa del material ferromagnético. También es graficado en una recta azul el caso particular cuando la corriente de alimentación I_0 es nula.

Análisis de los resultados:

Las soluciones representadas con los puntos A y F son dos soluciones emblemáticas de los circuitos magnéticos que corresponden a dos casos típicos correspondientes al primer y segundo cuadrante del gráfico B vs. H respectivamente.

El primer caso (solución A, primer cuadrante) corresponde a un circuito magnético (que es alimentado por una corriente I_0) cuyo material fue saturado previamente. En esta situación, los campos en el material magnético $\vec{B}_m$ y $\vec{H}_m$, y el vector magnetización $\vec{M}$,

tendrán la misma dirección y sentido, sentido horario. En la figura 8.22 se muestran las líneas de $\vec{H}$ en el interior del material y en el entrehierro. Vemos que si:

$$B_m = B_0 \text{ o sea } \mu_0 \cdot (H_m + M) = B_m = B_0 = \mu_0 \cdot H_0, \text{ con } H_m \ll M \text{ entonces}$$

$$H_m \ll H_0 \quad (8.66)$$

También notamos que como $\text{div}(\vec{B}) = 0$ y $\vec{B} = \mu_0 \cdot (\vec{H} + \vec{M})$ entonces:

$$\text{div}(\vec{H}) = -\text{div}(\vec{M}) \quad (8.67)$$

La ecuación (8.67) nos muestra que las líneas de $\vec{H}$ nacen (mueren) donde las de $\vec{M}$ mueren (nacen). En el polo de arriba de la figura 8.22 mueren líneas de $\vec{M}$, esto es el polo norte del electroimán y es donde nacen las líneas de $\vec{H}$. Idéntico razonamiento se puede hacer en el polo sur.

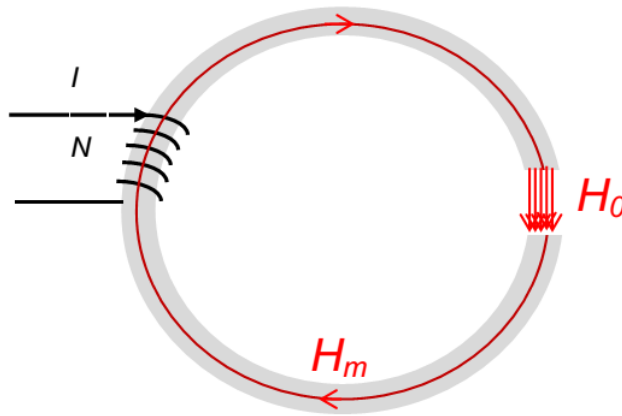


Figura 8.22 Líneas de $\vec{H}$ para una solución en el primer cuadrante (del tipo del punto A de la figura 8.20) correspondiente a un electroimán. Vemos que $H_m \ll H_0$.

El segundo caso (solución F, segundo cuadrante) corresponde a un circuito magnético que es alimentado por una corriente I_0 que decrece hasta hacerse nula (cuyo material fue saturado previamente). En esta situación, el campo $\vec{B}_m$ en el material magnético y el vector magnetización $\vec{M}$, tendrán la misma dirección y sentido, sentido horario. Sin embargo, como la solución se encuentra en el segundo cuadrante, el campo $\vec{H}_m$ debe invertir su sentido. En la figura 8.23 se muestran las líneas de $\vec{H}$ en el interior del material y en el entrehierro. Vemos que se verifica (8.66) y además usando la ley de Ampere generalizada con corriente nula:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_m \cdot 2\pi \cdot R_m + H_0 \cdot e = 0 \quad (8.68)$$

La ecuación (8.68) muestra también que $\vec{H}_m$ y $\vec{H}_0$ deben tener sentido contrario, para que el resultado de la circulación sea nulo. Pero la ecuación (8.63) (relación constitutiva) nos muestra que $\vec{H}_0$ no cambia su sentido, o sea, tiene el sentido horario que es el del campo $\vec{B}_0$. Por lo tanto $\vec{H}_m$ debe cambiar su sentido.

También notamos la validez de la ecuación (8.67) y por lo tanto las líneas de $\vec{H}$ nacen (mueren) donde las de $\vec{M}$ mueren (nacen). En el polo de arriba de la figura 8.23 mueren líneas de $\vec{M}$, esto es el polo norte del imán y es donde nacen las líneas de $\vec{H}$. Idéntico razonamiento se puede hacer en el polo sur.

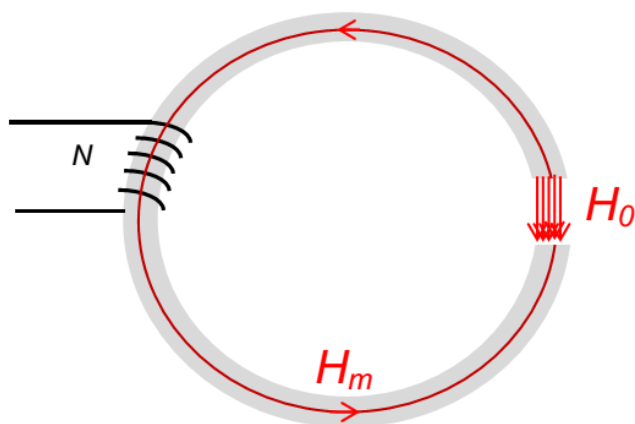


Figura 8.23 Líneas de $\vec{H}$ para una solución en el segundo cuadrante (del tipo del punto F de la figura 8.21, correspondiente a un imán). En este caso $\vec{H}_m$ invierte su sentido. Vemos que $H_m \ll H_0$. En el polo norte del imán nacen líneas de $\vec{H}$ y en el polo sur mueren.

Como cierre de este capítulo, podemos decir que se ha mostrado la teoría necesaria y los ejercicios más representativos del tema de materiales magnéticos.

Ahora, a practicar.....!!!!

Bibliografía consultada:

- Fernández, Juan Carlos, "Ingeniería electromagnética I - Modelos estáticos circuitales", EUDEBA (2013).
- Feynman, R., Leighton, R.B. y Sands, M., "Física Volumen II: Electromagnetismo y Materia", Addison-Wesley Iberoamericana (1987).
- Griffiths, D., "Introduction to Electrodynamics", Prentice Hall (1999).
- Mc Kelvey, J.P. y Grotch, J., "Física para Ciencias e Ingeniería", Tomo II (Electromagnetismo), Ed. Harla, México (1981).
- Rodríguez Trelles, Félix, "Temas de Electricidad y Magnetismo", EUDEBA (1984).
- Sears, Zemansky, Young y Freedman, "Física Universitaria Vol II", Pearson (1999).

Capítulo 9

Inducción electromagnética

Primera Parte: La Ley de Faraday-Lenz-Maxwell

9.1	<u>Introducción</u>	9-2
9.2	<u>Ley de Faraday-Lenz: Regla del Flujo</u>	9-3
9.3	<u>Un generador primitivo de corriente alterna</u>	9-8
9.4	<u>Generadores de corriente alterna sinusoidal</u>	9-11
9.5	<u>Intentando explicar microscópicamente la generación de las corrientes inducidas</u>	9-15
9.6	<u>Principio de funcionamiento de los frenos magnéticos</u>	9-15
9.7	<u>La fuerza electromotriz</u>	9-17
9.8	<u>Dispositivos generadores de fem donde no parece haber variación del flujo</u>	9-19
9.9	<u>Corrientes parásitas o corrientes de Foucault o corrientes de torbellino o "eddy currents"</u>	9-20
9.10	<u>¿Usamos Regla del Flujo o la "Fuerza Magnética" para determinar la fem inducida?</u>	9-21
9.11	<u>Una nueva visión de la fem y una nueva interpretación de la Ley de Faraday-Lenz</u>	9-24
9.12	<u>Un ejemplo: espira que se mueve en un campo magnético variable en el tiempo y en el espacio</u>	9-25
9.13	<u>El campo eléctrico inducido (no conservativo)</u>	9-30

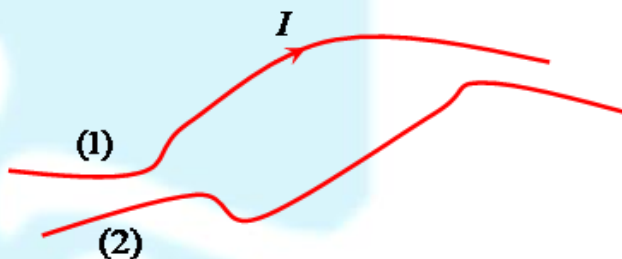
Segunda Parte :La Ley de Faraday aplicada a los circuitos con corrientes dependientes del tiempo

9.14.	<u>Autoinductancia y fem inducida</u>	9-35
9.15.	<u>Autoinductancia e Inductancia Mutua (un desarrollo más formal)</u>	9-37
9.16.	<u>Cálculo de autoinductancias e inductancias mutuas</u>	9-38
9.17.	<u>Los bornes homólogos</u>	9-44
9.18.	<u>Combinando Inductancias</u>	9-45

Primera Parte: Ley de Faraday-Lenz-Maxwell

9.1. Introducción

En el siglo XIX, después de haber comprobado que una corriente eléctrica I originaba un campo magnético $\vec{B}$ (Ley de Ampere), los científicos se preguntaron si los campos magnéticos eran capaces de producir una corriente I . El conductor (1) de la figura crea un campo magnético porque por él circula una corriente. ¿Puede el campo magnético generado por la corriente I del conductor (1) “arrastrar” los electrones del cable (2)? ¿Puede producir una corriente en el cable (2)? ¿Y los campos magnéticos generados por imanes podrían “arrastrar” los

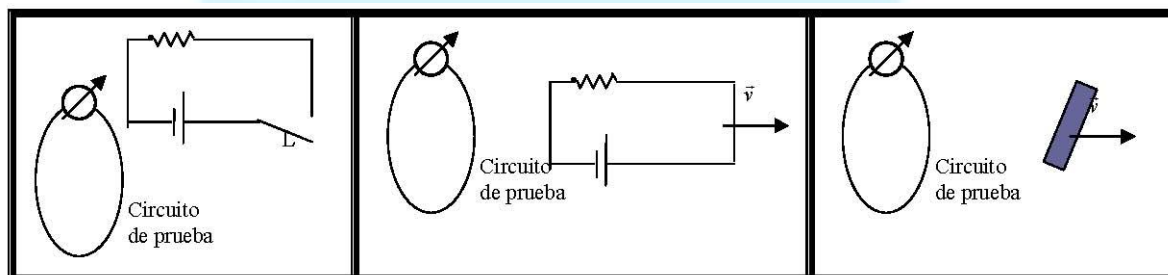


electrones de un conductor? Pero sabemos que las corrientes son generadas por campos eléctricos $\vec{E}$.

Entonces, la pregunta es: ¿Puede un campo magnético $\vec{B}$ generar un campo eléctrico $\vec{E}$?

Después de muchísimas experiencias frustradas realizadas por muchos científicos, en 1831 M. Faraday descubrió que aparecían “efectos eléctricos” cuando “algo” estaba variando. Sus observaciones llevaron a que eso podía ocurrir si la I del conductor (1) era dependiente del tiempo, i.e. si $I=I(t)$ se creaba o “inducía” una corriente I' en el cable (2). Pero eso ocurría también en otras circunstancias. Tomemos un circuito de prueba que consta de una espira conductora y un amperímetro. Se observa que:

- si se cierra o abre la llave L del circuito de la figura (batería con resistencia) se genera una corriente en la espira o circuito de prueba porque se mide una corriente en el amperímetro (se llama **corriente inducida**).
- si con la llave L cerrada del circuito, el circuito de prueba se traslada (se acerca o aleja), se mide una corriente (inducida) en el amperímetro.
- Si un imán se traslada se detecta en el amperímetro el paso de una corriente inducida.



Observemos que usamos un circuito de prueba, es decir, un conductor por lo que podemos medir una corriente bajo ciertas condiciones.

Unos años después de las experiencias de Faraday, James Clerk Maxwell generalizó la observación de Faraday, lo que dio lugar a la ley de Faraday-Maxwell, que es una de las cuatro ecuaciones fundamentales del Electromagnetismo. Pero antes de formalizar esta ley, estudiaremos algunas situaciones que nos ayudarán a entender, no solamente su formulación, sino también algunos fenómenos experimentales que la describen directa o indirectamente.

9.2. Ley de Faraday-Lenz: Regla del flujo

Vamos a interpretar los resultados de las experiencias que hemos presentado. En todas ellas algo cambia, algo varía. Analicemos cada una de ellas:

- 1) En el caso del conductor donde $I=I(t)$, va variando en el tiempo el campo magnético generado por ella (Ley de Ampere)
- 2) Cuando se cierra o abre la llave del circuito pila-resistencia comienza a circular o deja de circular corriente por él. En consecuencia, cambia el campo magnético en el tiempo.
- 3) Cuando se aleja o acerca el circuito pila-resistencia (con I constante), el campo magnético que él genera es constante pero el campo magnético en el lugar del circuito de prueba va cambiando a medida que el circuito pila-resistencia se traslada.
- 4) Cuando el imán se traslada, el efecto es análogo al de la situación presentada en 3).

En todas estas circunstancias, por un motivo o por otro, varía el campo magnético “en el circuito de prueba”.

Otras variaciones de estas experiencias son:

- a) Cambiar la forma del circuito de prueba y realizar las mismas experiencias.
- b) Cambiar la orientación del circuito de prueba y realizar las mismas experiencias.
- c) Dejar al imán o al circuito pila-resistencia inmóviles (con la llave cerrada), y girar la espira sin cambiar su forma.
- d) Varias más.....

Faraday resume estos comportamientos proponiendo: “**En el circuito de prueba aparece una corriente transitoria porque se produce en él una fuerza electromotriz inducida (fem)**”. Y esta fem es proporcional a la **variación del flujo de $\vec{B}$ que concatena el circuito de prueba**. Es decir,

$$fem = k \frac{d\Phi}{dt} \quad (9.1)$$

Donde el flujo se define (como ya lo hicimos en Electrostatica) como $\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$. Pero, **cuidado!**

En Electrostatica usamos el flujo del campo eléctrico o del vector desplazamiento a través de una superficie cerrada. En Magnetostática (y Magnetismo en general) no podemos usar una superficie

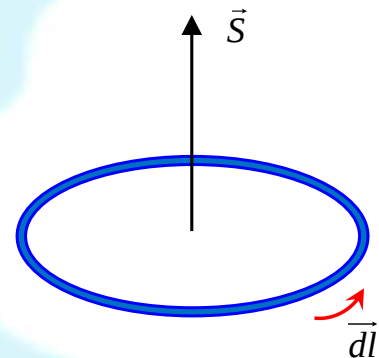
cerrada porque siempre daría cero¹. Aquí la superficie debe ser abierta (pero, por supuesto, se necesita una curva cerrada para tener una superficie!)

Esta regla (porque explicaba todas las situaciones experimentales que Faraday había provocado) se llama **Regla del Flujo** y k es una constante a determinar. Y esta variación se puede producir por varios motivos

1. Varía el campo magnético
2. Varía la superficie en el tiempo.
3. Varía el ángulo entre el campo y la superficie
4. De alguna manera varían los límites de integración (ya veremos cómo)

Podemos encontrar situaciones muy complicadas difíciles de analizar cuantitativamente. Hay otras situaciones donde la regla del flujo no es válida¹. Pero para comenzar, a comprender esta Regla es suficiente². En las experiencias realizadas se observó que el sentido de circulación de la corriente dependía del crecimiento o decrecimiento del flujo. Es decir, si el flujo aumentaba a cierto ritmo se inducía una cierta corriente con un cierto sentido. Si, en cambio, el flujo disminuía al mismo ritmo, se inducía una corriente con el mismo valor pero de sentido contrario. H Lenz resumió lo observado alrededor de 1833: **La corriente inducida produce campos magnéticos que tienden a oponerse al cambio del flujo magnético que produce tales corrientes inducidas**. Es decir, la **Ley de Lenz** manifiesta que si el flujo del campo está aumentando (por algún motivo), el campo magnético inducido (producido por la corriente inducida) será tal que tienda a disminuir el flujo resultante.

Para redondear veamos un ejemplo donde solo varía en el tiempo el campo magnético. Supongamos que tenemos una espira conductora circular indeformable de radio R como la de la figura. Hemos definido el diferencial de curva $d\vec{l}$ acorde al sentido arbitrario con que hemos definido la superficie $\vec{S}$. Esta espira está inmersa en una zona donde existe un campo magnético que puede variar en el tiempo pero no varía con la posición. La fem inducida, según la Ley de Faraday, en estas circunstancias, estará dada por

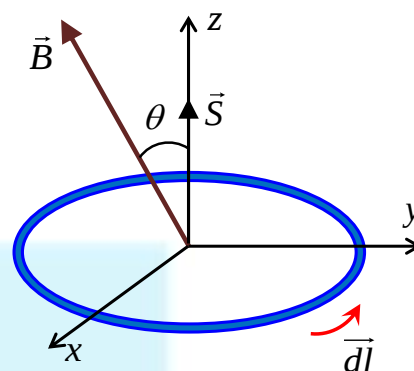


$$fem = k \frac{d\Phi}{dt} = k \frac{d}{dt} \iint_{S(C)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = k \iint_{S(C)} \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{S} \quad (9.2)$$

¹ Recordar que nunca se encontraron monopolos magnéticos, por lo que $\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ es una ley experimental

² Después veremos una generalización de la **Regla del Flujo** que llamaremos **Ley de Faraday-Maxwell**.

Supongamos que el campo externo $\vec{B} = \vec{B}(t)$ forma un ángulo θ con la superficie (como se indica en la figura). Sin pérdida de generalidad, podemos escribir $d\vec{S} = dS \vec{e}_z$ y $\vec{B}(t) = B_y(t) \vec{e}_y + B_z(t) \vec{e}_z$ por lo que



$$\frac{d\vec{B}(t)}{dt} = \frac{dB_y(t)}{dt} \vec{e}_y + \frac{dB_z(t)}{dt} \vec{e}_z$$

$$\frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{S} = \frac{dB_z(t)}{dt} \vec{e}_z \cdot d\vec{S} = \frac{dB_z(t)}{dt} dS \text{ y}$$

$$fem = k \iint_{S(C)} \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{S} = k \iint_{S(C)} \frac{dB_z(t)}{dt} dS = k \frac{dB_z(t)}{dt} \pi R^2 \quad (9.3)$$

¿Cuánto vale k ? ¿Es una constante positiva o negativa? ¿Depende de cómo sea $\frac{dB_z(t)}{dt}$?:

Supongamos que el campo crezca con el tiempo, i.e. $\frac{dB_z(t)}{dt} > 0$. Volvamos a la Ley de Lenz: la corriente inducida debe ser tal que el campo por ella generado se oponga al cambio. ¿Cuál sería su sentido en este caso? Como la componente del campo aumenta, el campo generado por la corriente debe *intentar* que no lo haga (que no aumente el flujo, que en este caso corresponde a que no aumente el campo). ¿Cómo? Creando un campo de sentido contrario, o sea, en el sentido $-\vec{e}_z$. Para ello, la corriente inducida debería circular en el sentido contrario a $d\vec{l}$. Es decir, en sentido contrario al que consideramos “positivo” al elegir el $d\vec{S}$. Es por este motivo que debe ser $k < 0$. Como todas las constantes de la Electricidad y Magnetismo, su valor depende del sistema de unidades elegido. Por suerte, en el SI, es muy sencillo: su valor es unitario y resulta $k = -1$.

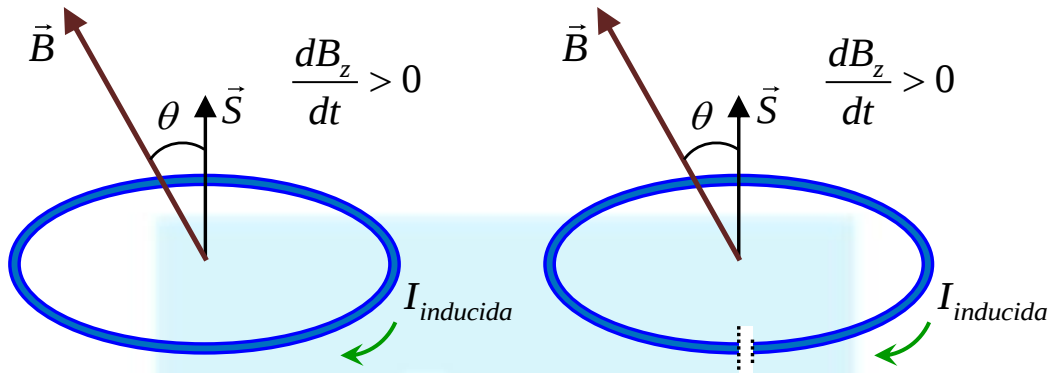
Podemos escribir, entonces, la **Ley de Faraday-Lenz**

$$fem = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_{S(C)} \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (9.4)$$

Nosotros vamos a comenzar con la Ley de Faraday-Lenz³ y postular que la fem es independiente del sistema inercial de referencia elegido y que la expresión (9.4) es válida en todos los sistemas inerciales de referencia.

Podríamos representar el problema planteado con las siguientes figuras: se induce una corriente del sentido indicado y es **como si** hubiera una pila ubicada como se indica en la figura a la derecha:

³ Decidimos partir de esta ley experimental porque así fue enunciada por Faraday. En algunos libros se parte de esta expresión y en otros el tema se desarrolla de otra manera. Por ahora no decimos cuál es esa otra manera.



- 1) ¿Qué hubiera ocurrido si $\frac{dB_z(t)}{dt} < 0$? La corriente inducida será tal que el campo magnético inducido “trate” de que el flujo no disminuya. ¿Cómo? Creando una corriente inducida que produzca un campo en el sentido de $+\vec{e}_z$.

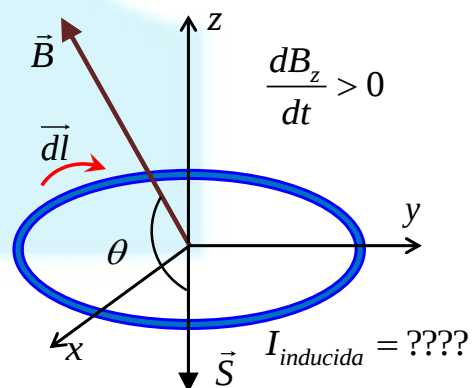
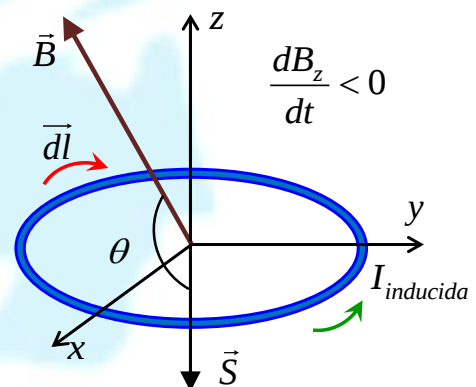
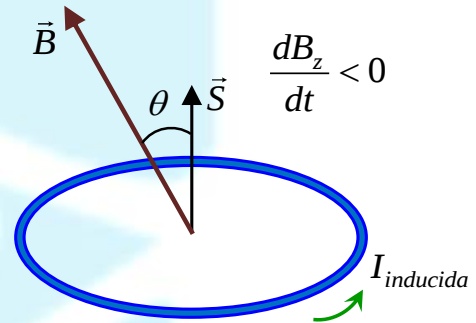
- 2) Como el sentido del $\vec{dS}$ es arbitrario, podríamos haberlo elegido “hacia abajo”. La situación física es idéntica a la 1) por lo que la corriente inducida debe tener el mismo sentido que en 1). Hagamos la cuenta:

$$\frac{d\vec{B}(t)}{dt} = \frac{dB_y(t)}{dt} \vec{e}_y + \frac{dB_z(t)}{dt} \vec{e}_z$$

$$\frac{d\vec{B}}{dt} \cdot \vec{dS} = \frac{dB_z(t)}{dt} \vec{e}_z \cdot dS (-\vec{e}_z) = -\frac{dB_z(t)}{dt} dS \quad y$$

$$fem = -\frac{d}{dt} \iint_{S(C)} \vec{B} \cdot \vec{dS} = +\frac{dB_z(t)}{dt} \pi R^2 < 0 \quad \text{porque}$$

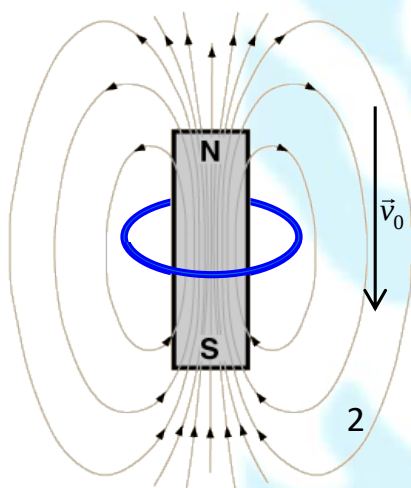
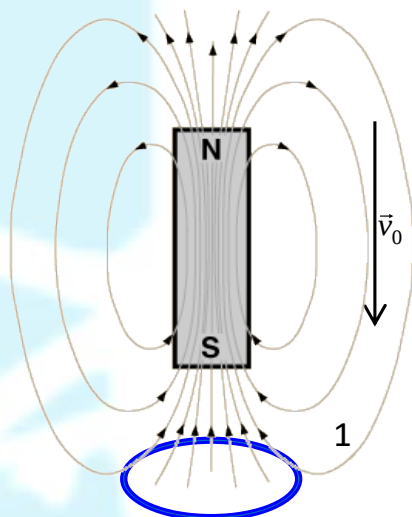
$\frac{dB_z(t)}{dt} < 0$. Que el resultado sea negativo significa que la corriente inducida tendrá sentido contrario al del $\vec{dl}$. Nos fijamos en el dibujo: esa corriente inducida creará un campo dentro de la espira “hacia arriba” que ayudará a que el flujo no disminuya **tanto**.



3) Nos quedaría esta situación que deben resolver ustedes con detalle.⁴

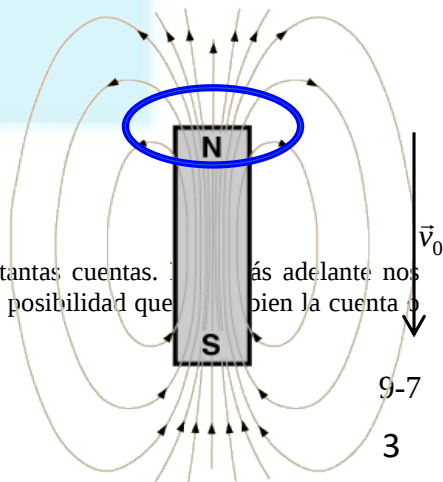
En lugar de dibujar un campo magnético, vamos a aplicar lo que vimos a una disposición experimental que podemos hacer en el Laboratorio (o en el aula). Vamos a ver qué ocurre cuando un imán rectangular se acerca y luego se aleja de una espira circular conductora. Supongamos que el imán cae a una velocidad $\vec{v}_0$ (que no varía en el tiempo) pasando por el centro de la espira circular. Podemos distinguir tres instantes característicos.

1. Como vemos en la figura el campo magnético comienza a aumentar sobre la superficie determinada por la espira (aunque solo importa que aumente la componente perpendicular a la superficie de la espira). Por la Ley de Faraday-Lenz, se va a inducir una corriente que trata de que el flujo no aumente. Es decir, la corriente inducida tendrá sentido horario y nos acercamos a la situación 2.



2. Una vez que el imán está dentro de la espira, el flujo va cambiando a una menor "velocidad" porque el campo magnético ya no varía tanto sobre la superficie de la espira. La corriente inducida con sentido horario va disminuyendo hasta que el flujo llega a un máximo (llamamos $t=0$ cuando el centro del imán está justo en la superficie de la espira). Luego el flujo comienza a disminuir por lo que la corriente inducida intentará que no disminuya. ¿Cómo? Circulando en sentido antihorario y acercándonos a la situación 3

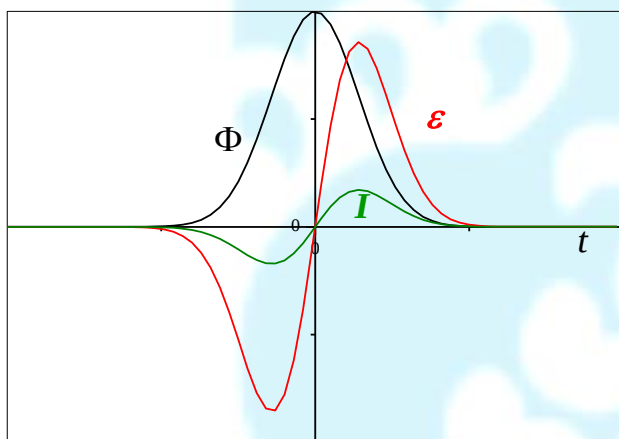
3. Cuando el imán va saliendo de la superficie de la espira, el flujo va disminuyendo por lo que la corriente inducida tendrá sentido antihorario (como adelantamos). Cuando el imán está muy alejado de la



⁴ Para estos casos tan sencillos seguramente que es innecesario hacer tantas cuentas. Más adelante nos encontraremos con situaciones que son más complicadas y no habrá otra posibilidad que tener un poder de abstracción más que importante.

espira, ya no sentirá su efecto, i.e. no cambiará el flujo por lo que la corriente irá disminuyendo hasta anularse.

Podríamos hacer un gráfico **cualitativo** de esta experiencia donde graficamos el flujo, la fem y la corriente inducidas en función del tiempo. Este dispositivo es un **generador** de corriente eléctrica. Y como esta corriente cambia de signo a través del tiempo (i.e. los portadores de carga tienen una velocidad media que va cambiando de sentido en el tiempo) se llama **Generador de Corriente Alterna** o simplemente **Generador de Alterna**.



Algunas observaciones:

1) En este generador por Inducción, el flujo varía en el tiempo porque el campo magnético lo hace.

2) Hemos tomado como positivo el sentido de circulación antihorario para todas las situaciones de este dispositivo.

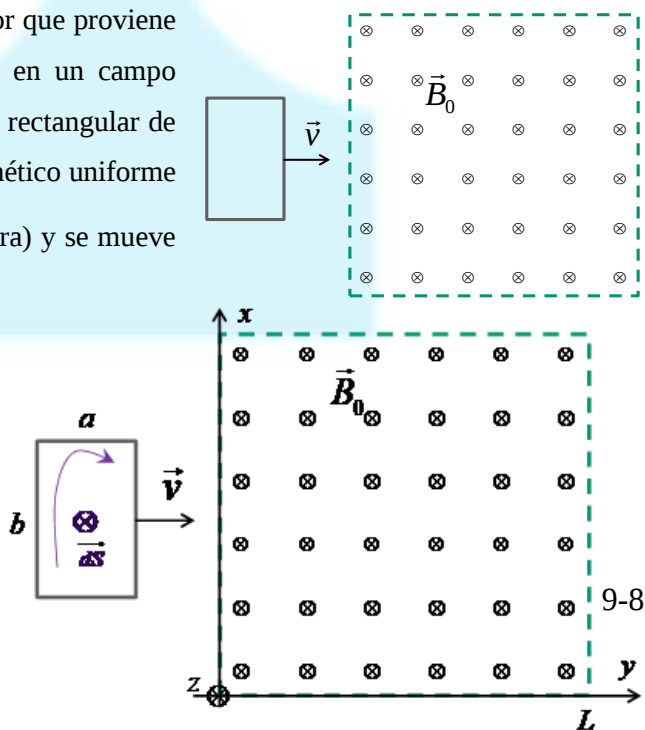
3) Si estuviéramos en un sistema de coordenadas solidario al imán y con la espira moviéndose, la situación física sería la misma

y el resultado sería el mismo. Así debe ser porque ambos son sistemas de referencia inerciales.

- 4) Podemos asociar a la espira con corriente inducida a un momento magnético inducido $\vec{m}_{ind}$ (Ver **Capítulo 6**) perpendicular a la espira y cuyo valor es $|\vec{m}_{ind}| = I_{ind} \pi R^2$. Su sentido cambia en $t = 0$.

9.3. Un generador primitivo de corriente alterna

Veamos un tipo muy elemental de generador que proviene del movimiento de una espira conductora en un campo magnético constante y uniforme. La espira rectangular de lados a y b entra a una zona de campo magnético uniforme $\vec{B}_0$ (perpendicular a la superficie de la espira) y se mueve con velocidad constante paralela al plano de la espira como se indica en la figura. Para poder determinar cómo es la fem inducida ε , vamos a establecer un sistema de coordenadas (que nos



permitirá hacer las “cuentas” correctamente) y comprobaremos que los resultados son cualitativamente compatibles con la Ley de Faraday-Lenz.

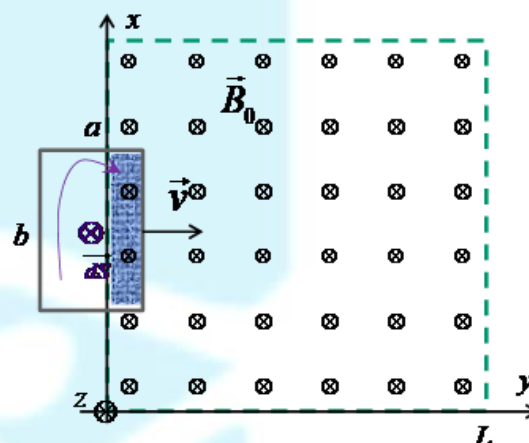
Tenemos, entonces,

$$\vec{B} = B_0 \vec{e}_z; \vec{dS} = dS \vec{e}_z; \vec{v} = v_0 \vec{e}_y.$$

Supongamos que en $t=0$ la espira está ubicada entre y_0 (menor que cero) y $y_0 - a$; y entre x_0 y $x_0 + b$.

Mientras se mueva fuera de la zona donde existe el $\vec{B}_0$ el flujo no cambia (es nulo) por lo que no hay *fem*.

Supongamos que la espira comienza a entrar en la zona de campo magnético en el instante $t_1 = -\frac{y_0}{v}$. En un instante t , la superficie



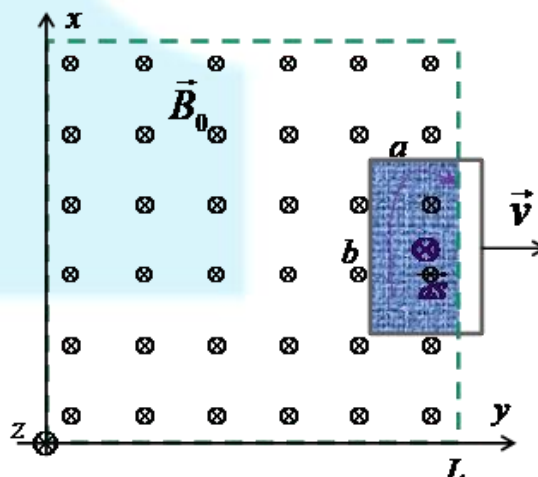
“dentro” de la zona de campo corresponde a $x_0 v_0 (t - t_1)$. Calculemos la *fem*

$$\begin{aligned} fem_{\text{entrar}} &= -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_{\text{espira}} \vec{B} \cdot \vec{dS} = -\frac{d}{dt} \iint_{\text{espira donde es } B \neq 0} B_0 \vec{e}_z \cdot dx dy \vec{e}_z = -B_0 \frac{d}{dt} \int_{x_0}^{x_0+b} dx \int_0^{v(t-t_1)} dy = \\ &= -B_0 \frac{d}{dt} [b v (t - t_1)] = -B_0 b v < 0 \end{aligned}$$

Que resulte negativa significa que la corriente circulará en el sentido contrario al elegido como positivo. Observemos que el flujo va aumentando a medida que la espira entra en la zona de campo y la corriente inducida es tal que crea un campo en sentido contrario a $\vec{B}_0$, i.e. la corriente tendrá sentido antihorario. También es de notar que esta *fem* no varía en el tiempo mientras que la espira entra en la zona ya que $\Phi = +B_0 a b$.

Durante el tiempo que la espira está inmersa **totalmente** en el campo, el flujo no cambia. En consecuencia, durante ese intervalo de tiempo no hay *fem* inducida.

Cuando la espira comienza a salir de la zona (en el instante $t_2 = t_1 + vL$), el flujo comienza a disminuir. Calcularemos la *fem* pero antes

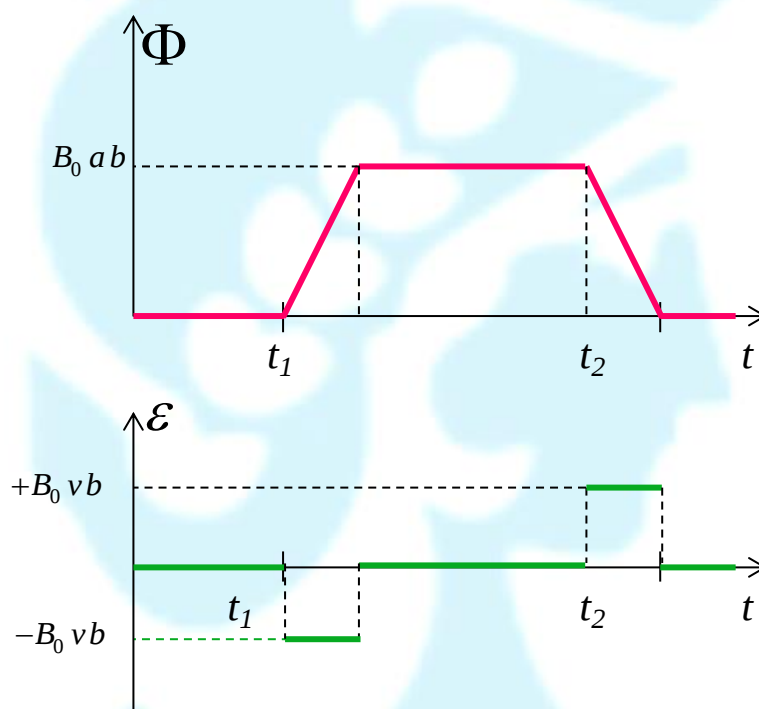


pongamos en qué sentido circulará la corriente inducida en este caso. Como el flujo comienza a disminuir, la corriente inducida “tratará” de crear un campo del mismo sentido de $\vec{B}_0$ para compensar la disminución del área con un aumento del campo magnético total (original más inducido). Esto solo es posible si la corriente circulara en sentido horario por lo que la *fem* debe resultar positiva. En efecto,

$$fem_{salir} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_{\text{espira}} \vec{B} \cdot \vec{dS} = -\frac{d}{dt} \iint_{\text{espira donde es } B \neq 0} B_0 \vec{e}_z \cdot dx dy \vec{e}_z = -B_0 \frac{d}{dt} \int_{x_0}^{x_0+b} dx \int_{a-v(t-t_2)}^L dy =$$

$$= -B_0 \frac{d}{dt} [b(L - a + v(t - t_1))] = +B_0 b v > 0$$

Una vez que la espira sale totalmente de la zona, el flujo no varía y la *fem inducida* resulta nula. Grafiquemos el flujo del campo magnético y la *fem inducida* en función del tiempo.



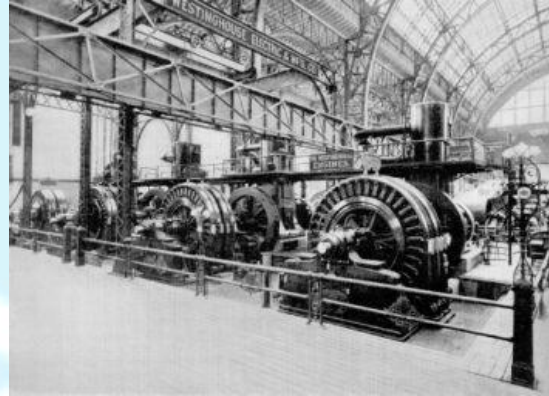
Una vez determinada la *fem*, podemos calcular la corriente que circularía por una espira rectangular en el caso en que fuera conductora y que su resistencia fuera R . La corriente resulta constante (de distinto signo) mientras la espira entra o sale de la zona de campo magnético (cambiando el sentido de circulación), siendo su valor $I = \frac{B_0 v b}{R}$ y la potencia entregada en forma de calor está dada por

$P = \frac{(B_0 v b)^2}{R}$ durante cada intervalo donde la corriente no es nula. La corriente inducida será nula

cuando la espira está totalmente “sumergida” en la zona de campo magnético o totalmente fuera de ella⁵.

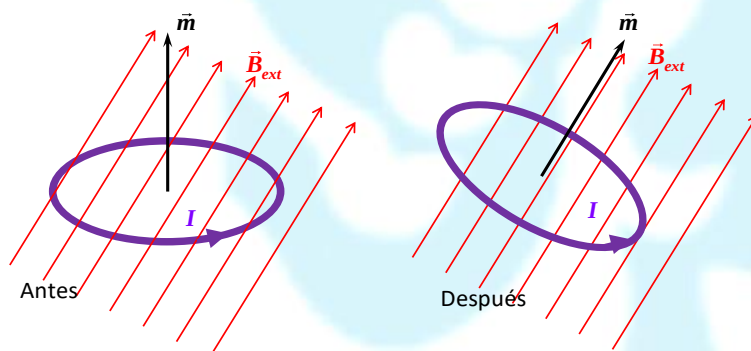
9.4. Generadores de corriente alterna sinusoidal

Vamos a ver un tipo muy especial de generador porque es el de mayor importancia para nuestra vida cotidiana. Si bien la tecnología es el producto del trabajo de muchos ingenieros y físicos, no podemos dejar de destacar el papel que tuvo Nicolás Tesla en la implementación de generadores de CA a gran escala. Es realmente muy interesante conocer la historia de este genio más que excéntrico^{ii, iii, iv}.



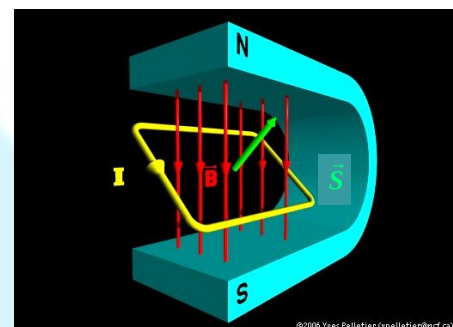
Generadores de CA de Tesla.

Habíamos visto en el **Capítulo 6** que si aplicábamos una corriente a una espira inmersa en un campo magnético $\vec{B}_{ext}$, ésta experimentaba un torque que hacía que su momento magnético $\vec{m}$ se alineara con el campo externo. Este es el principio de funcionamiento de un motor: **la corriente eléctrica se transforma en mecánica**. El torque $\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}_{ext}$ resultaba proporcional a la corriente. Además,



aumentando el número de espiras, aumentaba “linealmente” el torque, i.e. el trabajo mecánico podía incrementarse sin aumentar la corriente.

Veremos ahora que podremos hacer el camino inverso, es decir, convertir energía mecánica en energía eléctrica: obtener una corriente moviendo una espira o conjunto de espiras conductoras inmersas en un campo magnético $\vec{B}_{ext}$ ⁶. Como campo magnético externo puede usarse el generado por un imán permanente.

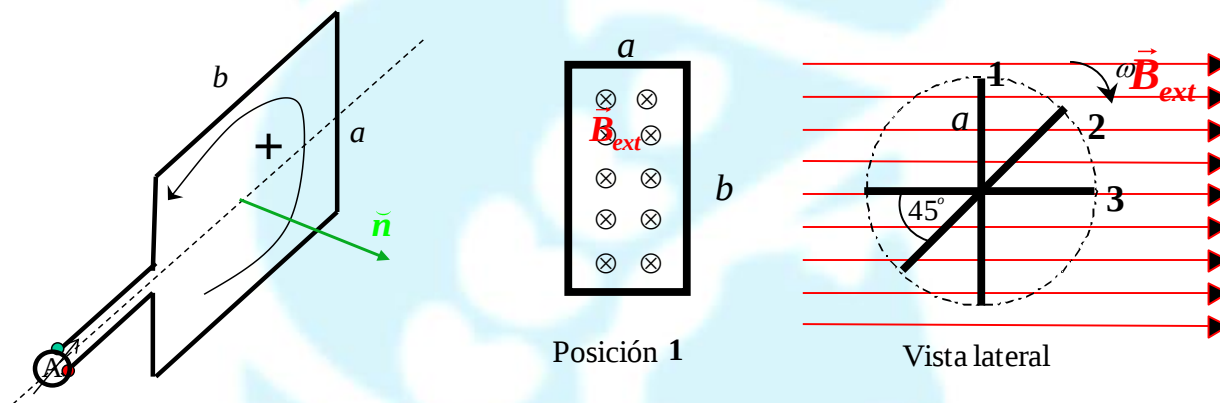


⁵ Vamos a volver sobre este dispositivo porque nos permitirá explicar el funcionamiento de los frenos magnéticos.

⁶ Podríamos hacerla girar gracias al agua que cae con fuerza en un embalse, por ejemplo.

Vamos a analizar paso por paso cómo es la *fem* inducida (o la corriente inducida) en función del tiempo cuando la o las espiras se rotan alrededor de un eje de simetría de la espira con velocidad angular constante. Como vemos en la figura, al ir rotando la espira, variará el flujo del campo magnético y se generará una *fem*. Esa *fem* provocará la aparición de una corriente que generará un campo magnético inducido (que se opondrá al cambio de flujo sufrido por la espira). Construiremos así un **generador** mucho menos primitivo que el anterior.

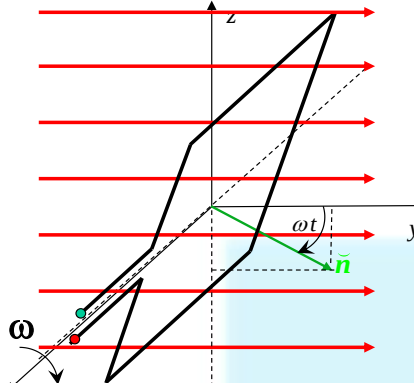
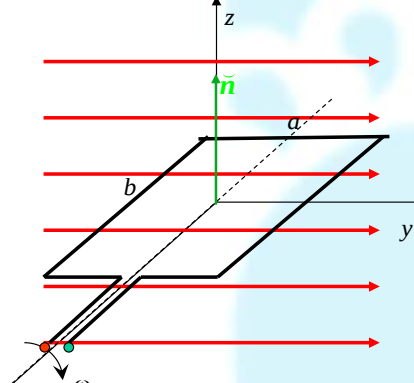
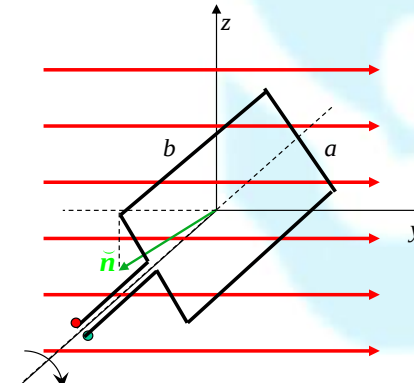
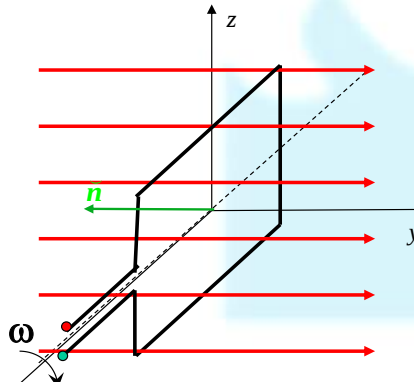
Vamos a elegir una sola espira conductora rectangular de lados a y b como la de la figura⁷. Establecemos arbitrariamente un sentido de circulación positivo, el que establece unívocamente cuál el sentido positivo de la normal a la superficie. Podemos también hacer una vista lateral del generador para visualizar mejor la geometría. En la posición 1 el campo magnético es perpendicular al área determinada por la espira y su sentido coincide con el de la normal a la superficie por cómo se definió la misma.

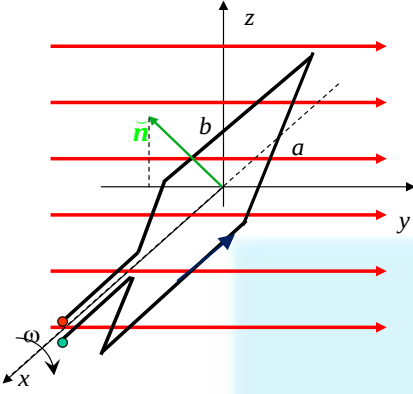


Analicemos ahora paso a paso. Tengamos en cuenta que al rotar la espira alrededor del eje x la normal a la superficie siempre estará contenida en el plano yz e irá girando alrededor del eje x .

	En esta posición $\Phi = +B_0 ab$ Cuando comienza a girar, el flujo de $\vec{B}$ (positivo) $\Phi = \iint_{\text{espira}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{espira}} B \tilde{e}_y \cdot d\vec{S}$ comienza a disminuir. Mientras tanto se creará una <i>fem</i> tal que trate de aumentar el flujo para que no disminuya como calcularemos en 2
--	---

⁷ Fuera de la espira rectangular, el campo magnético puede ser nulo. Los cables paralelos marcados con dos puntos (rojo y celeste) están muy próximos y el área que determinan es despreciable. El circuito se cierra con, por ejemplo, un amperímetro.

 2	Como la superficie efectiva (su proyección sobre la dirección del campo) disminuye, debe aumentar el campo para tratar de que el flujo no disminuya. Entonces se “crea” una corriente en el sentido positivo de circulación. $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} \vec{n} = B a b \cos \omega t$ $\frac{d\Phi}{dt} = -\omega B a b \sin \omega t$ $fem = +\omega B a b \sin \omega t$
 3	En esta posición el flujo es nulo.
 4	El flujo comienza a aumentar pero con signo negativo, es decir que, en realidad está disminuyendo. Se inducirá una I tal que trata de que el flujo siga siendo nulo, es decir se creará un campo con flujo positivo. Esto corresponde a que el campo sea de sentido contrario al original. Se logra con una corriente en el sentido que había sido definido positivo para la circulación
 5	Llegamos a la posición en que $d\vec{S}$ tiene sentido $-\vec{e}_y$. El flujo $\Phi = -B_0 a b$, es decir, tiene un mínimo.

 6	El flujo comienza a disminuir en módulo. El campo debe aumentar para que no deje de ser un mínimo. I.e. debe ser del mismo sentido que el campo original. Así, la corriente debe ser como en la figura (sentido negativo de circulación)
7, 8 y 9 quedan como	ejercicio

Es muy fácil de comprobar que las expresiones

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} \vec{n} = B a b \cos \omega t$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\omega B a b \sin \omega t$$

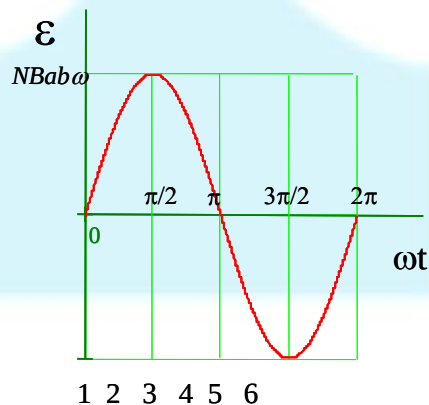
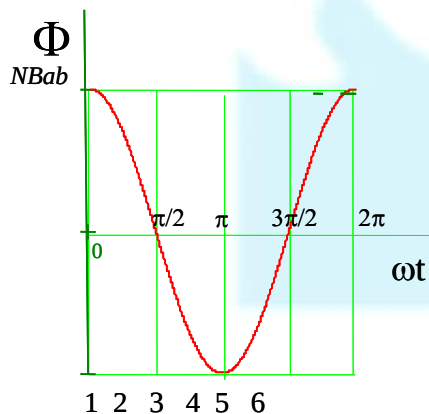
$$fem = +\omega B a b \sin \omega t$$

reflejan cada uno de los pasos. Si en lugar de una espira, fueran N espiras idénticas, el flujo total será $N\Phi_{1 \text{ espira}}$ (por el principio de superposición). Si, además, el flujo no es máximo en el instante inicial, las expresiones del flujo y de la fem corresponden a

$$\Phi = N B a b \cos(\omega t + \varphi_0)$$

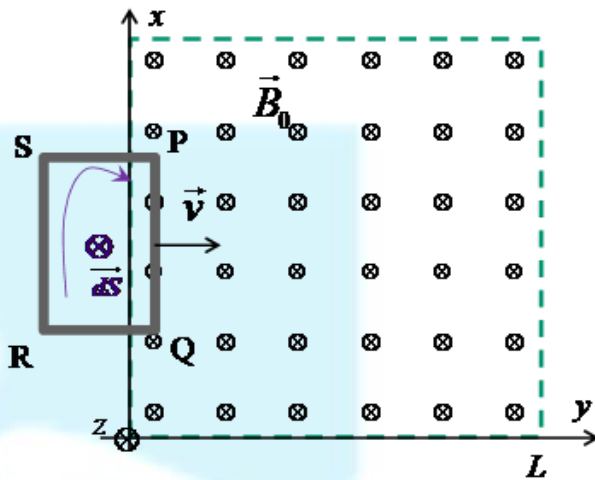
$$fem = +N \omega B a b \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Observar que ambas cantidades están desfasadas en $\pi/2$.



9.5. Intentando explicar microscópicamente la generación de las corrientes inducidas

Vimos en el **Capítulo 5** que las corrientes constantes se producían por acción de un campo eléctrico sobre los portadores de carga. Y el campo eléctrico era provisto por las baterías o pilas. ¿Cómo podemos explicar la aparición de las corrientes inducidas? Vamos a intentar explicarlo a partir del generador primitivo que estudiamos en 9.4. Al entrar en el campo magnético, los portadores de carga libres q (consideremos



que son las cargas positivas) que estén bajo la influencia de $\vec{B}_0$ sentirán una fuerza dada por $\vec{F}_m = q \vec{v} \times \vec{B}_0 = q v \vec{e}_y \times B_0 \vec{e}_z = qvB_0 \vec{e}_x$ por lo que los portadores positivos irán de P hacia Q en el tramo PQ. (En el tramo SR no hay fuerza y en los tramos SP y RQ (dentro de la zona de campo) podrá haber una migración de cargas positivas hacia arriba). El déficit de cargas positivas en Q atrae portadores libres de RQ y así circulará una corriente en sentido antihorario (como habíamos obtenido a través de la Regla del Flujo). Cuando la espira está totalmente sumergida en la zona de campo magnético, también en el tramo SR habrá una migración de portadores positivos hacia R. Esto hará que cese la migración de portadores positivos de P a S y deja de circular corriente. Cuando la espira comienza a salir de la zona de campo, no habrá fuerza sobre los portadores del tramo PQ; solamente sobre los del tramo RS por lo que comenzará a circular una corriente en sentido horario.

Si bien este modelo es muy crudo, nos ayudará a entender la producción de corrientes parásitas, la generación de *fems* en dispositivos donde aparentemente no hay variación de flujo magnético a través de la superficie de la espira conductora y también el principio del **freno magnético**.

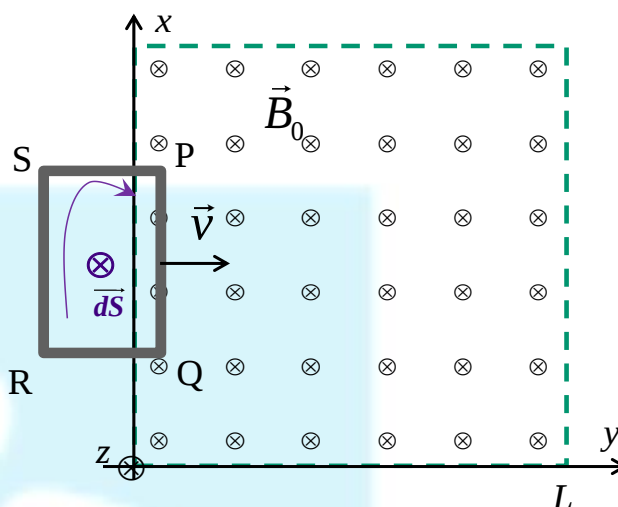
9.6. Principio de funcionamiento de los frenos magnéticos

En los dos generadores de corriente que estudiamos con cierto detalle, la velocidad lineal y la velocidad angular se consideraban constantes.

En el generador primitivo suponíamos que la espira se movía a través del campo con velocidad constante. ¿Es posible que lo haga en todo el trayecto? Hay varias maneras de atacar el problema. Por un lado hemos visto que al entrar en la zona de campo magnético (con cierta energía cinética) aparece una *fem* y, por lo tanto, si la espira es conductora comenzará a circular una corriente determinada por los valores de la *fem* y de la resistencia de la espira R . Por lo tanto habrá energía disipada en la resistencia. Esta energía en forma de calor, ¿de dónde proviene? De provenir de la energía cinética

original de la espira, ésta deberá disminuir su energía cinética... Es decir, se debería frenar. Veamos que es así.

Estudiamos la fuerza sobre la espira cuando comienza a circular corriente inducida. La fuerza sobre la espira aparece solamente en el tramo PQ ya que no existe campo en el tramo fuera de la región de campo, y en los lados paralelos al eje y se compensan las fuerzas.



Así

$$\vec{F} = \int_{x_0}^{x_0+b} I d\vec{l} \times \vec{B}_0 = \int_{x_0}^{x_0+b} \frac{B_0 v b}{R} dx \vec{e}_x \times B_0 \vec{e}_z = -\frac{B_0^2 v b^2}{R} \vec{e}_y$$

Vemos que tiene sentido contrario a la velocidad por lo que esta fuerza es de frenado. Por lo tanto, para mantener constante a la velocidad deberá aplicarse una fuerza

$$\vec{F}_{aplicada} = \frac{B_0^2 v b^2}{R} \vec{e}_y$$

La potencia (trabajo realizado/unidad de tiempo) necesaria para mantener esta velocidad será

$$P = \vec{F}_{aplicada} \cdot \vec{v} = \frac{B_0^2 v^2 b^2}{R}$$

Como puede verse, la potencia disipada en la resistencia

$$P_{disipada\ en R} = I^2 R = \frac{B_0^2 v^2 b^2}{R^2} R = \frac{B_0^2 v^2 b^2}{R}$$

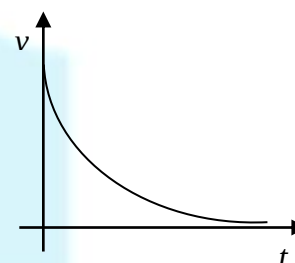
es igual a la potencia aplicada para mantener el movimiento con velocidad constante.

Podemos calcular cómo variaría la velocidad si no se aplicara esa fuerza a partir de la Ley de Newton

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{B_0^2 v b^2}{R} \vec{e}_y$$

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = -\int_0^t \frac{B_0^2 b^2}{mR} dt \rightarrow \ln \frac{v}{v_0} = -\frac{B_0^2 b^2}{mR} t$$

$$v = v_0 e^{-\frac{B_0^2 b^2}{mR} t} \equiv v_0 e^{-t/\tau} \quad \tau = \frac{mR}{B_0^2 b^2} \text{ donde } \tau \text{ es el tiempo característico de frenado.}$$



Como vemos, cuanto mayor es la resistencia al paso de corriente, mayor es τ y mayor el tiempo de frenado, tarda más en disminuir la velocidad. Podemos calcular qué distancia puede recorrer en el tiempo t :

$$\int_0^y dy = \int_0^t v_0 e^{-t/\tau} dt = v_0 \tau (1 - e^{-t/\tau}) = v_0 \frac{mR}{B_0^2 b^2} (1 - e^{-t/\tau})$$

Nota: observar que si hubiéramos igualado la potencia disipada en la resistencia a la variación de energía cinética (con signo menos), también hubiéramos determinado la velocidad en función del tiempo.

En conclusión: este dispositivo (circuito móvil en campo magnético estático) sirve como fuente de *fem* si se mantiene la velocidad constante o como freno (usualmente el circuito es estático y el campo magnético, o lo que lo produce, se mueve). Hay una gran cantidad de dispositivos que usan frenos magnéticos: balanzas (¿dónde están?), reeles (esto es para pescadores), “montañas rusas”, trenes, etc.



9.7. La fuerza electromotriz⁸

Si pensamos en un circuito eléctrico típico (una pila con una lamparita) aparece una pregunta que nos puede dejar perplejos. La corriente es la misma a lo largo de todo el circuito en todo momento aunque la única “fuerza de empuje” está en la pila. ¿No sería esperable tener una corriente máxima en la pila y nada en la lamparita? ¿Quién empuja a los portadores de carga en el circuito? ¿Cómo es este empuje

⁸ Esto está basado en el tratamiento dado en *Introduction to Electrodynamics* de Griffiths

que hace que la corriente sea la misma siempre en todos los puntos del circuito? Es más: como vimos en el Capítulo 5, los portadores de carga se mueven a paso de caracol. ¿Por qué no lleva media hora a que las noticias alcancen la lamparita? ¿Cómo saben los portadores que deben comenzar a moverse en el mismo instante?

Respuesta: Si la corriente no fuera la misma en todo el circuito, la carga se apilaría en algún lugar, y (acá está el punto crucial) el campo eléctrico que produciría esta carga acumulada trataría de nivelar el flujo de cargas. Supongamos (ver figura) que en la curva la corriente entrante es mayor que la

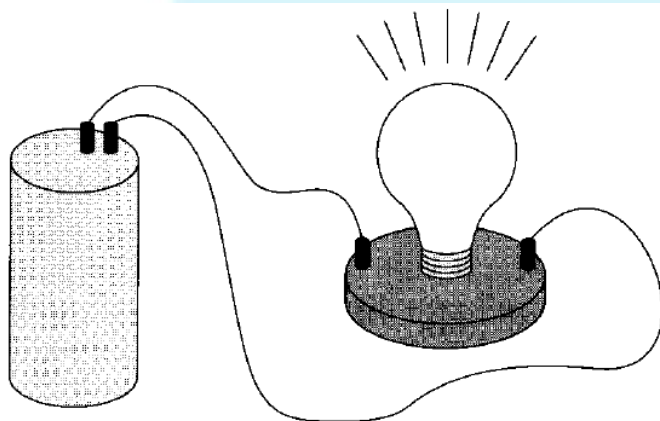


Figure 7.7

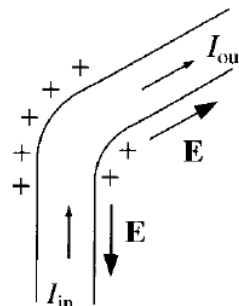


Figure 7.8

saliente. De ser así, se acumularía carga positiva y crearía un campo eléctrico saliente (de la curva). Este campo se opone al flujo de corriente entrante (y va a disminuir la corriente entrante) y va a incentivar a la corriente saliente, lo que hará que disminuya la cantidad de cargas positivas acumuladas en la curva. Cuando se acabe la acumulación, las corrientes (entrante y saliente) serán iguales: se llegará al equilibrio. Es un hermoso sistema que se autocorrigie automáticamente para mantener la corriente uniforme. Y en la práctica lo hace tan rápido que podemos asumir que la corriente es la misma en todo el circuito (aún en sistemas que oscilan a radiofrecuencias).

El resultado de todo esto es que existen en realidad dos fuerzas asociadas a la corriente circulante: la *fuerza* (en nuestro caso es la pila) y la *fuerza electrostática* (que sirve para uniformizar el flujo de portadores y comunica la influencia de la pila a lugares distantes de la pila en el circuito). Escribamos la fuerza total por unidad de carga como

$$\vec{f} = \vec{f}_{fuente} + \vec{E}$$

Independientemente de cuál sea el mecanismo por el cual la fuente produce esa fuerza, el efecto neto será

$$fem = \oint \vec{f} \cdot d\vec{l} = \oint (\vec{f}_{fuente} + \vec{E}) \cdot d\vec{l} = \oint \vec{f}_{fuente} \cdot d\vec{l}$$

porque la circulación del campo electrostático es nulo. Así, la *fem* puede ser interpretada como el trabajo realizado por unidad de carga por la fuente sobre el circuito. OJO!!! No es una fuerza...

Apliquemos esto a nuestro generador primitivo de la Sección 9.3. Como vimos, la *fem* producida al entrar en la zona de campo magnético era

$$fem_{\text{entrar}} = -B_0 v b$$

Y en la sección 9.5 vimos que la fuerza sobre cada portador positivo es $\vec{F}_m = q \vec{v} \times \vec{B}_0 = q v \vec{e}_y \times B_0 \vec{e}_z = qvB_0 \vec{e}_x$. O sea, la fuerza por unidad de carga (la que produce que los portadores se muevan) es $\vec{f}_m = B_0 v \vec{e}_x$. Esta “fuerza” es ahora nuestra fuente. Probemos:

$$fem = \int_C \vec{f}_{\text{fuente}} \cdot d\vec{l} = \int_C B_0 v \vec{e}_x \cdot d\vec{l} = \int_Q^P B_0 v \vec{e}_x \cdot d\vec{l} = -B_0 v b$$

De todo el circuito rectangular, solo hay fuerza magnética en el segmento $\overline{PQ}$ por lo que la circulación es nula excepto en ese tramo. E integramos desde Q a P porque habíamos definido como positivo el sentido de circulación horario. Llegamos al mismo resultado que habíamos obtenido a través de la Regla del Flujo. Si bien esto es tan solo un ejemplo, vamos a generalizar el resultado para casos como el del circuito que se mueve en una zona de campo magnético que no varía en el tiempo:

$$fem = \int_C (\vec{v} \times \vec{B}_0) \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \left(\iint_{s(C)} \vec{B}_0 \cdot d\vec{S} \right) = -\frac{d\Phi}{dt}$$

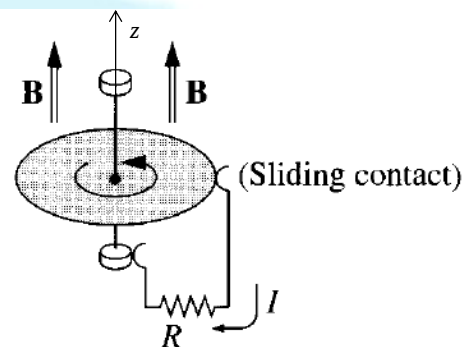
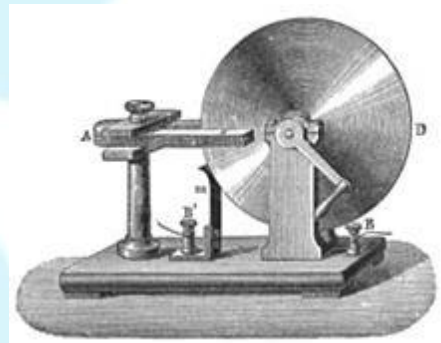
9.8. Dispositivos generadores de *fem* donde no parece haber variación del flujo.

Comencemos por un tipo de generador que históricamente trajo muchos problemas en el siglo XIX porque no se podía entender su funcionamiento: el disco de Faraday o de Arago^v. Esquemáticamente podemos representarlo por un disco metálico de radio a que rota a velocidad angular ω alrededor de un eje vertical en un campo magnético uniforme $\vec{B}$ paralelo al eje de rotación. Se hace un circuito conectando un terminal de una resistencia al eje y el otro terminal al borde del disco (deslizante). Calculemos la *fem* inducida a partir de:

$$fem = \int_C (\vec{v} \times \vec{B}_0) \cdot d\vec{l}$$

Esta integral se debe hacer pensando en los portadores

de carga que se mueven con una velocidad $\vec{v} = \omega \rho \vec{e}_\phi$, por lo que



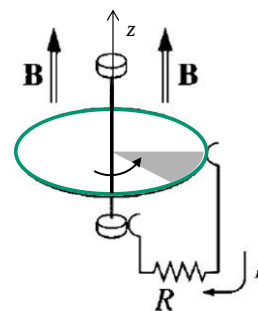
$\vec{v} \times \vec{B}_0 = \omega \rho \vec{e}_\phi \times B_0 \vec{e}_z = \omega \rho B_0 \vec{e}_\rho$. Esto significa que los portadores positivos se dirigirán hacia al borde del disco (por eso el sentido de la corriente es el indicado en la figura). La integral será nula en todo punto fuera del disco⁹. En consecuencia,

$$fem = \oint_C \omega \rho B_0 \vec{e}_\rho \cdot d\vec{l} = \int_0^a \omega \rho B_0 d\rho = \frac{\omega B_0 a^2}{2} \quad \text{y la corriente}$$

$$I = \frac{fem}{R} = \frac{\omega B_0 a^2}{2R} \quad \text{si suponemos que la resistencia del disco es despreciable. Si no, la corriente}$$

también va a depender del material con el que esté hecho el disco.

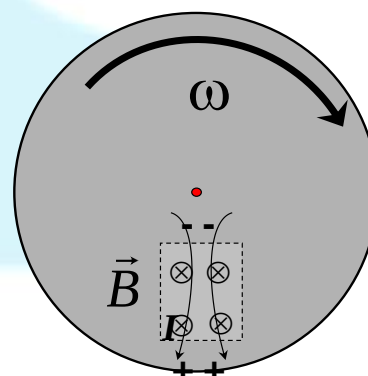
¿En qué hubiera cambiado el cálculo si en lugar de un disco hubiéramos colocado un trozo del mismo (por ejemplo, uno en forma de sector circular) y el terminal hubiera estado adosado al borde exterior? El cálculo de la fem hubiera sido el mismo, el resultado de la fem hubiera sido el mismo... Lo diferente hubiera sido la corriente **si** no pudiéramos despreciar la resistencia del sector circular. ¿Será mayor o menor la corriente que en el caso de utilizar el disco completo? De lo que vimos en el Capítulo 5, la resistencia a la corriente que presenta un conductor cilíndrico es mayor cuanto menores son las posibilidades que tienen los portadores positivos de moverse. Está claro que las posibilidades de moverse son mayores en el disco completo, por lo que su resistencia sería menor si pensamos en este aspecto. En consecuencia, sería de esperar que la corriente fuera mayor cuando usemos el disco completo.



9.9. Corrientes parásitas o corrientes de Foucault o corrientes de torbellino o “eddy currents”

El disco termina siendo como una pila sin pila (este es el primer generador “homopolar”). Fuera del disco, claramente la corriente circula por el conductor del circuito. Pero en el disco la corriente se desparrama por toda su superficie. Por eso se hace complejo pensar en la Regla del Flujo. ¿Cómo se distribuye la corriente en el disco? Calcular esto es una de las dificultades más grandes que existen. Pero es relativamente fácil de verlo en forma cualitativa. A estas corrientes se las denomina corrientes de Foucault o parásitas o de torbellino.

Ahondemos un poco más en el ejemplo de la sección anterior. Supongamos que el campo magnético solo “ocupa” una porción de la superficie y la velocidad angular se mantiene constante. Los



⁹ No importa cómo sea la forma del circuito, el tramo sobre el disco lleva a una integral igual a la integral sobre un segmento de largo a

portadores de carga que van a sufrir el efecto de la fuerza magnética serán los que estén en esa porción. Y, según la disposición del esquema los portadores positivos se dirigirán “hacia abajo”. Por supuesto que los portadores positivos no siguen las direcciones indicadas con las flechas (piensen que en cada instante cambia la dirección radial para cada portador positivo). Pero, en promedio, podemos esquematizarlo como en la figura.

¿Qué ocurre si se gira el disco con la manija y luego se deja evolucionar al sistema? Pensando en nuestro generador primitivo, podemos determinar que se va a frenar. Es decir, también en este caso aparece una fuerza de frenado (de sentido contrario al del movimiento). Pero, en este caso, resulta imposible hacer el cálculo analítico.

Como vimos, el tiempo característico de frenado es $\tau = \frac{mR}{B_0^2 b^2}$



para el generador primitivo. Para otros generadores más complicados, no podremos determinar este tiempo pero podemos pensar que será proporcional a la resistencia. Cuanto menor sea la resistencia, mayor será la fuerza de frenado y menor el tiempo que tardará en frenarse. Aplicando este resultado al disco de Foucault, llegaríamos a la conclusión que si no mantenemos la velocidad angular constante, el disco completo se frenará antes que el sector circular.

9.10. ¿Usamos Regla del Flujo o la “Fuerza Magnética” para determinar la fem inducida?

Esta pregunta esconde en realidad a otra: ¿son lo mismo la Regla del flujo y el trabajo que realiza la fuerza magnética sobre el circuito? En el ejemplo del generador primitivo, vimos que podríamos calcularlo de las dos maneras. En el caso del disco de Foucault, pudimos entender cómo se induce la *fem* a pesar de que no cambie el flujo (aunque sea así aparentemente; si no serían contradictorias ambas formas). Uno puede forzar a aplicar la Regla del Flujo (eso hacen la mayoría de los libros) al disco de Foucault y a otros dispositivos inventando circuitos (curvas) y superficies ficticias (que a algún científico se le ocurrió usar y nosotros repetimos su metodología). Sin embargo, aparte de estos casos forzados, la Regla del Flujo no resulta siempre válida¹⁰.

En conclusión, nosotros utilizaremos la Regla del Flujo o el trabajo de la Fuerza Magnética sobre el circuito para calcular la *fem* (según nos convenga más). De todas maneras, con lo que vimos hasta ahora podemos describir el funcionamiento de muchos dispositivos (como los generadores y los frenos magnéticos) y explicar otros muy pintorescos (como el “tubo mágico”, el anillo de Thompson y los “péndulos magnéticos”).

¹⁰ Hay dos ejemplos en el libro de Feynman

Podemos deducir teóricamente que “las dos formas” de calcular la *fem* son solo eso: dos formas. Veamos cómo se puede demostrar esa afirmación. Cuando escribimos

$$fem = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_{S(C)} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

dijimos en la Sección 9.2 que el flujo podía cambiar por varios motivos:

1. Varía el campo magnético $\vec{B}$: en el ejemplo de la espira circular de la Sección 9.2
2. Varía la superficie en el tiempo $S = S(t)$: podría ser una espira que se achica o agranda
3. Varía el ángulo entre el campo y la superficie $\theta = \theta(t)$: es el caso del generador de alterna
4. De alguna manera varían los límites de integración: es el caso de nuestro generador primitivo (se mueve la espira con $\vec{v}$)

¿Cómo se relaciona esto con la fuerza magnética $\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$?

Si el circuito C se mueve con velocidad $\vec{v}$ en cierta dirección **sin deformarse**, en la derivada total de la expresión de la *fem* debemos tener en cuenta este movimiento^{viii}. Así podemos reducir las causas del cambio del flujo a

1. El flujo en un punto cambia al transcurrir el tiempo
2. El circuito se traslada

En lo que sigue, solo nos limitaremos a hacer un esbozo de la demostración matemática (Este paso pueden pasarlo rápidamente, solo está para justificar la expresión final). Después le daremos sentido físico. La derivada total y la derivada parcial de un vector respecto al tiempo de una función vectorial $\vec{G} = \vec{G}(\vec{r}, t) = \vec{G}(x, y, z, t)$ donde las variables x, y, z son también funciones del tiempo, están ligadas por la expresión

$$\frac{d\vec{G}}{dt} = \frac{\partial \vec{G}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{G}$$

donde llamamos $\vec{v}$ al vector velocidad que está dado por $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ ^{viii}

Esta ecuación puede ser escrita de otra manera a partir de la identidad vectorial

$$\nabla \times (\vec{G} \times \vec{v}) = \vec{G}(\nabla \cdot \vec{v}) - \vec{v}(\nabla \cdot \vec{G}) + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{G} - (\vec{G} \cdot \nabla) \vec{v}$$

El primer y cuarto término del segundo miembro son nulos porque consideramos que la **velocidad es uniforme** (no varía ni punto a punto en el espacio ni varía en el tiempo). En consecuencia

$$\nabla \times (\vec{G} \times \vec{v}) = -\vec{v}(\nabla \cdot \vec{G}) + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{G}$$

o

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{G} = \vec{v}(\nabla \cdot \vec{G}) + \nabla \times (\vec{G} \times \vec{v})$$

En consecuencia
$$\frac{d\vec{G}}{dt} = \frac{\partial \vec{G}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{G} = \frac{\partial \vec{G}}{\partial t} + \vec{v} (\nabla \cdot \vec{G}) + \nabla \times (\vec{G} \times \vec{v})$$

Para campos solenoidales ($\nabla \cdot \vec{G} = 0$), resulta
$$\frac{d\vec{G}}{dt} = \frac{\partial \vec{G}}{\partial t} + \nabla \times (\vec{G} \times \vec{v})$$

$$fem = -\frac{d}{dt} \iint_{S(C)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\iint_{S(C)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} - \iint_{S(C)} \nabla \times (\vec{B} \times \vec{v}) \cdot d\vec{S}$$

Aplicando el teorema de Stokes al segundo término del miembro derecho y considerando que la superficie de integración S delimitada por la curva C no varía en el tiempo, se obtiene

$$fem = -\frac{d}{dt} \iint_{S(C)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\iint_{S(C)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

Así, esta ecuación es válida para “circuitos” rígidos que se mueven a bajas velocidades respecto de la velocidad de la luz de forma tal que las transformaciones de Galileo se puedan considerar válidas. Se interpreta, entonces, que el flujo magnético a través de un circuito C puede variar a causa de que el campo cambie en un punto al transcurrir el tiempo o porque el circuito se traslada con velocidad constante. Como puede verse, el segundo término del tercer miembro corresponde al trabajo de la fuerza magnética sobre el circuito por unidad de carga.

Observación: habíamos dicho en el Capítulo 6 que la fuerza magnética no realizaba trabajo. ¿No hay contradicción con lo que acabamos de decir sobre la fem inducida? La respuesta es NO. En el Capítulo 6, consideramos la fuerza magnética sobre una carga que tenía una velocidad inicial $\vec{v}_0$ inmersa en un campo magnético externo $\vec{B}_0$. Y calculamos el trabajo realizado por dicha fuerza sobre la carga:

$$W = q \int_A^B (\vec{v} \times \vec{B}_0) \cdot d\vec{r} \text{ donde están relacionados } \vec{v} \text{ y } d\vec{r} \text{ por } \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \text{ Por eso el trabajo realizado por la}$$

fuerza magnética cuando la carga se traslada es nulo (tanto entre dos puntos como en un camino cerrado). En cambio, al calcular la fem cuando el campo no varía en el tiempo, $fem = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$,

$\vec{v}$ es la velocidad del circuito C y $d\vec{l}$ indica sus características (su “forma”) y no está relacionado directamente con la velocidad.

Moraleja: No podemos adelantar de antemano si usar $fem = -\frac{d}{dt} \iint_{S(C)} \vec{B} \cdot d\vec{S}$ o

$$fem = -\iint_{S(C)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \text{ para calcular la } fem. \text{ La primera es general y la segunda solamente}$$

es válida solo **cundo el circuito C no se deforma**. A veces, la primera parece presentar más dificultad.

9.11. Una nueva visión de la fem y una nueva interpretación de la Ley de Faraday-Lenz

¿Cómo podemos relacionar lo que vimos en la Sección 9.7 con la *fem* inducida? Habíamos visto que $fem = \oint_C \vec{f} \cdot d\vec{l} = \oint_C (\vec{f}_{fuente} + \vec{E}) \cdot d\vec{l} = \oint_C \vec{f}_{fuente} \cdot d\vec{l}$ donde la circulación del campo eléctrico era nula por tratarse de un campo electrostático. Así la *fem* podía ser interpretada como el trabajo realizado por unidad de carga por la fuente sobre el circuito. En los ejemplos que vimos hasta ahora, ¿cuál era la fuente? Vimos que era el flujo variable en el tiempo del campo magnético (por cualquiera de los mecanismos posibles). Podemos asociar $\vec{f}_{fuente}$ a un campo eléctrico no conservativo. De esta manera, la *fem* representaría el trabajo que realiza el campo eléctrico total (conservativo y no conservativo) en un circuito completo por unidad de carga. Es decir,

$$fem = \oint_C \vec{E}_{nc} \cdot d\vec{l} = \oint_C (\vec{E}_{nc} + \vec{E}_c) \cdot d\vec{l} = \oint_C \vec{E}_{Total} \cdot d\vec{l} \equiv \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Y solamente contribuye el campo eléctrico no conservativo. La *fem* proviene de campos eléctricos no conservativos. Y si la *fem* es inducida, esa *fem* también debe provenir de un campo eléctrico no conservativo. Fue J.C. Maxwell quien dio esta otra interpretación a la Ley de Faraday-Lenz, haciendo un razonamiento matemático sencillo y físicamente sutil. Para Maxwell la Ley debía ser una propiedad de los campos y que no tenía nada que ver con la presencia o ausencia del circuito por el que circula la corriente. Es decir, Maxwell se liberó del circuito real. Maxwell postuló que la variación del flujo de $\vec{B}$ en alguna zona del espacio (limitada o no) produce en todo punto del espacio (exista o no circuito de prueba) un campo eléctrico inducido por el cambio del flujo de $\vec{B}$. A esta se llama Ley de Faraday-Maxwell.

Y la *fem* ε sobre un circuito C **se define** como la circulación del campo eléctrico $\vec{E}$ a lo largo del circuito, observado desde un sistema de referencia solidario al circuito. Es decir, en un sistema donde $\vec{v} = 0$. En consecuencia,

$$\varepsilon = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint_{S(C)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

donde hemos primado los campos para dejar en claro que están medidos desde un sistema inercial solidario al circuito. De esta manera, usando el Teorema de Stokes llegamos a la ecuación diferencial

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}' = - \frac{\partial \vec{B}'}{\partial t}$$

Pero como todos los observadores inerciales miden la misma fem (es un postulado) sobre un circuito, la Ley de Faraday-Lenz se cumple para todos los sistemas inerciales. Entonces

- Desde un sistema en reposo respecto del circuito

$$\varepsilon = \oint_C \vec{E}' \cdot d\vec{l} = - \iint_{S(C)} \frac{\partial \vec{B}'}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

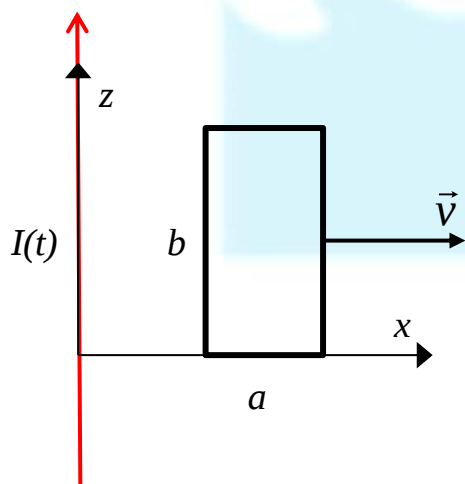
- Desde un sistema de referencia desde el cual se ve al circuito moverse con velocidad $\vec{v}$

$$\varepsilon = - \iint_{S(C)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

Nota: No nos cabe duda de que lo expuesto en esta sección puede resultar algo oscuro. Nuestra intención es dar una visión superficial sobre la Ley de Faraday-Maxwell. Dejamos “oculta” la relación entre campos eléctricos y magnéticos vistos desde sistemas inerciales que se mueven a velocidades donde se puedan despreciar los efectos relativistas (de Einstein). Este tema podrán verlo con detalle en la materia “Electromagnetismo”. Si quieren adelantarse, recomendamos leer el Capítulo 8 de “Ingeniería Electromagnética” del Ing. Juan Carlos Fernández.

9.12. Un ejemplo: espira que se mueve en un campo magnético variable en el tiempo y en el espacio

Calcular la fem inducida en un circuito conductor rectangular indeformable de lados a y b que se aleja (a una velocidad v constante) de un cable muy largo por el que circula una corriente variable en el tiempo $I(t)$ fijada por una fuente externa. El cable y el circuito son coplanarios. Discutir la polaridad de la fem si se sabe que la corriente aumenta al transcurrir el tiempo.



Como primer paso, recordamos la expresión del campo generado por un conductor rígido por el que circula una corriente I a partir de la Ley de Ampere. El sistema de coordenadas elegido corresponde al de la figura. Expresado en componentes y coordenadas cilíndricas ρ, φ, z , el campo generado por el cable en todo el espacio está dado por

$$\vec{B}(\rho, \varphi, z, t) = \frac{\mu_0}{2\pi} I(t) \frac{1}{\rho} \vec{e}_\varphi.$$

Como el movimiento se produce en el plano xz , la coordenada ρ corresponderá a la coordenada x y la coordenada φ a la coordenada cartesiana y . En consecuencia, en el plano xz el campo magnético está dado por

$$\vec{B}(x, t) = \frac{\mu_0}{2\pi} I(t) \frac{1}{x} \vec{e}_y.$$

Vamos a resolver este problema desde dos sistemas de coordenadas. El sistema S solidario al cable (sistema Cable o Laboratorio) y el sistema S' (sistema Circuito) solidario al circuito (que se mueve con velocidad $\vec{v} = v\vec{e}_x$ respecto al sistema S). Debido a la geometría del problema, la coordenada ρ está identificada con la coordenada x mientras que el versor $\vec{e}_\varphi$ corresponde al versor cartesiano $\vec{e}_y$.

Vamos a partir de

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt} \iint_{S(C)} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\mathcal{E} = - \iint_{S(C)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

Podemos usar el tercer miembro la segunda ecuación porque la espira no se deforma y se mueve a velocidad constante. En el sistema de referencia Laboratorio se puede calcular la *fem* tanto a partir de la primera como de la segunda ecuación, mientras que desde S' es más sencillo calcularlo a partir de la segunda ecuación.

Sistema de referencia solidario al cable por el que circula corriente S

El cálculo de la *fem* inducida desde este sistema de referencia tiene la dificultad de la determinación de los límites de integración, y sobre todo poder distinguir las diferencias entre los límites a utilizar cuando el cálculo se hace a partir de a) la derivada total del flujo (primera ecuación) ó b) su descomposición en dos términos (segunda ecuación)

a) Cálculo a partir de la derivada total temporal del flujo concatenado

Para el cálculo de la *fem* desde el sistema solidario al cable por el que circula una corriente $I(t)$ se plantea el flujo $\Phi = \iint_{\text{espira}} \vec{B} \cdot d\vec{S}$ a través de una superficie delimitada por la espira, teniendo en cuenta

la dependencia temporal del vector campo magnético tanto a través de la variación de la corriente como de la posición de la espira.

Al ser la velocidad de la espira constante, y suponiendo que en $t=0$ es $x=x_0$, la espira estará delimitada

$$\text{al tiempo } t \text{ por } x(t) = \begin{cases} x_0 + vt \\ x_0 + a + vt \end{cases} \quad z(t) = \begin{cases} 0 \\ b \end{cases}$$

Eligiendo como superficie al rectángulo delimitado por la espira, la normal a la superficie en la dirección $\vec{e}_y$, el flujo magnético resulta

$$\Phi(t) = \int_0^b dz \int_{x_0+vt}^{x_0+a+vt} \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi} \frac{1}{x} dx = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi} b \ln \left(\frac{x_0 + a + vt}{x_0 + vt} \right)$$

Derivando respecto del tiempo y multiplicando por (-1), la fuerza electromotriz inducida en la espira, resulta

$$\varepsilon(t) = -\frac{\mu_0 b}{2\pi} \left(\frac{dI(t)}{dt} \ln \left(\frac{x_0 + a + vt}{x_0 + vt} \right) + I(t) v \left(\frac{1}{x_0 + a + vt} - \frac{1}{x_0 + vt} \right) \right)$$

b) Cálculo a partir de la derivada temporal parcial del flujo concatenado y del movimiento de la espira

Cuando se calcula la *fem* a través de $\varepsilon = - \iint_{S(C)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$, la fuerza electromotriz

inducida puede pensarse como suma de dos *fems*: una debida a la variación temporal del campo magnético relacionada con un campo eléctrico inducido no conservativo a través de la Ley de

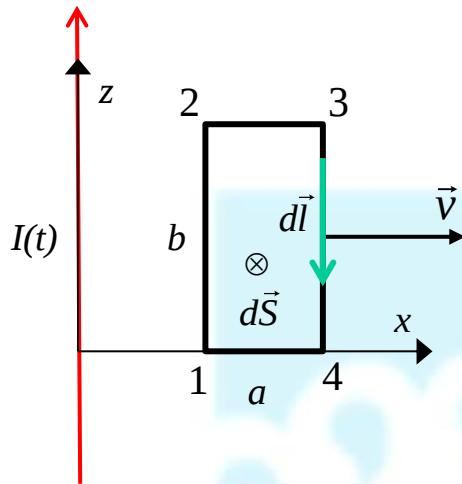
Faraday-Maxwell $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, y otra *fem* relacionada con el acomodamiento de cargas en la

espira debido a las fuerzas (fuerza de Lorentz $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$) que ellas sufren cuando la espira cerrada está en movimiento en un campo magnético no uniforme, es decir,

$$\varepsilon = - \iint_{S(C)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \varepsilon_F + \varepsilon_M$$

donde elegiremos como superficie de integración el rectángulo delimitado por la espira. Como se eligió como normal a la superficie de integración la dirección $\vec{e}_y$, el diferencial de arco que le corresponde tendrá sentido horario, según el esquema de la figura.

$$\varepsilon_F = - \iint_{\text{espira}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = - \int_0^b dz \int_{x_0+vt}^{x_0+a+vt} \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\partial I(t)}{\partial t} \frac{1}{x} dx = -\frac{\mu_0 b}{2\pi} \frac{dI(t)}{dt} \ln \left(\frac{x_0 + a + vt}{x_0 + vt} \right)$$



Para el cálculo de $\mathcal{E}_M$, la integral de línea se debe considerar como suma de 4 integrales, que corresponden a cada lado de la espira. Como el campo magnético generado por el hilo recto tiene sentido $\vec{e}_y$ (si el sentido de la corriente es el indicado en la figura), $\vec{v} \times \vec{B}$ tendrá sentido $\vec{e}_z$ y el integrando será positivo, negativo o nulo según el segmento de la espira que se esté considerando: de 1 a 2 será positivo, de 2 a 3 y de 4 a 1 nulo, y de 3 a 4 negativo. Sin embargo, si se circula la espira será $d\vec{l} = dz \vec{e}_z$ para los tramos paralelos al cable y y

$d\vec{l} = dx \vec{e}_x$ para los tramos perpendiculares al mismo (los cuales no contribuyen a la integral de línea pues $\vec{v} \times \vec{B}$ no tiene componente en esa dirección). Consecuentemente, la fem inducida $\mathcal{E}_M$ estará dada por

$$\mathcal{E}_M = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \int_0^b v \frac{\mu_0}{2\pi} I(t) \frac{1}{x_{1-2}} dz + \int_b^0 v \frac{\mu_0}{2\pi} I(t) \frac{1}{x_{3-4}} dz$$

El cálculo de esta integral puede presentar dos dificultades: 1) considerar el signo de dos veces en el tramo 3-4 (al hacer el producto escalar y al poner los límites de integración), y 2) poner en cada tramo el valor de x que corresponde al tramo. En el caso del tramo 1-2, el campo magnético debe ser evaluado en $x = x_0 + vt$, mientras que en el tramo 3-4 será evaluado en $x = x_0 + a + vt$. Entonces

$$\mathcal{E}_M = \int_0^b v \frac{\mu_0}{2\pi} I(t) \frac{1}{x_{1-2}} dz + \int_b^0 v \frac{\mu_0}{2\pi} I(t) \frac{1}{x_{3-4}} dz = v \frac{\mu_0}{2\pi} I(t) \left(\int_0^b \frac{1}{x_0 + vt} dz + \int_b^0 \frac{1}{x_0 + a + vt} dz \right)$$

En consecuencia, la fem inducida “por movimiento” está dada por

$$\mathcal{E}_M = vb \frac{\mu_0}{2\pi} I(t) \left(\frac{1}{x_0 + vt} - \frac{1}{x_0 + a + vt} \right)$$

La fem total inducida así obtenida, $\mathcal{E}_F + \mathcal{E}_M$, coincide con la obtenida en a).

Sistema de referencia S' solidario a la espira

Como en el sistema solidario a la espira, las cargas contenidas en la misma están en reposo con respecto al sistema de referencia,

$$\mathcal{E} = - \iint_{S(C)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \mathcal{E}_F + 0 = - \iint_{S(C)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}.$$

En este sistema (donde hemos considerado el origen de coordenadas en el vértice notado como “1” en la figura) los límites de la espira están dados para todo t por

$$x'(t) = \begin{cases} 0 \\ a \end{cases} \quad z'(t) = \begin{cases} 0 \\ b \end{cases}$$

La relación entre las coordenadas (x, y, z) del sistema S y las del sistema de referencia inercial S' (x', y', z') que se mueve con velocidad $\vec{v} = v\vec{e}_x$, está dada por

$$x = x' + x_0 + vt \quad y = y' \quad z = z'$$

y el campo magnético en el sistema S' estará dado por¹¹

$$\vec{B}(x', t) = \frac{\mu_0}{2\pi} I(t) \frac{1}{x' + x_0 + vt} \vec{e}_y$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} \varepsilon &= - \iint_{\text{espira}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}' = - \int_0^a dx' \int_0^b dz' \left(\frac{\mu_0}{2\pi} I(t) \frac{1}{x' + x_0 + vt} \right) \frac{\partial}{\partial t} = \\ &= - \frac{\mu_0}{2\pi} \int_0^a dx' \int_0^b dz' \left(\frac{\partial I(t)}{\partial t} \frac{1}{x' + x_0 + vt} - I(t) \frac{v}{(x' + x_0 + vt)^2} \right) dz' \end{aligned}$$

Integrando respecto de las coordenadas se obtiene una expresión de la *fem* idéntica a la obtenida anteriormente. Es decir,

$$\boxed{\varepsilon(t) = - \frac{\mu_0 b}{2\pi} \left(\frac{dI(t)}{dt} \ln \left(\frac{x_0 + a + vt}{x_0 + vt} \right) + I(t) v \left(\frac{1}{x_0 + a + vt} - \frac{1}{x_0 + vt} \right) \right)}$$

Observaciones

La resolución de este problema por distintos métodos presenta la ventaja de permitir hacer un análisis de la validez de las distintas “fórmulas” que aparecen en algunos libros de texto. Además, la expresión utilizada para la *fem* permite distinguir claramente los casos campo magnético variable en el tiempo (debido a la corriente en el cable variable en el tiempo) y espira estática, y el caso de campo no dependiente del tiempo y espira cerrada móvil en un campo no-uniforme. Se puede hacer, de esta manera, un análisis detallado de la polaridad de la *fem* dependiendo no sólo del sentido de la corriente que circula por el cable infinito (es decir del sentido del campo magnético) sino también de su variación.

A partir de

¹¹ Esto corresponde a que los campos magnéticos sean los mismos en los dos sistemas de coordenadas, lo que es válido dentro de la consideración $v \ll c$,

$$\varepsilon(t) = -\frac{\mu_0 b}{2\pi} \frac{dI(t)}{dt} \ln\left(\frac{x_0 + a + vt}{x_0 + vt}\right) - \frac{\mu_0 b}{2\pi} I(t) v \left(\frac{1}{x_0 + a + vt} - \frac{1}{x_0 + vt}\right)$$

El primer término del segundo miembro de esta ecuación muestra que cuando la espira permanece en reposo, el signo de la *fem* está dado por el crecimiento (o decrecimiento) de la corriente (o sea del campo magnético creado por el cable) pues el factor que contiene al logaritmo es siempre positivo. El segundo término, en cambio, deja en claro que cuando la espira con corriente constante se aleja del cable, el signo de la *fem* queda determinado por el sentido de la corriente. Por otra parte, es fácil extender este problema al caso en que la velocidad de la espira tenga una componente paralela al cable.

Es conveniente en esta etapa hacer la consideración de corriente constante y espira que se mueve respecto al cable, donde el primer término del segundo miembro de la ecuación es nulo. También se puede considerar otro caso límite, es decir, espira en reposo y corriente que, por ejemplo, crece en el tiempo, en cuyo caso la *fem* es negativa, lo que significa que si la espira fuera conductora, la corriente inducida en la misma debería crear un campo magnético en la dirección $-\vec{e}_y$. Así la corriente circularía en sentido antihorario. Entre estos dos casos, se pueden analizar distintas situaciones.

9.13. El campo eléctrico inducido (no conservativo)

Volvamos a la reinterpretación de la Ley de Faraday hecha por Maxwell. Maxwell asoció la *fem* inducida a un campo eléctrico no conservativo (su circulación corresponde a la *fem*). Así, lo que “impulsa” a los portadores libres de carga de un conductor cerrado a moverse es ese *campo eléctrico inducido*. Y la existencia de este campo eléctrico es independiente de que exista o no el circuito conductor. Si el circuito fuera dieléctrico, los dipolos se orientarían debido a ese campo eléctrico.

Según la Ley de Faraday-Maxwell en forma diferencial tendremos $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq 0$ y $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$.

Recordando propiedades de las funciones vectoriales de Análisis II, la solución de estas ecuaciones diferenciales lleva a un resultado no nulo para $\vec{E}$. Es decir, existe un campo eléctrico (no conservativo porque es rotacional¹²) y solenoidal (divergencia nula) solo por la existencia de un campo magnético dependiente del tiempo. Ese campo eléctrico inducido puede depender del tiempo (depende de cómo sea la dependencia del campo magnético con el tiempo).

Lo más notable es que si no existe ningún circuito, el campo existe igual. ¿Con qué evidencia experimental podemos afirmar esto? Comencemos que un experimento “pensado”. Pensemos un punto del espacio (sin cargas ni corrientes) donde el campo magnético varíe con el tiempo. Si colocamos una carga de prueba inmóvil en ese punto, ella sentirá el efecto del campo eléctrico inducido. Y si, además,

¹² Si fuera irrotacional y solenoidal, la única solución posible sería un campo eléctrico uniforme y constante.

la carga de prueba se moviera, la fuerza total sobre ella estaría dada por la Fuerza de Lorentz

$$\vec{F}(\vec{r}) = q_0 \left(\vec{E}_{inducido}(\vec{r}) + \vec{v}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}, t) \right) \text{ donde } \vec{\nabla} \times \vec{E}_{ind} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Vamos ahora a aplicar esta nueva concepción de campo eléctrico a un ejemplo que, si bien parece ideal, puede ser realizado en el Laboratorio.

Supongamos que en una zona del espacio sin cargas y en vacío (zona cilíndrica infinita) existe un campo magnético uniforme pero que depende del tiempo. Según la Ley de Faraday-Maxwell (en forma integral y en forma diferencial)

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_{S(C)} \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

donde, para generalizar, el campo eléctrico considerado es el total (conservativo y no conservativo) aunque sabemos que el conservativo no contribuye a ninguna de las ecuaciones porque es conservativo o irrotacional. Si el campo magnético tiene dirección z , el campo eléctrico solamente puede tener componentes x e y (todo deducido de la ecuación diferencial). Como no hay cargas según lo que postulamos, debe ser $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$. Esto lleva a que las líneas de campo eléctrico deben ser cerradas. Y como las líneas son cerradas el campo eléctrico solo puede tener solamente componente $\vec{e}_\phi$ (si tuviera una componente radial, la divergencia no sería nula). Por otra parte, por la simetría de la configuración, el campo eléctrico no puede depender en forma diferente de las coordenadas x e y ; solamente puede depender de ρ . Es decir las líneas de campo eléctrico inducido deben ser circunferencias.

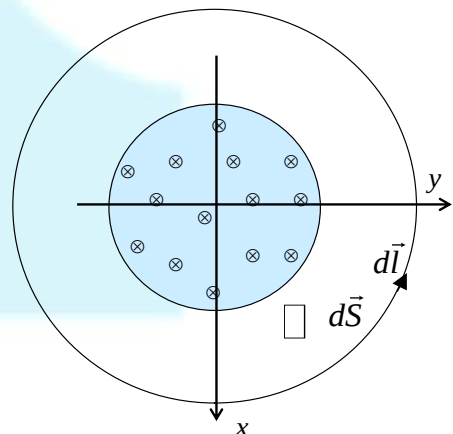
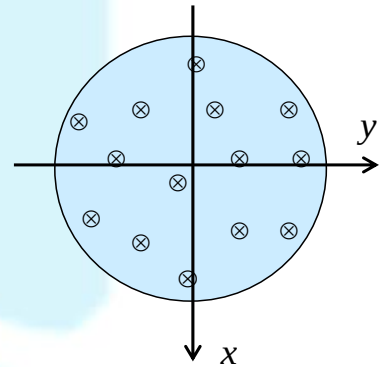
Calculemos la *fem* inducida a partir de la Regla del Flujo. Pero... ¿qué superficie y qué curva elegimos? ¿Va a depender la *fem* de la curva (que no es un circuito) y superficie elegidas?

Para eso vamos a considerar primero una curva en forma de circunferencia centrada (porque es muy fácil calcularla). Como $\vec{B} = B(t)(-\vec{e}_z)$ y $d\vec{S} = dS \vec{e}_z$, la

fem inducida vale:

$$\varepsilon = -\frac{d}{dt} \iint_{S(C)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = +\frac{d}{dt} \iint_{S(C)} B dS = \begin{cases} \frac{dB}{dt} \pi \rho^2 & \rho < R \\ \frac{dB}{dt} \pi R^2 & \rho > R \end{cases}$$

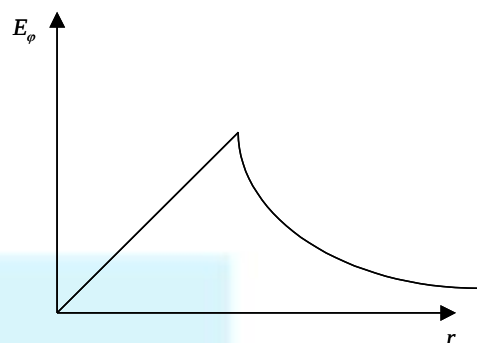
Una vez determinado el sentido del diferencial de superficie, el sentido del diferencial de longitud queda unívocamente determinado $d\vec{l} = dl \vec{e}_\phi$. Definiendo $\vec{E} = E(\rho) \vec{e}_\phi$, la circulación del campo eléctrico inducido resulta



$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = E(\rho) 2\pi\rho$$

En consecuencia,

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(\rho) \vec{e}_\rho = \begin{cases} \frac{dB}{dt} \frac{\rho}{2} \vec{e}_\rho & \rho < R \\ \frac{dB}{dt} \frac{R^2}{2\rho} \vec{e}_\rho & \rho > R \end{cases}$$



El sentido del campo eléctrico depende de que el campo magnético crezca o decrezca en el tiempo y tiene dirección tangencial (según el sistema de coordenadas elegido).

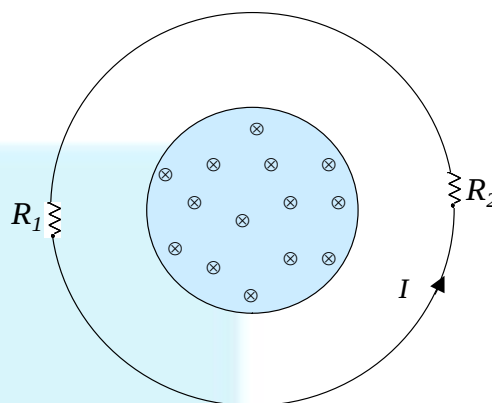
Si el campo magnético hubiera tenido el otro sentido, lo único que hubiera cambiado es el producto escalar entre el campo y la superficie (lo que es equivalente a considerar $B(t) < 0$). Es decir, hubiéramos obtenido que el campo eléctrico inducido tenía sentido $-\vec{e}_\rho$ si el campo magnético era creciente. Resumiendo:

- 1) Si el campo magnético tiene sentido entrante y aumenta en el tiempo: $\vec{E}$ tiene sentido antihorario.
- 2) Si el campo magnético tiene sentido entrante y disminuye en el tiempo: $\vec{E}$ tiene sentido horario.
- 3) Si el campo magnético tiene sentido saliente y aumenta en el tiempo: $\vec{E}$ tiene sentido horario.
- 4) Si el campo magnético tiene sentido saliente y disminuye en el tiempo: $\vec{E}$ tiene sentido antihorario.

Si hubiera colocáramos una carga en algún punto del espacio, ella se aceleraría. Si se colocara un hilo conductor con la forma de la curva, aparecería una corriente (recordar del Capítulo 5 que el sentido de la densidad de corriente coincide con la del campo eléctrico). ¿Es coherente esto con la Ley de Faraday-Lenz? En el dibujo, si $\vec{B}(t)$ aumenta con el tiempo, por la Ley de Lenz debe crearse un campo magnético saliente para tratar de impedir que el flujo cambie, i.e. la corriente circularía en sentido antihorario. Si el campo tuviera el otro sentido y disminuyera en el tiempo, por ejemplo, debería aparecer una I que aumentara el campo, i.e. que creara un campo magnético saliente. Así también sería en sentido antihorario. Así se ‘piensa’ que ese campo eléctrico es el que hace que las cargas circulen; es el responsable de la *fem*. Cuando en un circuito ponemos una pila, sabemos dónde está la responsable de que los portadores de carga circulen debido al campo eléctrico que ella genera. Pero en este dispositivo, ¿dónde está la *fem*? La respuesta sería: en todos lados. Quizá la pregunta sea inadecuada ... Por eso Maxwell pensó solamente en campos eléctricos y magnéticos. Sin embargo,

desde el punto de vista tecnológico, pensar en términos de *fem* es muy conveniente a bajas frecuencias (que corresponde al dominio de los circuitos eléctricos).

Pero, de todas formas, el modelo de la *fem inducida* acarrea varios problemas que a veces dificultan la comprensión de algunas situaciones experimentales (iremos viendo varias de ellas de a poco). Comencemos por una aparente paradoja: colocamos dos resistencias R_1 y R_2 en un circuito conductor (para la figura hemos considerado que el campo magnético aumenta en el tiempo). Es fácil ver que $I(R_1 + R_2) \neq 0$ a pesar de que



el circuito está cerrado. ¿Es correcto? ¿Qué mediríamos con un voltímetro colocado sobre R_1 y sobre R_2 ? ¿Depende de cómo coloquemos el voltímetro? Es un problema bastante complejo (desde todo punto de vista) pero ya fue resuelto experimental y teóricamente^{ix}.

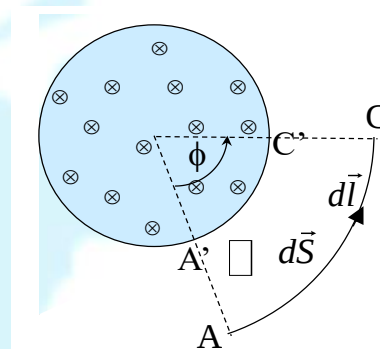
Ahora supongamos que a una cierta distancia a del centro O , tenemos un hilo de forma circular de largo L . Calculemos la circulación del campo a lo largo del

triángulo circular $OACO$

$$\oint_{OACO} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_O^A \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_A^C \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_C^O \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_O^A \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

pues el campo eléctrico inducido es acimutal. Si $a > R$, la *fem inducida* resulta

$$fem = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{dB}{dt} \frac{R^2}{2a} AC = \frac{dB}{dt} \frac{R^2}{2a} a \phi = \frac{dB}{dt} \frac{R^2}{2} \phi$$



Esta no es la única forma de calcularla. Si aplicamos la Regla del Flujo, obtenemos

$$-\frac{d}{dt} \iint_{s(C)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = + \frac{dB}{dt} OA'C' = \frac{dB}{dt} \frac{R^2 \phi}{2}$$

ya que el área donde el campo magnético no es nulo corresponde a la del triángulo circular $OA'C'$. Es decir, obtuvimos lo mismo. Observar que la *fem* es, en este caso, independiente de el radio a del arco.

Si, en cambio, consideramos que $a < R$

$$fem = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^C \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_C^O \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_O^A \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{dB}{dt} \frac{a}{2} AC = \frac{dB}{dt} a^2 \phi$$

Idéntico resultado se obtendría a partir de la Regla del Flujo. Hay que observar que, en este caso, la *fem inducida* depende de a .

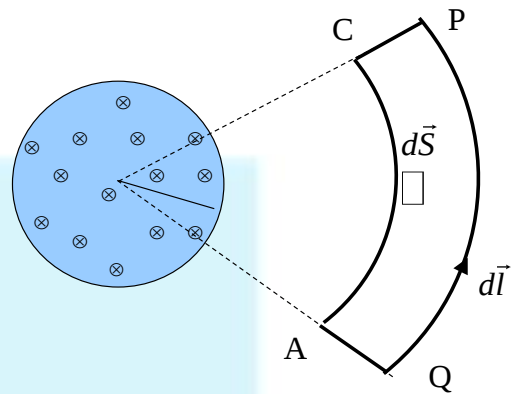
Podemos explicar, ahora qué ocurre cuando se tiene una espira conductora cerrada fuera de la zona de campo.

Por un lado, está claro que $\iint_{S(C)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ por lo que,

desde el punto de vista de la Regla del Flujo, la *fem inducida* es nula. Desde el punto de vista de la circulación del campo eléctrico, las contribuciones en

los tramos AC y PQ se compensan debido a que el largo del arco es directamente proporcional a la

distancia al centro y el campo eléctrico es inversamente proporcional a ella. Entonces la *fem inducida* es nula y no circulará corriente aunque el circuito sea conductor.

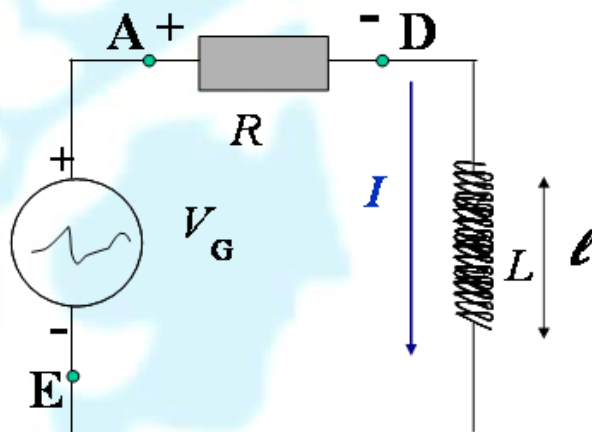


Segunda Parte: Ley de Faraday-Maxwell aplicada a los circuitos con corrientes dependientes del tiempo

9.14. Autoinductancia y fem inducida

Vamos a aplicar la Ley de Faraday-Lenz a una aplicación tecnológica de muchísima importancia. Consideraremos “circuitos eléctricos” alimentados con fuentes o *fems* dependientes del tiempo y con elementos que generan campos magnéticos por el paso de la corriente como el de la figura. El o los campos magnéticos generados dependerán del tiempo y, consecuentemente, el flujo del campo magnético variará porque varía la corriente. Puede ser una corriente alterna (el vector densidad de corriente $\vec{j}$ varía su sentido en el tiempo) o una corriente continua variable en el tiempo (el vector densidad de corriente $\vec{j}$ no varía su sentido en el tiempo).

Supongamos que tenemos un generador V_G que genera una corriente alterna conectado a un solenoide (de sección A y largo ℓ) con N vueltas de alambre muy densamente arrolladas. Supondremos que el núcleo es de aire o de otro material lineal. La resistencia R tiene en cuenta la resistencia de todo el circuito. Para simplificar el modelo, vamos a considerar que podemos despreciar los efectos de borde y considerar que el campo magnético generado por el solenoide se puede aproximar al que genera un solenoide ideal y de largo infinito: paralelo al eje del solenoide y de valor



$$B = \frac{\mu K}{2} 2 = \mu K = \mu \frac{NI}{\ell} = \mu n I$$

donde K representa la densidad superficial de corriente y n la densidad de espiras. Como el flujo concatenado por cada una de sus espiras es $\Phi_1 = \mu n I A$, el concatenado por las N espiras será $\Phi_1 = N \mu n I A$. En consecuencia, la *fem inducida* “en y por la bobina” (la llamaremos “*fem autoinducida*”) será

$$\mathcal{E}_{\text{autoinducida}} = - \frac{d\Phi}{dt} = - \mu n N A \frac{dI}{dt} = - \mu n^2 \ell A \frac{dI}{dt}$$

Recordemos lo realizado en el Capítulo 5 para definir la resistencia eléctrica de un material de forma cilíndrica de sección A y largo ℓ : vimos que la relación entre diferencia de potencial y corriente era una cantidad que dependía de las características del material, de su largo y de su sección. Y así definimos

resistencia. Acá tenemos algo parecido, excepto que en lugar de diferencia de potencial tenemos una

$\mathcal{E}_{\text{autoinducida}}$ y en lugar de corriente I tenemos $\frac{dI}{dt}$. Aprovechando esta semejanza, definimos

autoinductancia L del solenoide como

$$L \equiv \mu n N A = \mu n^2 \ell A = \mu N^2 \frac{A}{\ell}$$

Para el solenoide con núcleo lineal la autoinductancia es directamente proporcional a su sección e inversamente proporcional a su largo y depende de sus propiedades magnéticas a través de la permeabilidad. Observemos que si el material no hubiera sido lineal, hubiéramos podido calcular $\vec{H}$ que no guarda relación lineal con $\vec{B}$, y, en consecuencia, no hubiéramos podido calcular su flujo sin considerar la curva de histéresis.

Pero si el núcleo es lineal (o se trabaja en una zona que a los fines prácticos es lineal) el campo $\vec{B}$ siempre sigue una relación lineal con I (y con $\vec{H}$). Bajo estas condiciones siempre resulta

$$\mathcal{E}_{\text{autoinducida}} = -\frac{d\Phi}{dt} \equiv -L \frac{dI}{dt}$$

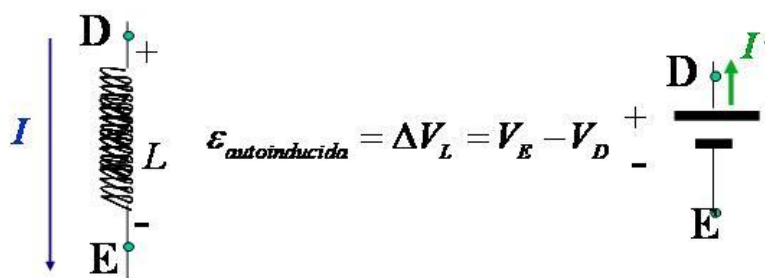
Y la definición de autoinductancia en forma general es $L \equiv \frac{d\Phi}{dI}$ ¹³.

Por supuesto, el cálculo de la autoinductancia lo hicimos en un caso ideal. Aunque la longitud del solenoide sea muy apreciable frente al radio, no todo el flujo contribuye efectivamente a la $\mathcal{E}_{\text{autoinducida}}$. Lo que se hace medir la *fem autoinducida* y de allí determinar la autoinductancia L (como al determinar experimentalmente una resistencia R). Es decir, lo que ocasiona el voltaje entre los bornes del solenoide es la autoinductancia L . Por eso se dice que la caída de tensión en la autoinductancia está dada por

$$\Delta V_L = -L \frac{dI}{dt}$$

Determinar cuál de los bornes es el que está a mayor voltaje dependerá de que la corriente disminuya o aumente con el tiempo. Está claro que si la corriente aumenta con el

tiempo es $\Delta V_L = -L \frac{dI}{dt} < 0$: la tensión “es negativa” y cae la tensión en la L . Podemos graficarlo de la siguiente manera



¹³ Como con una resistencia R , que termina siendo definida como $R \equiv \frac{\Delta V}{I}$.

Pensemos en el sentido de la corriente inducida I' : Si la corriente I aumenta en el tiempo, por la Ley de Lenz se inducirá una corriente que trate de compensar este aumento. Es decir, debe ser de sentido contrario (no importa cómo esté arrollado el solenoide). Entonces la $\mathcal{E}_{\text{autoinducida}}$ sería equivalente “a una pila” con la polaridad indicada.

Las unidades de L se obtienen a partir de su definición:

Esta unidad tiene un nombre particular: Henrio o Henry (en homenaje a Joseph Henry)

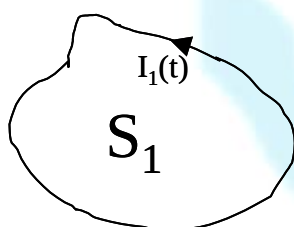
$$[L] = \frac{[\mathcal{E}]}{[I]} [t] = \frac{Vs}{A} = \Omega s = \frac{[\Phi]}{[I]} = \frac{Tm^2}{A} = \frac{Wb}{A} \equiv Hy$$

Observación: El propio circuito es una espira por la que circula corriente por lo que habrá una *fem inducida* “extra”. Pero, vamos a despreciar este efecto (se tiene en cuenta al construir los circuitos que el circuito mismo puede influir)

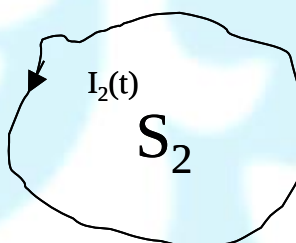
9.15. Autoinductancia e Inductancia Mutua (un desarrollo más formal)

¿Qué ocurre si tenemos más de un solenoide por los que circulan corrientes distintas? Supongamos primero dos circuitos por los que circulan corrientes dependientes del tiempo. Aplicaremos la Ley de Faraday a este “dispositivo” y a partir del resultado podremos hacer una generalización.

Circuito 1



Circuito 2



Cada circuito genera un campo magnético y concatena un flujo debido a su propia corriente y a la de su vecino. Supongamos que el Circuito 1 produce un campo magnético $\vec{B}_1(\vec{r}, t)$ en todo el

espacio y el Circuito 2 genera $\vec{B}_2(\vec{r}, t)$. Por lo tanto, cada uno de los circuitos concatena flujo debido al campo que él mismo genera y al campo generado por el otro circuito. Así podemos escribir los flujos totales concatenados por cada circuito como

$$\Phi_{T_1} = \iint_{S_1} (\vec{B}_1 + \vec{B}_2) \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} + \iint_{S_1} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S} = \Phi_{11} + \Phi_{12}$$

$$\Phi_{T_2} = \iint_{S_2} (\vec{B}_1 + \vec{B}_2) \cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S} = \Phi_{21} + \Phi_{22}$$

En consecuencia, aparecerán dos *fems inducidas* (cada una proveniente del campo propio y el campo generado por la otra). En el Circuito 1

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{d\Phi_{T_1}}{dt} = -\frac{d(\Phi_{11} + \Phi_{12})}{dt} = -\frac{d\Phi_{11}}{dt} - \frac{d\Phi_{12}}{dt} = -\frac{d\Phi_{11}}{dI_1} \frac{dI_1}{dt} - \frac{d\Phi_{12}}{dI_2} \frac{dI_2}{dt}$$

y en el Circuito 2

$$\varepsilon_2 = -\frac{d\Phi_{T_2}}{dt} = -\frac{d(\Phi_{21} + \Phi_{22})}{dt} = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} - \frac{d\Phi_{22}}{dt} = -\frac{d\Phi_{21}}{dI_1} \frac{dI_1}{dt} - \frac{d\Phi_{22}}{dI_2} \frac{dI_2}{dt}$$

Se definen, entonces

$$L_1 \equiv \frac{d\Phi_{11}}{dI_1} \quad M_{12} \equiv \frac{d\Phi_{12}}{dI_2}$$

$$M_{21} \equiv \frac{d\Phi_{21}}{dI_1} \quad L_2 \equiv \frac{d\Phi_{22}}{dI_2}$$

Los coeficientes L_1 y L_2 corresponden a la autoinductancia de cada circuito mientras que los coeficientes M_{ij} se denominan coeficientes de inducción mutua.

Es decir, la autoinductancia da la “rapidez” de cambio de flujo debido al cambio en la corriente que circula por ella, mientras que la inductancia mutua da la “rapidez” con que cambia el flujo debido al cambio de corriente en el otro circuito. Se puede demostrar que en circuitos donde no hay materiales ferromagnéticos siempre $M_{ij} = M_{ji}$ (la demostración excede el nivel del curso).

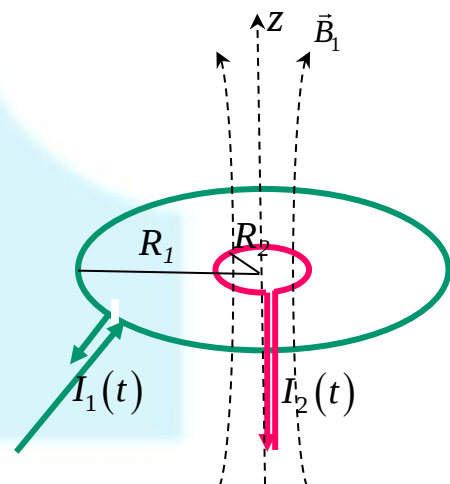
9.16. Cálculo de autoinductancias e inductancias mutuas

Ejemplo 1: Veamos un ejemplo relativamente sencillo si hacemos algunas consideraciones. Son dos espiras concéntricas y coplanares. Las líneas de campo no son sencillas pero podríamos considerar que dentro de la espira más pequeña el campo magnético $\vec{B}_1$ (debido a la $I_1(t)$) es uniforme y su valor se podría aproximar al correspondiente al centro de la

espira. Es decir, $\vec{B}(0,0,z) = \frac{\mu_0 I_1(t)}{2R_1} \vec{e}_z$.

Tomamos el sentido indicado en la figura para la corriente como positivo y, en consecuencia, el diferencial de superficie asociado debe tener el sentido de $\vec{e}_z$. Vamos a calcular la inductancia mutua M_{21} . Es decir, estamos considerando cómo varía el flujo en el Circuito 2 debido al cambio de la corriente $I_1(t)$.

Como vimos,



$$\varepsilon_1 = -\frac{d\Phi_{11}}{dI_1} \frac{dI_1}{dt} - \frac{d\Phi_{12}}{dI_2} \frac{dI_2}{dt} = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M_{12} \frac{dI_2}{dt}$$

$$\varepsilon_2 = -\frac{d\Phi_{21}}{dI_1} \frac{dI_1}{dt} - \frac{d\Phi_{22}}{dI_2} \frac{dI_2}{dt} = -M_{21} \frac{dI_1}{dt} - L_2 \frac{dI_2}{dt}$$

En consecuencia,

$$M_{21} = \frac{d\Phi_{21}}{dI_1} = \frac{d}{dI_1} \left[\iint_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 \right] = \frac{d}{dI_1} \left[\iint_{S_2} \frac{\mu_0 I_1(t)}{2R_1} \vec{e}_z \cdot d\vec{S}_2 \right] = \frac{d}{dI_1} \left[\frac{\mu_0 I_1(t)}{2R_1} \pi R_2^2 \right] = \frac{\mu_0}{2R_1} \pi R_2^2$$

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{2R_1} \pi R_2^2$$

Si el Circuito 1 tiene N_1 espiras y el Circuito 2 tiene N_2 , el campo generado por $I_1(t)$ será N_1 veces el generado por una de sus espiras y el flujo concatenado por el circuito 2 será N_2 veces el concatenado por una de sus espiras. En consecuencia, en forma más general

$$M_{21} = N_1 N_2 \frac{\mu_0}{2R_1} \pi R_2^2$$

¿Cómo calculamos M_{12} ? La aproximación de que el campo generado por la espira más pequeña es uniforme sobre toda la espira grande ya suena bastante descabellada. Entonces, habría que calcular el campo por la Ley de Ampere sobre toda la espira grande debido a la corriente $I_2(t)$ o confiar en el resultado $M_{21} = M_{12}$ que dijimos se demostrará en Electromagnetismo.

Para calcular la autoinductancia L_1 , deberíamos considerar (como hicimos con el solenoide) que el campo es uniforme en la espira 1 (o calcular el campo por la Ley de Ampere sobre toda la espira). En ese caso

$$L_1 = \frac{d\Phi_{11}}{dI_1} = N_1^2 \frac{\mu_0}{2R_1} \pi R_1^2 = N_1^2 \frac{\mu_0}{2} \pi R_1$$

Idéntico procedimiento para calcular L_2 aunque para ser consistente con lo realizado hasta ahora deberíamos hacer el tedioso trabajo de calcular el campo sobre toda la superficie de la espira.

Entonces, si originalmente circulaba una corriente por la espira 1 (variable en el tiempo) habrá *fems* autoinducidas en ambos circuitos

$$\varepsilon_1 = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M_{12} \frac{dI_2}{dt}$$

$$\varepsilon_2 = -M_{21} \frac{dI_1}{dt} - L_2 \frac{dI_2}{dt}$$

Ejemplo 2: Pero hay otro dispositivo (toroide) donde podemos calcular (dentro de ciertas aproximaciones) las autoinductancias y las inductancias mutuas. Consideraremos que: 1) el toroide angosto 2) no hay campo fuera de los bobinados 3) el material del núcleo es lineal

Dentro de nuestro modelo, la corriente $I_1(t)$ genera un campo magnético

donde R es el radio medio. Como el segundo bobinado está **abierto**, no puede circular corriente por él y no genera ningún campo magnético. Podemos escribir que las *fems* autoinducidas en los bobinados 1 (primario) y 2 (secundario) son, respectivamente:

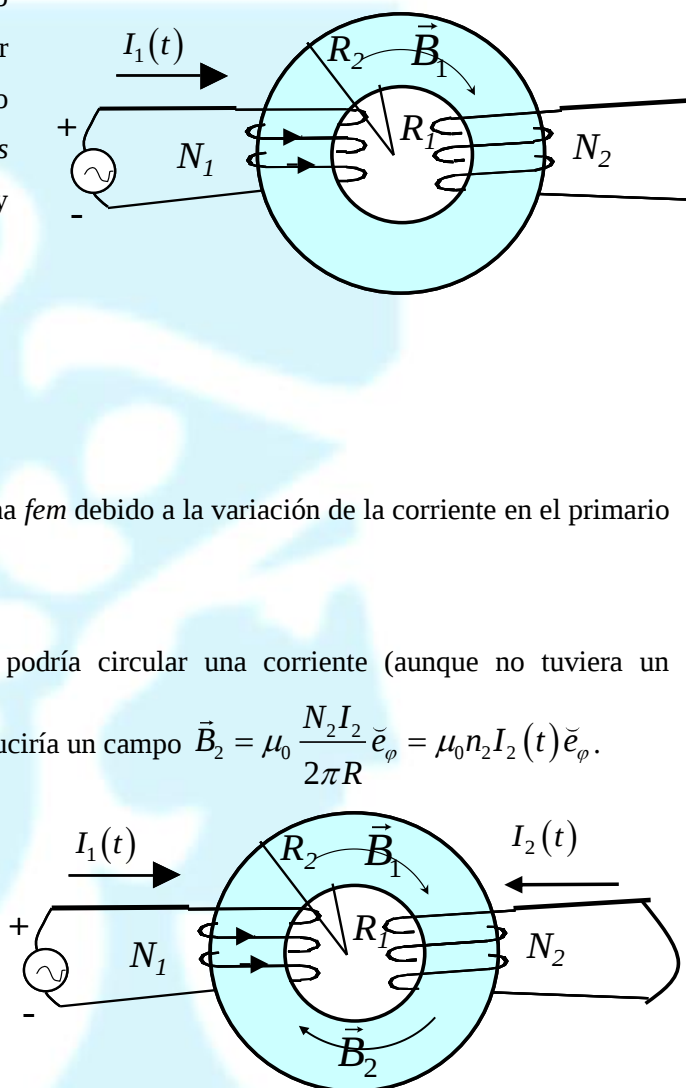
$$\varepsilon_1 = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M_{12} \frac{dI_2}{dt} = -L_1 \frac{dI_1}{dt}$$

$$\varepsilon_2 = -M_{21} \frac{dI_1}{dt} - L_2 \frac{dI_2}{dt} = -M_{21} \frac{dI_1}{dt}$$

Es decir, en el segundo bobinado se induce una *fem* debido a la variación de la corriente en el primario pero no circula corriente.

Si el segundo bobinado estuviera cerrado podría circular una corriente (aunque no tuviera un generador) que llamaremos $I_2(t)$ y ésta produciría un campo $\vec{B}_2 = \mu_0 \frac{N_2 I_2}{2\pi R} \vec{e}_\phi = \mu_0 n_2 I_2(t) \vec{e}_\phi$.

El sentido se debe a cómo está enrollado el conductor y al sentido asignado a la corriente $I_2(t)$.



Calculemos todos los flujos para luego calcular las *fems*:

$$\Phi_{11} = \iint_{S_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} = N_1^2 I_1(t) \frac{\mu_0}{2\pi R} \pi a^2 = \mu_0 N_1^2 \frac{a^2}{2R} I_1(t) \quad \text{es decir,} \quad L_1 = \mu_0 N_1^2 \frac{a^2}{2R}$$

$$\Phi_{12} = \iint_{S_1} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S} = N_1 N_2 I_2(t) \frac{\mu_0}{2\pi R} \pi a^2 = \mu_0 N_1 N_2 \frac{a^2}{2R} I_2(t) \quad \text{es decir,} \quad M_{12} = \mu_0 N_1 N_2 \frac{a^2}{2R}$$

En el segundo bobinado habrá también un cambio de flujo y

$$\Phi_{22} = \iint_{S_2} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S} = N_2^2 I_2(t) \frac{\mu_0}{2\pi R} \pi a^2 = \mu_0 N_2^2 \frac{a^2}{2R} I_2(t)$$

$$L_2 = \mu_0 N_2^2 \frac{a^2}{2R}$$

$$\Phi_{21} = \iint_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} = N_1 N_2 I_1(t) \frac{\mu_0}{2\pi R} \pi a^2 = \mu_0 N_1 N_2 \frac{a^2}{2R} I_1(t)$$

$$M_{21} = \mu_0 N_1 N_2 \frac{a^2}{2R}$$

Vemos que en este caso se cumple

$$M_{12} = M_{21} = \sqrt{L_1 L_2}$$

Observemos que todo el flujo de uno es concatenado por sí mismo y por el vecino. En la experiencia eso no ocurre y usualmente $M_{12} = M_{21} = k\sqrt{L_1 L_2}$, donde k se llama **factor de acoplamiento**.

Dependerá, fundamentalmente, de la geometría del sistema.

Si no hay pérdidas de flujo (factor de acoplamiento unitario), tendremos

$$\varepsilon_1 = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M_{12} \frac{dI_2}{dt} = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - \sqrt{L_1 L_2} \frac{dI_2}{dt}$$

$$\varepsilon_2 = -L_2 \frac{dI_2}{dt} - M_{21} \frac{dI_1}{dt} = -L_2 \frac{dI_2}{dt} - \sqrt{L_1 L_2} \frac{dI_1}{dt}$$

$$\frac{dI_1}{dt} = - \frac{\varepsilon_1 + \sqrt{L_1 L_2} \frac{dI_2}{dt}}{L_1}$$

$$\varepsilon_2 = -L_2 \frac{dI_2}{dt} - \sqrt{L_1 L_2} \frac{dI_1}{dt} = -L_2 \frac{dI_2}{dt} + \sqrt{L_1 L_2} \frac{\varepsilon_1 + \sqrt{L_1 L_2} \frac{dI_2}{dt}}{L_1} = \varepsilon_1 \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \varepsilon_1 \frac{N_2}{N_1}$$

resultado más que interesante ya que se induce una *fem inducida* en el secundario que puede ser relacionada muy fácilmente con la *fem inducida* en el primario.

Pero avancemos un poco más... ¿Cuánto valen las corrientes? El circuito 1 tendrá una resistencia R_1 y el circuito 2, R_2 .

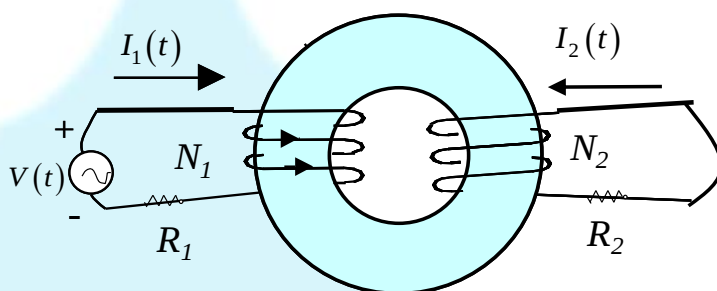
En el circuito 1 tendremos: la fuente $V(t)$,

la fem inducida ε_1 y la caída de tensión

en la resistencia R_1 . En el 2 no tendremos

fuerza. En consecuencia, si bien podemos

pensarlo de varias formas, tendremos



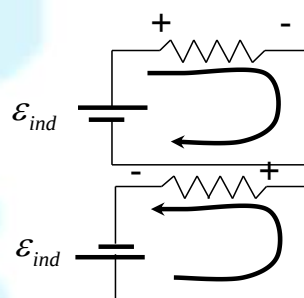
$$V(t) - I_1(t) R_1 + \varepsilon_1 = V(t) - I_1(t) R_1 - L_1 \frac{dI_1}{dt} - M_{12} \frac{dI_2}{dt} = 0$$

$$-I_2(t) R_2 + \varepsilon_2 = -I_2(t) R_2 - L_2 \frac{dI_2}{dt} - M_{21} \frac{dI_1}{dt} = 0$$

Tenemos 2 ecuaciones con 2 incógnitas: $I_1(t)$ e $I_2(t)$ pero ambas funciones del tiempo. Pero estas ecuaciones están acopladas por lo que su resolución no es trivial. Sin embargo, podemos determinar el sentido de $I_2(t)$ dado el de $I_1(t)$ y sabiendo si $I_1(t)$ crece o decrece en el tiempo. También es necesario saber cómo están bobinados los conductores. Según la figura, el campo generado por la corriente $I_2(t)$ (con el sentido asignado en la figura) generaría un campo magnético del mismo sentido que el originado por la corriente $I_1(t)$. Supongamos que la corriente $I_1(t)$ aumentara en el tiempo, es decir, el campo $\vec{B}_1$ aumentaría en el tiempo. Por la Ley de Lenz, la $\mathcal{E}_2$ debe ser tal que la corriente inducida produzca un campo magnético $\vec{B}_2$ de sentido contrario a $\vec{B}_1$. Entonces, la corriente $I_2(t)$ debe tener sentido contrario al dibujado.

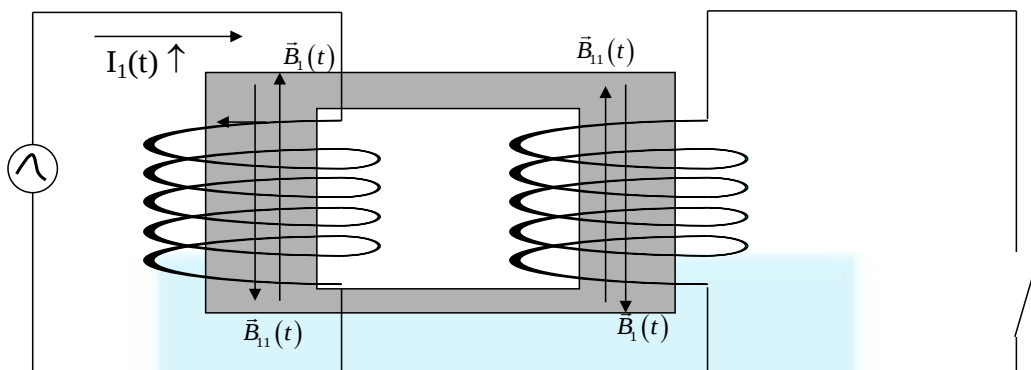
Podemos representar esa *fem inducida* $\mathcal{E}_2$ como en la figura superior de la derecha.

Si, en cambio, $I_1(t)$ decreciera en el tiempo, la situación en el secundario estaría representada por la figura inferior de la derecha

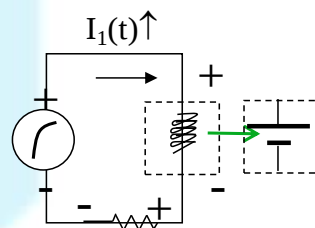


9.17. Los campos magnéticos y las corrientes que los producen

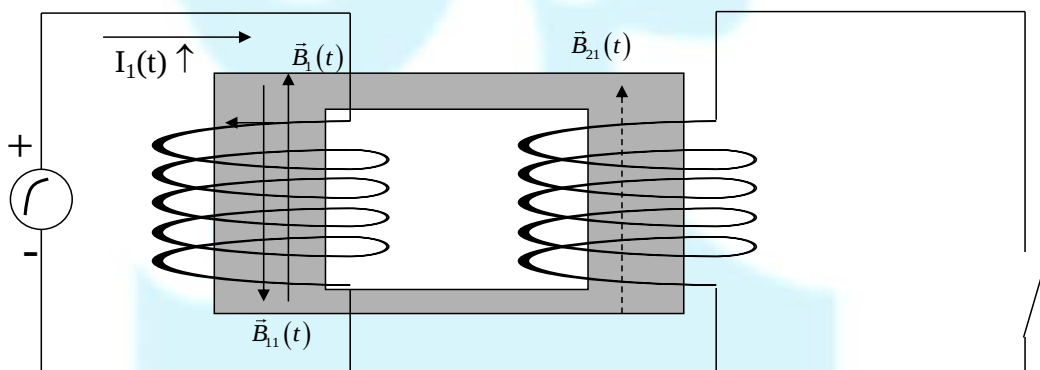
Una de las dificultades con la que nos encontramos a menudo se debe a que se tiende a confundir el sentido del campo con su crecimiento o decrecimiento. Vamos a analizar los campos magnéticos generados en un “circuito magnético” como el de la figura. Por supuesto que vamos a utilizar todas las aproximaciones detalladas en el Capítulo 8 y nos enfocaremos solo en la Inducción Electromagnética. En el circuito primario se coloca una fuente de tensión que puede variar en el tiempo. El circuito secundario está **abierto**. Supongamos que la corriente es constante al comienzo de la experiencia. Se establecerá solo un campo magnético constante y uniforme $\vec{B}_1$ en todo el circuito que proviene del arrollamiento del primario únicamente (como vimos en el Capítulo 8) porque no circula corriente por el secundario.



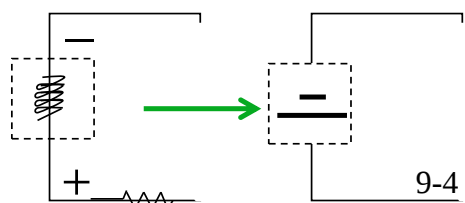
Ahora consideremos que la corriente comienza a aumentar. Eso significa que el flujo a través de la bobina 1 comienza a aumentar (porque aumenta $\vec{B}_1$). Este aumento de flujo lleva a la aparición de una $\mathcal{E}_1$ en el primario que genera una corriente tal que aparece un campo $\vec{B}_{11}$ que trata de compensar el aumento de flujo. Podemos esquematizar el primario como en la figura.



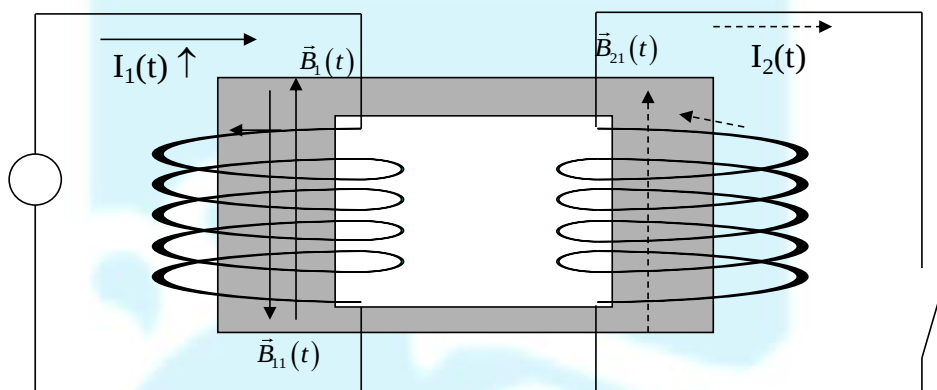
¿Qué ocurre en el secundario? El campo magnético en el secundario será el mismo que en el primario, es decir, $\vec{B}_1 + \vec{B}_{11}$. Por el secundario no puede pasar ninguna corriente porque el circuito está abierto. Pero eso no impide que se induzca una *fem* que (de estar el circuito cerrado) haría aparecer una corriente de sentido tal que el campo generado fuera como el $\vec{B}_{21}$. Pero hasta que no se cierre el circuito, esa corriente no va a aparecer y no habrá campo $\vec{B}_{21}$.



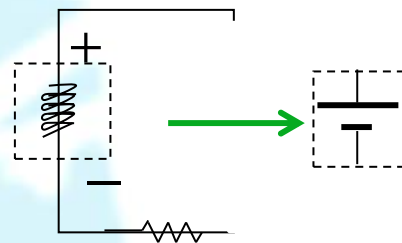
¿Cuál debería ser el sentido de la corriente inducida? Eso va a depender de cómo estén hechos los arrollamientos. Lo que es seguro es que los campos deben tener los sentidos indicados. Tal como están dibujados, si el circuito secundario se cerrara, la corriente inducida en el secundario debería circular en sentido antihorario. Es decir, podemos representar al secundario por



Pero si cambiamos el sentido del arrollamiento del secundario, el sentido de la corriente inducida que se generaría sería “horario” si la corriente del primario aumentara



En este dispositivo, podemos pensar que en el secundario tenemos un equivalente a



Pero, independientemente de cómo esté hecho el arrollamiento del secundario, si la corriente $I_1(t)$ aumenta, la corriente en el secundario $I_2(t)$ debería ser tal que se oponga a ese aumento de flujo.

Está claro que si se cerrara el secundario, circularía una corriente que induciría en el primario otra *fem inducida* y así sucesivamente. Parece el cuento de nunca acabar. Pero no es así. Podremos aplicar las ecuaciones circuitales (que están acopladas) y que tienen en cuenta todos los procesos al mismo tiempo

$$V(t) - I_1(t)R_1 + \varepsilon_1 = V(t) - I_1(t)R_1 - L_1 \frac{dI_1}{dt} - M_{12} \frac{dI_2}{dt} = 0$$

$$-I_2(t)R_2 + \varepsilon_2 = -I_2(t)R_2 - L_2 \frac{dI_2}{dt} - M_{21} \frac{dI_1}{dt} = 0$$

Pero, como ya dijimos, este sistema no lo trataremos analíticamente en esta materia.

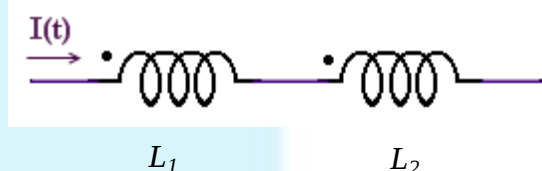
9.18. Los bornes homólogos

Hasta acá hemos visto cómo aplicar la Ley de Faraday-Lenz-Maxwell para entender “qué está pasando”. Ahora vamos a ver cómo podemos sistematizar esta ley básica del Electromagnetismo para poder aplicarla a casos de interés tecnológico. Cuando se tienen circuitos con inductancias no

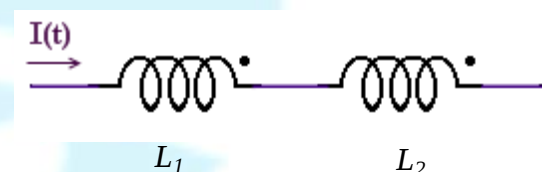
podremos darnos cuenta cuál es el sentido del arrollamiento de las inductancias. Sería bastante tedioso. Se usa entonces una convención: las inductancias se marcan con puntos definidos como **bornes homólogos**.

Los bornes homólogos son aquellos por los cuales corrientes simultáneamente entrantes (o salientes) producen flujos magnéticos aditivos en el interior de cada bobina. Si ocurre lo contrario los flujos resultan sustractivos. Los bornes homólogos se indican con un punto.

Por ejemplo, si se tienen dos bobinas puestas una a continuación de la otra y se disponen como indica la figura,



Por la convención, la corriente “entra” por los ambos bornes homólogos. Eso significa que el campo generado por $I(t)$ en la primera bobina tiene el



mismo sentido que el generado en la segunda bobina (no dice qué sentido tiene el campo). Entonces, en ambas bobinas el campo será “la suma” de los dos campos (pensando que todas las líneas están confinadas al interior de las bobinas.. Sí... es una aproximación!).

Si la corriente saliera por los bornes homólogos, el efecto sería el mismo. En ese caso el dibujo sería el de la derecha.

En ambos casos, el flujo total sobre la bobina L_1 se puede escribir como

$$\Phi_{T_1} = \iint_{S_1} (\vec{B}_1 + \vec{B}_2) \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} + \iint_{S_1} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S} = \Phi_{11} + \Phi_{12}$$

Y ambos flujos serán del mismo signo. Entonces, como la corriente por ambas bobinas es la misma, podemos escribir que la *fem inducida* en la bobina L_1

$$\varepsilon_1 = -L_1 \frac{dI}{dt} - M_{12} \frac{dI}{dt} = -(L_1 + M_{12}) \frac{dI}{dt}$$

Análogamente, y por la igualdad entre M_{12} y M_{21} , la *fem inducida* en L_2 es

$$\varepsilon_2 = -L_2 \frac{dI}{dt} - M_{21} \frac{dI}{dt} = -(L_2 + M_{12}) \frac{dI}{dt}$$

Si las bobinas se hubieran dispuesto con los bornes homólogos en forma diferente (como se indica en las figuras)



Los flujos se hubieran restado, por lo que

$$\varepsilon_1 = -L_1 \frac{dI}{dt} + M_{12} \frac{dI}{dt} = -(L_1 - M_{12}) \frac{dI}{dt}$$

$$\varepsilon_2 = -L_2 \frac{dI}{dt} + M_{21} \frac{dI}{dt} = -(L_2 - M_{12}) \frac{dI}{dt}$$

Estas no son las únicas disposiciones posibles para las bobinas. Vamos a combinar bobinas y resistencias y determinaremos cuáles son las caídas de tensión.

9.19. Combinando Inductancias

Cuando hay inductancias en el mismo o distintos circuitos, dependiendo de la geometría de ellos y de las características de las inductancias, el campo magnético generado en alguna de ellas puede o no interactuar con las otras. Es por eso que debemos tener en claro si los circuitos **son independientes o están acoplados**

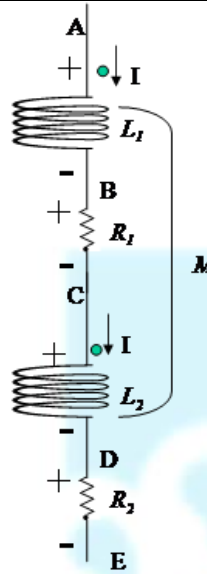
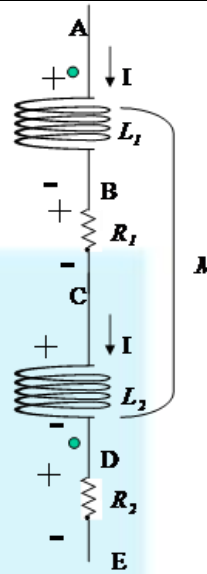
- Circuitos magnéticamente independientes: cuando los dos circuitos se encuentran lo suficientemente distantes, de modo que el campo magnético de uno es despreciable en las proximidades del otro, entonces no se considera el factor de inductancia mutua y el único efecto importante para cada circuito será el de su fem autoinducida.
- Circuitos magnéticamente acoplados: cuando los dos circuitos se hallan muy próximos de modo que cada uno de ellos encierra una parte significativa del flujo generado por el otro, los coeficientes de inducción mutua son comparables en magnitud con los de autoinducción.

Vamos a considerar distintas combinaciones de inductancias

1. Dos inductancias “en serie”

Vamos a considerar las dos posibilidades de bornes homólogos (marcados con puntos verdes). Como sabemos, los portadores positivos se mueven hacia zonas de “menor potencial”. En ambos casos

$$V_A > V_E .$$

	
$\varepsilon_1 = -L_1 \frac{dI}{dt} - M \frac{dI}{dt}$ $\varepsilon_2 = -L_2 \frac{dI}{dt} - M \frac{dI}{dt}$ $(V_A - V_E) + \varepsilon_1 - IR_1 + \varepsilon_2 - IR_2 = 0$ $V_A - V_E = L_1 \frac{dI}{dt} + L_2 \frac{dI}{dt} + 2M \frac{dI}{dt} + I(R_1 + R_2)$ $V_A - V_E = (L_1 + L_2 + 2M) \frac{dI}{dt} + I(R_1 + R_2)$ $V_A - V_E = L_{equivalente} \frac{dI}{dt} + I(R_1 + R_2)$ $L_{eq} = L_1 + L_2 + 2M$	$\varepsilon_1 = -L_1 \frac{dI}{dt} + M \frac{dI}{dt}$ $\varepsilon_2 = -L_2 \frac{dI}{dt} + M \frac{dI}{dt}$ $(V_A - V_E) + \varepsilon_1 - IR_1 + \varepsilon_2 - IR_2 = 0$ $V_A - V_E = L_1 \frac{dI}{dt} + L_2 \frac{dI}{dt} - 2M \frac{dI}{dt} + I(R_1 + R_2)$ $V_A - V_E = (L_1 + L_2 - 2M) \frac{dI}{dt} + I(R_1 + R_2)$ $V_A - V_E = L_{equivalente} \frac{dI}{dt} + I(R_1 + R_2)$ $L_{eq} = L_1 + L_2 - 2M$

Dependiendo de las características del circuito, las bobinas pueden concatenar todo, algo o nada del flujo generado por el campo magnético de la otra. Si concatena todo el flujo, será $M = \sqrt{L_1 L_2}$; si concatena parte de él será $M = k\sqrt{L_1 L_2}$ (con $k < 1$) y si no concatena nada, será $M = 0$.

2. Dos inductancias no conectadas por cables

$\varepsilon_1 = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt}$ $\varepsilon_2 = -L_2 \frac{dI_2}{dt} - M \frac{dI_1}{dt}$ $(V_A - V_C) + \varepsilon_1 - I_1 R_1 = 0$ $(V_D - V_F) + \varepsilon_2 - I_2 R_2 = 0$ $V_A - V_C = L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} + I_1 R_1$ $V_D - V_F = L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt} + I_2 R_2$	$\varepsilon_1 = -L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt}$ $\varepsilon_2 = -L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt}$ $(V_A - V_C) + \varepsilon_1 - I_1 R_1 = 0$ $(V_D - V_F) + \varepsilon_2 - I_2 R_2 = 0$ $V_A - V_C = L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt} + I_1 R_1$ $V_D - V_F = L_2 \frac{dI_2}{dt} - M \frac{dI_1}{dt} + I_2 R_2$

ARREGLAR

Como $\varepsilon_1 = -L_1 \frac{dI_1}{dt} \mp M \frac{dI_2}{dt}$ y $\varepsilon_2 = -L_2 \frac{dI_2}{dt} \mp M \frac{dI_1}{dt}$

$$\frac{dI_1}{dt} = \frac{\varepsilon_1 \pm M \frac{dI_2}{dt}}{L_1} \rightarrow$$

$$\varepsilon_2 = -L_2 \frac{dI_2}{dt} \mp M \frac{dI_1}{dt} = -L_2 \frac{dI_2}{dt} \mp M \frac{\varepsilon_1 \pm M \frac{dI_2}{dt}}{L_1} = \mp \frac{M}{L_1} \varepsilon_1 - \left(L_2 + \frac{M^2}{L_1} \right) \frac{dI_2}{dt}$$

Si el acoplamiento es perfecto, como $M = \sqrt{L_1 L_2}$, resulta que $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$

3. Dos inductancias "en paralelo" con resistencias despreciables

$V_A - V_C = V_D - V_F \equiv V$ $V_A - V_C = L_1 \frac{dI_1}{dt} + I_1 R_1 + M \frac{dI_2}{dt}$ $V_D - V_F = L_2 \frac{dI_2}{dt} + I_2 R_2 + M \frac{dI_1}{dt}$ Si $R_1 = R_2 = 0$ $V \equiv L_{equivalente} \frac{dI}{dt} = L_{eq} \frac{d(I_1 + I_2)}{dt}$ $L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} = L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt} =$ $\equiv L_{eq} \frac{dI}{dt} = L_{eq} \frac{d(I_1 + I_2)}{dt}$	$V_A - V_C = V_D - V_F$ $V_A - V_C = L_1 \frac{dI_1}{dt} + I_1 R_1 - M \frac{dI_2}{dt}$ $V_D - V_F = L_2 \frac{dI_2}{dt} + I_2 R_2 - M \frac{dI_1}{dt}$ Si $R_1 = R_2 = 0$ $V \equiv L_{equivalente} \frac{dI}{dt} = L_{eq} \frac{d(I_1 + I_2)}{dt}$ $L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt} = L_2 \frac{dI_2}{dt} - M \frac{dI_1}{dt} =$ $\equiv L_{eq} \frac{dI}{dt} = L_{eq} \frac{d(I_1 + I_2)}{dt}$

$$(L_1 \mp M) \frac{dI_1}{dt} = (L_2 \mp M) \frac{dI_2}{dt} \Rightarrow \frac{dI_1}{dt} = \frac{(L_2 \mp M)}{(L_1 \mp M)} \frac{dI_2}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dI_2}{dt} = \frac{(L_1 \mp M)}{(L_2 \mp M)} \frac{dI_1}{dt}$$

$$L_1 \frac{dI_1}{dt} \pm M \frac{dI_2}{dt} = L_{eq} \frac{dI}{dt} \Rightarrow L_1 \frac{(L_2 \mp M)}{(L_1 \mp M)} \frac{dI_2}{dt} \pm M \frac{dI_2}{dt} = L_{eq} \frac{dI}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(L_1 \frac{(L_2 \mp M)}{(L_1 \mp M)} \pm M \right) \frac{dI_2}{dt} = L_{eq} \frac{dI}{dt}$$

$$L_2 \frac{dI_2}{dt} \pm M \frac{dI_1}{dt} = L_2 \frac{(L_1 \mp M)}{(L_2 \mp M)} \frac{dI_1}{dt} \pm M \frac{dI_1}{dt} = L_{eq} \frac{dI}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(L_2 \frac{(L_1 \mp M)}{(L_2 \mp M)} \pm M \right) \frac{dI_1}{dt} = L_{eq} \frac{dI}{dt}$$

Entonces

$$\frac{dI_2}{dt} = \frac{L_{eq}}{\left(L_2 \frac{(L_1 \mp M)}{(L_2 \mp M)} \pm M \right)} \frac{dI}{dt} \quad \text{y} \quad \frac{dI_1}{dt} = \frac{L_{eq}}{\left(L_2 \frac{(L_1 \mp M)}{(L_2 \mp M)} \pm M \right)} \frac{dI}{dt}$$

Sumando miembro a miembro

$$\frac{L_{eq}}{\left(L_2 \frac{(L_1 \mp M)}{(L_2 \mp M)} \pm M \right)} + \frac{L_{eq}}{\left(L_1 \frac{(L_2 \mp M)}{(L_1 \mp M)} \pm M \right)} = 1$$

$$\frac{(L_2 \mp M)}{(L_2 (L_1 \mp M) \pm M (L_2 \mp M))} + \frac{(L_1 \mp M)}{(L_1 (L_2 \mp M) \pm M (L_1 \mp M))} = \frac{1}{L_{eq}}$$

$$\frac{(L_2 \mp M)}{(L_2 L_1 - M^2)} + \frac{(L_1 \mp M)}{(L_1 L_2 - M^2)} = \frac{(L_1 \mp M) + (L_2 \mp M)}{(L_1 L_2 - M^2)} = \frac{(L_1 + L_2 \mp 2M)}{(L_1 L_2 - M^2)} = \frac{1}{L_{eq}}$$

Por lo tanto

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 \mp 2M}$$

Observar que si las inductancias están desacopladas, se obtiene una expresión semejante a la de resistencias en paralelo.

ⁱ Feynman, Richard "Lectures on Physics" Vol. 2

ⁱⁱ <http://www.pagina12.com.ar/diario/suplementos/futuro/13-648-2003-12-07.html>

ⁱⁱⁱ <http://www.teslasociety.com/biography.htm>

^{iv} <http://theoatmeal.com/comics/tesla>

^v <http://innovem.cat/fisica-relativista-experimento-0-el-disco-de-arago/>

^{vi} Jackson, John "Classical Electrodynamics" Wiley & Sons (1999)

^{vii} Fernández, Juan C. "Ingeniería Electromagnética I Modelos estáticos y circuitales" EUDEBA (2013) pag. 382

^{viii} Santaló, Luis "Vectores y Tensores" EUDEBA (1968).

^{ix} R.H. Romer, What do "voltmeters" measure?: Faraday's law in a multiply connected region, Am. J. Phys, **50**, 1089-1093 (1982)

Capítulo 10

Encendiendo y apagando circuitos¹

10.1.	<u>Introducción</u>	10-2
10.2.	<u>Cargando Capacitores</u>	10-2
10.3.	<u>Descargando Capacitores</u>	10-6
10.4.	<u>Conectando Inductancias</u>	10-7
10.5.	<u>Desconectando Inductancias</u>	10-8
10.6.	<u>Mezclando Capacitores e Inductores</u>	10-9
10.7.	<u>Ahora mezclamos los tres componentes R, L y C</u>	10-12
10.8.	<u>Análisis de los primeros 45 minutos y repetición de los goles</u>	10-16

¹ Transitorios que le dicen...

10.1. Introducción

En toda la parte previa de Física II consideramos que, o bien las cargas estaban quietas (electrostática), o se movían con velocidad constante, brindando corrientes de magnitud estable en el tiempo.

Ahora vamos a acometer el estudio de lo que sucede cuando conectamos o desconectamos un circuito. Vamos a responder a la pregunta: Cómo evoluciona una corriente desde cero hasta un valor determinado? Cuánto tiempo toma? Qué sucede con la energía?

Como en otras circunstancias comenzaremos con circuitos simples e iremos complicándolos lentamente para terminar contando cualitativamente cómo operan algunos circuitos que hacen uso de lo que vamos a estudiar.

10.2. Cargando capacitores

El antecedente más antiguo viene del momento en que estudiábamos capacitores y decíamos cosas tales como: Un capacitor C es cargado con una pila V_p ...

Cuando sacamos el capacitor de la caja estaba descargado y entonces al conectarlo a la pila tuvimos un flujo de cargas entrante al capacitor hasta que la carga Q almacenada en el mismo alcanzó el valor conocido $Q=CV_p$. Si hubo un flujo de carga existió una corriente. Es importante destacar que esta corriente fue *transitoria*, es decir que existió durante un rato y luego cesó porque al alcanzar la condición en la que la cantidad de carga en el capacitor es estable ya no hay corriente ($I=dQ/dt$).

Manos a la obra. La figura muestra la consabida pila, el capacitor y, reconociendo que los cables no son perfectos, incluimos una resistencia R que represente las pérdidas en el cable.

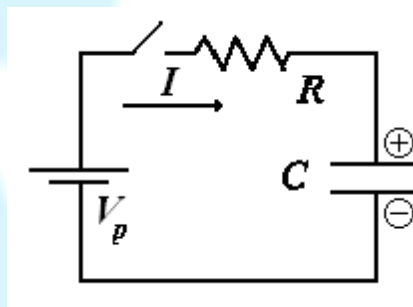


Figura 1. Capacitor cargado por medio de una pila a través de una resistencia

Si la corriente I y la polaridad del capacitor son los que muestra la figura aplicamos la segunda ley de Kirchoff² (estará bien deletreado así?) para obtener:

² No... Es Kirchhoff, Gustav Robert

$$\begin{aligned}
 V_p - IR - \frac{Q}{C} &= 0 \quad I = \frac{dQ}{dt} \\
 V_p - \frac{dQ}{dt}R - \frac{Q}{C} &= 0 \\
 \frac{dQ}{dt}R - \frac{Q}{C} &= V_p
 \end{aligned} \tag{1}$$

El segundo sumando es la caída de tensión sobre la resistencia y el tercero el correspondiente a la caída sobre el capacitor ($V=Q/C$). El último renglón es una ecuación diferencial sujeta a la condición inicial $Q(0)=0$ puesto que inicialmente el capacitor se encuentra descargado.

Resolver la ecuación (1) nos puede resultar simple, complicado o desesperante según haya sido nuestra experiencia en el tema (mejor no recordar esas vivencias no?). Formalmente la (1) es una ecuación diferencial lineal de primer orden no homogénea. Con tantos adjetivos es obvio que nos sentiremos asustados y nos quedaremos paralizados.

Pero para nuestra suerte es una ecuación simple, en la que el miembro de la derecha es una constante. Primero aislamos el término en dQ/dt

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{R} \left(V_p - \frac{Q}{C} \right) \tag{2}$$

El miembro de la derecha contiene una única variable (Q) y todo lo demás son constantes, entonces hacemos el siguiente cambio de variable:

$$w = \frac{1}{R} \left(V_p - \frac{Q}{C} \right) \Rightarrow dw = \frac{-1}{RC} dQ \tag{3}$$

Ahora reemplazamos en la (2) y obtenemos:

$$-RC \frac{dw}{dt} = w \quad \frac{dw}{w} = \frac{-1}{RC} dt \tag{4}$$

Integramos miembro a miembro: el de la izquierda desde $w(0)$ hasta w y el de la derecha desde cero hasta t

$$\begin{aligned}
 \int_{w(0)}^w \frac{dw}{w} &= \frac{-1}{RC} \int_0^t dt \\
 \log \left[\frac{w}{w(0)} \right] &= \frac{-t}{RC} \\
 w &= w(0) \exp \left(\frac{-t}{RC} \right)
 \end{aligned} \tag{5}$$

Volvemos ahora a las variables originales. Primero notamos que $w(0) = V_p/R$ puesto que $Q(0)=0$.

$$\frac{1}{R} \left(V_p - \frac{Q}{C} \right) = \frac{V_p}{R} \exp\left(\frac{-t}{RC}\right)$$

$$Q = CV_p \left[1 - \exp\left(\frac{-t}{RC}\right) \right] \quad (6)$$

El análisis de las (6) nos dice que a $t=0$ resulta $Q=0$ (bien) y que para valores de t tendiendo a infinito tenemos $Q=CV_p$ (también correcto).

Vamos a representar la (6) con unos pequeños cambios. Primero notamos que el término CV_p corresponde a la carga final del capacitor pero que depende de los valores específicos de C y V_p que usemos. Vamos a representar entonces $Q/(CV_p)$, cuyo valor máximo será uno. Además no utilizaremos al tiempo t como la variable independiente sino $t/(RC)$ para evitar puntualizar en valores específicos de R y C . Antes de pasar a los valores es importante notar que el producto RC tiene dimensiones de tiempo (verificarlo) y menos mal que es así porque de lo contrario la (6) sería dimensionalmente incorrecta. Este producto RC lo denominamos constante de tiempo τ . Vamos a la gráfica:

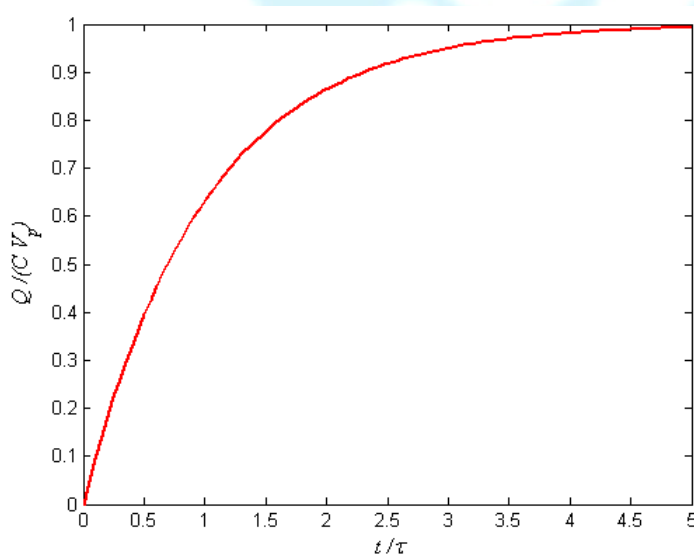


Figura 2. Carga normalizada al valor máximo versus el tiempo normalizado a τ

Al observar la gráfica notamos que para $t = \tau$ la carga del capacitor es el 63 % del valor final, cuando $t = 3 \tau$ obtenemos el 95% y para $t = 5 \tau$ más del 99%. Aquí se nos plantea la pregunta: cuándo termina de cargarse el capacitor? La respuesta formal es que jamás termina de cargarse porque la función que hemos computado tiende asintóticamente al valor final. Lejos de sentarnos y esperar un tiempo infinito hasta llegar al valor final pensamos que un 99% es un resultado muy bueno y nos contentamos. Declaramos entonces que un capacitor puede ser

considerado como cargado cuando ha transcurrido un tiempo igual a cinco constantes de tiempo.

Ahora que tenemos la carga almacenada en el capacitor en función del tiempo podemos calcular la corriente que entregó la pila simplemente derivando con respecto al tiempo:

$$I = \frac{V_p}{R} \exp\left(\frac{-t}{RC}\right) \quad (7)$$

La corriente máxima (V_p/R) se obtiene en $t=0$ y tiene sentido porque en ese momento, cuando la carga en el capacitor es cero, la caída de tensión en éste también es cero.

Para representar gráficamente normalizamos la corriente al valor máximo V_p/R , así tenemos un resultado independiente de la pila y la resistencia.

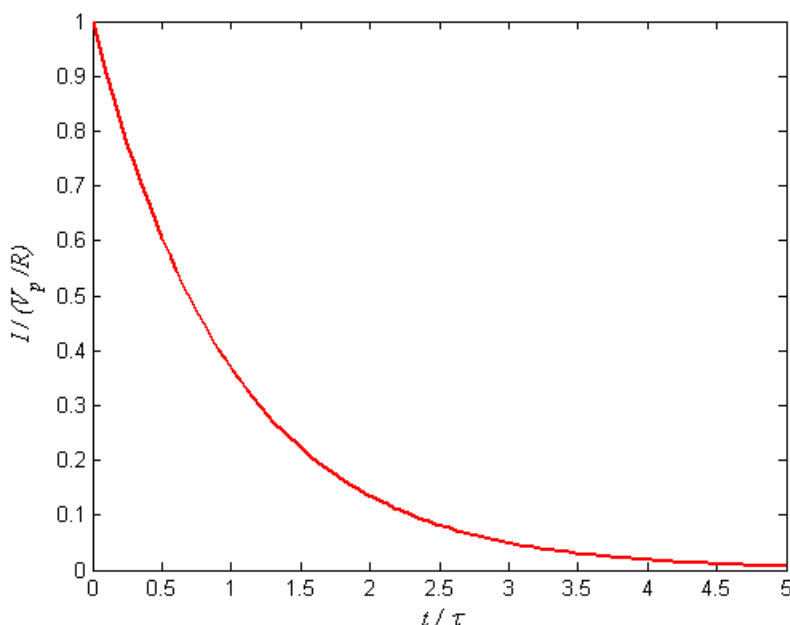


Figura 3. Corriente de carga normalizada a la máxima versus el tiempo normalizado a τ

Podemos plantearnos una pregunta ahora. Dado que para cargar el capacitor circuló una corriente a través de una resistencia tuvimos que disipar algo de energía. ¿Cuánto fue?

La energía E entregada a la resistencia es la integral en el tiempo de la potencia disipada en ella.

$$E = \int_0^{\infty} I^2 R dt = \int_0^{\infty} \left(\frac{V_p}{R}\right)^2 \exp\left(\frac{-2t}{RC}\right) R dt = \frac{1}{2} C V_p^2 \quad (8)$$

El resultado es correcto pero extraño. La energía disipada al cargar el capacitor es exactamente igual a la almacenada en el mismo. Esto quiere decir que la pila debe entregar el

dobles de la energía que vamos a almacenar en el capacitor. El resultado es independiente del valor de la resistencia, no importa si es grande o chica, simplemente no aparece en la expresión. Entonces viene la espantosa duda. Qué pasaría si tuviera un cable perfecto? No debería ser nula la energía perdida?

Esta duda es difícil de responder, queda pendiente para los que sigan electromagnetismo.

10.3. Descargando capacitores

Vamos ahora al problema inverso. Tenemos un capacitor inicialmente cargado con una carga inicial Q_0 (con la polaridad que muestra la figura) y lo conectamos sobre una resistencia R para descargarlo.

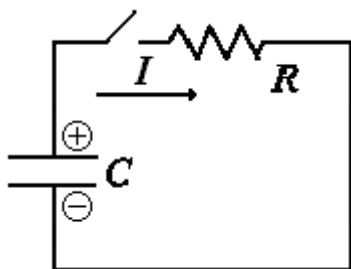


Figura 4. Capacitor inicialmente cargado que es descargado sobre una resistencia

Volvemos a aplicar la segunda ley de Kirchoff.

$$\begin{aligned} \frac{Q}{C} - IR &= 0 \quad I = -\frac{dQ}{dt} \\ R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} &= 0 \\ \frac{dQ}{dt} &= -\frac{Q}{RC} \quad \frac{dQ}{Q} = \frac{-dt}{RC} \\ \log\left(\frac{Q}{Q_0}\right) &= \frac{-t}{RC} \\ Q &= Q_0 \exp\left(\frac{-t}{RC}\right) \end{aligned} \tag{9}$$

El primer renglón es en apariencia erróneo. Previamente hemos definido la corriente como la derivada de la carga con respecto al tiempo y ahora lo precedemos de un signo menos; ¿cómo es posible?

La solución estriba en reconocer que con el signo propuesto para la corriente positiva, la carga en el capacitor *decrece* a lo largo del tiempo y por eso es necesario el signo menos.

La gráfica de la (9) la tenemos en la figura siguiente

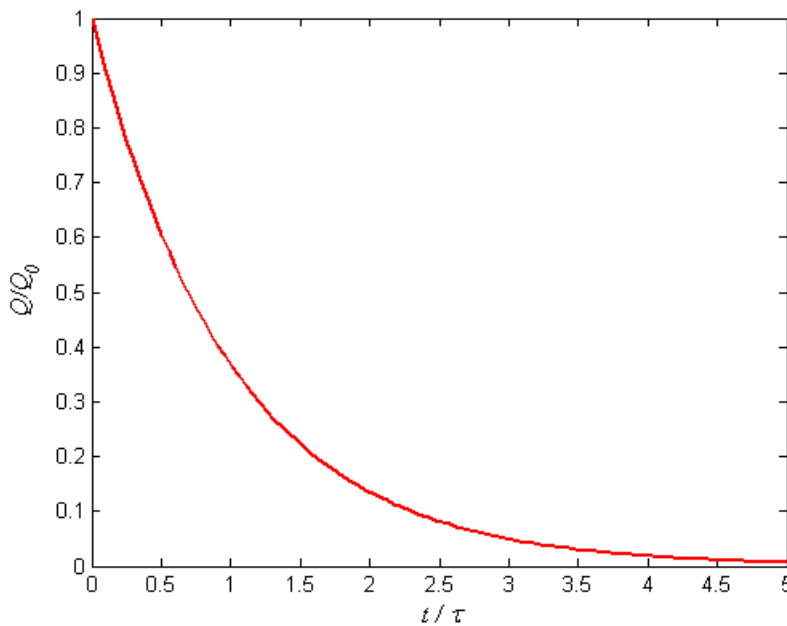


Figura 5. Carga normalizada a la inicial versus el tiempo normalizado a τ

Podemos ver que tanto la carga como la descarga tienen aspectos en común. Están regidos por leyes exponenciales y el proceso dura aproximadamente 5τ .

10.4. Conectando inductancias

Vamos a ver ahora un problema parecido al primero. Una pila V_p alimenta una inductancia L a través de un cable de resistencia R .

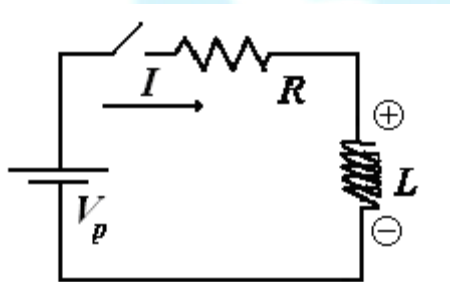


Figura 6. Inductancia conectada a una pila a través de una resistencia.

Atacamos de nuevo con nuestra herramienta favorita, la segunda ley de Kirchoff.

$$V_p - IR - L \frac{dI}{dt} = 0 \quad (10)$$

El segundo sumando es nuevamente la caída de tensión sobre la resistencia y el tercero es la fuerza electromotriz inducida en bornes de la inductancia (ley de Faraday-Lenz).

Para resolver la (10) aplicamos el mismo método, aislamos el término en dI/dt :

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{L}(V_p - IR) \quad (11)$$

Nuevamente vemos que el miembro de la derecha contiene a la incógnita (I) y una serie de constantes (V_p , L , R). Hacemos entonces el mismo cambio de variables.

$$w = \frac{1}{L}(V_p - IR) \Rightarrow dw = \frac{-R}{L} dI \quad (12)$$

Reemplazamos en la (10)

$$\begin{aligned} \frac{-L}{R} \frac{dw}{dt} &= w \\ \frac{dw}{w} &= \frac{-R}{L} dt \\ \int_{w(0)}^w \frac{dw}{w} &= \int_0^t \frac{-R}{L} dt \\ \log\left(\frac{w}{w(0)}\right) &= \frac{-R}{L} t \\ w &= w(0) \exp\left(\frac{-R}{L} t\right) \end{aligned} \quad (13)$$

Volvemos a las variables originales y vemos que $w(0)=V_p/L$ porque $I(0)=0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{L}(V_p - IR) &= \frac{V_p}{L} \exp\left(\frac{-R}{L} t\right) \\ I &= \frac{V_p}{R} \left[1 - \exp\left(\frac{-R}{L} t\right)\right] \end{aligned} \quad (14)$$

Notamos que $I(0)=0$ (está bien) y que para grandes valores de t la corriente tiende a V_p/R , que es lo que esperamos puesto que cuando la corriente alcanza el valor estacionario desaparece la fuerza electromotriz inducida en la inductancia.

Observamos también que la constante L/R tiene dimensiones de tiempo (verificarlo) y siguiendo con la idea anterior la nombramos constante de tiempo τ .

Como podemos observar la (14) y la (6) son funcionalmente idénticas por lo que la gráfica es la misma. El único cambio importante es el cambio en la definición de la constante de tiempo.

10.5. Desconectando inductancias

Hacemos ahora el camino inverso. Consideramos una inductancia L por la que inicialmente circula una corriente I_0 y sobre la que conectamos una resistencia R .

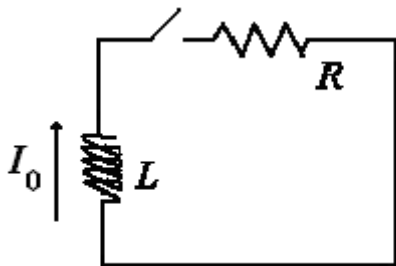


Figura 7. Inductancia con una corriente inicial conectada a una resistencia

La ecuación de mallas nos dice:

$$\begin{aligned}
 -L \frac{dI}{dt} - IR &= 0 \\
 \frac{dI}{dt} &= -\frac{R}{L} I \\
 \frac{dI}{I} &= -\frac{R}{L} dt \\
 \log\left(\frac{I}{I_0}\right) &= -\frac{R}{L} t \Rightarrow I = I_0 \exp\left(-\frac{R}{L} t\right)
 \end{aligned} \tag{15}$$

La evolución de la corriente es nuevamente una exponencial.

Ciertamente el comportamiento de los capacitores o inductores en ambos casos es muy parecido a menos de la definición de la constante de tiempo para cada caso.

10.6. Mezclando capacitores e inductores

Vamos a considerar una situación con capacitores e inductores que es ilustrativa de un circuito eléctrico que semeja un oscilador mecánico como un sistema masa-resorte.

Consideramos un capacitor C inicialmente cargado con una carga Q_0 que es descargado sobre una inductancia L por la que no circula corriente alguna en el momento inicial.

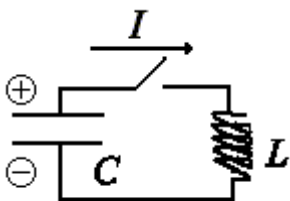


Figura 8. Circuito con un capacitor inicialmente cargado y una inductancia

Atacamos de nuevo con la ley de mallas

$$\begin{aligned}
 \frac{Q}{C} - L \frac{dI}{dt} &= 0 \quad I = -\frac{dQ}{dt} \\
 \frac{Q}{C} + L \frac{d^2 Q}{dt^2} &= 0
 \end{aligned} \tag{15}$$

Nuevamente debemos escribir $I = -dQ/dt$ porque con el sentido propuesto para la corriente el capacitor *pierde* carga.

Esta ecuación es más compleja porque involucra derivadas segundas. Suponemos que la solución es de la forma $Q = \exp(\lambda t)$ donde λ es una constante a determinar (no tiene nada de malo proponer una solución y ver si es satisfactoria). Reemplazamos la solución propuesta.

$$\begin{aligned} \frac{\exp(\lambda t)}{C} + L \lambda^2 \exp(\lambda t) &= 0 \\ \lambda^2 &= -\frac{1}{LC} \\ \lambda &= \pm j \sqrt{\frac{1}{LC}} \end{aligned} \quad (16)$$

En el último renglón j es la unidad imaginaria ($j^2 = -1$). En los cursos de matemática es usual utilizar la letra i , pero en nuestro contexto esa letra la reservamos para la corriente eléctrica. Entonces, en muchas ramas de la ingeniería usamos j para la unidad imaginaria.

La solución propuesta satisface la ecuación diferencial si λ tiene el valor dado por la última ecuación.

Dado que la ecuación (15) es de segundo grado, la solución es una combinación lineal de la forma:

$$Q = A \exp(j \lambda t) + B \exp(-j \lambda t) \quad (17)$$

A primera vista la (17) parece mal porque esperamos una solución real para la carga. La solución es simple si recordamos la identidad: $\exp(jx) = \cos(x) + j \sin(x)$. Podemos llevar la (17) a la forma real:

$$Q = C \cos(\lambda t) + D \sin(\lambda t) \quad (18)$$

donde las constantes C y D quedan dadas por las condiciones iniciales. En nuestro caso tenemos $Q(0) = Q_0$ e $I(0) = 0$, por lo que resulta $C = Q_0$ y $D = 0$.

Dadas las dimensiones de λ (1/seg) es costumbre renombrarla ω para que coincida con la nomenclatura usual:

$$Q = C \cos(\omega t) + D \sin(\omega t) \quad (19)$$

La carga entonces oscila a una frecuencia $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}}$ y esta afirmación merece una explicación lenta. Veamos una gráfica que representa la evolución temporal de la carga y la corriente. Graficamos en función de t/T para independizarnos de los valores de L y C .

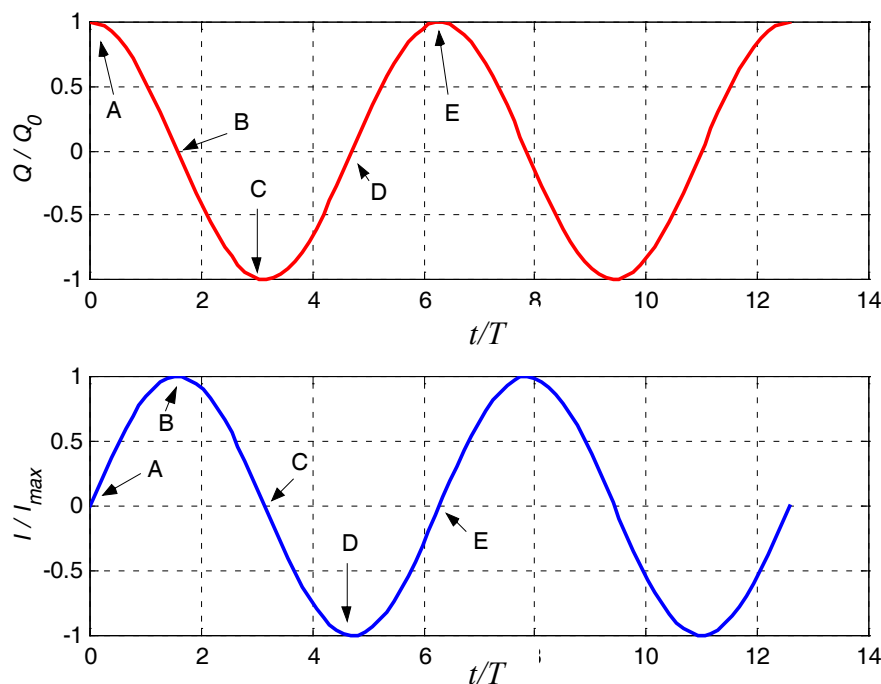


Figura 8. Carga y corriente en un circuito LC

Para comprender la tendencia de las dos curvas es importante recordar dos reglas simples.

Sabemos que la carga en un capacitor es $Q=C V_c$, si derivamos con respecto al tiempo tendremos la corriente, es decir $I_c=C dV_c/dt$. Si las corrientes han de ser finitas entonces el término dV_c/dt también lo debe ser. Por lo tanto la caída de tensión en el capacitor debe ser una función continua (sin saltos) porque de lo contrario tendríamos corrientes infinitas.

Algo semejante sucede con la inductancia. A partir de la ley de Faraday sabemos que la fuerza electromotriz inducida en la inductancia vale (en módulo): $V_L=L (dI/dt)$. Nuevamente, para valores finitos de V_L necesitamos que así lo sea dI/dt , es decir que también la corriente debe ser una función continua. En síntesis la tensión sobre un capacitor no puede variar discontinuamente, así como tampoco lo debe hacer la corriente sobre una inductancia.

Con estas ideas simples podemos comprender el comportamiento cualitativo de la figura 8. En el momento inicial (A) el capacitor está totalmente cargado y por la inductancia no circula corriente. Conforme el capacitor se descarga, la corriente por la inductancia aumenta hasta que llegamos al punto B. Aquí el capacitor está descargado pero por la inductancia circula una corriente (la que no puede extinguirse abruptamente). Por la ley de Faraday la fuerza electromotriz inducida en la inductancia es tal que intenta mantener la circulación de corriente. En estas condiciones el capacitor vuelve a cargarse, pero esta vez con polaridad opuesta hasta llegar al punto C donde adquiere la misma carga que la inicial pero de polaridad opuesta. Ahora el ciclo se repite pero con los signos opuestos., el capacitor se descarga y la corriente sobre la

inductancia aumenta pero en sentido opuesto. Al llegar al punto D el capacitor nuevamente está descargado y la corriente es máxima (en sentido opuesto al inicial). El circuito recorre continúa evolucionando hasta repetir la situación inicial en el punto E.

Esta secuencia se repite hasta el infinito porque tanto el capacitor como la inductancia son sistemas conservativos, así que la cantidad total de energía del sistema se mantiene y todo lo que tenemos es un traspaso cíclico de energía del capacitor a la inductancia y viceversa. Por este motivo decimos que el circuito formado por un capacitor y una inductancia se comporta de manera semejante a un oscilador formado por una masa y un resorte. Periódicamente se transfiere energía del campo eléctrico en el capacitor al campo magnético en la inductancia. En el sistema mecánica la energía es transferida del resorte (potencial elástica) a la masa (cinética).

10.7. Ahora mezclamos los tres componentes R , L y C

Así como en el sistema mecánico que acabamos de mencionar tendremos inevitablemente pérdidas de energía por roces, lo mismo sucede en nuestro circuito del punto anterior. Los cables no son perfectos y tienen pérdidas asociadas con la resistencia de los mismos. Vamos a alterar el circuito para tomar en cuenta estas resistencias:

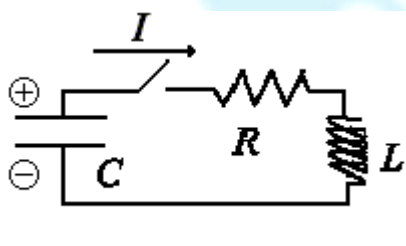


Figura 9. Circuito con un capacitor inicialmente cargado, una resistencia y una inductancia.

Una vez más (qué saturados que estamos!!!!) usamos la ley de mallas

$$\frac{Q}{C} - IR - L \frac{dI}{dt} = 0 \quad I = -\frac{dQ}{dt} \quad (20)$$

$$\frac{Q}{C} + R \frac{dQ}{dt} + L \frac{d^2 Q}{dt^2} = 0$$

Volvemos a ensayar la misma solución $Q = \exp(\lambda t)$

$$\frac{\exp(\lambda t)}{C} + R\lambda \exp(\lambda t) + L\lambda^2 \exp(\lambda t) = 0 \quad (21)$$

$$L\lambda^2 + R\lambda + \frac{1}{C} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L}$$

Ahora tenemos que interpretar las soluciones posibles.

Posibilidad 1: Si $R^2 > 4L/C$ tenemos dos raíces reales y distintas (λ_1 y λ_2) que nos dan una solución:

$$Q = A \exp(\lambda_1 t) + B \exp(\lambda_2 t)$$

$$I = -\frac{dQ}{dt} = -\lambda_1 A \exp(\lambda_1 t) - \lambda_2 B \exp(\lambda_2 t) \quad (22)$$

Las dos raíces son negativas (mirar los signos) y entonces la solución es la combinación de dos exponenciales decrecientes. En tal situación recibe el nombre de régimen *sobreamortiguado*

Donde las constantes A y B se determinan por las condiciones iniciales del problema ($Q(0)=Q_0$ e $I(0)=0$) las que brindan:

$$Q(0) = Q_0 = A + B \quad I(0) = 0 = -A\lambda_1 - B\lambda_2$$

$$A = \frac{Q_0\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad B = \frac{Q_0\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad (23)$$

Vamos a un ejemplo, tomemos $R=100 \, \Omega$, $L=0.2 \, \text{Hy}$ y $C=100 \, \mu\text{F}$. Encontramos los valores $\lambda_1 = -138.2 \, 1/\text{s}$ y $\lambda_2 = -361.8 \, 1/\text{s}$. Representaremos la carga (suponiendo $Q_0=1$) y la corriente en función del tiempo (sin normalizar a ninguna constante).

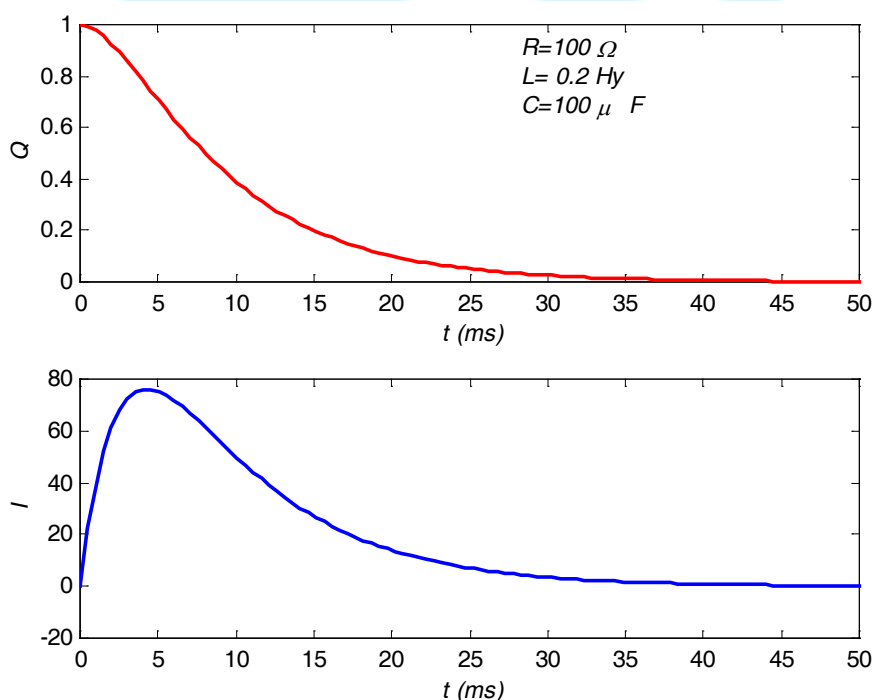


Figura 10. Descarga de un circuito RLC en régimen sobreamortiguado

Posibilidad 2: Pasamos ahora a la segunda posibilidad. Si $R^2=4 \, L/C$ las dos raíces son iguales (discriminante nulo) la solución es de la forma (repasar libro de análisis o álgebra según corresponda)

$$Q = (A + Bt) \exp(\lambda t)$$

Esta situación recibe el nombre de régimen crítico

Para nuestro problema las constantes resultan $A=Q_0$ y $B=-\lambda Q_0$

Vamos a repetir el ejemplo manteniendo L y C en los valores anteriores pero reduciendo R hasta anular al discriminante de la (21), esto resulta en $R= 89.44 \Omega$.

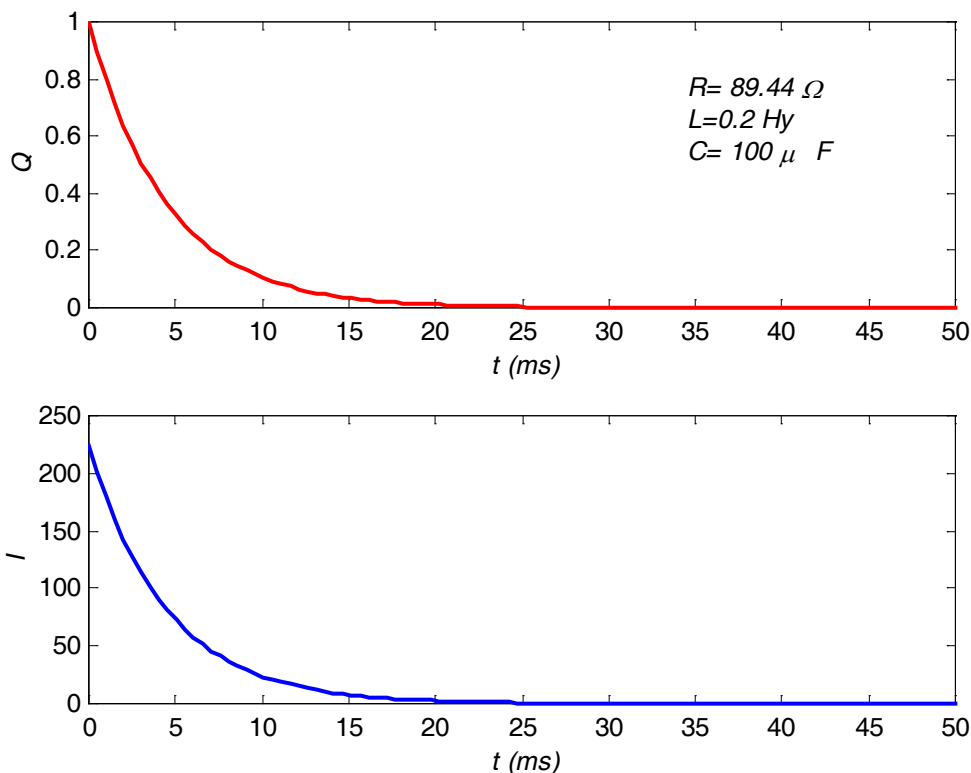


Figura 11. Descarga de un circuito en régimen crítico

Posibilidad 3: Por último, si $R^2 < 4L/C$ los valores de λ son complejos conjugados, es decir que tienen partes imaginarias α y β que satisfacen $\lambda = \frac{-R}{2L} \pm j \frac{\sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L} = \alpha + j\beta$.

Este régimen se denomina subamortiguado. La solución correspondiente es (luego de largos factoreos)

$$Q = \exp(\alpha t) [A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t)]$$

Tarea para el hogar: encontrar los valores de A y B que satisfacen nuestro problema.

Repitiendo nuestro ejemplo bajamos la resistencia a 5Ω (valor arbitrario) y obtenemos $\alpha = -12.5 \text{ 1/s}$ y $\beta = 223 \text{ 1/s}$. La gráfica la vemos en la figura siguiente

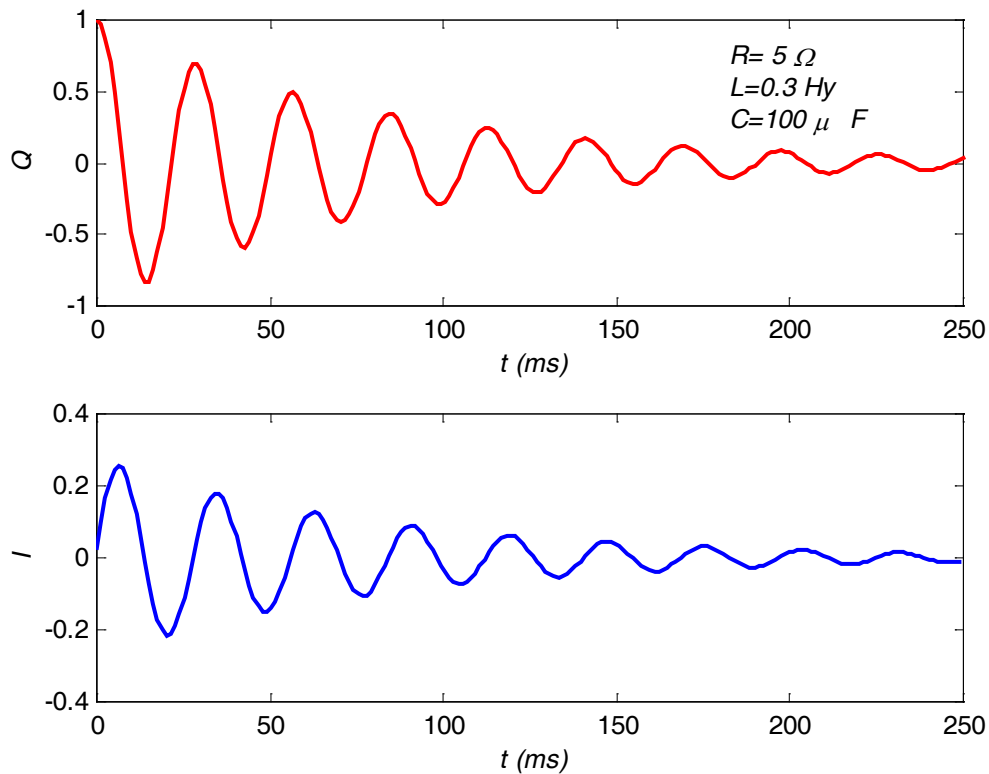


Figura 12. Descarga de un circuito RLC subamortiguado

El carácter de la solución ha cambiado drásticamente. En los casos anteriores teníamos una que la carga evolucionaba de forma monótonamente decreciente y que la corriente presentaba el aspecto de una “joroba”.

Ahora tenemos una gráfica que parece oscilar (debido al término en coseno y seno de la solución) pero que se extingue exponencialmente a lo largo del tiempo. Este decrecimiento se llama amortiguamiento y está directamente relacionado con las pérdidas. De no existir la resistencia retornamos al caso en que teníamos solamente un capacitor y una inductancia.

Podríamos intentar ahora un problema más difícil y es el de comenzar con un capacitor descargado, una resistencia, una inductancia por la que no circula corriente y conectar todo el conjunto a una pila y nos preguntamos entonces cómo se carga el capacitor.

Podríamos resolverlo pero es un ejemplo que está un poco más allá de nuestro objetivo porque involucra resolver una ecuación diferencial no homogénea lo que es un poco más difícil y por eso lo vamos a dejar de lado.

En resumen hemos visto el comportamiento transitorio de carga y descarga de los circuitos RC y RL. El circuito RLC sólo lo analizamos en la fase de descarga.

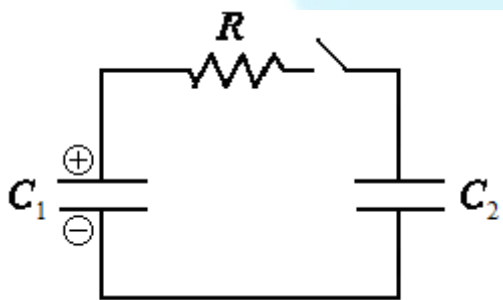
Más allá de la complejidad de cada caso vimos que TODOS se resuelven comenzando con la ley de suma de las tensiones en una malla y que en cada caso se generaba una ecuación diferencial. En los circuitos RC y RL teníamos ecuaciones de primer orden, mientras que en los circuitos LC y RLC la ecuación resultó de segundo orden.

10.8. Análisis de los primeros 45 minutos y repetición de los goles.

Podríamos continuar ad-infinitum analizando casos porque el número de ejemplos no se agota nunca. Es prudente extraer algunas conclusiones como para tener una herramienta general.

Notemos que siempre recurrimos a la ley de mallas como herramienta principal (no tratamos en esta materia casos con nodos). En dicha ley escribimos con cuidado la caída de tensión en cada elemento: IR en la resistencia, $L \, dl/dt$ en la inductancia y Q/C en el capacitor. Los signos aparecen según haya sido la convención que tomamos. Luego conectamos carga con corriente (cuidado signos) y obtenemos inevitablemente una ecuación diferencial. Resolvemos la ecuación diferencial con las condiciones iniciales del problema. Este es el método general que se repite sistemáticamente. La idea es siempre usar la ley de mallas, el tema de la dificultad matemática de la ecuación resultante es otro asunto.

Como último ejemplo va la resolución de un caso que algunas personas juzgan “imposible de resolver” (¿será para tanto?)



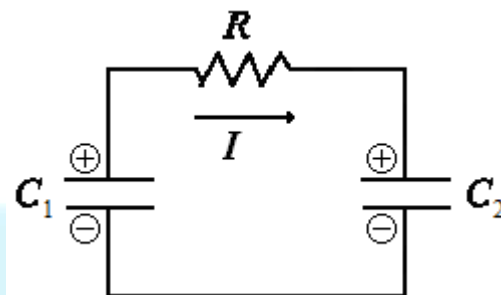
Un capacitor C_1 , inicialmente cargado (Q_{i1}) se descarga, al cerrar la llave, sobre otro capacitor C_2 , inicialmente descargado. La resistencia R engloba todas las resistencias de los cables.

Proponemos, arbitrariamente, un sentido para la corriente y las polaridades de los capacitores.

Así escribimos la ley de mallas:

$$+\frac{Q_1}{C_1} - IR - \frac{Q_2}{C_2}; \quad -\frac{dQ_1}{dt} = I = \frac{dQ_2}{dt}$$

La primera ecuación es la suma de caídas de tensión (acorde con los signos propuestos) y la segunda nos dice que la corriente I saca carga de C_1 y pone carga en C_2 .



Si miramos bien nos falta una ecuación, la encontramos en el principio de conservación de la carga: en todo momento la suma de la carga de C_1 más la de C_2 debe ser igual a la inicial de C_1

$$Q_1 + Q_2 = Q_{i1}$$

Con la ayuda de esta ecuación en la anterior y obtenemos una en una única incógnita (Q_1 arbitrariamente)

$$+\frac{Q_1}{C_1} + R \frac{dQ_1}{dt} - \frac{Q_{i1} - Q_1}{C_2} = 0$$

$$Q_1 \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) + R \frac{dQ_1}{dt} = \frac{Q_{i1}}{C_2}$$

$$\frac{dQ_1}{dt} = \frac{1}{R} \left[\frac{Q_{i1}}{C_2} - Q_1 \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \right]$$

El miembro de la derecha tiene una única variable (Q_1), aplicamos entonces el mismo método que usamos antes pero antes definimos $\frac{1}{C^*} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$ y definimos una variable auxiliar:

$$w = \frac{1}{R} \left[\frac{Q_{i1}}{C_2} - \frac{Q_1}{C^*} \right]; dw = -\frac{1}{RC^*} dQ_1$$

$$-RC^* dw = dQ_1; -RC^* \frac{dw}{dt} = w$$

$$\frac{dw}{w} = -\frac{1}{RC^*} dt; \int_{w(0)}^w \frac{dw}{w} = \int_0^t -\frac{1}{RC^*} dt$$

$$\ln \left(\frac{w}{w(0)} \right) = -\frac{t}{RC^*}; w = w(0) \exp \left(-\frac{t}{RC^*} \right)$$

Volvemos para atrás y notamos que

$$w(0) = \frac{Q_{i1}}{R} \left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C^*} \right)$$

Tenemos entonces:

$$\left[\frac{Q_{i1}}{C_2} - \frac{Q_1}{C^*} \right] = Q_{i1} \left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C^*} \right) \exp \left(-\frac{t}{RC^*} \right)$$

$$Q_{i1} \left[\frac{1}{C_2} - \left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C^*} \right) \exp \left(-\frac{t}{RC^*} \right) \right] = \frac{Q_1}{C^*}$$

$$Q_1 = Q_{i1} C^* \left[\frac{1}{C_2} - \left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C^*} \right) \exp \left(-\frac{t}{RC^*} \right) \right] = Q_{i1} \left[\frac{C^*}{C_2} - \left(\frac{C^*}{C_2} - 1 \right) \exp \left(-\frac{t}{RC^*} \right) \right]$$

$$Q_1 = Q_{i1} \left[\frac{C_1}{C_1 + C_2} + \frac{C_2}{C_1 + C_2} \exp \left(-\frac{t}{RC^*} \right) \right]$$

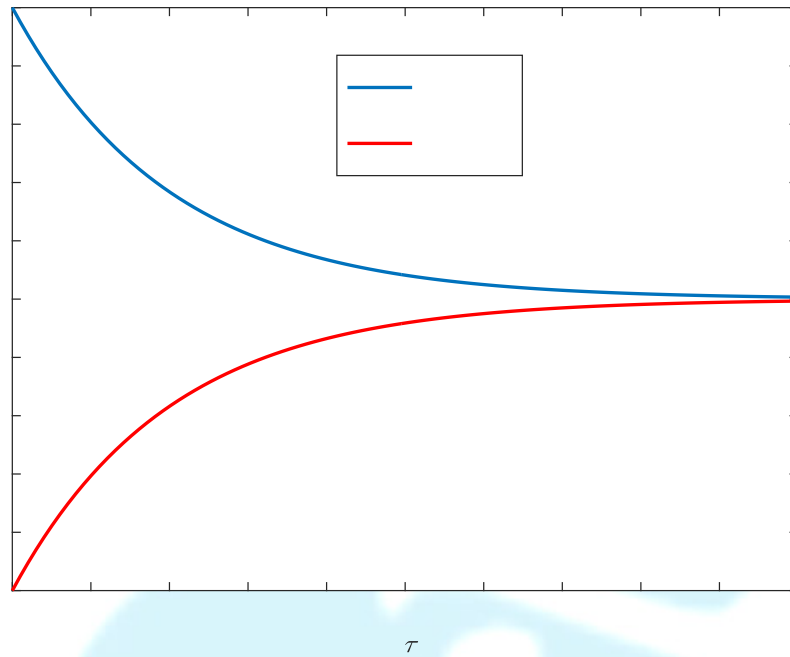
Puff!!!! Llegamos!!!

Este es el clásico problema horrible. Todas las ideas se entienden desde el principio: El capacitor C_1 se irá descargando a cierto ritmo sobre C_2 y a largo plazo la diferencia de potencial entre los bornes de ambos capacitores será la misma (ya hicimos ese problema en la parte de electrostática). Sin embargo, el problema tuvo demasiados pasos matemáticos y nos aburrimos o, peor, nos podemos equivocar en algún paso. Hay técnicas matemáticas más sutiles que permiten resolver más rápidamente el problema pero igual es tedioso.

Ahora vamos a analizar el resultado.

En $t=0$ tenemos $Q_1=Q_{i1}$ (bien). Si t tiende a infinito obtenemos $Q_1=Q_{i1} C_1/(C_1+C_2)$ que, si repasamos la carpeta, también veremos que coincide con la condición de equilibrio encontrada hace mucho tiempo. Notemos que la constante de tiempo τ está ahora dada por RC^* .

Hagamos algún gráfico con $C_1=C_2=2 \mu\text{F}$, $R=1 \text{ k}\Omega$. Con estos valores tenemos $\tau=1 \text{ ms}$. Esta elección nos asegura que a largo plazo $Q_1=Q_2=Q_{i1}/2$.



Miramos y vemos que C_1 se descarga (bien), que C_2 se carga (bien), que la suma de las cargas da constante (bien) y que el fenómeno dura aproximadamente cinco constantes de tiempo, como ya vimos antes.

Este ejemplo fue puesto a fin de ejemplificar el método.

NADIE DEBE PERDER TIEMPO MEMORIZÁNDOLO!!!

“Esto es todo lo que tengo que decir al respecto” (Forrest Gump, 1994).

Capítulo 11

Corriente Alterna

11.1.	<u>Introducción</u>	11-2
11.2.	<u>Respuesta de resistencias, capacitores e inductancias a la corriente alterna</u>	11-2
11.2.1.	La respuesta de una resistencia	11-2
11.2.2.	La respuesta de un capacitor	11-4
11.2.3.	La respuesta de un inductor	11-6
11.2.4.	Combinando elementos	11-7
11.3.	<u>La notación compleja</u>	11-11
11.4.	<u>Venciendo en el campo complejo</u>	11-17
11.5.	<u>La respuesta en frecuencia</u>	11-22
11.6.	<u>Calculando la potencia</u>	11-25
11.7.	<u>La potencia en el circuito RLC serie</u>	11-28
11.8.	<u>Ejemplos más elaborados</u>	11-30
11.8.1.	El fantasma del circuito paralelo	11-30
11.8.2.	Acoplamiento magnético. El transformador	11-31

11.1. Introducción

Cuando estudiamos distintos ejemplos asociados con la ley de Faraday en uno de ellos tratamos el generador de corriente alterna, basado en la rotación relativa entre un campo magnético de módulo constante y un conjunto de espiras. Dicho generador está caracterizado por una fuerza electromotriz: $V_g(t) = V_0 \cos(\omega t)$. El subíndice “g” es por la palabra “generador”. Para cumplir con la norma deberíamos escribir $v_g(t)$ y no $V_g(t)$ porque las variables dependientes del tiempo son escritas, por convención, en minúsculas. Haremos una excepción porque las mayúsculas son más fáciles de seguir y no entraremos en contradicciones importantes. La elección de la dependencia funcional con el coseno es arbitraria, podríamos haber tomado seno igualmente porque es sólo un cambio en la elección del momento $t=0$. La pulsación ω está conectada con la frecuencia f por: $\omega = 2\pi f$. A nivel mundial, en lo que hace a la distribución domiciliaria o fabril, hay dos valores de frecuencia empleados: $f = 50$ Hz para Europa y los países que compraron a firmas europeas su equipamiento (Argentina, Uruguay, Chile, Perú,...); $f = 60$ Hz para la esfera de influencia de los Estados Unidos (Canadá, México, Brasil,...) En el apéndice damos una breve reseña histórica sobre lo que se llamó “La guerra de las corrientes” que tuvo lugar hacia fines de los 1800.

11.2. Respuesta de resistencias, capacitores e inductancias a la corriente alterna

11.2.1. La respuesta de una resistencia

La experiencia muestra que la ley de Ohm, encontrada originalmente para corrientes y diferencias de potencial continuas, es válida para excitaciones variables en el tiempo. La siguiente gráfica muestra una resistencia conectado a un generador de alterna. El ícono del mismo es una circunferencia con un arco de senoide dentro de la misma. La gráfica contiene dos convenciones que utilizaremos en todo este capítulo. Dado que la polaridad del generador varía durante cada período es imposible asignar un borne + (más) y uno – (menos); lo mismo sucede con el sentido de la corriente. Para arreglar este problema pensamos que tomamos una “fotografía” cuando el borne superior del generador es positivo respecto del inferior.

Esto se indica con la flecha vertical que está a la izquierda del ícono del generador. En esta circunstancia la corriente circula en la dirección indicada.

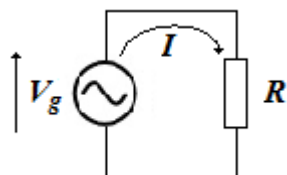


Figura 1. Resistencia conectada a un generador de alterna

En base a lo dicho calculamos la corriente que circula por la resistencia y la potencia disipada en la misma.

$$I_R(t) = \frac{V_g(t)}{R} = \frac{V_0}{R} \cos(\omega t) = I_0 \cos(\omega t)$$

$$P_R(t) = V_g(t) I_R(t) = \frac{V_0^2}{R} \cos^2(\omega t) \quad (1)$$

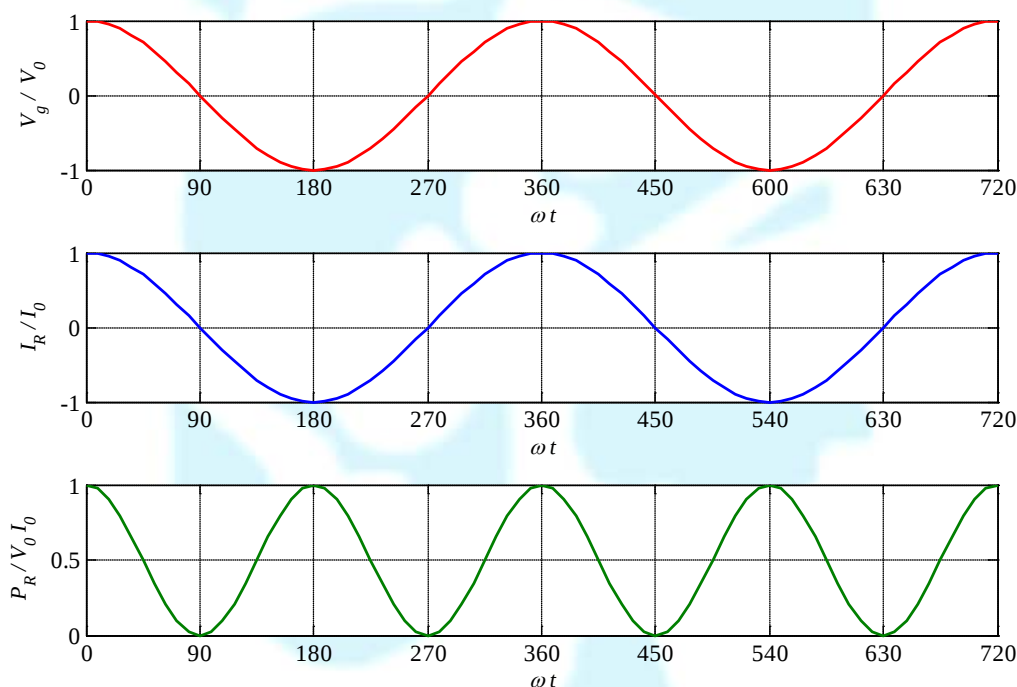


Figura 2. Tensión del generador (rojo), corriente en la resistencia (azul) y potencia entregada por el generador (verde) versus ωt . Los valores están normalizados.

Graficamos dos ciclos (con uno habría bastado) y la variable independiente ωt la expresamos en grados sexagesimales porque no se venden transportadores graduados en radianes (y los ingenieros no los entendemos de todas formas).

Como primer análisis notamos que podemos superponer directamente la curva roja (tensión) con la azul (corriente), punto a punto coinciden. Decimos que la tensión aplicada (roja) y la corriente (azul) se encuentran en fase.

La curva de potencia disipada muestra que, a diferencia de lo que ocurre en corriente continua, la potencia entregada a la resistencia no es constante en el tiempo. Surge entonces la

pregunta: ¿Qué valor de potencia es razonable reportar? Ciertamente no el máximo (demasiado optimista) ni tampoco el mínimo (demasiado pesimista). Se conviene en reportar el valor medio de la misma calculado en un período. Integramos en un período porque incluir más no cambia el resultado.

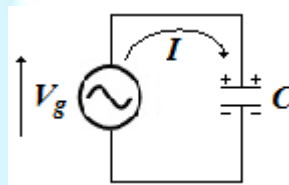
$$P_{media} = \frac{1}{T} \int_0^T P_R(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{V_0^2}{R} \cos^2(\omega t) dt = \frac{V_0^2}{2R} = \left(\frac{V_0}{\sqrt{2}} \right)^2 \frac{1}{R} \quad (2)$$

El último paso de factorado parece caprichoso pero tiene un significado importante. Si la resistencia R fuera conectada a una hipotética pila de valor $V_0/\sqrt{2}$ obtendríamos la misma potencia media disipada que cuando la conectamos al generador de alterna. Para ser más específicos: la bombita iluminaría igual y la plancha calentaría igual. Entonces la cantidad $V_0/\sqrt{2}$ refleja lo que llamamos el *valor eficaz* de la tensión del generador. Cuando decimos que la red domiciliaria en la Argentina es de 220 V, éstos son eficaces. La amplitud V_0 es denominada valor pico. En nuestro país $V_0 = 311$ V. Casi **TODAS** las preguntas importantes que nos haremos se responden en valores eficaces. En este apunte iremos migrando, lentamente, de los valores pico a los eficaces.

11.2.2. La respuesta de un capacitor

La capacidad C , como factor de proporcionalidad entre la carga almacenada y la diferencia de potencial entre las placas del capacitor también es válida para cantidades variables en el tiempo: $Q(t) = C V(t)$. En la figura 3 conectamos el capacitor al generador de alterna y computamos la corriente que circula.

Figura 3. Capacitor conectado a un generador de alterna. Notar convención de signos.



$$V_g(t) - Q(t)/C = 0; I_C = dQ(t)/dt = C dV_g(t)/dt = -\omega C V_0 \sin(\omega t) = -I_0 \sin(\omega t) \quad (3)$$

Repetimos la misma secuencia de gráficos que presentamos para una resistencia (Figura 4).

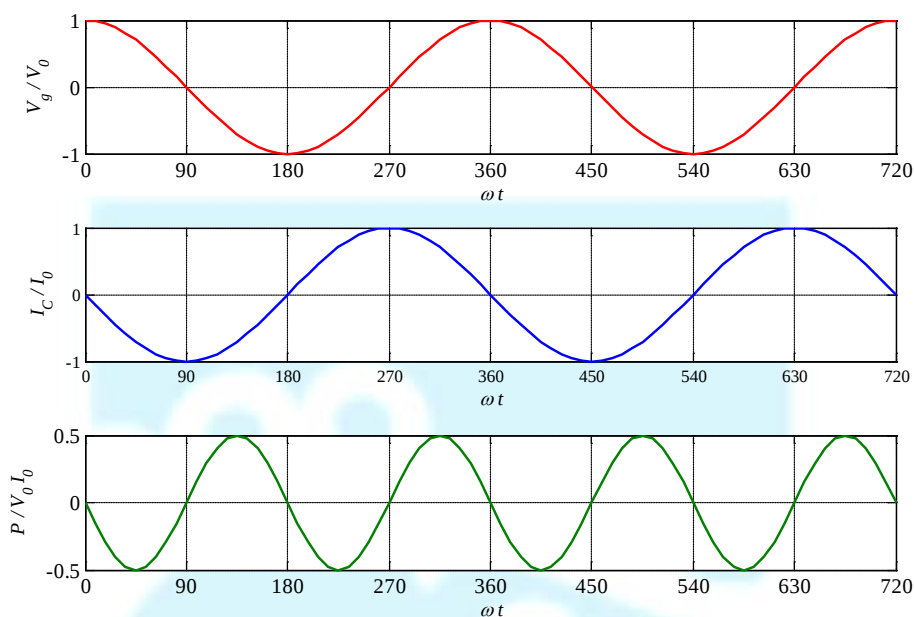


Figura 4. Tensión del generador (rojo), corriente en el capacitor (azul) y potencia entregada por el generador (verde) versus ωt . Los valores están normalizados.

Notamos diferencias importantes con lo obtenido para una resistencia. La curva de corriente (azul) no puede ser superpuesta directamente con la tensión (roja) porque están desplazadas. Nos preguntamos entonces cuánto deberíamos correr la curva de corriente para que la pudiéramos superponer con la de tensión. Como se trata de funciones periódicas tenemos dos opciones que mostramos en la siguiente figura en la que la variable independiente ωt tiene un rango diferente para facilitar el análisis (entramos en los valores negativos) (Figura 5).

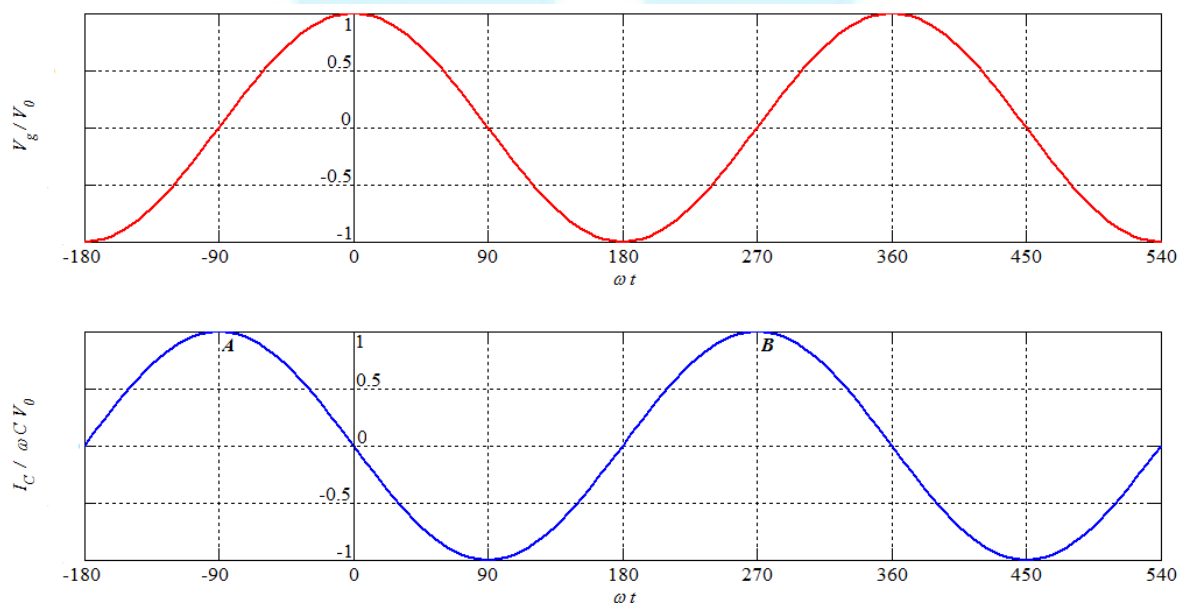


Figura 5. Tensión del generador (rojo) y corriente en el capacitor (azul) vs ωt

Podemos correr la curva de corriente 90° hacia la derecha hasta que el punto A llegue al origen o bien moverla hacia la izquierda 270° hasta que el punto B lo haga. Con cualquiera de estas dos opciones logramos que las curvas de tensión y corriente puedan ser superpuestas. Para eliminar esta indefinición convenimos en tomar la opción de menor módulo, es decir la que corre el punto A 90° hacia la derecha.

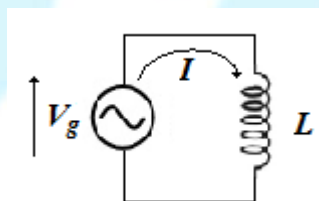
Si miramos la gráfica el evento asociado con el punto A (máximo de la curva azul) ocurre 90° antes que el máximo de la curva de tensión, por lo que declaramos que la curva de corriente *adelanta* 90° a la tensión.

Volvamos ahora a la figura 4 y analicemos la curva de potencia entregada por el generador. Basta una mirada para darnos cuenta de que el valor medio de la misma es nulo. El resultado se puede comprender recordando que el trabajo realizado para cargar el capacitor, puesto que es realizado contra fuerzas conservativas, es recuperado durante la descarga del mismo. No hay transferencia neta de energía del generador al capacitor en un ciclo.

11.2.3. La respuesta de un inductor

El concepto del coeficiente de autoinductancia L fue presentado durante el estudio de la Ley de Faraday. En la figura 6 mostramos una inductancia conectada al generador de alterna y calcularemos la corriente. Al analizar la malla consideramos que la “fotografía” la tomamos cuando $dI(t)/dt > 0$ (esto define los signos).

Figura 6. Inductancia conectada a un generador de alterna



$$V_g(t) - L \frac{dI(t)}{dt} = 0$$

$$\int [V_g(t)/L] dt = \int dI_L \Rightarrow I_L(t) = (V_0/\omega L) \sin(\omega t) = I_0 \sin(\omega t) \quad (4)$$

La integral anterior es indefinida por lo que falta la constante de integración que definiremos más tarde.

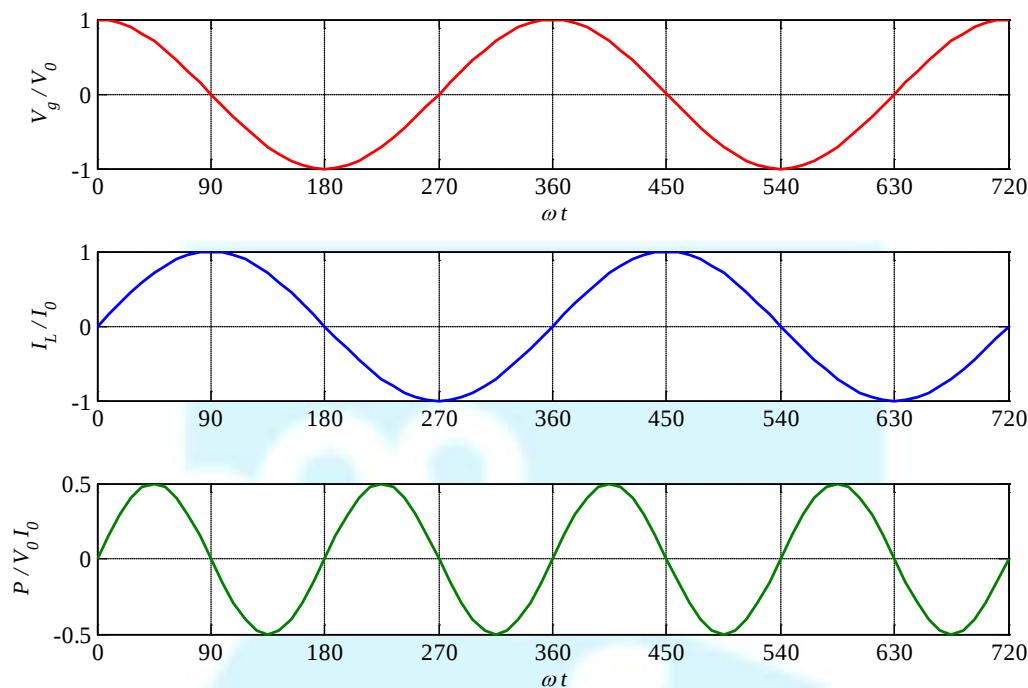


Figura 7. Tensión del generador (rojo), corriente en el inductor (azul) y potencia entregada por el generador (verde) versus ωt . Los valores están normalizados.

Al observar las curvas de tensión y corriente volvemos a notar que están desplazadas. Si volvemos sobre la misma idea que utilizamos en el caso del capacitor, notamos que debemos correr la curva azul 90° hacia la izquierda para que las curvas roja y azul puedan ser superpuestas. La otra opción, mover la curva azul hacia la derecha, involucra un corrimiento de 270° , por lo que queda descartado. Notamos que el máximo de la curva azul que desplazaremos ocurre 90° después que el máximo de la curva roja. En este caso declaramos que la corriente atrasa 90° respecto de la tensión.

En cuanto a la potencia entregada por el generador, nos encontramos con el mismo resultado que en el caso del capacitor; la media es cero. El resultado es esperable; el trabajo realizado para crear el campo magnético en el interior del inductor conforme crece la corriente es recuperado cuando la corriente disminuye.

11.2.4. Combinando elementos

Los tres análisis anteriores estuvieron dirigidos a estudiar la respuesta de los tres componentes fundamentales ante una excitación armónica. Vamos a considerar ejemplos más complicados para ir generando un método de análisis simplificado.

Comenzamos un con un modelo muy simplificado del **motor eléctrico de un ventilador de techo.**

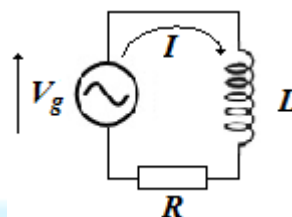


Figura 8. Modelo simplificado de un motor eléctrico.

La inductancia L representa el arrollamiento de alambre necesario para conseguir el campo magnético. La resistencia R representa a la de los cables y, según se enseña en materias avanzadas, también da cuenta del trabajo mecánico realizado por el motor.

Computamos las caídas de tensión en la malla y obtenemos:

$$\begin{aligned} V_g(t) - L \frac{dI(t)}{dt} - RI(t) &= 0 \\ L \frac{dI(t)}{dt} + RI(t) &= V_0 \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (5)$$

Esta es una ecuación diferencial lineal de primer orden no homogénea (nombres complicados para asustar).

La solución de la misma se obtiene como la suma de la solución homogénea (con el segundo miembro igual a cero) con la solución particular.

Declaramos, sin demostración, que la solución homogénea describe el comportamiento del circuito durante los momentos posteriores a la conexión. Es un comportamiento transitorio que se extingue rápidamente conforme avanza el tiempo. La solución particular es la relevante para tiempos grandes y es la que denominamos solución de régimen permanente. Vamos a encontrar dicha solución.

Hay varios métodos pero uno simple es el que propone armar una solución con la misma dependencia temporal que el miembro de la derecha, así como sus derivadas en la medida que no sean nulas o repitan dependencias ya encontradas.

Esta oración es más difícil de decir que de implementar. El miembro de la derecha depende con $\cos(\omega t)$, derivamos una vez y obtenemos $\sin(\omega t)$, derivamos nuevamente y obtenemos $\cos(\omega t)$ pero este término ya repite porque es igual al primero.

Proponemos entonces esta solución:

$$I(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad (6)$$

Donde A y B son constantes a determinar.

Reemplazamos la solución propuesta en la ecuación diferencial:

$$L[-\omega A \sin(\omega t) + \omega B \cos(\omega t)] + R[A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] = V_0 \cos(\omega t) \quad (7)$$

Para que esta igualdad se cumpla para cualquier t debe verificarse que:

$$-\omega LA + RB = 0 \text{ (eliminamos los términos en } \sin(\omega t)) \quad (8)$$

$$\omega LB + RA = V_0 \text{ (igualamos los términos en } \cos(\omega t)) \quad (9)$$

$$\text{De la primera obtenemos: } B = \omega LA / R \quad (10)$$

Reemplazamos en la segunda:

$$A[\omega^2 L^2 / R + R] = V_0 \quad (11)$$

$$A = (V_0 R) / [\omega^2 L^2 + R^2] \quad (12)$$

Ahora reemplazamos en la solución propuesta:

$$I = \frac{V_0 R}{\omega^2 L^2 + R^2} \cos(\omega t) + \frac{V_0 \omega L}{\omega^2 L^2 + R^2} \sin(\omega t) = \frac{V_0}{\omega^2 L^2 + R^2} [R \cos(\omega t) + \omega L \sin(\omega t)] \quad (13)$$

El último término es de la forma $a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$, la que puede ser llevada a $c \cos(\omega t + \varphi)$ con $c = (a^2 + b^2)^{(1/2)}$ y $\varphi = \tan^{-1}(-b/a)$.

Con este último paso obtenemos:

$$I(t) = (V_0 / [R^2 + \omega^2 L^2]^{(1/2)}) \cos(\omega t + \varphi); \quad \varphi = \tan^{-1}(-\omega L/R) \quad (14)$$

Como ejemplo consideremos que el generador corresponde a la red domiciliaria de nuestro país (220 V eficaces, 50 Hz) y que $L = 1$ H y $R = 628 \Omega$.

$$\varphi = \tan^{-1}(-\omega L/R) = \tan^{-1}(-2\pi \cdot 50 \text{ Hz} \cdot 1 \text{ H} / 628 \Omega) = -26.58^\circ = -0.4639 \text{ rad}$$

$$[R^2 + \omega^2 L^2]^{(1/2)} = [628^2 \Omega^2 + (2\pi \cdot 50 \text{ Hz} \cdot 1 \text{ H})^2]^{(1/2)} = 702.2 \Omega$$

$$I(t) = [220 \text{ V} \cdot 2^{(1/2)} / 702.2 \Omega] \cos(2\pi \cdot 50 \text{ Hz} \cdot t - 0.4639) = 0.4431 \text{ A} \cos(2\pi \cdot 50 \text{ Hz} \cdot t - 0.4639)$$

Volvemos a nuestras clásicas gráficas, donde podemos observar que la corriente (curva azul), está corrida 26.58° hacia la derecha respecto de la tensión (curva roja), es decir que la corriente está *atrasada* 26.58° respecto de la tensión. Las curvas ahora están graficadas en función del tiempo t y no de ωt como antes. Asimismo, los valores de tensión, corriente y potencia no están normalizados a los respectivos máximos como antes.

La curva de potencia (verde) nos muestra que su media es positiva, es decir que hay una transferencia neta de energía del generador hacia el circuito, esto se debe a la potencia disipada en la resistencia que calcularemos más tarde. También se puede notar que la potencia transferida toma valores negativos durante algunos intervalos de tiempo. Esto es energía retornada al generador.

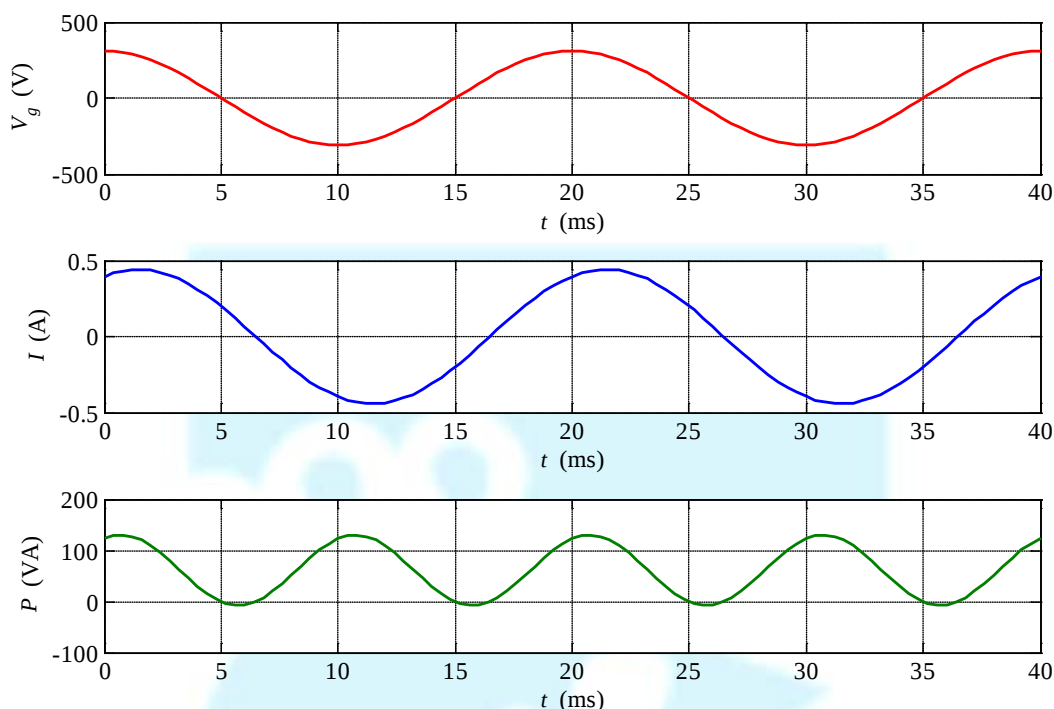
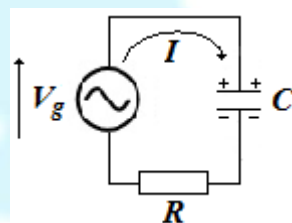


Figura 9. Tensión, corriente y potencia para $V_g = 220 \text{ Vef.}$, $R = 628 \Omega$, $L = 1 \text{ H}$ y $f = 50 \text{ Hz}$.

Como segundo ejemplo consideraremos un circuito que es un “primo” del anterior: un capacitor en serie con una resistencia.

Figura 10. Circuito serie RC



Al hacer la circulación en la malla encontramos:

$$V_g(t) - \frac{Q(t)}{C} - I(t)R = 0 \quad (15)$$

$$\frac{1}{C} \int I(t) dt + I(t)R = V_0 \cos(\omega t)$$

El segundo renglón se obtiene recordando que la carga es la integral de la corriente a lo largo del tiempo. Falta la constante de integración como mencionamos en otro caso que tuvimos una integral.

¿Cómo hacemos para resolver esta ecuación? Se trata de una ecuación integral que no hemos tratado nunca, pero en este caso se puede transformar en una más simple si derivamos miembro a miembro con respecto al tiempo:

$$\frac{I(t)}{C} + R \frac{dI}{dt} = -\omega V_0 \sin(\omega t) \quad (16)$$

Ahora estamos en la misma situación que el caso anterior. No vamos a proceder en detalle porque lo dejamos como un ejercicio. Sólo daremos el resultado final para poder verificar (¡¡¡Háganlo!!!):

$$I(t) = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \cos(\omega t + \varphi); \quad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\omega RC}\right) \quad (17)$$

11.3. La notación compleja

Los desarrollos anteriores no ha sido particularmente difíciles, pero sí muy largos y aburridos. Es un método lento y proclive a errores. Intuitivamente sentimos que los circuitos no se deben analizar así porque el cálculo de la instalación de una casa demoraría una vida.

Efectivamente, existe una forma más simple pero debemos enfrentarnos a una de nuestras malas experiencias: **los números complejos**.

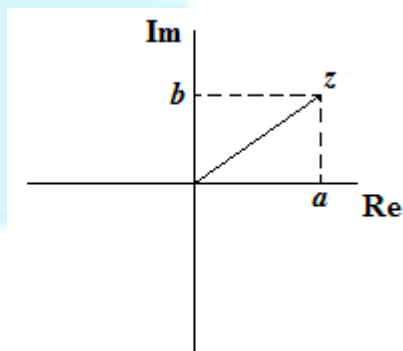
*Complex numbers for dummies**

Vamos a hacer un repaso de lo mínimo que necesitamos sobre números complejos y nos limitaremos a hacer las cuatro operaciones elementales.

Sin pretensiones de rigor matemático definimos la unidad imaginaria como el número, obviamente no real, tal que su cuadrado es igual a -1. Habitualmente la unidad imaginaria se designa con la letra i , pero como dicha letra la hemos utilizado para la corriente emplearemos la letra j . En ingeniería el uso de j es muy habitual, de hecho sirve para saber si el docente estudió ingeniería u otra carrera. En resumen $j^2 = -1$.

Un número complejo z se conforma con una parte real y una imaginaria: $z = a + j b$, donde a y b son números reales. La suma anterior es simbólica, sólo indica la combinación de una parte real y una imaginaria. La representación anterior de un número complejo se denomina cartesiana y es fácil de llevar al denominado plano complejo que queda determinado por los ejes real (Re) e imaginario (Im).

Figura 10. El plano complejo



Dados dos números complejos $z_1=a_1+j b_1$ y $z_2=a_2+j b_2$, su suma o resta queda dada por la suma o resta de las partes reales e imaginarias respectivamente:

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + j (b_1 \pm b_2) \quad (18)$$

El producto es un poco más tedioso; debemos multiplicar término a término recordando que $j^2 = -1$.

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j (a_1 b_2 + b_1 a_2) \quad (19)$$

El cociente es aún más tedioso y requiere del uso de lo que llamamos el conjugado de un número complejo. Denominamos conjugado (z^*) del número complejo z al que se obtiene cambiando el signo de la parte imaginaria de z : $z^* = a - jb$

$$\text{Podemos notar que } z \cdot z^* = a^2 + b^2$$

Podemos calcular el cociente de dos números complejos como:

$$z_1/z_2 = (z_1/z_2) \cdot (z_2^*/z_2^*) = (z_1 \cdot z_2^*) / (a_2^2 + b_2^2) \quad (20)$$

Ciertamente el producto y cociente son operaciones de complejidad creciente y veremos otras formas más simples.

Un auxiliar muy importante que utilizaremos es la denominada fórmula de Euler que establece que para un número real α se cumple (sin demostración):

$$e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j \sin(\alpha) \quad (21)$$

A partir de la fórmula de Euler podemos representar al número complejo z de otra forma (hacer el dibujo):

$$z = a + jb = \sqrt{a^2 + b^2} e^{j\alpha} = |z| e^{j\alpha} \quad (22)$$

$$\tan(\alpha) = \frac{b}{a}$$

Las relaciones anteriores aparecen automáticamente con la fórmula de Euler, la observación de la figura 10 y el teorema de Pitágoras.

Con la ayuda del editor de texto y de ecuaciones no es difícil escribir subíndices o supraíndices. Muy distinto era en la época de la máquina de escribir, por lo que se generó una notación idéntica a la anterior pero adaptada a esos tiempos:

$$z = |z| e^{j\alpha} = |z| \angle \alpha \quad (23)$$

El miembro de la derecha utiliza la notación de ángulo dada por la barra de dividir y la tecla de subrayar. Con esta notación el ángulo α lo podemos dar en grados, lo que es mucho más cómodo. Esta es la llamada representación polar porque damos el módulo del número complejo y el ángulo que forma con respecto al eje real.

Con la fórmula de Euler y lo que hemos expuesto sobre producto y cocientes de números complejos podemos dar una variante menos trabajosa para estas operaciones

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= |z_1| |z_2| e^{j(\alpha_1 + \alpha_2)} = |z_1| |z_2| e^{j(\alpha_1 + \alpha_2)} \\ z_1 / z_2 &= |z_1| / |z_2| e^{j(\alpha_1 - \alpha_2)} = |z_1| / |z_2| e^{j(\alpha_1 - \alpha_2)} \end{aligned} \quad (24)$$

Ahora las operaciones de multiplicación y división son mucho más simples. En síntesis la suma o resta conviene efectuarla en la representación cartesiana y el producto o la división en la representación polar.

Para pasar de una a otra tenemos varias herramientas. En las calculadoras Casio ® (las más habituales al momento en que escribimos este apunte) existen dos teclas llamadas **Rect** y **Pol** que permiten pasar de un formato al otro (aunque parezca mentira hay que leer el manual de la calculadora). Para quienes utilizan dispositivos Android ® hay una aplicación gratuita llamada **Droid48** ®, la que simula el comportamiento de una calculadora Hewlett-Packard HP48 ®. Esta calculadora realiza todas las operaciones con números complejos en cualquier formato.

Este es el repaso elemental. Siempre quedan Google y Wikipedia como fuentes extra de conocimiento.

El problema del ventilador desde otra óptica (de 11.2.4.)

Retomemos el problema del modelo equivalente del motor eléctrico del ventilador. Sabemos que bajo una excitación de la forma $V_g(t) = V_0 \cos(\omega t)$ la corriente que circula es $I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$ (I_0 y φ fueron desarrollados más arriba).

Parece obvio que si reemplazamos $I(t)$ en la ecuación (5) vamos a obtener una identidad. Vamos a hacerlo pero en una forma demencial: toda vez que aparezca una función armónica la expresaremos con la fórmula de Euler prestando atención a las siguientes identidades que se siguen de escribir la fórmula de Euler para α y $-\alpha$ y recordando que coseno es una función par y seno una impar ($\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$; $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$):

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2} \\ \sin(\alpha) &= -j \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2} \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} V_g(t) &= V_0 \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \\ I(t) &= I_0 \frac{e^{j(\omega t + \varphi)} + e^{-j(\omega t + \varphi)}}{2} \end{aligned} \quad (26)$$

Vamos a la Ec. (5)

$$L \frac{dI}{dt} + RI = V_g$$

$$LI_0 \left[\frac{j\omega e^{j(\omega t + \varphi)} - j\omega e^{-j(\omega t + \varphi)}}{2} \right] + RI_0 \left[\frac{e^{j(\omega t + \varphi)} + e^{-j(\omega t + \varphi)}}{2} \right] = V_0 \left[\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \right] \quad (27)$$

Cancelamos el divisor común y separamos los términos en $e^{j\omega t}$ y $e^{-j\omega t}$

$$I_0 e^{j(\omega t + \varphi)} (R + j\omega L) = I_0 e^{j\varphi} e^{j(\omega t)} (R + j\omega L) = V_0 e^{j(\omega t)} \quad (28)$$

$$I_0 e^{-j(\omega t + \varphi)} (R - j\omega L) = I_0 e^{-j\varphi} e^{-j(\omega t)} (R - j\omega L) = V_0 e^{-j(\omega t)} \quad (29)$$

Procesemos primero la (28). Como $e^{j\omega t}$ nunca es nulo podemos cancelarlo en todos los términos.

$$I_0 e^{j\varphi} (R + j\omega L) = V_0 \quad (30)$$

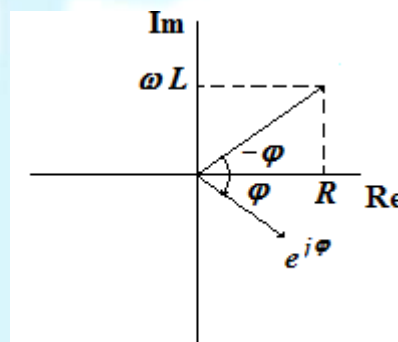
La Ec. (30) es una ecuación simple pero que merece ser analizada porque tiene la clave de lo que viene más tarde.

Tanto I_0 como V_0 son números reales porque son las amplitudes de la corriente y de la tensión. Por otra parte, tanto $e^{j\varphi}$ como $(R + j\omega L)$ son números complejos.

Cuando analizamos la Ec.(30) observamos que el ángulo que forma el número $e^{j\varphi}$ en el plano complejo debe ser opuesto al de $(R + j\omega L)$ puesto que es la única forma en la que el producto del miembro izquierdo de la (30) devuelva un número real.

Vamos a graficar $e^{j\varphi}$ y $(R + j\omega L)$ en un mismo dibujo a pesar de que no tienen las mismas unidades porque nos interesa ver el tema del ángulo.

Figura 11. Parte de la (30) en forma gráfica



Es importante notar que sólo si cumplimos las condiciones de la figura entonces podemos satisfacer la Ec.(30).

De párrafos anteriores conocemos el valor de φ , pero ahora lo podemos calcular de una manera mucho más simple: es el opuesto del ángulo formado por el número $(R + j\omega L)$.

Algo similar sucede con I_0 , nos basta despejar de la Ec.(30):

$$I_0 = \frac{V_0}{e^{j\varphi}(R + j\omega L)} = \frac{V_0}{[1/\varphi][R + j\omega L] / -\varphi} = \frac{V_0}{|R + j\omega L|} \quad (31)$$

La conclusión extraña es que los valores de φ e I_0 fueron calculados de una manera diferente pero obtuvimos el mismo valor que antes.

Hasta aquí trabajamos con la Ec.(28); pasemos ahora a la Ec.(29).

Si reemplazamos en ella observamos que obtenemos exactamente la misma información que con la Ec.(28). La Ec.(29) no aporta información extra y la podemos descartar.

Entonces nos encontramos con que la Ec.(28) es nuestra herramienta. La copiamos para analizarla.

$$I_0 e^{j(\omega t + \varphi)} (R + j\omega L) = I_0 e^{j\varphi} e^{j(\omega t)} (R + j\omega L) = V_0 e^{j(\omega t)}$$

Aparecen dos “objetos” que tienen semejanza con sus contrapartes del mundo físico pero que no son iguales, de hecho son números complejos:

$$\begin{aligned} V_0 e^{j\omega t} \\ I_0 e^{j(\omega t + \varphi)} \end{aligned} \quad (32)$$

El primero es la función “asociada” con el generador y la segunda con la corriente. Estos “objetos” son denominados fasores (<http://en.wikipedia.org/wiki/Phasor>) y son muy utilizados en el análisis de sistemas sometidos a una excitación armónica. Los fasores son números complejos que “rotan” en el plano complejo a una velocidad angular ω .

Reescribamos la Ec.(28) yendo un paso para atrás, aplicando propiedad distributiva.

$$RI_0 e^{j(\omega t + \varphi)} + j\omega LI_0 e^{j(\omega t + \varphi)} = V_0 e^{j(\omega t)}$$

El primer sumando es la parte “asociada” con la caída de tensión en la resistencia y el segundo es el análogo correspondiente a la inductancia. Recordemos esto porque en poco tiempo sacaremos una conclusión.

Pasemos ahora a analizar, con esta técnica, al circuito de la figura 10 y que se encontraba descrito por la ecuación 15.

$$\begin{aligned} \frac{1}{C} \int I(t) dt + I(t)R &= V_0 \cos(\omega t) \\ \frac{1}{C} \int I_0 \left[\frac{e^{j(\omega t + \varphi)} + e^{-j(\omega t + \varphi)}}{2} \right] dt + I_0 \left[\frac{e^{j(\omega t + \varphi)} + e^{-j(\omega t + \varphi)}}{2} \right] R &= V_0 \left[\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \right] \end{aligned} \quad (33)$$

Separemos los términos en $j\omega t$ y $-j\omega t$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{C} \int I_0 \left[\frac{e^{j(\omega t + \varphi)} + e^{-j(\omega t + \varphi)}}{2} \right] dt + I_0 \left[\frac{e^{j(\omega t + \varphi)} + e^{-j(\omega t + \varphi)}}{2} \right] R &= V_0 \left[\frac{e^{j(\omega t)} + e^{-j(\omega t)}}{2} \right] \\ \frac{1}{C} \int I_0 \left[\frac{e^{j(\omega t + \varphi)}}{2} \right] dt + I_0 \left[\frac{e^{j(\omega t + \varphi)}}{2} \right] R &= V_0 \left[\frac{e^{j(\omega t)}}{2} \right] \\ \frac{1}{C} \int I_0 \left[\frac{e^{-j(\omega t + \varphi)}}{2} \right] dt + I_0 \left[\frac{e^{-j(\omega t + \varphi)}}{2} \right] R &= V_0 \left[\frac{e^{-j(\omega t)}}{2} \right] \end{aligned} \quad (34)$$

Trabajemos sobre la segunda ecuación (términos en $j\omega t$).

$$\begin{aligned} \frac{1}{C} \int I_0 \left[\frac{e^{j(\omega t + \varphi)}}{2} \right] dt + I_0 \left[\frac{e^{j(\omega t + \varphi)}}{2} \right] R &= V_0 \left[\frac{e^{j(\omega t)}}{2} \right] \\ \frac{1}{C} \frac{-j}{\omega} \frac{I_0 e^{j(\omega t + \varphi)}}{2} + \frac{I_0 e^{j(\omega t + \varphi)}}{2} R &= V_0 \left[\frac{e^{j(\omega t)}}{2} \right] \\ I_0 e^{j(\omega t + \varphi)} \left[R - \frac{j}{\omega C} \right] &= V_0 e^{j(\omega t)} \\ I_0 e^{j(\varphi)} \left[R - \frac{j}{\omega C} \right] &= V_0 \end{aligned} \quad (35)$$

La Ec.(35) se parece mucho a la Ec.(28) y todos los razonamientos que hicimos pueden ser repetidos para encontrar los valores de I_0 y φ .

Ahora nos encontramos con que el número $R - j/\omega C$ pertenece al cuarto cuadrante, por lo tanto φ pertenece al primero y concluimos que la corriente adelanta a la tensión.

Repitiendo lo hecho anteriormente hallamos que:

$$I_0 = \frac{V_0}{\left| R - \frac{j}{\omega C} \right|} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 - \left(\frac{1}{\omega C} \right)^2}} \quad \varphi = \tan^{-1} \left(\frac{1}{\omega C R} \right) \quad (36)$$

Si ahora desarrollamos los términos de la ecuación en $-j\omega t$ nos encontramos con que el resultado es exactamente el mismo que la Ec.(36). No hay información extra.

11.4. Venciendo en el campo complejo

Es interesante repasar lo que hemos hecho hasta el momento. Entre las ecuaciones de (5) a (14) nos permitieron resolver el comportamiento en régimen permanente de un circuito RL serie por los métodos tradicionales de ecuaciones diferenciales.

Analizamos, por el mismo método, un circuito RC serie en las ecuaciones (15) a (17), pero no hay que engañarse; el número de pasos es menor porque no lo hicimos en detalle.

Por otra parte, con la ecuación (28) resolvimos el primer circuito y con la Ec.(34) el segundo por un método algebraico, en apariencia, muy distinto.

La discrepancia no es tal y se puede comprender al analizar los pasos dados.

Al calcular la caída de tensión sobre la inductancia ($L \, dI/dt$) cuando usamos la forma “auxiliar” de la corriente Ec.(32) inevitablemente tendremos un término $j\omega LI$.

Análogamente, si tratamos con un capacitor, la caída de tensión está dada por

$$1/C \int I dt = -j/\omega C I.$$

La conclusión es que en el mundo “auxiliar” podemos computar las caídas de tensión en una inductancia o en un capacitor multiplicando a la corriente por el factor $j\omega L$ (inductancia) o por $-j/\omega C$ (capacitor).

Con estos auxiliares podemos armar una **pseudo Ley de Kirchhoff** con números complejos que nos permiten resolver el problema en el campo auxiliar.

Nos falta mencionar a la resistencia, pero su papel es trivial porque al calcular la caída de tensión sobre ella sólo debemos multiplicar la resistencia por la corriente, con lo que no obtenemos ningún objeto nuevo.

Podemos entonces sintetizar diciendo que a la resistencia física R le asignamos en el campo auxiliar el número real R . Análogamente a la inductancia física L le asignamos el número complejo $j\omega L$. Finalmente, a la capacitancia física C le asignamos el número complejo $-j/\omega C$.

Estas tres cantidades son válidas en el mundo “auxiliar”, no en el mundo físico. De hecho dos de ellos son complejos.

Sin embargo, estas cantidades nos permiten armar una pseudo-ley de Kirchhoff con la que podemos resolver rápidamente el problema.

La cantidad ωL recibe el nombre de reactancia inductiva X_L y $1/\omega C$ es conocida como reactancia capacitiva X_C . Ambas cantidades son definidas sin la unidad imaginaria y sin el signo menos en el caso del capacitor.

Veámoslo con un ejemplo porque es mucho más fácil. Consideremos el siguiente circuito

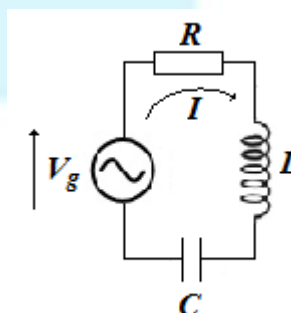


Figura 12. Circuito RLC serie

Escribimos la pseudo-ley de Kirchhoff en el campo “auxiliar”:

$$RI_0 e^{j(\omega t + \varphi)} + j\omega LI_0 e^{j(\omega t + \varphi)} - j/\omega C I_0 e^{j(\omega t + \varphi)} = V_0 e^{j(\omega t)} \quad (37)$$

$$[R + j\omega L - j/\omega C] I_0 e^{j(\omega t + \varphi)} = V_0 e^{j(\omega t)}$$

Una vez más cancelamos el término común no nulo $e^{j\omega t}$ para obtener:

$$[R + j\omega L - j/\omega C] I_0 e^{j\varphi} = V_0 \quad (38)$$

Esta última ecuación es operacionalmente idéntica a la Ec.(30) por lo que poco podemos agregar. El ángulo que forma el número complejo $[R + j\omega L - j/\omega C]$ **DEBE** ser igual a $-\varphi$ para satisfacer la igualdad. El número I_0 se obtiene por simple despeje.

Si meditamos un poquito notamos que la Ec.(37) contiene un paso que puede ser omitido porque siempre se repite: cancelar el término común $e^{j\omega t}$ y pasamos directamente a la Ec.(38) (más simple).

El último paso es simplemente dividir ambos miembros de la Ec.(38) por $\sqrt{2}$, así conseguimos que la Ec.(38) quede expresada en valores eficaces en lugar de pico. Nuestra “obsesión” con los valores eficaces estriba en que, aunque no lo hemos mostrado aún, todos los cálculos relevantes corresponden a valores eficaces.

$$[R + j\omega L - j/\omega C] I_{ef} e^{j\varphi} = V_{ef} \quad (39)$$

Hagamos un ejemplo numérico. Tomemos que la alimentación corresponde a la red de nuestro país (220 V eficaces, $f = 50$ Hz) y sean $R = 300 \Omega$, $L = 1$ H y $C = 50 \mu F$.

Obtenemos:

$X_L = 2 \pi 50 \text{ Hz } 1H = 314 \Omega$; $X_C = 1/(2 \pi 50 \text{ Hz } 50 \mu F) = 63.7 \Omega$ (revisar que las unidades de X_L y X_C son Ohms)

$$[300 + j 250.5] \Omega I_{ef} e^{j\varphi} = 220 \text{ V.}$$

Primero calculamos φ como el *opuesto* del ángulo que forma el número $[300 + j 250.5] \Omega$

$$\varphi = -\tan^{-1}(250.5 \Omega / 300 \Omega) = -39.86^\circ$$

Habiendo obtenido un ángulo negativo concluimos que la corriente atrasa con respecto a la tensión.

Ahora despejamos $I_{ef} = 0.56$ A y entonces decimos que en el circuito circula una corriente de 0.56 A atrasada -39.86 grados.

El valor $R + j(\omega L - 1/\omega C)$ representa, en nuestro dominio auxiliar, el efecto combinado de la resistencia, la capacitancia y la inductancia. Recibe el nombre de impedancia Z .

Hemos resuelto un problema que, en el mundo físico, involucraba operaciones algebraicas, diferenciales e integrales. Lo resolvimos en un dominio “auxiliar” de números complejos pero mucho más simple.

La experiencia nos muestra que en este punto la media de los lectores se encuentra confundida, cuando no definitivamente enojada. Muy probablemente tal emoción se deba a la poca familiaridad con el uso de los números complejos. Para solucionarlo vamos a seguir con ejemplos.

Vamos a atacar uno de los errores más comunes pero antes lo vamos a poner en contexto.

Hasta el presente hemos utilizado voltímetros de corriente continua (DC). El mismo voltímetro puede medir valores de alterna (AC) luego de apretar un botón (no decimos qué pasa pero sí es importante ver el display porque aparecen las leyendas DC y AC).

Los voltímetros están calibrados en **VALORES EFICACES** y registran la caída de tensión eficaz entre los dos puntos del circuito que estamos midiendo. La lectura es siempre positiva (no tiene sentido hablar de más o menos en el caso de alterna). Estos son los voltímetros comunes que utilizamos en el laboratorio y en la industria “común”. Unos pocos voltímetros son capaces de medir el valor eficaz de la caída de tensión y el ángulo de desfase con respecto a una referencia. Éstos son denominados voltímetros vectoriales (sería mejor llamarlos fasoriales). Son muchísimo más caros que los comunes (miles de dólares) y en la Facultad hay uno solo (difícil de conseguir). Bien, usaremos voltímetros comunes entonces.

Calculemos los valores eficaces de las caídas de tensión del problema anterior:

$$V_R = I_{ef} R = 0.56 \text{ A } 300 \Omega = 168.87 \text{ V}$$

$$V_L = I_{ef} X_L = 0.56 \text{ A } 314 \Omega = 176.84 \text{ V}$$

$$V_C = I_{ef} X_C = 0.56 \text{ A } 63.7 \Omega = 35.84 \text{ V}$$

Ahora nos viene una tentación del demonio que nos condena al último círculo del infierno: es obvio que los componentes están en serie por lo tanto la suma de las caídas de tensión debe dar la del generador. Si hacemos la suma de los valores anteriores obtenemos 381.55 V, muyyyyyyyy lejos de los 220 V del enchufe.

Dónde está el error/horror? Podemos asegurar que todas las cuentas están bien a menos de pequeños errores de redondeo que de ninguna manera pueden dar cuenta de semejante discrepancia.

El **GRAVE ERROR** reside en que hemos sumado las caídas de tensión en módulo sin tener en cuenta que son números complejos.

Repitamos todo pero ahora bien.

$$V_R = I_{ef} R = 0.56 \angle -39.86^\circ \text{ A } 300 \angle 0^\circ \Omega = 168.87 \angle -39.86^\circ \text{ V} = (129.62 - j 108.24) \text{ V}$$

$$V_L = I_{ef} X_L = 0.56 \angle -39.86^\circ 314 \angle 90^\circ \Omega = 176.84 \angle 50.14^\circ \text{ V} = (113.34 + j 135.74) \text{ V}$$

$$V_C = I_{ef} X_C = 0.56 \angle -39.86^\circ 63.7 \angle -90^\circ \Omega = 35.84 \angle -129.86^\circ \text{ V} = (-22.97 - j 27.57) \text{ V}$$

Si ahora sumamos obtenemos un resultado muy próximo a 220 V. La suma de tensiones y/o corrientes **DEBE** ser hecha recordando que son números complejos (en este formalismo).

Es interesante notar que, al hacer los productos, hemos agregado un ángulo de 90 grados a X_L (por el factor j que está adelante) y de -90 grados a X_C (revisar las definiciones).

En la siguiente gráfica representamos los fasores donde mostramos la tensión del generador (rojo), la caída en la resistencia (azul), ídem en la inductancia (verde) y en el capacitor (magenta). La suma **VECTORIAL** de los tres últimos es igual al primero

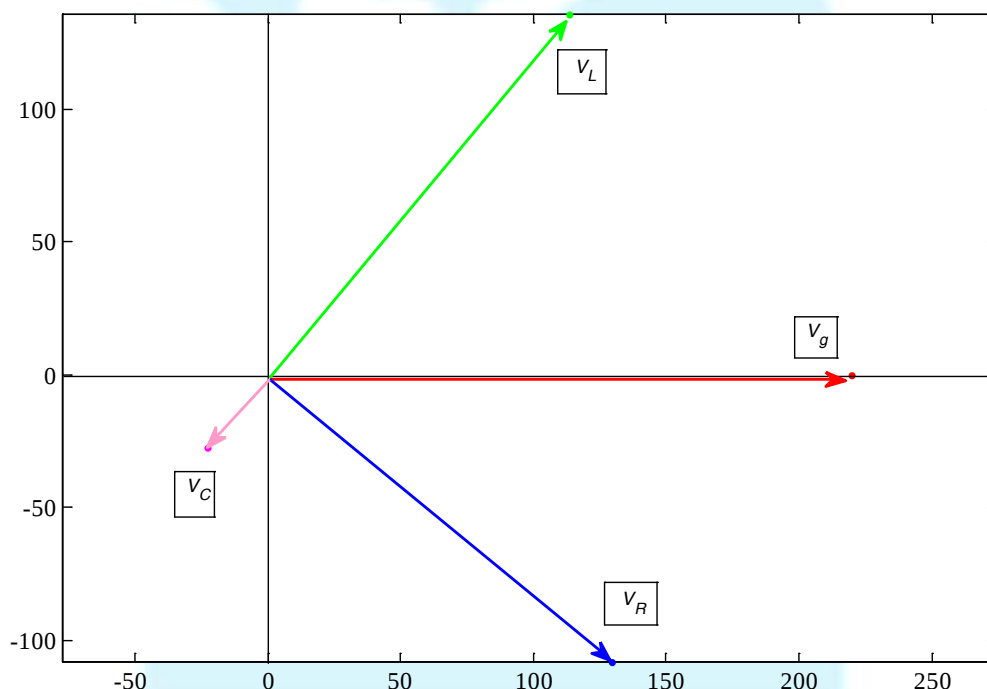


Figura 13. Los tres fasores “suelos”

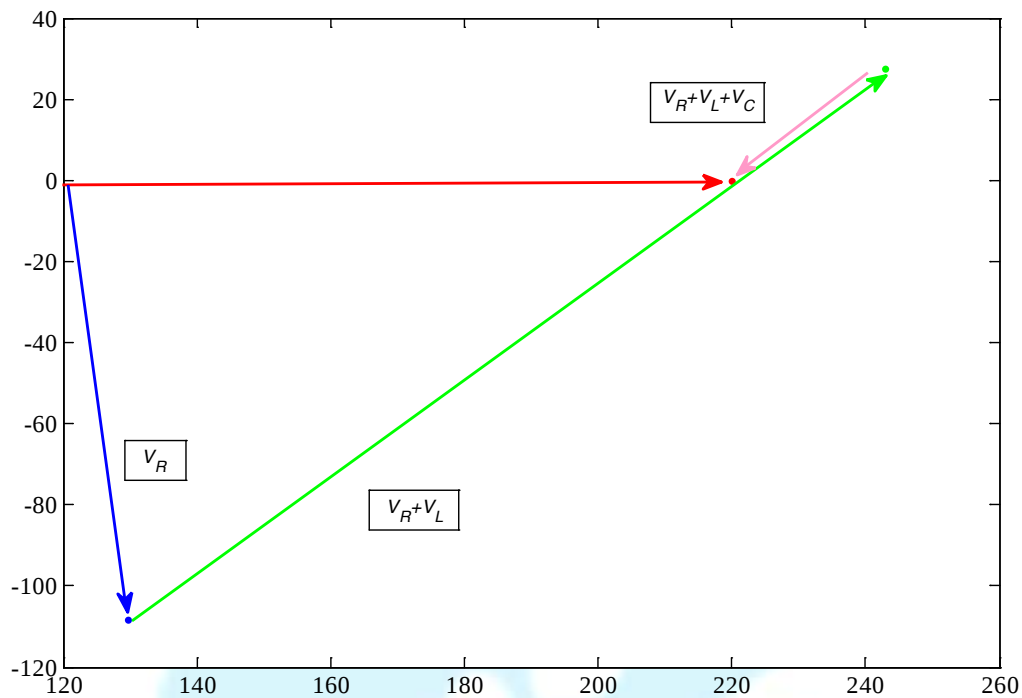


Figura 14. Los tres fasores sumados

La conclusión es que el método es rápido pero nos obliga a trabajar con números complejos. La experiencia muestra que muchos errores vienen de querer evitar el uso de números complejos. Ese no es el camino; es preferible aprender la operatoria con dichos números.

Para seguir practicando estaría bueno dar otro ejemplo para practicar algo distinto y variar un poco. Sin embargo, vamos a analizar un poco más en profundidad el ejemplo que venimos siguiendo para aprender cosas importantes.

11.5. La respuesta en frecuencia

En el ámbito hogareño o fabril la frecuencia del generador de corriente alterna es fija (ya mencionamos los valores típicos). Algún lector más avanzado podrá argumentar que existen los variadores de frecuencia y tiene razón, pero ese es un tema más difícil que no trataremos.

Por el contrario, en el ámbito de la electrónica es muy común tener señales de frecuencia variable. Así que ahora estudiaremos nuestro circuito considerando frecuencia variable.

De la resolución obtuvimos:

$$I_{ef} = \frac{V_{ef}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \quad \varphi = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega L - 1/\omega C}{R}\right) \quad (40)$$

Tenemos cinco variables: V_{ef} , R , L , C y ω . Demasiadas para graficar. Arbitrariamente fijemos V_{ef} , L y C y dejemos variar ω y R .

Primero notamos que si la combinación de valores asegura que $\omega L = 1/\omega C$ encontramos que $\varphi = 0$ y que la corriente eficaz es la más grande de todas las posibles porque el denominador es el más pequeño posible.

La condición $\varphi = 0$ nos dice que el desfase entre la tensión de alimentación es nulo. Esta condición se denomina de *resonancia*. Además, notamos que $I_{ef} = V_{ef}/R$. Los efectos de la inductancia y el capacitor se han desvanecido para el mundo exterior. Llamaremos ω_r a la pulsación a la que ocurre esta situación (la r es por resonancia). Es fácil obtener $\omega_r^2 = 1/LC$.

Si $\omega > \omega_r$ tenemos $\varphi < 0$, es decir que la corriente atrasa a la tensión y entonces decimos que el circuito tiene comportamiento inductivo. Cuando $\omega < \omega_r$ resulta $\varphi > 0$, la corriente adelanta a la tensión y el circuito es capacitivo. En cualquiera de las dos situaciones anteriores la corriente es menor que la que obtuvimos en resonancia puesto que el denominador de la (40) es más grande que para la condición de resonancia.

Vamos a graficar para $V_{ef} = 1$ V, $L = 1$ mH, $C = 1$ nF y $R = [100, 1000, 10000] \Omega$.

Con los valores previos obtenemos $\omega_r = 1$ M/s y $f_r = 159.15$ kHz.

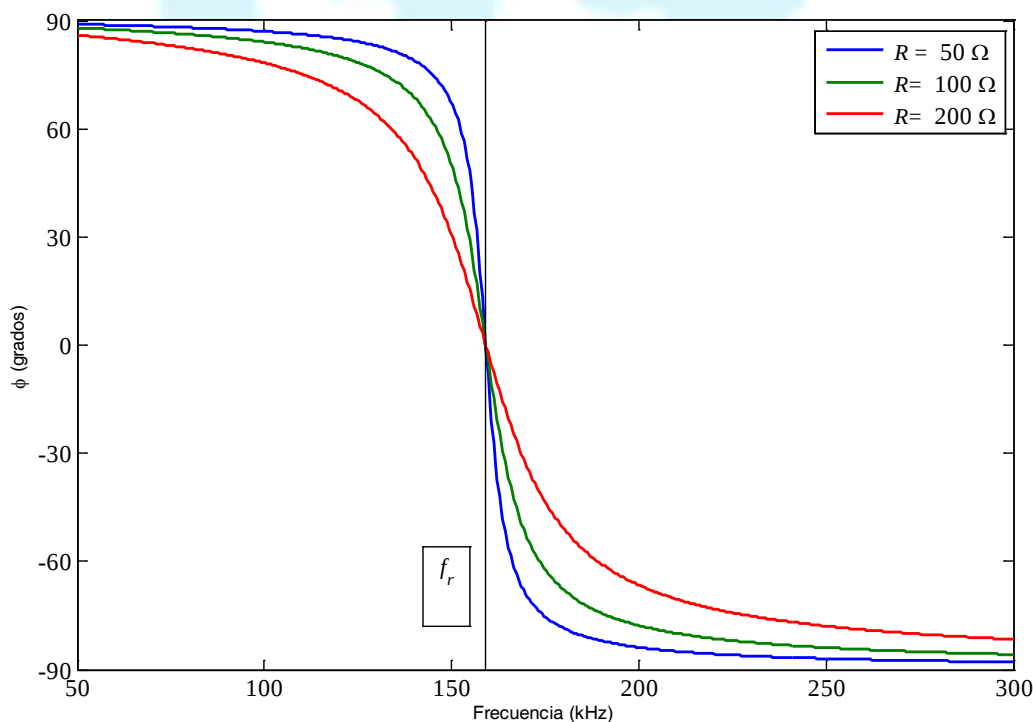


Figura 15. El desfase φ en función de la frecuencia para distintos valores de resistencia.

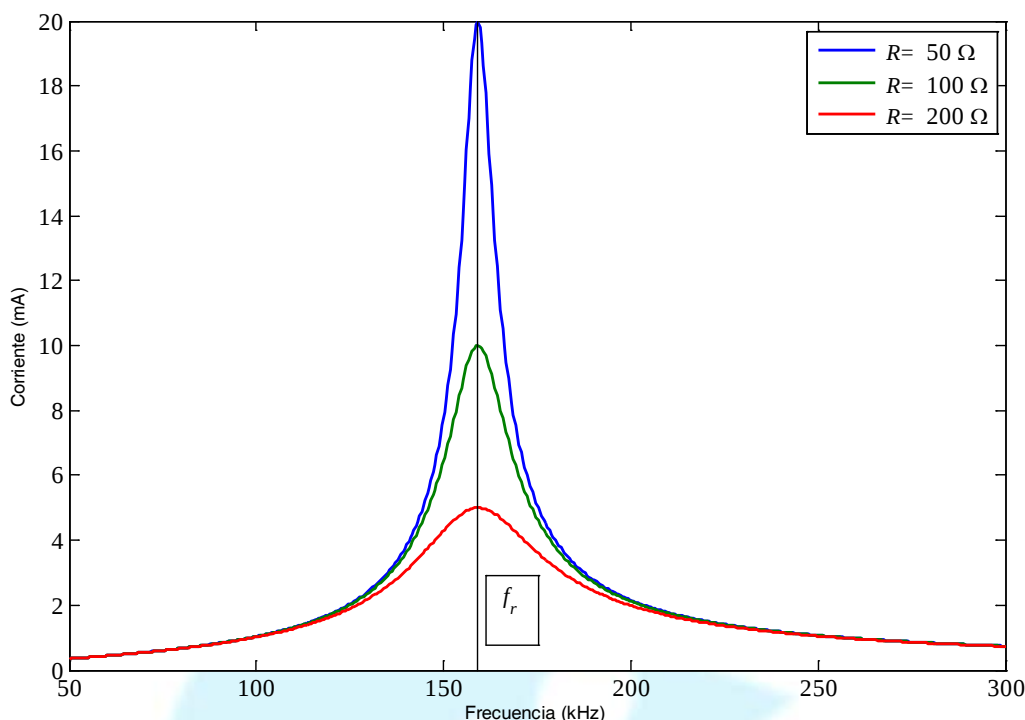


Figura 16. El módulo de la corriente eficaz en función de la frecuencia para distintos valores de resistencia.

Podemos observar que en todos los casos la frecuencia de resonancia es independiente del valor de R (obvio, sólo depende de L y C). La influencia de R es más sutil. Notemos que a medida que aumentamos R la corriente disminuye (a una ω fija). La curva de I_{ef} parece “ensancharse” y la de φ tiene menos variación.

Puesto que hemos graficado en un rango de frecuencias alrededor de la de resonancia es interesante analizar qué valores límite tenemos para frecuencias muy bajas y muy altas.

Si ω tiende a cero en la (40) vemos que φ tiende a 90 grados (capacitivo) y la corriente a cero. Por otra parte, si ω tiende a infinito, φ tiende a -90 grados (inductivo) y la corriente nuevamente tiende a cero.

Como práctica (aunque tiene una importancia que revelaremos más tarde) vamos a calcular los valores para los que $\varphi = \pm 45^\circ$.

Si $\varphi = 45^\circ$ debe ser $X_L - X_C = R$

$$\begin{aligned}\omega_s L - \frac{1}{\omega_s C} &= R \\ \frac{\omega_s^2 LC - 1}{\omega_s C} &= R \\ \omega_s^2 LC - \omega_s RC - 1 &= 0 \\ \omega_s &= \frac{RC \pm \sqrt{(RC)^2 + 4LC}}{2LC}\end{aligned}\tag{41}$$

El discriminante es positivo (las soluciones son reales) y es fácil ver que la solución correcta es la de la suma (la otra devuelve un resultado negativo sin sentido)

Vamos ahora a la otra situación.

Si $\varphi = -45^\circ$ debe ser $X_L - X_C = -R$

$$\begin{aligned}\omega_i L - \frac{1}{\omega_i C} &= -R \\ \frac{\omega_i^2 LC - 1}{\omega_i C} &= -R \\ \omega_i^2 LC + \omega_i RC - 1 &= 0 \\ \omega_i &= \frac{-RC \pm \sqrt{(RC)^2 + 4LC}}{2LC}\end{aligned}\tag{42}$$

Nuevamente la solución correcta es la que corresponde al signo más.

Notamos que la primera respuesta (ω_s) está por encima de ω_r (s es por superior) y la segunda (ω_i) está por debajo (i es por inferior). La diferencia $\omega_s - \omega_i = \Delta\omega$ se llama ancho de banda del circuito y su verdadera relevancia será analizada más adelante, por ahora fue sólo un juego algebraico.

Dejemos por un rato estas manipulaciones que no son inútiles pero ya nos cansaron un poco. Vamos a un tema importante.

11.6. Calculando la potencia

Cuando calculamos la potencia consumida (o entregada) en un circuito de corriente continua nos bastaba multiplicar la caída de tensión sobre un componente por la corriente que circulaba por dicho componente. Como ambos valores no cambiaban a lo largo del tiempo obteníamos un valor constante.

Ya mencionamos anteriormente que en circuitos de corriente alterna tenemos señales que varían con el tiempo. Vamos a desarrollar despacio el caso general.

Consideremos el caso en que un generador $V_g(t)=V_0\cos(\omega t)$ está conectado a un circuito por el que circula una corriente $I(t)=I_0\cos(\omega t+\varphi)$. El producto de ambas cantidades lo denominamos potencia instantánea.

$$P_{inst}(t)=V_g(t) I(t)=V_0\cos(\omega t) I_0\cos(\omega t+\varphi)$$

Desarrollemos el producto recordando que $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$

$$P_{inst}(t)=V_0I_0\cos(\omega t)\left[\cos(\omega t)\cos(\varphi)-\sin(\omega t)\sin(\varphi)\right]$$

$$P_{inst}(t)=V_0I_0\left[\cos^2(\omega t)\cos(\varphi)-\cos(\omega t)\sin(\omega t)\sin(\varphi)\right]$$

$$P_{inst}(t)=\frac{V_0I_0}{2}\left\{\left[1+\cos(2\omega t)\right]\cos(\varphi)-\sin(2\omega t)\sin(\varphi)\right\}$$

$$P_{inst}(t)=\frac{V_0}{\sqrt{2}}\frac{I_0}{\sqrt{2}}\left\{\left[1+\cos(2\omega t)\right]\cos(\varphi)-\sin(2\omega t)\sin(\varphi)\right\} \quad (43)$$

$$P_{inst}(t)=\left[V_{ef}I_{ef}\cos(\varphi)\right]\left[1+\cos(2\omega t)\right]-\left[V_{ef}I_{ef}\sin(\varphi)\right]\sin(2\omega t)$$

$$P_{inst}(t)=P\left[1+\cos(2\omega t)\right]-Q\sin(2\omega t)$$

$$P=V_{ef}I_{ef}\cos(\varphi); Q=V_{ef}I_{ef}\sin(\varphi)$$

Esta ecuación nos dice que la potencia instantánea es la suma de un término que es siempre positivo, el que vale $[1+\cos(2\omega t)]$, con uno de valor medio nulo, el que vale $\sin(2\omega t)$. El primer sumando es idéntico al que encontramos cuando estudiamos el comportamiento de una resistencia, es decir que representa una transferencia de energía del generador al circuito. El segundo sumando, que tiene valor medio nulo, semeja lo que obtuvimos cuando estudiamos la respuesta de un capacitor o una inductancia; la energía va y viene mostrando el carácter conservativo de estos elementos. La constante P recibe el nombre de potencia activa o media y, repetimos, representa energía que viaja del generador al circuito. La constante Q se denomina potencia reactiva. Si bien P y Q se obtienen multiplicando una tensión por una corriente, sus significados son distintos. P representa trabajo genuino realizado y por eso la medimos en Watts. Por el contrario, Q no representa un trabajo realizado. Para distinguir esta situación las unidades de Q se dan en Volt-Amper y, para mayor detalle, se las adjetiva como “reactivos”. La abreviatura es VAR (Volt-Amper-Reactivo)

En la siguiente figura representamos los diferentes términos

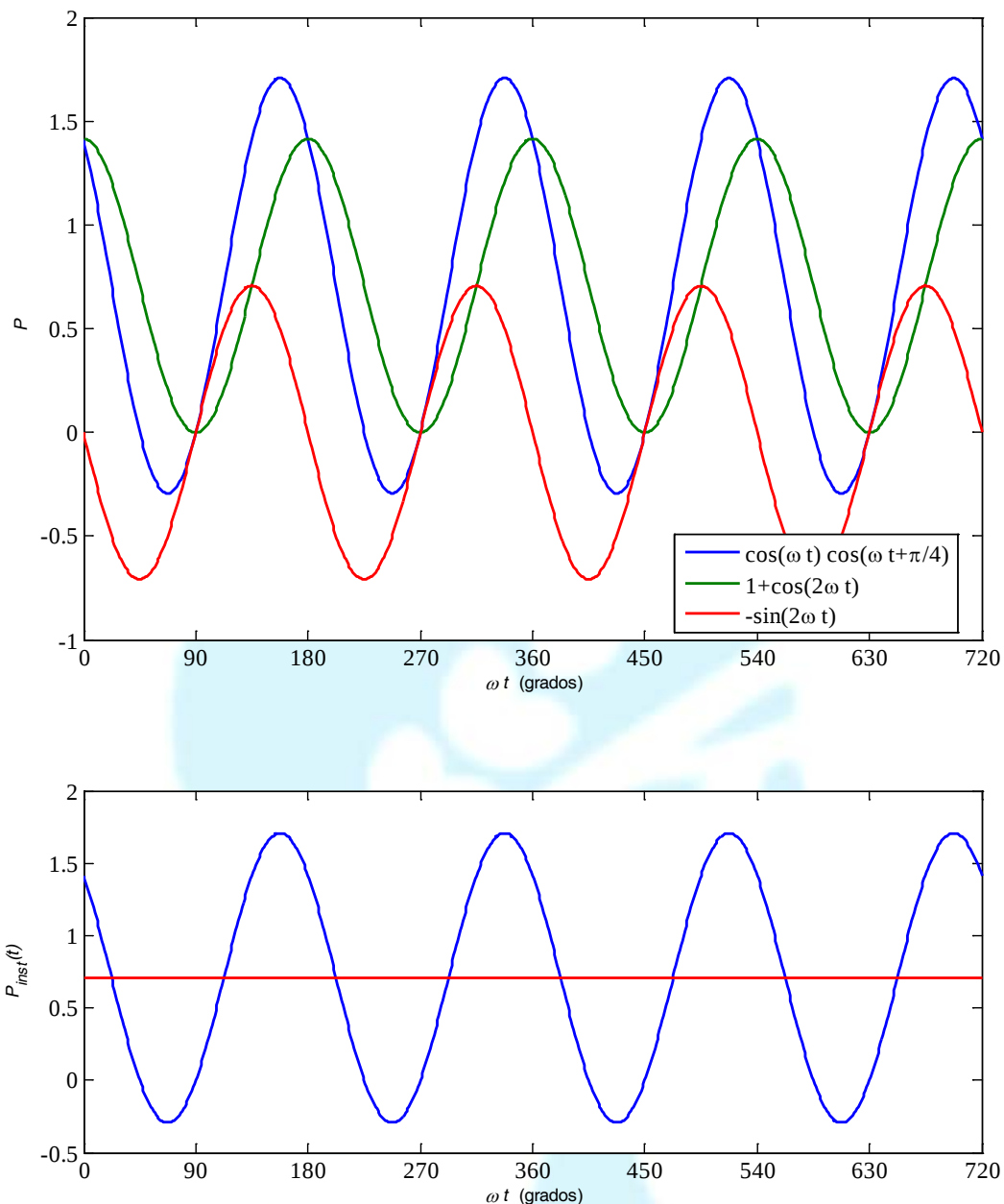


Figura 17. Potencia instantánea para $V_{ef} = 1$ V, $I_{ef} = 1$ A y $\varphi = 45^\circ$

Como hemos realizado anteriormente, buscaremos el valor medio de esta última expresión. Al resultado lo denominamos potencia media o activa y la representamos como P sin agregados.

Pero el valor medio es muy simple de calcular. Se reduce al término constante de la Ec.(43) porque la integral del término variable con el tiempo a lo largo de un período es cero.

Obtenemos así:

$$P = V_{ef} I_{ef} \cos(\varphi) \quad (45)$$

Llegamos a un resultado no intuitivo. Todos habríamos jurado que, a la vista de lo desarrollado más arriba, el resultado sería $V_{ef} I_{ef}$ pero el factor $\cos(\varphi)$ nos trae consecuencias importantes.

Repasemos los tres casos elementales del principio para ver la consistencia.

Si sólo tenemos una resistencia el ángulo de desfase φ es nulo y tenemos $P = V_{ef} I_{ef}$ (bien).

Si conectamos una inductancia ($\varphi = -90^\circ$) o un capacitor ($\varphi = 90^\circ$) resulta $\cos(\varphi) = 0$ y $P = 0$ (bien).

La (45) es entonces consistente con lo hallado anteriormente para los casos simples.

El último renglón de la Ec.(43) “invita” a dibujar un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es el producto $V_{ef} I_{ef}$. Vamos a hacerlo, pero notando el signo menos que precede a Q en la penúltima ecuación de la Ec.(43). Lo llamaremos triángulo de potencias.

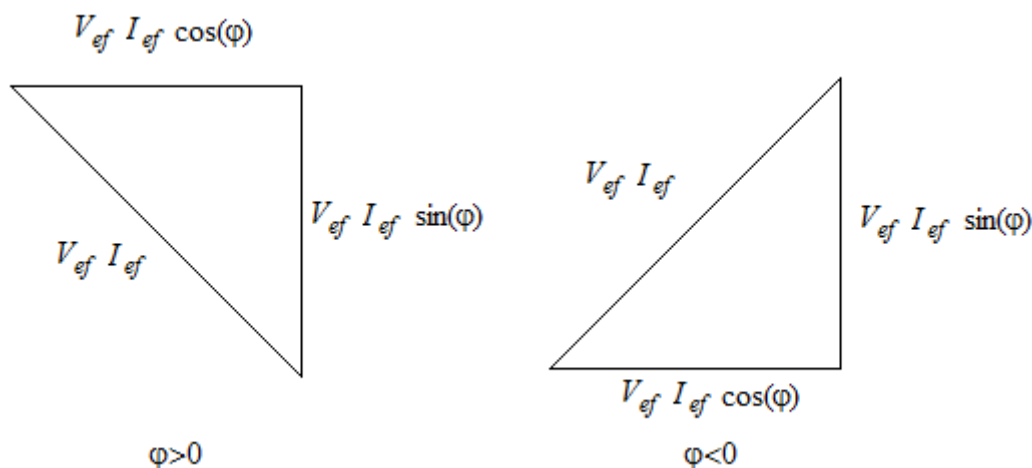


Figura 18. Triángulo de potencias para los dos signos de φ

Desafortunadamente el signo menos del penúltimo renglón de la Ec.(43) nos pone a los triángulos “patas para arriba”.

La hipotenusa, de largo $V_{ef} I_{ef}$, recibe el nombre de potencia aparente S . Los catetos son los valores P y Q ya mencionados.

La potencia aparente es precisamente lo que “parece” que el generador está entregando, pero solamente la parte P es trabajo efectivamente transferido del generador al circuito. Ya dijimos que Q representa energía que va y viene entre el generador y el circuito.

Las unidades de la potencia aparente son Volt-Ampere y, para mejor comprensión, se los suele adjetivar “aparentes”.

Es fácil notar que $\cos(\varphi)$ es la fracción de la potencia aparente que es trabajo entregado al circuito. Dicho valor, $\cos(\varphi)$, es denominado factor de potencia. Dado que coseno es una función par es imposible, dado un valor del mismo, decidir si el argumento φ es positivo o negativo. Por eso se suele agregar la expresión “en adelante” o “capacitivo” cuando $\varphi > 0$ o bien “en retraso” o “inductivo” cuando $\varphi < 0$.

La existencia de Q parece en principio inofensiva pero no es así. A primera vista no nos preocupamos porque pensamos que al tratarse de energía que va y viene no perdemos nada. Esto no es cierto porque los cables no son perfectos y, en cada ida y vuelta, tenemos pérdidas innecesarias de energía. Por otra parte el sistema debe ser dimensionado para entregar la potencia aparente pero sólo utilizamos una fracción. Esto es desventajoso desde el punto de vista económico.

Resulta entonces conveniente tratar de mantener el factor de potencia en valores elevados (obviamente siempre inferiores a la unidad). Incidentalmente, cuando $\varphi = 0$ tenemos el mejor factor de potencia, pero esta condición se da cuando el circuito es una resistencia pura o cuando el mismo se encuentre en resonancia.

Para un mejor aprovechamiento del equipamiento, las empresas proveedoras del servicio eléctrico “premian” o “castigan” a través de la tarifa los consumos con factor de potencia “bueno” o “malo”. El valor umbral que discrimina depende de la política del momento.

Por ejemplo, Edenor toma una cota inferior del factor de potencia de 0.85. Para valores inferiores aplica una tarifa creciente con la disminución del factor de potencia.

Esta facturación dependiente del factor de potencia no se aplica al consumo hogareño. Una vivienda familiar paga por la integral de la potencia activa extendida al período de facturación que suele ser bimestral.

11.7. La potencia en el circuito RLC serie

Apliquemos lo recién desarrollado al circuito RLC que describimos unos párrafos atrás. Con la definición de potencia activa y la respuesta del circuito (40) tenemos:

$$P = V_{ef} I_{ef} \cos(\varphi) = V_{ef} \frac{V_{ef}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \quad (46)$$

$$P = \frac{V_{ef}^2}{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} R$$

Podemos notar que la máxima potencia activa ocurre en resonancia y vale $P_r = V_{ef}^2 / R$ (la r es por resonancia). Fuera de resonancia el valor de P es menor.

Grafiquemos P/P_r para los mismos valores de las figuras 15 y 16.

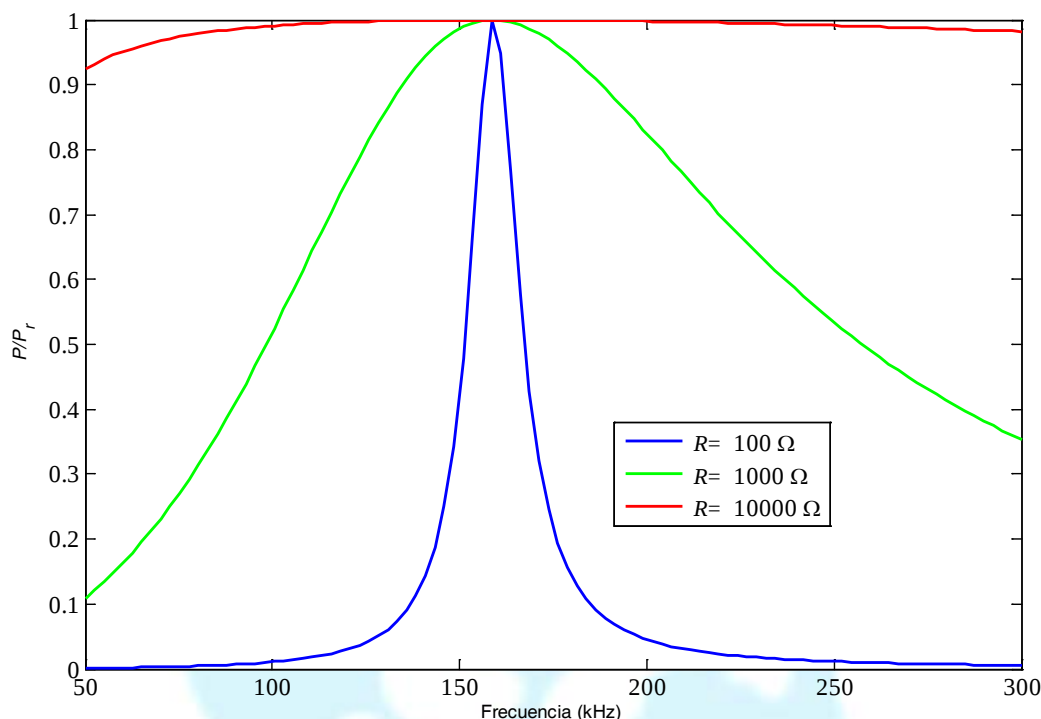


Figura 19. Potencia activa normalizada vs frecuencia

Como anticipamos la máxima potencia activa se da a la frecuencia de resonancia y para otros valores de frecuencia disminuye. Puede observarse que cuanto menor es la resistencia más rápido disminuye la potencia activa al apartarnos de la resonancia.

Anteriormente calculamos las pulsaciones ω_s y ω_i a las cuales el ángulo de desfase entre tensión y corriente era de -45° y 45° respectivamente. Estos valores se obtenían cuando $R = |\omega L - 1/\omega C|$, lo que nos lleva a:

$$P(\omega_s, \omega_i) = \frac{V_{ef}^2}{2R^2} R = \frac{V_{ef}^2}{2R} = \frac{P_r}{2} \quad (47)$$

Quiere decir que a las pulsaciones ω_s y ω_i la potencia activa es la mitad de la que tenemos en resonancia. Por eso se los llama puntos de media potencia. La zona entre ω_s y ω_i se caracteriza por tener una potencia activa entre el 50 y el 100% de la obtenible en resonancia.

En la figura 19 podemos obtener gráficamente los puntos para los que $P/P_r = 0.5$. Notamos que para la curva de 10000Ω el cambio no llega a 0.5; las pulsaciones ω_s y ω_i están fuera del rango graficado. La diferencia $\omega_s - \omega_i$ es denominada ancho de banda $\Delta\omega$ del circuito

y nos dice cuánto nos podemos apartar de la resonancia y tener aún una potencia activa superior al 50% de la máxima.

11.8. Ejemplos más elaborados

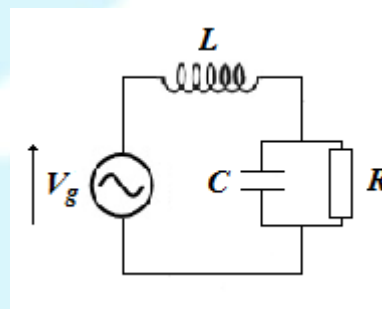
Por razones históricas en el curso de Física II se decidió que era conveniente no ir más allá del circuito RLC serie y dejar otros para materias más avanzadas.

Creemos que es una lástima no usar un poco más todo el material que construimos así que vamos a dar otros ejemplos fuera de lo exigible pero que sirven para comprender mejor la metodología y no quedarnos encerrados en un único circuito.

11.8.1. El fantasma del circuito paralelo

Rompiendo con la tradición que asegura que el análisis de un circuito con componentes en paralelo es imposible de comprender, vamos a tratar uno.

Figura 20. Un circuito con componentes en paralelo.



Consideraremos que el generador es la alimentación domiciliar de nuestro país (220 V, 50 Hz) y además $L = 1$ H, $R = 300 \Omega$ y $C = 20 \mu\text{F}$.

Con los valores anteriores obtenemos $X_L = 314 \Omega$ y $X_C = 159 \Omega$. Notamos que R y X_C están conectadas en paralelo, con lo que obtenemos un valor equivalente:

$$\frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{-jX_C}} = \frac{1}{\frac{1}{300\Omega} + \frac{1}{-j159\Omega}} = (65.8 - j124.1)\Omega$$

Ahora notamos que el paralelo de R con X_C está en serie con X_L con lo que obtenemos una impedancia total:

$$Z = j314\Omega + (65.8 - j124.1)\Omega = (65.8 + j190)\Omega = 201 \angle 70.1^\circ \Omega$$

Con estos valores calculamos una corriente eficaz $I_{ef} = 220 \text{ V} / 201 \Omega = 1.095 \text{ A}$ y un ángulo de fase $\varphi = -70.1^\circ$ (atraso)

Esta es la corriente que circula por el generador y por L . Si deseamos saber cuánto circula por R y por C escribimos:

$I_L = I_R + I_C$ (la suma de corrientes en un nodo es nula)

$I_R R = -jX_C I_C$ (la caídas de tensión en bornes de R y C son iguales)

De la primera despejamos cualquiera de las incógnitas y reemplazamos en la segunda:

$$I_L - I_R = I_C$$

$$I_R R = -jX_C (I_L - I_R); I_R (R - jX_C) = -jX_C I_L; I_R = -jX_C I_L / (R - jX_C)$$

$$I_R = 159 \angle -90^\circ \Omega * 1.095 \angle -70.1^\circ \text{ A} / (300 - j159) \Omega = 159 \angle -90^\circ \Omega * 1.095 \angle -70.1^\circ \text{ A} / 339.5 \angle -27.9^\circ \Omega$$

$$I_R = 0.51 \angle -132.2^\circ \text{ A}; I_C = I_L - I_R = 0.96 \angle -42.9^\circ \text{ A}$$

Pasemos al tema potencias. La potencia aparente es: $S = 220 \text{ V} * 1.095 \text{ A} = 240.9 \text{ VA}$. La potencia activa es: $P = 220 \text{ V} * 1.095 \text{ A} * \cos(-70.1^\circ) = 78.94 \text{ W}$. La potencia reactiva correspondiente es: $Q = -220 \text{ V} * 1.095 \text{ A} * \sin(-70.1^\circ) = 227.6 \text{ VAR}$ inductivos (el signo menos de Q viene de la ec (43)).

11.8.2. Acoplamiento magnético. El transformador.

El transformador (<https://en.wikipedia.org/wiki/Transformer>) es una pieza crucial de la distribución de energía eléctrica y, posiblemente, haya sido una de las dos “armas” que determinaron la victoria de los sistemas de corriente alterna por sobre los de continua (la otra quizás sea el motor trifásico: https://en.wikipedia.org/wiki/Induction_motor).

El transformador está basado en un viejo amigo: el núcleo toroidal con dos arrollamientos llamados primario (conectado al generador) y secundario (conectado a la carga).

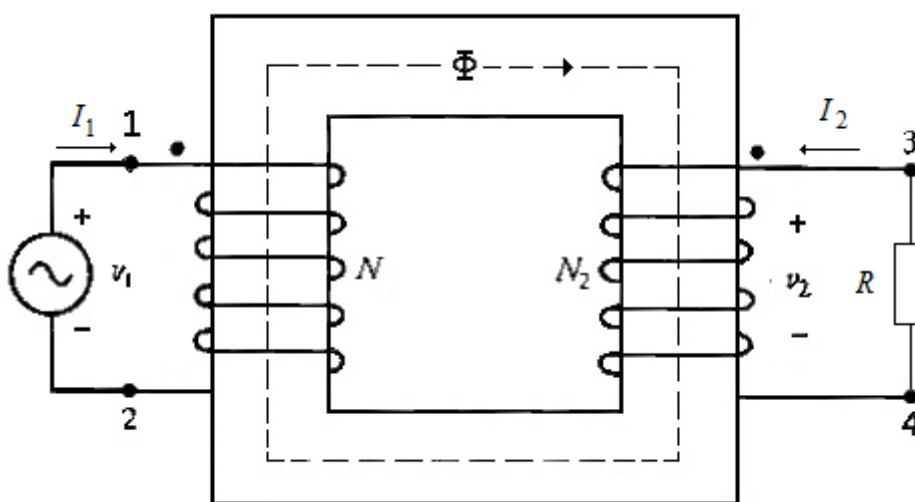


Figura 21. Transformador con carga resistiva.

Si suponemos que las corrientes que circulan por los arrollamientos tienen dependencia temporal sinusoidal, así también será el campo B y el flujo Φ , es decir:

$$B=B_0 \cos(\omega t) \text{ y } \Phi= \Phi_0 \cos(\omega t) \quad (48)$$

Las fuerzas electromotrices inducidas en los bornes del primario (V_1) y secundario (V_2) serán proporcionales a la derivada del flujo y al número de vueltas de cada arrollamiento (no le prestamos atención al signo menos de la ley de Faraday ni al de derivar coseno):

$$V_1=N_1 \Phi_0 \omega \cos(\omega t); \quad V_2=N_2 \Phi_0 \omega \cos(\omega t) \\ V_1/ V_2= N_1/ N_2 \quad (49)$$

Esta relación nos da la clave del funcionamiento del transformador, podemos pasar de un valor V_1 a otro V_2 ajustando la relación de vueltas de los arrollamientos. Esto brinda una flexibilidad muy valiosa. El cociente N_1/ N_2 se denomina relación de transformación. El transformador es simple, robusto y sin piezas móviles. Tiene gran rendimiento y es de bajo costo. Sistemas similares en corriente continua son más costosos y no están tan difundidos.

La clave del funcionamiento del transformador está en el acoplamiento magnético entre primario y secundario, representado por el coeficiente de inductancia mutua M .

Analicemos primero el circuito de la figura 21 en el dominio temporal para luego hacerlo en nuestro dominio auxiliar complejo.

Las direcciones de las corrientes I_1 e I_2 son arbitrarias pero, a tomarlas entrantes a los bornes homólogos, nos facilitan el estudio del signo del término de acoplamiento magnético (coincide con el de L).

$$V_g(t) - L_1 \frac{dI_1(t)}{dt} - M \frac{dI_2(t)}{dt} = 0 \quad (\text{Primario}) \\ -L_2 \frac{dI_2(t)}{dt} - M \frac{dI_1(t)}{dt} - RI_2(t) = 0 \quad (\text{Secundario}) \quad (50)$$

La Ec.(50) es un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas. No muy agradable de resolver.

Tomemos el camino que involucra trabajar en el dominio complejo. Como ya hicimos antes tomamos un “generador auxiliar” $V = V_0 e^{j\omega t}$ y corrientes $I_1 = I_{01} e^{j(\omega t + \varphi_1)}$ e

$$I_2 = I_{02} e^{j(\omega t + \varphi_2)}$$

Obtenemos:

$$V_0 e^{j\omega t} - j\omega L_1 I_{01} e^{j(\omega t + \varphi_1)} - j\omega M I_{02} e^{j(\omega t + \varphi_2)} = 0 \\ -j\omega L_2 I_{02} e^{j(\omega t + \varphi_2)} - j\omega M I_{01} e^{j(\omega t + \varphi_1)} - R I_{02} e^{j(\omega t + \varphi_2)} = 0 \quad (51)$$

Como en otras ocasiones cancelamos el término común $e^{j\omega t}$.

$$\begin{aligned} j\omega L_1 I_{01} e^{j\varphi_1} + j\omega M I_{02} e^{j\varphi_2} &= V_0 \\ + j\omega L_2 I_{02} e^{j\varphi_2} + j\omega M I_{01} e^{j\varphi_1} + R I_{02} e^{j\varphi_2} &= 0 \end{aligned} \quad (52)$$

Si bien el método de eliminación de Gauss es válido con coeficientes complejos, el desarrollo manual es pesado, por lo que recurrimos al viejo recurso de despejar una variable en una de las ecuaciones y lo reemplazamos en la otra.

Arbitrariamente despejamos el término de la corriente del secundario en la segunda ecuación:

$$I_{02} e^{j\varphi_2} = -\frac{j\omega M I_{01} e^{j\varphi_1}}{R + j\omega L_2} \quad (53)$$

Y reemplazamos en la primera

$$\begin{aligned} j\omega L_1 I_{01} e^{j\varphi_1} + j\omega M \left(-\frac{j\omega M I_{01} e^{j\varphi_1}}{R + j\omega L_2} \right) &= V_0 \\ I_{01} e^{j\varphi_1} \left(j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R + j\omega L_2} \right) &= V_0 \\ I_{01} e^{j\varphi_1} \left(\frac{j\omega L_1 (R + j\omega L_2) + \omega^2 M^2}{R + j\omega L_2} \right) &= V_0 \\ I_{01} e^{j\varphi_1} \left(\frac{j\omega L_1 R - \omega^2 L_1 L_2 + \omega^2 M^2}{R + j\omega L_2} \right) &= V_0 \end{aligned} \quad (54)$$

Recordemos la relación entre el coeficiente de inductancia mutua M , el de acoplamiento magnético k y los de autoinductancia L :

$$M = k\sqrt{L_1 L_2} \quad (55)$$

Si tenemos acoplamiento perfecto ($k=1$) la (54) se transforma en:

$$\begin{aligned} I_{01} e^{j\varphi_1} \left(\frac{j\omega L_1 R}{R + j\omega L_2} \right) &= V_0 \\ I_{01} e^{j\varphi_1} &= V_0 \frac{R + j\omega L_2}{j\omega L_1 R} \end{aligned} \quad (56)$$

Reemplazamos en (53)

$$\begin{aligned} I_{02} e^{j\varphi_2} &= -\frac{j\omega M}{R + j\omega L_2} V_0 \frac{R + j\omega L_2}{j\omega L_1 R} \\ I_{02} e^{j\varphi_2} &= -\frac{V_0 M}{R L_1} = -\frac{V_0 \sqrt{L_1 L_2}}{R L_1} = -\frac{V_0}{R} \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \end{aligned} \quad (57)$$

De la (57) obtenemos $\varphi_2 = 180^\circ$ e $I_{02} = \frac{V_0}{R} \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$

Si recordamos que los coeficientes de autoinductancia son proporcionales al cuadrado del número de vueltas de los arrollamientos damos el paso final:

$$I_{02} e^{j\varphi_2} = -\frac{V_0}{R} \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = -\frac{V_0}{R} \sqrt{\infty \frac{N_2^2}{N_1^2}} = -\frac{V_0}{R} \frac{N_2}{N_1} \quad (58)$$

La (58) nos dice que la fuerza electro-motriz del generador ha quedado escalada por la inversa de la relación de transformación.

Pensemos que tenemos una alimentación de 240 V como sucede en algunos países de Europa (usamos 240 V porque es un número con más divisores) y queremos encender lámparas dicróicas de 12 V. Necesitamos una relación de transformación $N_1/N_2 = 240 \text{ V} / 12 \text{ V} = 20$.

Es obvio que hay infinitos cocientes N_1/N_2 que dan un determinado valor. La elección de los valores del numerador y denominador queda para materias superiores.

$$\begin{aligned} P_{inst}(t) &= \frac{V_0 I_0}{2} [\cos(\varphi) + \cos(2\omega t + \varphi)] \\ P_{inst}(t) &= \frac{V_0}{\sqrt{2}} \frac{I_0}{\sqrt{2}} [\cos(\varphi) + \cos(2\omega t + \varphi)] \\ P_{inst}(t) &= V_{ef} I_{ef} [\cos(\varphi) + \cos(2\omega t + \varphi)] \end{aligned}$$

Capítulo 12

Ecuaciones de Maxwell

*Un repaso de lo visto, algunas cosas faltantes y un camino
abierto a temas más complejos*

12.1. Las ecuaciones de Maxwell 12-2

- 12.1.1 La ley de Gauss para el campo eléctrico
- 12.1.2 La ley de Gauss para el campo magnético
- 12.1.3 La ley de Ampere (a modificar)
- 12.1.4 La ley de Faraday
- 12.1.5 Un problema oculto y su solución: la ley de Ampere-Maxwell

12.2. La ecuación de ondas 12-10

- 12.2.1 La solución de la ecuación de ondas y la velocidad de la luz
- 12.2.2 Ejemplo: ondas planas en el vacío
- 12.2.3 Las ondas transportan potencia
- 12.2.4 ¿Cómo se generan las ondas electromagnéticas?

12.1. Las ecuaciones de Maxwell

Mucho del tiempo empleado hasta el momento ha sido dedicado al estudio de los campos eléctricos y magnéticos de los que hemos aprendido las propiedades más importantes, las que resumimos aquí para tenerlas en forma compacta.

12.2.1 La ley de Gauss para el campo eléctrico

La primera es conocida como la **ley de Gauss** referida al campo eléctrico cuando no hay medios materiales. Las cargas eléctricas son las fuentes (si son positivas) o sumideros del campo eléctrico (si son negativas). Las líneas de campo eléctrico nacen en las cargas positivas y terminan en las cargas negativas. La mencionada ley establece que si consideramos una superficie cerrada S entonces el flujo del campo eléctrico $\vec{E}$ a través de dicha superficie es proporcional al total de la carga eléctrica encerrada (Q_{enc}) en el volumen Vol limitado por la superficie S (usamos Vol para el volumen en lugar de V porque esta última la reservamos para otra magnitud).

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{Vol} \rho \, dVol \quad (1)$$

El factor ϵ_0 (permitividad dieléctrica del vacío) refleja únicamente el sistema de unidades empleado y no es relevante. El segundo miembro de la derecha (el que involucra la integral de volumen) corresponde al caso más general de una distribución volumétrica de cargas con densidad ρ .

La (1) puede ser transformada por medio del teorema del flujo (o también llamado de Gauss-Ostrogradsky) el que establece que el flujo de un campo vectorial $\vec{F}$ a través de una superficie cerrada S iguala a la integral de la divergencia de dicho vector extendida al volumen Vol limitado por la superficie S .

$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{Vol} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \, dVol \quad (2)$$

Comparando las expresiones (1) y (2) es fácil encontrar:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3)$$

Las relaciones (1) y (3) contienen la misma cantidad de información respecto del fenómeno físico. La primera está expresada en forma integral y en cierta forma (al menos en nuestro caso) es más simple de utilizar. La segunda forma involucra derivadas parciales (a

través del operador divergencia) por lo que las técnicas matemáticas para su resolución son más complejas y conviene postergarlas para Análisis III. Sin embargo enfatizamos que ambas contienen la misma cantidad de información.

Al tratar con medios dieléctricos nos resultó conveniente introducir dos vectores extras. El desplazamiento $\vec{D}$ y la polarización $\vec{P}$. El primero está asociado con las así llamadas “cargas libres” y el segundo con las de polarización. La relación entre todos ellos la sintetizamos como:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (4)$$

Si el medio es lineal entonces también lo es la relación entre el campo eléctrico y la polarización a través de la susceptibilidad dieléctrica χ_e en la forma $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$ por lo que la relación entre desplazamiento y campo eléctrico deviene en:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \quad (5)$$

En estas condiciones la **ley de Gauss** (en forma integral y diferencial) queda dada para una situación general como:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{libre enc}} = \int_{\text{Vol}} \rho_{\text{libre}} d\text{Vol} \quad (6)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{\text{libre}}$$

donde ρ_{libre} se refiere a la densidad volumétrica de cargas “reales”, i.e. que no son de polarización

El campo eléctrico generado por una distribución estática de cargas tiene la particularidad de ser conservativo, es decir que si consideramos una curva cerrada C entonces la circulación del campo a lo largo de dicha curva es nula:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (7)$$

Todo campo vectorial conservativo admite una función potencial escalar de la que deriva, en nuestro caso elegimos el potencial electrostático V (cuidado: distingamos entre volumen Vol y potencial V).

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V \quad (8)$$

Combinando (3) y (8) obtenemos:

$$-\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} V) = \frac{\rho}{\epsilon_0} = -\nabla^2 V \quad (9)$$

La (9) recibe el nombre de **ecuación de Poisson** y es una ecuación diferencial a derivadas parciales de segundo orden que permite calcular el potencial V en una región si se conoce la distribución de cargas y/o el potencial en el contorno de la región a estudiar. No estamos en condiciones de resolver esta ecuación salvo para un par de situaciones muy simples. Sin embargo es interesante mencionar que es la ecuación que resuelven programas como QuickField o FEMM por métodos numéricos.

12.2.2 La ley de Gauss para el campo magnético

Por otra parte, los campos magnéticos tienen su origen en corrientes eléctricas, es decir en cargas en movimiento. Una diferencia sustancial distingue al vector inducción magnética $\vec{B}$ del campo eléctrico $\vec{E}$, las líneas de $\vec{B}$ son cerradas sobre sí mismas, es decir que no tienen punto de partida ni de llegada. En tal situación el flujo de $\vec{B}$ sobre cualquier superficie cerrada es nulo:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (10)$$

donde la segunda igualdad se sigue del teorema del flujo. A esta ley se la llama también **ley de Gauss** pero referida al campo magnético.

12.2.3 La ley de Ampere

Dado que las líneas de $\vec{B}$ son cerradas sobre sí mismas es razonable anticipar que la circulación de dicho vector sobre una curva cerrada ha de ser no nula. En efecto, la **ley de Ampere** en el vacío nos dice que:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (11)$$

donde C es una curva cerrada, S una superficie cuyo borde es C , μ_0 la permeabilidad magnética del vacío, I_{enc} las corrientes que atraviesan la superficie S y $\vec{J}$ el vector densidad de corriente, el cual para un medio de conductividad σ queda dado por $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ (**ley de Ohm**).

En el caso de estar presente un medio material es conveniente, a semejanza de lo desarrollado con materiales dieléctricos, introducir dos vectores auxiliares: el campo magnético $\vec{H}$ asociado con las llamadas “corrientes verdaderas” (las que circulan por cables) y la magnetización $\vec{M}$ asociada con las “corrientes de magnetización” fruto de la respuesta de los momentos dipolares magnéticos atómicos.

La relación vectorial entre estos tres vectores es: $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$. Si el medio tiene una respuesta lineal la magnetización es proporcional al campo magnético a través de la susceptibilidad magnética χ_m : $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$ y resulta simple encontrar:

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0(\vec{H} + \chi_m \vec{H}) = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad (12)$$

En estas condiciones la **ley de Ampere** queda dada para una situación general como:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{libre}}^{\text{enc}} = \int_S \vec{J}_{\text{libre}} \cdot d\vec{S} \quad (13)$$

donde $\vec{J}_{\text{libre}}$ representa a la densidad de corrientes “reales”, i.e. no corrientes de magnetización.

Podemos recordar ahora el teorema de Stokes o de la circulación, el que manifiesta que la circulación de un campo vectorial $\vec{F}$ alrededor de una curva cerrada C iguala al flujo del rotor de dicho campo vectorial a través de una superficie S limitada por la curva C :

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} \quad (14)$$

En nuestro caso obtenemos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_{\text{libre}} \quad (15)$$

Veremos un poco más adelante que esta ley fue completada por Maxwell

Notemos cómo en este repaso hemos expresado las propiedades fundamentales de los campos eléctricos y magnéticos en dos formas: la primera es la integral (flujos sobre superficies, circulaciones sobre curvas) donde damos relaciones de valores totales en una región del espacio. En la segunda damos relaciones en las derivadas en puntos del espacio (divergencias, laplacianos, rotores). Ambas formas contienen exactamente la misma información respecto del fenómeno físico. Es sólo una cuestión de conveniencia el decidir qué forma conviene usar.

12.2.4 Ley de Faraday

Hasta aquí hemos dado las propiedades de los campos eléctricos y magnéticos aisladamente y parece que ambos fenómenos procedieran independientemente, si bien se ve cierta relación porque H está relacionada con J por la Ley de Ampere y J está relacionada con E por la de Ohm.

Sin embargo esto no es así. La **ley de inducción de Faraday** nos da el primer paso para ver la vinculación entre ambos campos.

Dicha ley establece que toda vez que el flujo magnético concatenado a través de una superficie S delimitada por una curva C cambie a lo largo del tiempo, entonces aparecerá una fuerza electromotriz V inducida a lo largo de la curva C de valor:

$$V = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (16)$$

La última igualdad manifiesta que si existe una fuerza electromotriz, entonces debe estar presente un campo eléctrico cuya circulación a lo largo de la curva sea la fuerza electromotriz inducida. Este campo es definitivamente no electrostático dado que su circulación en una curva cerrada es no nula.

Al utilizar el teorema de Stokes en la (16) encontramos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (17)$$

La ecuación anterior nos dice que en una situación estática (sin variaciones en el tiempo) el rotor del campo eléctrico es nulo y volvemos a las condiciones de la (6), es decir que el campo eléctrico es conservativo. Si, por el contrario, existen cambios temporales de $\vec{B}$ el campo eléctrico tiene asociada una fuerza electromotriz en un camino cerrado.

Hasta aquí hemos hecho un resumen muy acotado de un gran número de clases. Las ecuaciones (1) a (9) describen los vectores “eléctricos”, de la (10) a la (15) los correspondientes “magnéticos” y la (16) y (17) nos vincula cambios temporales de $\vec{B}$ con cambios espaciales de $\vec{E}$.

12.2.5 Un problema oculto y su solución: la Ley de Ampere-Maxwell

Sin embargo, es importante marcar que tenemos un problema oculto que debemos resolver. Para explicarlo comenzamos recordando una idea básica de la primera clase: la carga eléctrica se conserva, no se crea ni se destruye. Con esta idea en principio consideramos un volumen Vol con cargas dentro del mismo y líneas de corriente que atraviesan la superficie S que limita a dicho volumen. Entonces, si las líneas de corriente son entrantes la cantidad de carga se incrementa y si las líneas son salientes la cantidad de carga disminuye. Escribimos entonces esta relación:

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \frac{-dQ}{dt} = \frac{-d}{dt} \left(\int_V \rho dV \right) \quad (18)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Esta es la llamada **ecuación de continuidad** y es solamente una descripción matemática de la conservación de la carga.

Aplicamos ahora esta ecuación a la (15):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \equiv 0 \quad (19)$$

La expresión es siempre nula porque se sigue de una identidad matemática. Es decir que tenemos un problema: la conservación de la carga (principio fundamental) exige un determinado valor para la divergencia de la densidad de corriente y de la ecuación anterior obtenemos un valor nulo. Dada nuestra confianza en la conservación de la carga concluimos que hay algo erróneo en la ley de Ampere como la expresamos. En realidad no es un error sino una omisión que fue descubierta y enmendada por James Clerk Maxwell a mediados del siglo XIX.

La primera aproximación a la solución que haremos es totalmente matemática y luego mostraremos una situación donde trataremos de entender el cómo la corrección de Maxwell salva un problema.

Postulemos, arbitrariamente, una nueva forma para la ecuación del rotor del campo magnético:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (20)$$

Si ahora volvemos a la ecuación de continuidad resulta:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \equiv 0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial (\vec{\nabla} \cdot \vec{D})}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (21)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

con lo que nuestro problema está resuelto. La versión corregida de la ley de Ampere satisface la conservación de la carga pero nos demanda comprender cómo opera. Un ejemplo simple es el siguiente (figura 1):

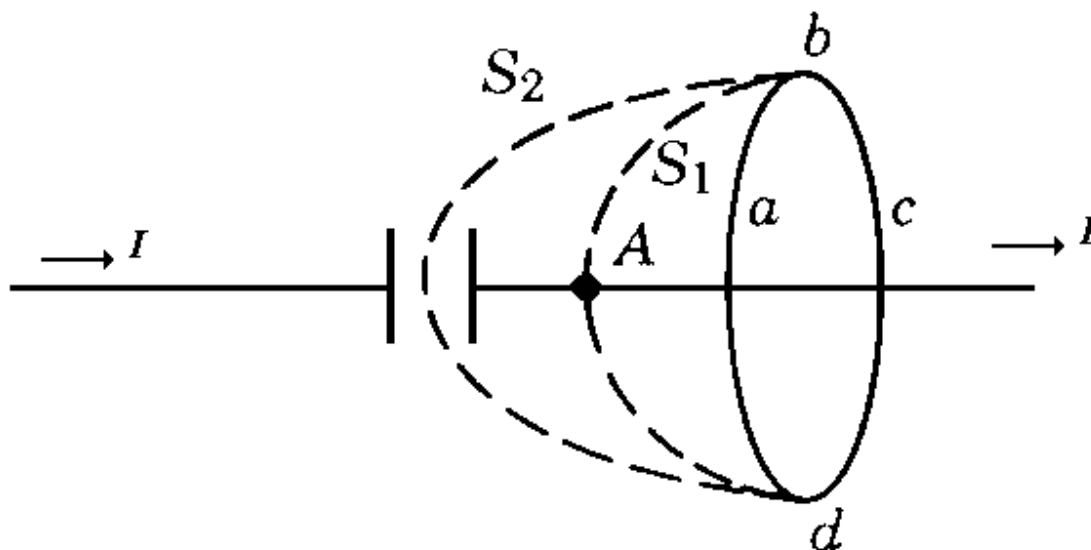


Figura 1. La ley de Ampere aplicada a la misma curva pero a dos superficies distintas

Un capacitor de placas planas paralelas está siendo cargado con una corriente constante I . La curva C es una circunferencia de radio R (puntos a , b , c y d) con centro en el cable y ubicada lejos de las placas del capacitor, de forma tal que podamos suponer que la dirección de las líneas de $\vec{B}$ son líneas circunferenciales como las que corresponden a un alambre muy largo. Si por superficie tomamos a S_1 , entonces es fácil aplicar la (13). Pero si ahora tomamos una superficie S_2 que pase por dentro de las placas del capacitor y no intercepte al cable parece que nos encontramos en un problema: sobre la curva C hay campo y su circulación es no nula, sin embargo la superficie propuesta no intercepta al cable y por lo tanto el miembro de la derecha es nulo. La discrepancia estriba en que utilizamos la versión original de la ley de Ampere.

Utilicemos ahora la versión corregida. Al tomar la superficie S_1 notamos que el cable la intercepta en el punto A y no tenemos problemas en identificar la densidad de corriente. Además por estar los puntos de la superficie S_1 fuera del capacitor descartamos el término proporcional a la derivada temporal del desplazamiento porque éste es nulo sobre la superficie. En cambio, cuando tomamos S_2 la situación se invierte. No tenemos un término de corriente, pero hay un campo eléctrico dentro del capacitor que varía.

La corriente que ingresa al capacitor es directamente la derivada de la carga almacenada con respecto al tiempo y si expresamos a esta última en términos de la densidad superficial de carga σ , las dimensiones del capacitor (área A y distancia entre placas d) y el vector desplazamiento tenemos:

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d(\sigma A)}{dt} = A \frac{d\sigma}{dt} = A \frac{d|\vec{D}|}{dt} \quad (22)$$

La densidad de corriente “equivalente” resulta de dividir la corriente por el área de las placas: $\vec{J}_D = \frac{d\vec{D}}{dt}$ que concuerda exactamente con la nueva ley de Ampere, i.e. la Ley de Ampere-Maxwell (20);

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

. Es importante recalcar que esta es una “falsa” corriente, no está asociada con un transporte de cargas, por eso la denominamos “corriente de desplazamiento” y le agregamos un subíndice para destacar esta situación.

La figura 2 muestra un esquema de las líneas de campo magnético en las vecindades de un alambre (asociado con una densidad de corriente) y las correspondientes al interior del capacitor (asociado con la corriente de desplazamiento)

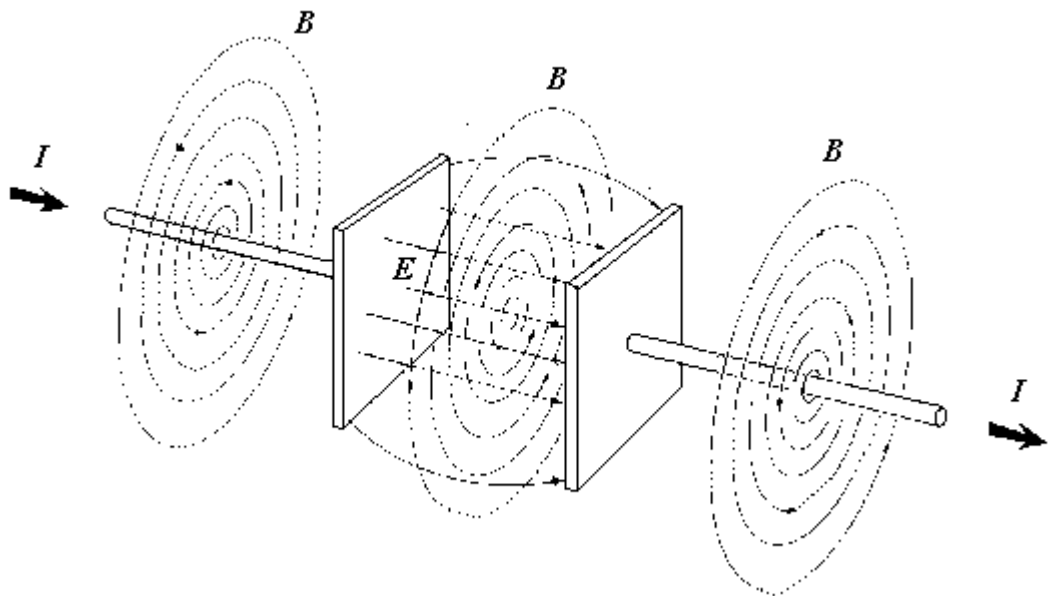


Figura 2. Una visión en perspectiva de las líneas de campo magnético.

Hemos trabajado tanto para solucionar un caso particular? Es esto un juego de corto alcance?

Pues no, esto es lo que distingue a la gente capaz de nosotros. La hipótesis de Maxwell es que el término de corriente de desplazamiento debe ser incluido siempre y no únicamente en este caso particular.

¿Qué sucedió entonces para que no notáramos esta falta de completitud? La respuesta se encuentra en que primero la abrumadora mayoría de los problemas que estudiamos son de carácter estático o de régimen permanente, por lo que no había variaciones temporales que importaran. En el caso de la ley de Faraday teníamos campos magnéticos variables que daban un acoplamiento con el campo eléctrico pero los ejemplos no demandaban tomar también en cuenta la versión completa de la ley de Ampere.

Podemos resumir ahora las ecuaciones de Maxwell en las formas integral y diferencial:

Forma integral	Forma diferencial
$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho_{libre} dV$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{libre}$
$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J}_{libre} \cdot d\vec{S} + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$	$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_{libre} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

(23)

Veremos ahora que las más interesantes son las ecuaciones en los rotores.

12.2. La ecuación de ondas

El conjunto de ecuaciones (23) es simple “en principio” pero da respuestas a un número muy grande de problemas. Quienes estudien electromagnetismo tendrán ocasión de trabajar mucho con ellas, pero ahora quiero mostrar un ejemplo relativamente simple pero importante.

Como ocurre muchas veces vamos a considerar un caso particular de las ecuaciones que nos permita eliminar la mayor cantidad de términos para disminuir así las dificultades matemáticas.

Pensemos entonces en una región del espacio vacío (da lo mismo que sea aire porque ya sabemos que difiere muy poco del vacío). Pedimos que dicha zona carezca de cargas ($\rho=0$) y que por la misma no circulen corrientes ($\vec{J} = 0$).

Las ecuaciones de Maxwell quedan entonces:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 & \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E} & \vec{B} &= \mu_0 \vec{H}\end{aligned}\quad (24)$$

Es interesante ver el papel entrelazado de las dos ecuaciones que involucran el rotor. Parece que entre las dos se podría obtener una única en una sola variable y esto es cierto.

Para llevarlo a cabo recordamos la siguiente identidad del análisis vectorial:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F} \quad (25)$$

Aplicado al campo eléctrico tenemos (daría lo mismo con el magnético):

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) &= \vec{\nabla} \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \\ \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} &= -\frac{\partial(\vec{\nabla} \times \vec{B})}{\partial t} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \vec{E} &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}\end{aligned}\quad (26)$$

En el segundo renglón hemos utilizado $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ ya que pedimos ausencia de cargas y en la parte correspondiente al rotor de $\vec{B}$ anulamos el término correspondiente a la densidad de corriente.

La última ecuación es nuestro objetivo ya que logramos reducirla a una única variable pero su significado es totalmente oscuro dado que proviene de manipulaciones matemáticas que efectuamos automáticamente. Ha llegado el momento de desmenuzarla un poco.

Para comenzar debemos enfatizar que se trata de una ecuación diferencial a derivadas parciales. En coordenadas cartesianas es:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (27)$$

Donde no parece que hayamos mejorado mucho. Reduzcamos aún más la complejidad del problema y consideremos uno unidimensional en el que sólo existen variaciones a lo largo del eje x (la solución es uniforme sobre los ejes y y z).

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (28)$$

Esta es una ecuación que se llama Ecuación de Onda. ¿Por qué?

12.2.1 La solución de la ecuación de ondas y la velocidad de la luz

¿Cómo se resuelve ésta ecuación? Pues bien, es conocida desde hace bastante tiempo y se la conoce como ecuación de onda y la primera vez que la vimos fue en Física I en conexión con el movimiento transversal de una cuerda tensa. Pero Física I está tan lejos en el recuerdo, ¿no?

Vamos a aplicar el viejo método de proponer una solución (de hecho ya la conocemos), la reemplazamos en la ecuación diferencial y vemos que la satisface.

Sea entonces una solución genérica de la forma $u=f(x\pm vt)$, donde f es una función no especificada y v una constante cuyas dimensiones deben ser las de una velocidad. Definimos previamente una variable auxiliar $w=x\pm vt$ y efectuamos las derivadas indicadas.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial w} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial w} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial w^2} \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial w^2} \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial t} = v \frac{\partial u}{\partial w} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(v \frac{\partial u}{\partial w} \right) = v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial w^2} v \right) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial w^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (29)$$

La función propuesta es entonces una solución de la ecuación diferencial. Si alguien siente sospechas que reemplazamos lo que ya conocíamos está totalmente en lo cierto. Resolver ecuaciones diferenciales a derivadas parciales demanda temas avanzados y que están fuera de nuestro alcance. Nos limitamos a “mostrar” la solución.

Si hacemos un poquito de memoria recordaremos que si el argumento de la solución era con signo menos obteníamos una onda que viaja hacia la derecha y que si tomábamos el signo más correspondía a una que viaja hacia la izquierda. En ambos casos la velocidad de propagación es precisamente v .

La función f puede ser cualquiera con derivadas continuas, pero la más común es de la forma armónica, es decir con funciones seno o coseno. La forma usual es:

$$u = \sin(kx - \omega t) \quad (30)$$

Esta solución involucra al llamado número de onda $k=2\pi/\lambda$ donde λ es la longitud de onda (distancia entre máximos o mínimos consecutivos) y la pulsación $\omega=2\pi/T$ siendo T el período de la señal (tiempo que transcurre entre dos máximos o mínimos consecutivos).

Es bueno recordar algunas ideas básicas de las ondas. Veamos unas gráficas:

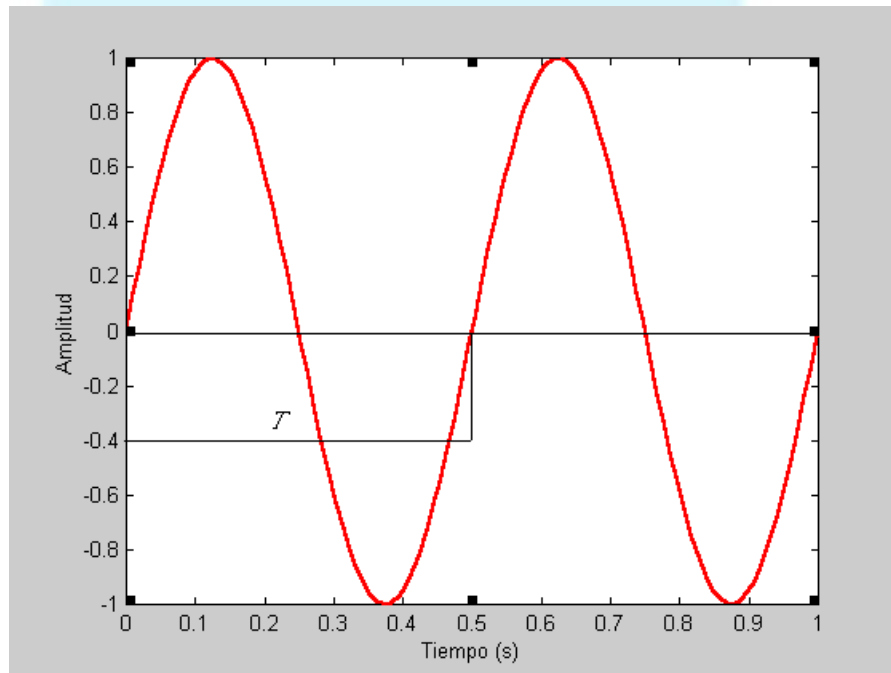


Figura 3. Una onda armónica a lo largo del tiempo en $x=0$

La solución repite cada T segundos.

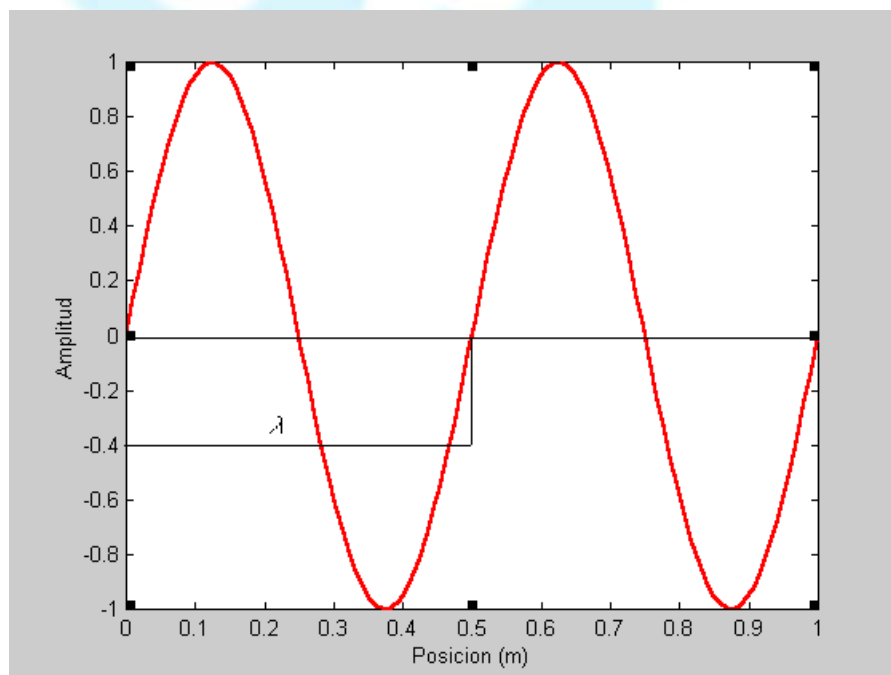


Figura 4. Una onda armónica en $t=0$

La solución repite cada λ metros.

El cociente λ/T es la velocidad v de la onda que también es la razón ω/k

Si volvemos a nuestras ecuaciones (28) y (29) e igualamos términos encontramos:

$$v^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \quad (31)$$

Si reemplazamos $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m y $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m obtenemos (verificar que las unidades son de velocidad!!!!) $v \sim 2.99 \cdot 10^8$ m/s. Este valor es demasiado próximo a otro que deberíamos recordar de Física I y es la velocidad de la luz c . Es importante destacar que los fenómenos ópticos fueron considerados de una naturaleza autónoma hasta mediados del siglo XIX cuando el estudio que acabamos de esbozar mostró que los campos eléctricos y magnéticos respondían a la ecuación de onda. Entonces, los fenómenos ópticos dejaron de ser una rama aparte del conocimiento para pasar a ser un capítulo del electromagnetismo. Las longitudes de onda del espectro visible son del orden de 0.5 micrómetros por lo que la frecuencia es un número muy grande, del orden de $6 \cdot 10^{14}$ Hz, un valor que parecía imposible para ser verdadero (aunque lo es). Las ondas electromagnéticas difieren notablemente de las que aprendimos en Física I. No hay medio elástico alguno; nada se desplaza respecto de una posición de equilibrio. Durante años muchas personas buscaron infructuosamente un “soporte” para estas ondas pero fallaron. No hay necesidad de tal medio y de hecho las ondas electromagnéticas viajan el vacío. De hecho, la luz del sol viaja 150 millones de kilómetros en el vacío hasta nuestro planeta sin inconveniente alguno. Son simplemente los campos eléctricos y magnéticos que están acoplados por las ecuaciones del rotor. En 1885 Hertz tuvo el honor de ser el primero en generar, transmitir y recibir una onda de radio (de una forma primitiva pero contundente) con lo que cerró el círculo y mostró la realidad de las ondas electromagnéticas.

12.2.2 Ejemplo: Ondas planas en el vacío

Vamos a ver un ejemplo simple, el de una onda plana. Tomamos un campo dirigido a lo largo del eje y y uniforme sobre el plano $y-z$

$$E_y(x, t) = E_0 \cos(kx - \omega t) \quad (32)$$

Si utilizamos la ecuación del rotor de E obtenemos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \quad (33)$$

Integramos una vez para conseguir:

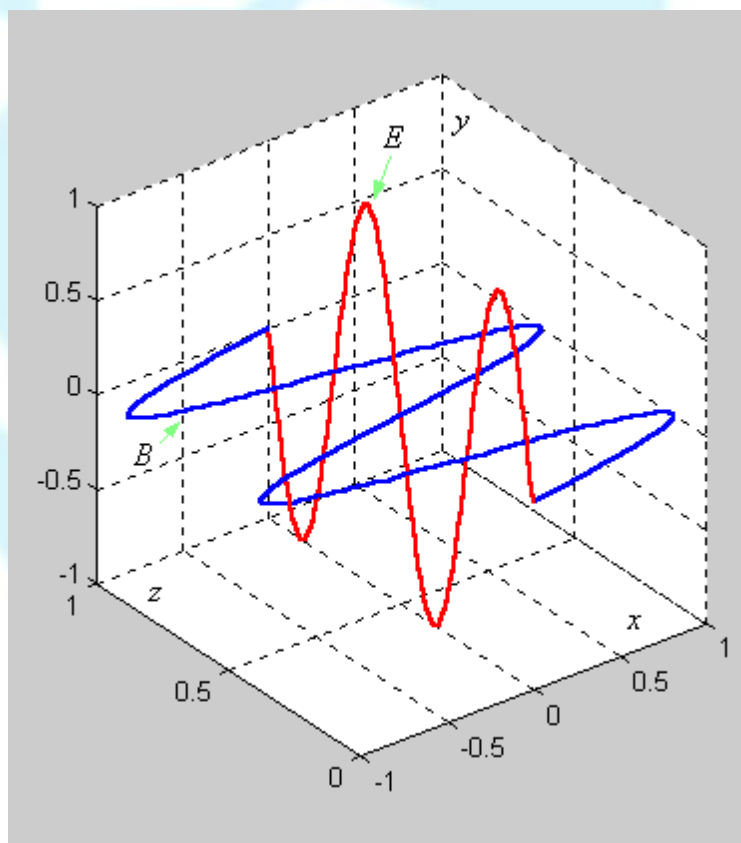
$$B_z = -\int \frac{\partial E_y}{\partial x} dt = -\int E_0 k \sin(kx - \omega t) dt = E_0 \frac{k}{\omega} \cos(kx - \omega t) = \frac{E_y}{c} \quad (34)$$

Observamos que E y B siguen la misma dependencia temporal y espacial, es decir que se encuentran en fase. Los campos son perpendiculares entre sí y a la dirección de propagación.

$$|B| = |E|/c \quad (35)$$

En el plano y - z las amplitudes de los campos son uniformes. Los puntos sobre el eje x de igual fase son planos paralelos al y - z

Veamos un dibujo:



12.2.3 Las ondas transportan potencia.

Comenzamos recordando los conceptos de densidad de energía de los campos eléctricos y magnéticos en el vacío:

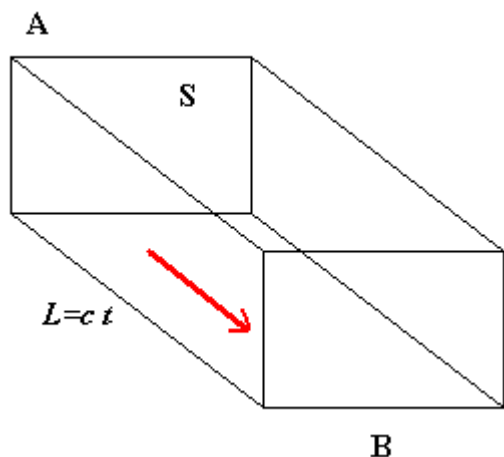
$$u_E = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2; \quad u_B = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \quad (36)$$

Si recordamos la relación entre los módulos de los campos (35) nos queda:

$$E = cB \Rightarrow u_E = u_B \Rightarrow u = \varepsilon_0 E^2 \quad (37)$$

Es decir, que la cantidad de energía almacenada en los campos eléctrico y magnético es la misma y entonces la cantidad total es el doble de cualquiera de ellas.

Analicemos ahora la siguiente figura:



Una onda avanza en la dirección de la flecha roja. Cruza primero el plano de entrada **A** y después de un tiempo t cruza el de salida **B** (la onda avanza una distancia $L = c t$).

Si aislamos un prisma de sección transversal S resulta que el volumen del mismo es: $S L = S c t$.

La cantidad total de energía U almacenada en este volumen es :

$$U = (u_E + u_B) (S c t) = \varepsilon_0 E^2 S c t \quad (38)$$

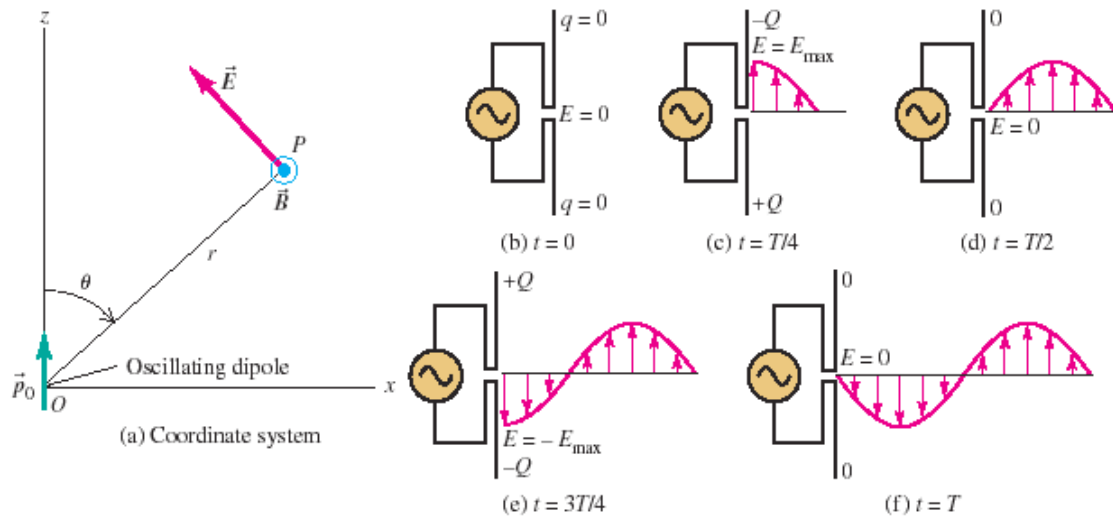
Si dividimos la ecuación anterior por el tiempo empleado (t), obtendremos la potencia transmitida $P = \varepsilon_0 E^2 S c$. Si finalmente dividimos por el área S tenemos los que denominamos intensidad I (no confundir con corriente) y que es la potencia transmitida por unidad de área: $I = c \varepsilon_0 E^2$.

Notamos entonces que la intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud del campo eléctrico (ver semejanza con los circuitos eléctricos).

Todo esto es muy lindo desde el punto de vista matemático, pero aún queda una duda: ¿Cómo se genera una onda?

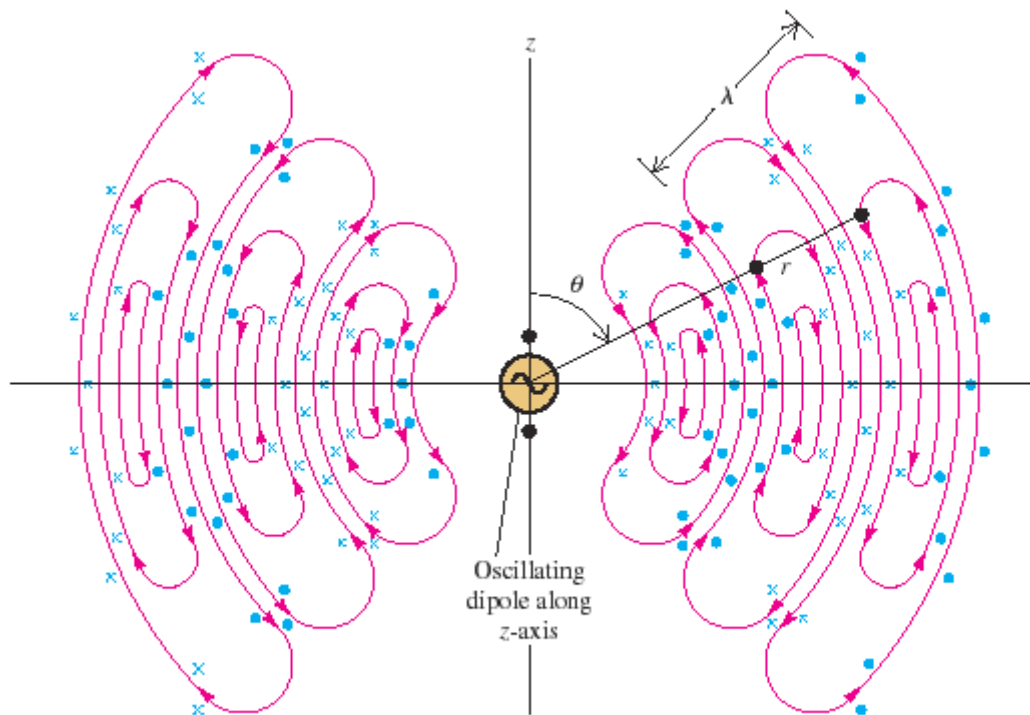
12.2.4 ¿Cómo se generan las ondas electromagnéticas?

La idea importante es la siguiente: Las cargas aceleradas son las fuentes de ondas electromagnéticas. Cualquier distribución de cargas aceleradas es razonable, algunas son mejores que otras. Una de las más utilizadas es el dipolo oscilante. (perdón por las figuras en inglés, las bajamos de Internet)



En la figura anterior tenemos representada la antena más común que es el dipolo simple en la que un generador de corriente alterna está conectado a dos piezas metálicas rectilíneas. Cada una de estas piezas toma carga positiva o negativa alternativamente, generando así un dipolo eléctrico armónicamente variable. Obtenemos así un campo eléctrico variable con el tiempo el que a su vez genera un campo magnético variable y que a su vez genera otro eléctrico.....

La última figura es una representación de cómo se aleja de la antena la onda transmitida mostrando las líneas de campo:



El dipolo oscilante es muy utilizado. A pesar del dominio de la televisión por cable, aún tenemos la ocasión de ver una vieja antena receptora en alguna terraza. Al observarla notaremos que a partir del soporte central emergen perpendicularmente al mismo, una serie de varas metálicas. Cada uno de estos pares de varas (a un lado y el otro del eje central) es un dipolo. Uno de ellos va conectado al cable que lleva la señal al televisor. La razón por la que hay varios dipolos en lugar de uno solo es demasiado difícil para ser comentada aquí.

El dipolo aparece también, encubiertamente, en las antenas de los autos. Es común ver un “palito que emerge del techo y el otro está dado por la carrocería del auto. Lo mismo sucede con radiograbadores que tienen una antena extensible y en teléfonos celulares donde vemos emerger un pequeño “palito” (la mayor parte de los celulares modernos tiene la antena oculta dentro de la carcasa).

Podríamos seguir con más ejemplos pero hemos hablado demasiado de este tema y es prudente terminar aquí. Ya está bien para Física II. Quienes estudien electromagnetismo tendrán que afrontar temas más difíciles.

Bibliografía:

1. FISHBANE P., GASIOROWICZ S. Y THORNTON S.. *Física para Ciencias e Ingeniería*. Vol II. Prentice Hall Hispanoamericana (1994)
2. PURCELL E.M.: *Electricidad y Magnetismo* Berkeley Physics Course Vol. 2, Ed. Reverté S.A., Barcelona, 1969
3. FEYNMAN R., LEIGHTON R.B. y SANDS M.: *Física, Vol. II. Electromagnetismo y Materia* Addison-Wesley Iberoamericana, México
4. YOUNG H., FREEDMAN R., SEARS, ZEMANSKY, “*Física Universitaria Vol II*”, Pearson (1999).
5. TIPLER P, MOSCA G. “*Física para la ciencia y la tecnología*”, Vol. 2A: *Electricidad y magnetismo* Reverté (2005)
6. SERWAY R. “*Física para las Ciencias y la ingeniería*” Thompson Learning (2004).
7. ROEDERER J. “*Electromagnetismo elemental*” EUDEBA (2015)
8. GRIFFITHS D., “*Introduction to Electrodynamics*”, Prentice Hall (1999).
9. RODRÍGUEZ TRELLES, F “*Temas de Electricidad y Magnetismo*”, EUDEBA (1984).
10. FERNÁNDEZ, Juan Carlos, “*Ingeniería electromagnética I - Modelos estáticos circuitales*”, EUDEBA (2013).
11. MC KELVEY, J.P. y GROTCH, J., “*Física para Ciencias e Ingeniería*”, Tomo II (Electromagnetismo), Ed. Harla, México (1981).
12. NAHVI M., EDMINISTER J. “*Theory and Problems of Electric Circuits*” Schaum’s Outline Series- McGRAW-HILL